ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Une méthode de résolution des équations dont toutes les solutions appartiennent à un ensemble fini donné.* Note (*) de M. Slaviša B. Prešić, présentée par M. Henri Villat.

Soit $S = \{s_1, \ldots, s_g\}$ un ensemble fini donné à g éléments, E un ensemble dont un élément est désigné par o et $J : S \to E$ une application de S dans E.

Nous posons le problème de résoudre en x l'équation

$$J(x) = 0. \tag{1}$$

A ce type d'équations appartiennent : les équations de Boole, les équations pseudo-booléennes, les équations dans n'importe quelle structure algébrique finie.

Faisons correspondre à tout élément q de l'ensemble S un cycle α_q de S.

La méthode de résolution que nous exposons dépend des cycles choisis $\alpha_{s_1}, \ldots, \alpha_{s_g}$, et aussi de la fonction A, que nous définissons comme il suit :

$$\left\{\begin{array}{ll} A(q, 0, U_2, \ldots, U_{g-1}) & = q, \\ A(q, u_1, 0, U_3, \ldots, U_{g-1}) & = \alpha_q(q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ A(q, u_1, \ldots, u_l, 0, U_{l+2}, \ldots, U_{g-1}) & = \alpha_q^l(q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ A(q, u_1, \ldots, u_{g-2}, 0) & = \alpha_q^{g-2}(q), \\ A(q, u_1, \ldots, u_{g-1}) & = \alpha_q^{g-1}(q) \\ \quad \left[\alpha_q^2(q) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_q(\alpha_q(q)),\ \alpha_q^3(q) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_q(\alpha_q^2(q)), \ldots\right], & \end{array}\right. \tag{2}$$

où $u_1, \ldots, u_{g-1}, U_2, \ldots, U_{g-1} \in E$; $u_1 \neq 0, \ldots, u_{g-1} \neq 0$; $q \in S$.

On conclut immédiatement que la fonction $A (A : S \times E^{g-1} \to S)$ est univoquement déterminée par la définition précédente.

Nous appelons A *fonction résolvante* [de l'équation (1)].

On a le lemme suivant, d'importance fondamentale :

Lemme. — *Si l'équation* (1) *est possible, sa solution générale est donnée par l'égalité*

$$x = A(q, J(q), J(\alpha_q(q)), \ldots, J(\alpha_q^{g-2}(q))), \tag{3}$$

où q est un élément arbitraire de S.

Démonstration. — Nous démontrons d'abord que, pour un élément q quelconque de S, x déterminé par (3) est une solution de (1). L'équation (1) étant possible, au moins un des éléments

$$J(q), \quad J(\alpha_q(q)), \quad \ldots, \quad J(\alpha_q^{g-1}(q)) \tag{4}$$

est égal à o. Soit $J(\alpha_q^t(q))$ le premier terme de la suite (4) qui remplit cette condition. D'après (2), on a

$$A(q, J(q), \ldots, J(\alpha_q^{g-2}(q))) = \alpha_q^t(q).$$

Donc, $x = A(q, J(q), \ldots)$ est une solution de (1).

Soit, d'autre part, x une solution de l'équation (1). Si l'on remplace dans (3) q par x, on obtient, d'après (2) : $A(x, 0, \ldots) = x$.

La démonstration est achevée.

Dans les applications, il importe d'avoir pour la fonction A une formule simple.

Une telle formule peut être obtenue comme il suit.

Soit $T \overset{\text{def}}{=} S \cup E$ et soient $+$ et $.$ deux opérations binaires sur l'ensemble T possèdent les propriétés suivantes :

$$0.e = e.0 = 0.0 = 0; \quad e.e = e; \quad 0.q = 0,$$
$$e.q = q; \quad q + 0 = 0 + q = q, \quad 0 + 0 = 0$$

($q \in S$; e, élément fixé de l'ensemble E différent de o).

Soient $'$ et $^-$ les applications de E dans E définies par

$$(5) \qquad \begin{cases} x' = 0 & \text{si } x = 0, \quad \bar{x} = e \quad \text{si } x = 0, \\ \bar{x} = e & \text{si } x \neq 0, \quad \bar{x} = 0 \quad \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

On peut vérifier immédiatement l'identité

$$(6) \quad A(q, U_1, \ldots, U_{g-1}) = \bar{U}_1.q + U'_1.\bar{U}_2.\alpha_q(q) + \ldots + U'_1.U'_2.\ldots.U'_{g-2}.\bar{U}_{g-1}.\alpha_q^{g-2}(q)$$
$$+ U'_1.U'_2.\ldots.U'_{g-1}.\alpha_q^{g-1}(q) \qquad (q \in S;\ U_i \in E)$$
$$\Big[\text{ici } U + V + W + \ldots + R \overset{\text{def}}{=} (\ldots((U+V)+W)+\ldots+R),$$
$$U.V.W.\ldots.R \overset{\text{def}}{=} (\ldots((U.V).W)\ldots R)\Big].$$

Nous donnons quelques exemples des applications.

Exemple 1. — Soit $S = E = \{0, 1\}$ et $+$ et $.$ les opérations *max* et *min* respectivement. L'équation (de *Boole*) :

$$(7) \qquad ax + b\bar{x} = 0 \qquad (a, b, x \in \{0, 1\})$$

est possible si et seulement si $ab = 0$.

