PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 247 — № 273 (1969)

257. MÉTHODE DE RÉSOLUTION D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES NON HOMOGÈNES*

Slaviša B. Prešić

Soient $\theta_1, \ldots, \theta_n$ les applications biunivoques de l'ensemble non vide E sur E qui forment un groupe G de l'ordre n, l'application θ_1 étant identique. Désignons par F l'ensemble de toutes les fonctions qui appliquent E dans un corps commutatif K donné.**

Dans cet article nous allons exposer une méthode de résolution de l' équation fonctionnelle suivante

$$(1) \qquad a_1(x)f(\theta_1 x) + \cdots + a_n(x)f(\theta_n x) = g(x) \qquad (\theta_i x = \theta_i(x)),$$

où les a_i et $g\,(\in F)$ sont des fonctions données et f une fonction inconnue.

C'est dans l'article [1] que nous avons exposé une méthode de résolution de l'équation (1) dans le cas où $g(x) = 0$ $(x \in E)$. Dans ce cas-là nous disons que l'équation (1) est homogène.

Désignons par $p_i\,(i = 1, \ldots, n)$ la permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ que l'on obtient de la permutation

$$\begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n \\ \theta_1\theta_i & \theta_2\theta_i & \cdots & \theta_n\theta_i \end{pmatrix}$$

de G en y substituant aux symboles $\theta_1, \ldots, \theta_n$ les symboles $1, \ldots, n$ respectivement (les produits dans la seconde ligne étant au préalable remplacés par les éléments auxquels ils sont égaux) et posons $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Soit ensuite $M_\nu = \| a^{\nu}_{i,j} \|$ avec $a^{\nu}_{i,j} = 1$ pour $j = ip_\nu$ et $a^{\nu}_{i,j} = 0$ pour $j \neq ip_\nu$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, en désignant par ip_ν l'image de i dans l'application p_ν. Les groupes G, P et $M = \{M_1, \ldots M_n\}$ sont isomorphes.

Si l'on pose successivement $x, \theta_2 x, \ldots, \theta_n x$ dans l'équation (1) au lieu de x, on obtient un système d'équations qui peut être écrit sous la forme matricielle

$$(2) \qquad A(x) \begin{Vmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{Vmatrix}, \quad A(x) = \| a_{ij}(x) \|, \quad a_{ij}(x) = a_{jp_i^{-1}}\theta_i(x).$$

* Présenté le 13 janvier 1969 par D. S. Mitrinović.

** Nous supposons que la caractéristique de K ne soit pas un facteur de n.

Soient h et f les éléments de F et soit $B(x)$ une matrice carrée de l'ordre n dont les éléments sont $b_{ij}(x)\,(b_{ij} \in F)$. Alors, l'égalité

$$\begin{Vmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{Vmatrix} = B(x) \begin{Vmatrix} h(x) \\ h(\theta_2 x) \\ \vdots \\ h(\theta_n x) \end{Vmatrix} \tag{3}$$

pour une matrice carrée quelconque $B(x)$, ne definit pas nécessairement la fonction $f(\in F)$ d'une maniére univoque.

Définition. — *Nous disons que la fonction matricielle $B(x)$, ou plus brièvement la matrice $B(x)$, est compatible avec le groupe G si l'équation* (3) *définit la fonction $f(\in F)$ univoquement pour chaque $h(\in F)$.*

Lemme 1. — *La condition*

$$B(\theta_i x) = M_i B(x) M_i^{-1} \qquad (x \in E;\; i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

est suffisante pour la compatibilité de la matrice $B(x)$ avec le groupe G.

Démonstration. Soit $B(x) = \| b_{ij}(x) \|$ $(x \in E;\; b_{ij} \in F)$ et supposons la condition (4) remplie.

Pour une fonction $h(\in F)$, quelconque, l'égalité

$$\begin{Vmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{Vmatrix} = B(x) \begin{Vmatrix} h(x) \\ h(\theta_2 x) \\ \vdots \\ h(\theta_n x) \end{Vmatrix} \qquad (f_1 = f) \tag{5}$$

fournit

$$f(x) = b_{11}(x)\,h(x) + b_{12}(x)\,h(\theta_2 x) + \cdots + b_{1n}(x)\,h(\theta_n x). \tag{6}$$

Après multiplication à droite par M_i, l'égalité (5) devient

$$\begin{Vmatrix} f_i(x) \\ \vdots \\ . \end{Vmatrix} = M_i B(x) M_i^{-1} M_i \begin{Vmatrix} h(x) \\ \vdots \\ . \end{Vmatrix},$$

d'où résulte, d'après (4), (5) et (7),

$$f_i(x) = f(\theta_i x) \qquad (x \in E;\; i = 1, \ldots, n).$$

$B(x)$ est donc compatible avec G.

On démontre sans difficulté les deux faits suivants:

1° Si les matrices $B(x)$ et $C(x)$ sont compatibles avec le groupe G, alors les matrices $\lambda B(x)$ (λ élément arbitraire de K), $B(x) + C(x)$ et $B(x) \cdot C(x)$ sont aussi compatibles avec G. Les matrices compatibles avec le groupe G forment donc une algèbre de matrices.

2° La matrice $A(x)$ définie par (2) remplit la condition (4).

