ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Sur une équation fonctionnelle cyclique non linéaire.* Note (*) de MM. **Dragoslav S. Mitrinović** et **Slaviša B. Prešić**, présentée par M. Maurice Fréchet.

On donne la solution générale d'une équation fonctionnelle cyclique d'une forme assez générale et qui se rencontre en géométrie.

Considérons l'équation fonctionnelle

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} &F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) + F(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2) + \ldots \\ &\qquad + F(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1}) = 0 \end{aligned}$$

qui est cyclique en variables $x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$. Sa solution est connue.

Toutes les fonctions qu'on considère dans cette Note sont des fonctions réelles des variables réelles.

L'équation (1), où

$$\text{(2)}\qquad \begin{aligned} &F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) \\ &= \{ f(x_1, x_2) + f(x_3, x_4) + \ldots + f(x_{2k-1}, x_{2k}) \} \\ &\quad \times \{ f(x_{2k+1}, x_{2k+2}) + f(x_{2k+3}, x_{2k+4}) + \ldots + f(x_{2n-1}, x_{2n}) \} \end{aligned}$$

sera nommée, dans ce qui suit, *équation* (F).

Théorème. — *La solution générale de l'équation* (F) *est la fonction suivante :*

$$\text{(3)}\qquad \begin{cases} f(u, v) = g(u)\,h(v) - g(v)\,h(u) & \text{pour } n = 2, \\ f(u, v) = h(v) - h(u) & \text{pour } n > 2, \end{cases}$$

où $g(u)$ *et* $h(u)$ *sont des fonctions réelles quelconques de la variable réelle* u.

La démonstration n'utilise pas la solution de (1).

Démonstration. — La fonction (3) est vraiment une solution de l'équation (F).

Inversement, nous allons prouver que toute solution de l'équation (F) a la forme (3).

Si l'on remplace dans l'équation (F) chaque variable par u, on trouve $f(u, u) = 0$ pour tout u.

La solution triviale $f(u, v) = 0$ de l'équation (F) est comprise dans (3). Dans ce qui suit, nous allons chercher les solutions non triviales $f(u, v)$ de l'équation (F). Pour chacune de ces solutions il existe au moins un couple (a, b) des nombres réels différents tels que $f(a, b) \neq 0$.

En remplaçant, dans l'équation (F), x_{2k+2} par x_2 et toutes les autres variables (sauf x_2 et x_{2k+2}) par x_1, il vient

$$\text{(4)}\qquad p f^2(x_1, x_2) + q f(x_1, x_2) f(x_2, x_1) + r f^2(x_2, x_1) = 0,$$

avec $p\ (> 0)$, $r\ (\geqq 0)$, q nombres entiers.

La fonction $f(u, v) = h(v) - h(u)$ doit satisfaire à l'équation (4) pour toute fonction $h(u)$, ce qui conduit à $q = p + r$. Puisque l'équation (4) est vraie pour tous x_1 et x_2, on a aussi

$$pf^2(x_2, x_1) + qf(x_2, x_1)f(x_1, x_2) + rf^2(x_1, x_2) = 0. \tag{5}$$

Par addition des égalités (4) et (5), avec $q = p + r$, on obtient

$$f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1) = 0. \tag{6}$$

Si $n = 2$ l'équation (F) a la forme suivante :

$$f(x_1, x_2)f(x_3, x_4) + f(x_1, x_3)f(x_4, x_2) + f(x_1, x_4)f(x_2, x_3) = 0. \tag{7}$$

Chaque solution non triviale de l'équation (7) est

$$f(x_3, x_4) = -\frac{f(a, x_3)}{f(a, b)}f(x_4, b) - \frac{f(a, x_4)}{f(a, b)}f(b, x_3). \tag{8}$$

En posant $f(a, x)/f(a, b) = g(x)$ et $f(b, x) = h(x)$, et mettant à profit la propriété (6), l'équation (8) devient

$$f(x_3, x_4) = g(x_3)h(x_4) - g(x_4)h(x_3),$$

ce qui démontre le théorème énoncé pour $n = 2$.

Considérons maintenant le cas où $k = 1$ et $n > 2$. Si l'on pose

$$x_3 = x_4 = \ldots = x_{2n-2} = x_1, \qquad x_{2n-1} = u, \qquad x_{2n} = v; \tag{9}$$

l'équation (F) prend la forme que voici :

$$f(x_1, x_2)f(u, v) + f(x_1, u)f(v, x_2) + f(x_1, v)f(x_2, x_1) + f(x_1, v)f(x_1, u) = 0.$$

Si l'on pose $x_1 = a$, $x_2 = b$ $[f(a, b) \neq 0]$ et applique la propriété (6), on trouve de la dernière équation

$$f(u, v) = \frac{f(a, u)}{f(a, b)}\{f(b, v) - f(a, v)\} + f(a, v). \tag{10}$$

Pour $v = b$ cette équation donne l'égalité

$$f(b, u) - f(a, u) = -f(a, b) \tag{11}$$

qui est valable pour tout u.

Grâce à (11) l'égalité (10) devient

$$f(u, v) = f(a, v) - f(a, u) = h(v) - h(u),$$

ce qui démontre le théorème pour $k = 1$ et $n > 2$.

Dans le cas où $k > 1$, l'équation (F) au moyen des substitutions (9) prend la forme

$$f(x_1, u)f(v, x_2) + f(x_1, v)f(x_1, u) + f(x_2, x_1)f(x_1, u) = 0.$$

Pour $x_1 = a$ et $u = b$, la dernière équation devient

$$f(v, x_2) = f(a, x_2) - f(a, v),$$

c'est-à-dire

$$f(u, v) = h(v) - h(u),$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque 1. — On démontre dans la monographie de Ghermanescu [1] que la solution générale continue de l'équation fonctionnelle

$$f(x_1, x_2, x_3) f(x_1, x_4, x_5) + f(x_1, x_3, x_4) f(x_1, x_2, x_5) + f(x_1, x_4, x_2) f(x_1, x_3, x_5) = 0 \tag{12}$$

est la fonction

$$f(u, v, w) = \mathrm{H}(u, v)\,\mathrm{G}(u, w) - \mathrm{H}(u, w)\,\mathrm{G}(u, v), \tag{13}$$

où $\mathrm{H}(u, v)$ et $\mathrm{G}(u, v)$ sont des fonctions continues quelconques.

Comme conséquence du théorème démontré (cas $n = 2$) il suit que la fonction (13), où $\mathrm{H}(u, v)$ et $\mathrm{G}(u, v)$ sont des fonctions arbitraires, est la solution générale de l'équation (12).

Remarque 2. — Dans une étude qui paraîtra ailleurs, nous pensons développer les résultats de cette Note et faire des extensions diverses.

Ainsi, par exemple, on démontre que l'équation (1), où $n = 2p$ et

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_{2p-1}, x_{2p}) &= f(x_1, x_2)\,\{f(x_{2p-2k+1}, x_{2p-2k+2}) \\ &\quad + f(x_{2p+2k+1}, x_{2p+2k+2})\} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1),\end{aligned}$$

admet comme solution générale $f(u, v) = h(v) - h(u)$.

(*) Séance du 15 janvier 1962.

(1) M. Ghermanescu, *Ecuaţii funcţionale*, Bucarest, 1960, p. 428-430.