

2023

1a) 4 cifre, $2 \times '5'$

9 10 10 10 Ukupno: $9 \cdot 10^3$ Odužemo sve koji nemaju 5 ili imaju, ali jednom

Nemaju 5: $(9-1)(10-1)^3 = 8 \cdot 9^3$ (iz svih opcija smo oduželi opciju 5)

Imaju 1: I slučaj '5' 9 9 9 $\Rightarrow 9^3$

II

8 '5' 9 9 $\Rightarrow 8 \cdot 9^2 \cdot 3$ Može se naći na bilo kojoj od ove tri poz

$$\Rightarrow 9 \cdot 10^3 - 8 \cdot 9^3 - 9^3 - 8 \cdot 9^2 \cdot 3 = 495$$

1b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20 \Rightarrow \binom{20+6-1}{20} = \binom{25}{20} \cdot \binom{6}{2}$ načini da se odabere dve prazne

$$1v) \sum_{k=0}^n \frac{2}{k+3} \binom{n}{k} = 2 \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{k+3} \cdot \frac{-1}{(k+1)(k+2)} \cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1} =$$

$$= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n+3}{k+3} \frac{(k+1)(k+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sum_{k=0}^n \binom{n+3}{k+3} \cdot (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sum_{k=0}^n \binom{n+3}{k+3} (k^2 + 3k + 2) = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \left(2 \cdot \left(2^{n+3} - 1 - n - 3 - \binom{n-3}{2} \right) \right)$$

$$+ 3 \left(n \cdot 2^{n+2} - 1 - n - 3 - \binom{n-3}{2} \right) + n(n+1) 2^{n+1} - 1 - n - 3 - \binom{n-3}{2} \right)$$

$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \left(2^{n+4} + 3n 2^{n+2} + n(n+1) 2^{n+1} - 6 \left(4 + n + \frac{(n-3)(n-4)}{2} \right) \right)$$

$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \left(2^{n+1} (8 + 6n + n^2 + n) - 24 - 24n - 6n^2 + 42n - 72 \right) \text{ MMG stvarno}$$

2. $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$ $a_0 = 4$ $a_1 = 0$ $a_2 = 8$

$$\frac{A(x) - 4 - 8x^2}{x^3} = \frac{A(x) - 4}{x^2} + \frac{A(x) - 4}{x} - A(x) \quad | \cdot x^3$$

$$A(x) - xA(x) - x^2A(x) + x^3A(x) = 8x^2 + 4 - 4x - 4x^2$$

$$A(x)(x^3 - x^2 - x + 1) = 4(x^2 - x + 1)$$

$$A(x) = 4 \left(\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2(x+1)} \right)$$

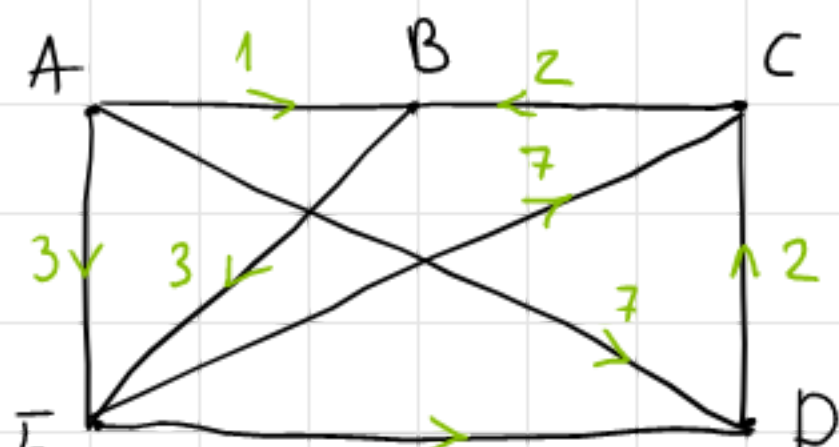
$$x^2 - x + 1 = \overline{Ax^2 - A} + \overline{Bx + B} - \overline{Cx^2 + Cx - C}$$

$$\left. \begin{array}{l} A - C = 4 \\ B - 2C = -1 \\ -A + B - C = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} A = 1 + C \\ B + 2C = -1 \\ B - 2C = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} B = 1/2 \\ C = -3/4 \\ A = 1/4 \end{array} \right\} \frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x+1)}$$

$$A(x) = -\frac{1}{(1-x)} + \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{3}{(1-(-x))} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n(n+1) + 3\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n (-1 + 2n + 2 + 3(-1)^n) \Rightarrow a_n = 2n + 1 + 3(-1)^n$$