Dans ce cas : $e = 1$, $x' = x$; $\bar{x}$ est *négation* de x. Posons $\alpha_0(x) = \alpha_1(x) = \bar{x}$. On conclut d'après (3) et (6) que la solution générale de (7) est donnée par

$$x = \overline{J(q)}\,q + J(q)\,\bar{q} \qquad [J(q) = aq + b\bar{q}],$$

c'est-à-dire par

$$x = \bar{a}q + b\bar{q} \qquad (q \in E \text{ est arbitraire}).$$

Exemple 2. — Soit $S = E = \{0, 1, \ldots, n\}$ et $+$ et $.$ les opérations *max* et *min* respectivement. L'équation (de *Post*) :

$$(8) \qquad a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n = 0 \qquad \left(a_i,\ x \in E;\ x^i \overset{\text{def}}{=} n \text{ si } x = i,\ x^i \overset{\text{def}}{=} 0 \text{ si } x \neq i\right)$$

est possible si et seulement si $a_0 . a_1 \ldots a_n = 0$.

Dans ce cas-là nous posons

$$e = n; \qquad \overline{x} = x^0, \qquad x' = x^1 + x^2 + \ldots + x^n;$$
$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \alpha \qquad \text{avec} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après (3) et (6), la solution générale de l'équation (8) est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} x = {} & J^0(q).q + J'(q).J^0(\alpha_q(q)).\alpha_q(q) + \ldots \\ & + J'(q).J'(\alpha_q(q)) \ldots J'(\alpha_q^{n-2}(q)).J^0(\alpha_q^{n-1}(q)).\alpha_q^{n-1}(q) \\ & + J'(q).J'(\alpha_q(q)) \ldots J'(\alpha_q^{n-1}(q)).\alpha_q^n(q) \qquad (q \in E), \end{aligned}$$

c'est-à-dire par

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} x = {} & \sum_{i=1}^{n} i a_i^0 q^i + \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n-1} (i \oplus j) a'_i a'_{i\oplus 1} \ldots a'_{i\oplus j \ominus 1} a^0_{i\oplus j} \right) q^i \\ & + \sum_{i=0}^{n} (n \oplus i) a'_i a'_{i\oplus 1} \ldots a'_{i \oplus n \ominus 1} q^i \\ & (\oplus \text{ et } \ominus \text{ sont addition et soustraction } mod\, n+1). \end{aligned} \right.$$

Ici nous avons utilisé

$$J(q) = \sum_{i=0}^{n} a_i q^i, \qquad J'(q) = \sum_{i=0}^{n} a'_i q^i, \qquad J^0(q) = \sum_{i=0}^{n} a_i^0 q^i, \qquad q = \sum_{i=1}^{n} i q^i, \qquad (\alpha^i q)^j = q^{j \ominus i}.$$

Exemple 3. — Soit semblablement à l'exemple 1,

$$(10) \qquad J(x_1, x_2) = 0 \qquad (x_1, x_2 \in \{0, 1\})$$

une équation de Boole en x_1 et x_2. Dans ce cas :

$$S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}, \qquad E = \{0, 1\}.$$

Nous choisissons les cycles α_{x_i} de la manière suivante :

$$\alpha_{(u,v)} = \begin{pmatrix} (u, v) & (\overline{u}, v) & (u, \overline{v}) & (\overline{u}, \overline{v}) \\ (\overline{u}, v) & (u, \overline{v}) & (\overline{u}, \overline{v}) & (u, v) \end{pmatrix} \qquad (u, v \in \{0, 1\}).$$

Pour $+$ et $.$ nous prenons les opérations partielles suivantes (sur l'ensemble $S \cup E$) :

$$0 + 0 = 0, \qquad 0 + (u, v) = (u, v) + 0 = (u, v),$$
$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2),$$
$$0.0 = 0.1 = 1.0 = 0, \qquad 1.1 = 1, \qquad 0.(u, v) = 0, \qquad 1.(u, v) = (u, v).$$

L'équation (10) est possible si et seulement si

$$J(0, 0) . J(0, 1) . J(1, 0) . J(1, 1) = 0$$

et dans ce cas-là sa solution générale est donnée par la formule

$$(x_1, x_2) = \bar{J}(q_1, q_2)(q_1, q_2) + J(q_1, q_2)\bar{J}(\bar{q}_1, q_2)(\bar{q}_1, q_2)$$
$$+ J(q_1, q_2) J(\bar{q}_1, q_2)\bar{J}(q_1, \bar{q}_2)(q_1, \bar{q}_2) + J(q_1, q_2) J(\bar{q}_1, q_2) J(q_1, \bar{q}_2)(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$$

c'est-à-dire par

$$x_1 = q_1(\bar{J}(q_1, q_2) + J(\bar{q}_1, q_2)\bar{J}(q_1, \bar{q}_2)) + \bar{q}_1 J(q_1, q_2)(J(\bar{q}_1, q_2) + J(q_1, \bar{q}_2)),$$
$$x_2 = q_2(\bar{J}(q_1, q_2) + \bar{J}(\bar{q}_1, q_2)) + \bar{q}_2 J(q_1, q_2) J(\bar{q}_1, q_2) \qquad (q_1, q_2 \in \{0, 1\}).$$

Remarquons enfin que l'application de la méthode exposée conduit à une formule connue pour la résolution des équations pseudo-booléennes.

(*) Séance du 22 février 1971.

(*Matematički Institut,*
Knez Mihailova,
35, *Belgrade,*
Yougoslavie.)