2022 septembar 2

1a) $\sum_{k=1}^{n} k\, 2^{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n! \cdot k}{(n-k)!\, k!} 2^{k} \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} 2^{k} \cdot 1^{n-k} =$

$= 2n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot 2^{n-1} \cdot 1^{n-k} = 2n \cdot 3^{n-1}$

1b) 5 osoba: a b C D E Kako ih poredati tako da ne stoje 3 poređane rastuće.

5! ⇒ ukupno načina da se poređaju

abc, bCD, CDE ⇒ 3 mogućnosti koje ćemo posmatrati kao 1 osobu

a_1, D, E 3! primetimo da ovo uključuje elemente iz drugih skupova.

Za abc, bcD ⇒ 2·3! − presek

Presek je Eabcd, abcde ⇒ 2(3! −1)

Nađimo presek sa cDE ⇒ abcde, bcdea ⇒ 2(3! −1) −2 +3!

⇒ 5! − 3·3! + 4 = 106? valjda?

1v) 12 tačaka 5 kolinearnih

$\binom{5}{1}\binom{7}{1} + \binom{7}{2} + 1 = 35 + 21 + 1 = 57$

* Biram po jedan iz skupa kolinearnih i jednu koju ću da spojim sa tom iz skupa nekolinearnih.

* Biram od nekolinearnih dve koje ću da spojim

* Prava koju formiraju kolinearne

2. $a_{n+2} = \frac{2}{3} \cdot a_{n+1} + \frac{1}{3} a_n \qquad a_0 = 0,\ a_1 = 4$

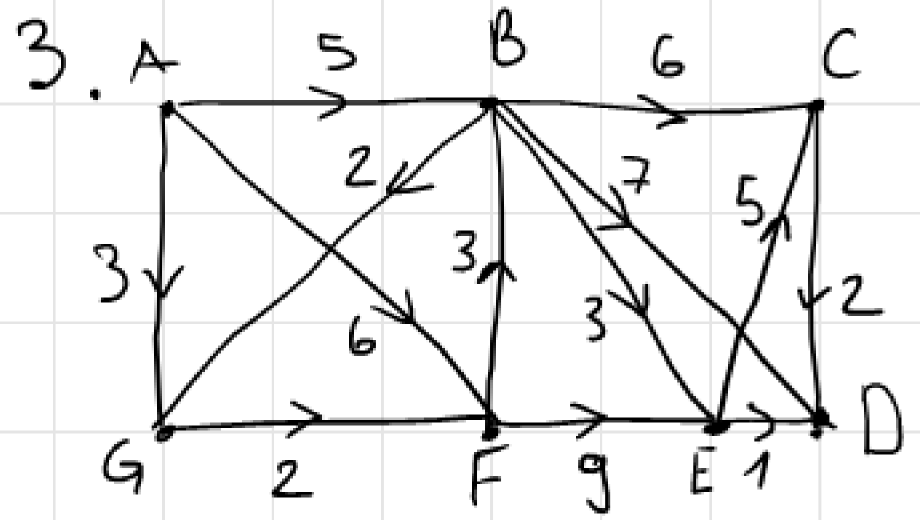
$\frac{A(x) - 0 - 4x}{x^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{A(x) - 0}{x}\right) + \frac{1}{3} \cdot A(x) \Rightarrow A(x)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3x} - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{x} \quad / 3x^2$

$A(x) = (3 - 2x - x^2) = 12x \qquad 12x = Ax + 3A + B - Bx \qquad -B = 3A$

$\boxed{A(x) = \frac{12x}{(1-x)(x+3)}} \qquad A(x) = \frac{3}{1-x} - \frac{9}{(x+3)} = \frac{3}{1-x} - \frac{3}{(1-(-\frac{x}{3}))} \qquad \underbrace{12 = A + 3A \Rightarrow A = 3,\ B = -9}$

$\Rightarrow A(x) = 3\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3x^n\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \Rightarrow a_n = 3 + \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}$

3.



A	$\boxed{\infty}$	∞	∞	∞	∞
B	5	5	$\boxed{5}$	5	5
C	∞	∞	11	11	11
D	∞	∞	12	12	9
E	∞	∞	8	8	$\boxed{8}$
F	6	5	5	$\boxed{5}$	5
G	3	$\boxed{3}$	3	3	3

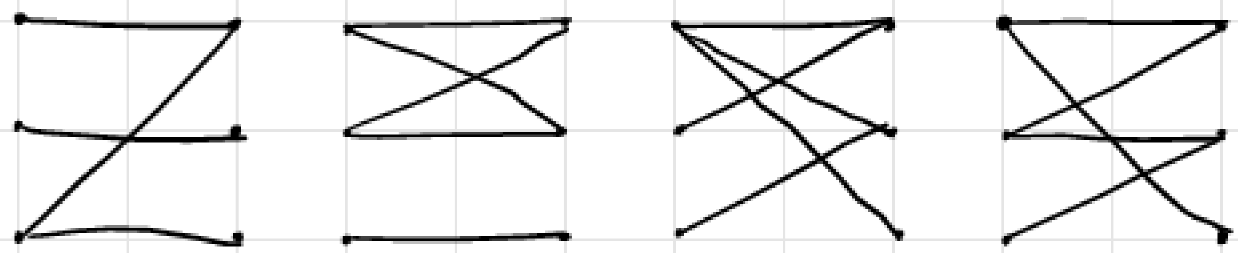
$A \to B \to E \to D$

$\boxed{9}$

3 b) Nije Hamiltonov; ne postoji grana do A takođe $d(A) + d(G) < 7$ (broj čvorova)

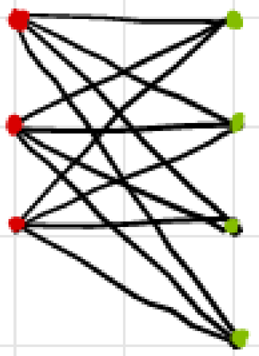
Da, ABGFECD

4 a)



4b) 7 čvorova 12 grana

K_5 ima $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ grana Ostaju nam 2 čvora i 2 grane da formiramo još jednu komponentu povezanosti Spojimo ta dva čvora. Ostaje nam 1 grana kojom moramo povezati jedan iz K_5 i jedan od •—•. Što znači da imamo 1 komponentu



Nova Godina boje!

4v) G prost n čvorova $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ grane. Dokazati da je svaki čvor stepena makar 2.

Iskoristićemo što više grana na n-1 čvorova kako bi ostao 1 stepena manjeg od 2. To ćemo dobiti sa K_{n-1} gde ćemo izgubiti $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ grana ⇒ Ostaju nam dve grane, a nemamo mesta u K_{n-1} pa ćemo 2 grane iskoristiti na n-ti čvor da ga spojimo sa neka dva iz K_{n-1} pa je i on stepena ≥ 2.