3 a)



$D^0 =$

	A	B	C	D	E
A	∞	1	∞	7	3
B	∞	∞	∞	∞	3
C	∞	2	∞	∞	∞
D	∞	∞	2	∞	∞
E	∞	∞	7	3	∞

$D^1 =$

	A	B	C	D	E
A	∞	1	∞	7	3
B	∞	∞	∞	∞	3
C	∞	2	∞	∞	∞
D	∞	∞	2	∞	∞
E	∞	∞	7	3	∞

$D^2 =$

	A	B	C	D	E
A	∞	1	∞	7	3
B	∞	∞	∞	∞	3
C	∞	2	∞	∞	5
D	∞	∞	2	∞	∞
E	∞	∞	7	3	∞

$D^3 =$

	A	B	C	D	E
A	∞	1	∞	7	3
B	∞	∞	∞	∞	3
C	∞	2	∞	∞	5
D	∞	4	2	∞	7
E	∞	9	7	3	12

$D^4 =$

	A	B	C	D	E
A	∞	1	∞	7	3
B	11	∞	∞	∞	3
C	9	2	∞	∞	5
D	∞	4	2	∞	7
E	14	7	5	3	10

$D^5 =$

	A	B	C	D	E
A	17	1	8	6	3
B	11	10	8	6	3
C	9	2	10	8	5
D	21	4	2	10	7
E	14	7	5	3	10

$E =$

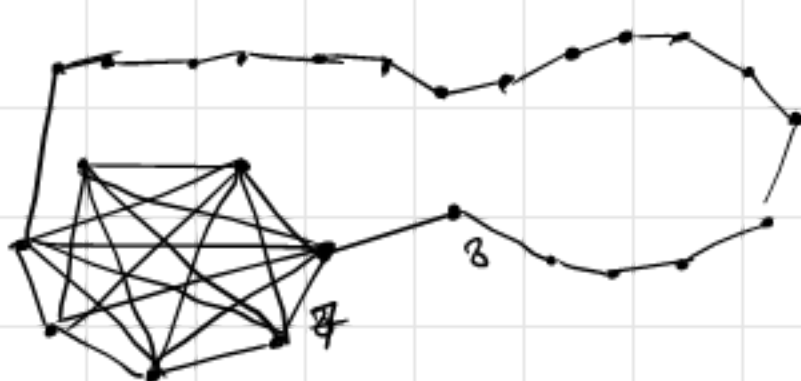
	A	B	C	D	E
A	5	0	5	5	0
B	4	5	5	5	0
C	4	0	5	5	2
D	5	3	0	5	3
E	4	4	4	0	4

$A \rightarrow C$ $A \rightarrow E \rightarrow C$ $A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C$ **8**

4 a)

$$4 \cdot 7 = 28$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ - 10 \\ \hline 18 \end{array}$$



4b) n čvorova, $n \geq 3$, $dg(v) = \frac{n-1}{2}$ za svaki

Da li je povezan? PPS nije $\Rightarrow$ imamo dve komponente povezanost

1 čvor povezan sa $\frac{n-1}{2}$ drugih $\Rightarrow$ imamo $\frac{n+1}{2}$ čvorova

$\Rightarrow$ Ako imamo barem dve komponente $\rightarrow n+1$ čvor $> n$ čvorova

4v) Ako ne sadrži čvor stepena 2 ima više listova nego čvorova

Uzmimo jedan čvor i njega možemo povezati 1 ili 3 ili više

čvorova. Koliko god čvorova da povežemo njih moramo povezati

sa 0, 2 ili više čvorova. $\Rightarrow$ Svaki čvor će ili biti list, ili će

imati 2 ili više čvorova koji će ili biti list ili će imati $2 \cdot x$ gde je

x broj listova tj. 1 (ako je čvor list), 2 ili više ako će imati 2 ili više

lista ili min $2 \cdot 2y$ gde je y opet 1 ako je samolist ili ...

Sve se paravlja dok se dotremo do lista gde ćemo uvek

imati više listova nego drugih čvorova.

Druga grupa

1a) isti 2. isti 4. isti

1b) Isto razmišljanje kao gore: $\binom{56}{50} \cdot \binom{10}{3}$

$$1v) \sum_{k=0}^n \frac{2}{k+4} \binom{n}{k} = 2 \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{k+4} = 2 \sum_{k=0}^n \binom{n+4}{k+4} \cdot (k+1)(k+2)(k+3)$$

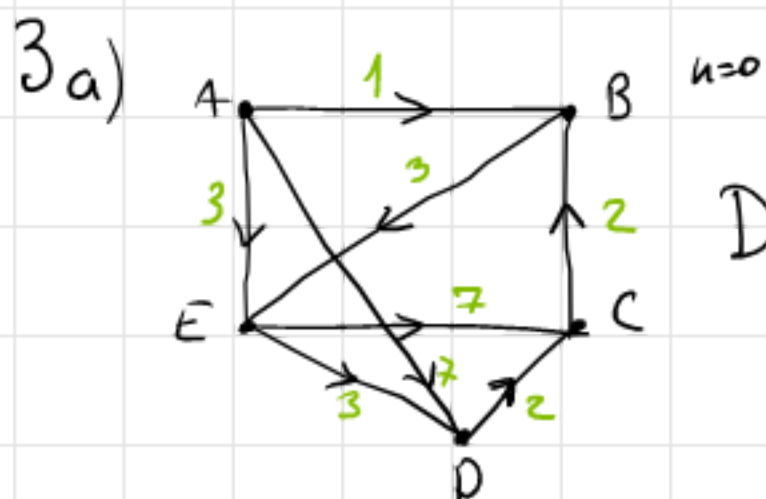
$$= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n+4}{k+4} (k^3 + 6k^2 + 8k + 6) = 12 \sum_{k=0}^n \binom{n+4}{k+4} + 16 \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n+4}{k+4} + 12 \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n+4}{k+4}$$

$$+ 2 \sum_{k=0}^n k^3 \binom{n+4}{k+4} = 12 \left(2^{n+4} - 1 - n - 4 - \binom{n+4}{2} - \binom{n+4}{3} \right) + 16 \left(n 2^{n-1} - 1 - n - 4 - \binom{n+4}{2} - \binom{n+4}{3} \right)$$

$$+ 12 \left(n(n+1) 2^{n-2} - 1 - n - 4 - \binom{n+4}{2} - \binom{n+4}{3} \right) + 2 \left(2^{n-3} n(n^2+3n) - 1 - n - 4 - \binom{n+4}{2} - \binom{n+4}{3} \right)$$

$$= 40 \left(-5 - n - \binom{n+4}{2} - \binom{n+4}{3} \right) + 12 \cdot 2^{n+4} + n \cdot 2^{n+3} + 3n(n+1) \cdot 2^n + 2^{n-2} n(n^2+3n)$$

$$\text{Sve ovo} \cdot \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \right)$$



$n=0$

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} \infty & 1 & \infty & 7 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 3 & \infty \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$n=1$

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} \infty & 1 & \infty & 7 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 3 & \infty \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$n=2$

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} \infty & 1 & \infty & 7 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & \boxed{5} \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 3 & \infty \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$n=3$

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} \infty & 1 & \infty & 7 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \boxed{4} & 2 & \infty & \boxed{7} \\ \infty & \boxed{9} & 7 & 3 & \boxed{12} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$n=4$

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} \infty & 1 & \boxed{9} & 7 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & 5 \\ \infty & 4 & 2 & \infty & 7 \\ \infty & \boxed{7} & \boxed{5} & 3 & \boxed{10} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} (A,D) + (D,B) &= 11 \\ (D,C) &= 3 \\ (D,E) &= 14 \\ \hline (E,D) + (D,B) &= 7 \\ 3 & \\ (D,C) &= 5 \\ (D,E) &= 10 \end{aligned}$$

$n=5$

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} \infty & 1 & \boxed{8} & 6 & 3 \\ \infty & \boxed{10} & 8 & 6 & 3 \\ \infty & 2 & \boxed{10} & 8 & 5 \\ \infty & 4 & 2 & \boxed{8} & 7 \\ \infty & 7 & 5 & 3 & \boxed{10} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$E = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{5} & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A \rightarrow C$$

$$A \rightarrow E \rightarrow C$$

$$A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C$$

$$A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C$$