Dans ce qui suit le rôle fondamental est joué par le

Lemme 2. — *Il existe au moins une matrice carrée de l'ordre n,*

$$B(x) = \| b_{ij}(x) \| \qquad (x \in E;\ b_{ij} \in F)$$

pour laquelle sont remplies les conditions que voici:

(C_1) $A(x)\,B(x)\,A(x) + A(x) = 0$ *pour tout* $x \in E$;

(C_2) *la matrice* $B(x)$ *est compatible avec la groupe* G.

Démonstration. Désignons par $r(x)$ le rang de la matrice $A(x)$ $(x \in E)$. La matrice $A(x)$ peut être écrite sous la forme

$$A(x) = P(x)\,D(x)\,Q(x)$$

où les matrices $P(x)$ et $Q(x)$ sont régulières pour tout $x \in E$ et où $D(x)$ est une matrice diagonale aux éléments 1 et 0 telle que le nombre d'unités est égal à $r(x)$. Cette représentation de $A(x)$ s'obtiendrait au moyen de transformations élémentaires effectuées pour tout $x \in E$. Alors la matrice

$$B_0(x) = -Q^{-1}(x)\,D(x)\,P^{-1}(x)$$

remplit la condition (C_1).

Posons ensuite

$$B(x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} B_0(\theta_\nu x)\, M_\nu \quad (x \in E).$$

On obtient

$$\begin{aligned} A(x)\,B(x)\,A(x) &= \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} A(x)\, M_\nu^{-1} B_0(\theta_\nu x)\, M_\nu A(x) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} A(\theta_\nu x)\, B_0(\theta_\nu x)\, A(\theta_\nu x)\, M_\nu \quad (x \in E) \end{aligned}$$

la matrice $A(x)$ remplissant la condition (4). En mettant à profit ce fait-là de même que la condition (C_1), remplie par la matrice $B_0(x)$, on obtient

$$A(x)\,B(x)\,A(x) = -\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} A(\theta_\nu x)\, M_\nu = -\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} A(x) = -A(x).$$

$B(x)$ remplit donc la condition (C_1).

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} B(\theta_i x) &= \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} B_0(\theta_\nu \theta_i x)\, M_i = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_i (M_\nu M_i)^{-1} B_0(\theta_\nu \theta_i x)\,(M_\nu M_i)\, M_i^{-1} \\ &= M_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} M_j^{-1} B_0(\theta_j(x))\, M_j \right) M_i^{-1} = M_i\, B(x)\, M_i^{-1}, \end{aligned}$$

d'où la conclusion, d'après le lemme 1, que $B(x)$ est compatible avec G.

D'après la démonstration achevée, on a immédiatement le:

Corollaire. — *Si* $B_0(x)$ *est une matrice qui remplit la condition* (C_1) *du lemme 2, alors la matrice*

$$B(x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} B_0(\theta_\nu x)\, M_\nu \tag{7}$$

remplit les conditions (C_1) *et* (C_2) *du lemme 2.*

Partant des lemmes précédents, nous allons démontrer le

Théorème 1. — *Soit $B(x)$ une matrice pour laquelle sont valables les conditions (C_1) et (C_2). La solution générale de l'équation homogène (1) est donnée par*

$$\begin{Vmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{Vmatrix} = (B(x)A(x)+I) \begin{Vmatrix} h(x) \\ h(\theta_2 x) \\ \vdots \\ h(\theta_n x) \end{Vmatrix} \qquad (I \text{ matrice unité}), \tag{8}$$

où $h(\in F)$ désigne une fonction quelconque.

Démonstration. D'après l'hypothèse du théorème, $B(x)$ est compatible avec G. Comme les matrices $A(x)$ et I possèdent la même propriété, on peut conclure, en s'appuyant sur la remarque 1°, que la matrice suivante $B(x)A(x)+I$ est aussi compatible avec ce groupe G. C'est pourquoi (8) définit, pour tout $h(\in F)$, la fonction $f(\in F)$ d'une manière univoque. En multipliant (8) à droite par $A(x)$ on obtient, d'après (C_1),

$$A(x) \begin{Vmatrix} f(x) \\ \vdots \\ \cdot \end{Vmatrix} = 0.$$

La fonction $f(\in F)$ satisfait donc à l'équation (1) pour tout $h(\in F)$.

D'autre part, si $f(\in F)$ est une solution de l'équation (1), cette fonction peut être obtenue de la formule (8) en y posant $h=f$.

Les deux faits que nous venons d'établir prouvent que la formule (8) détermine la solution générale de l'équation (1).

Nous remarquons que nous avons décrit, dans la démonstration du lemme 2, un procédé de formation de la matrice $B(x)$ qui remplit les conditions (C_1) et (C_2) ce qui veut dire que le théorème 1 fournit une méthode de construction de la solution générale de l'équation (1).

La détermination de la matrice $B(x)$ peut être effectuée après avoir décomposé au préalable l'ensemble E en sous-ensembles disjoints E_r $(r=0, 1, 2, \ldots, n)$, E_r désignant la partie de E où le rang de la matrice $A(x)$ est r. On détermine alors $B(x)$ dans tout E_r séparément, de sorte que l'on résout l'équation (1) dans chaque E_r pris à part.

Ajoutons à cette instruction générale une remarque particulière: Si dans un E_r (où bien dans une partie V d'un ensemble E_r possédant la propriété que $x \in V \Rightarrow \theta_i x \in V$ $(i=1, \ldots, n)$) est remplie, la condition suivante

$$A^m(x)+\lambda_1(x)A^{m-1}(x)+\cdots+\lambda_{m-1}(x)A(x)=0 \tag{9}$$

$$(\lambda_{m-1}(x)\neq 0 \text{ pour } x \in E_r, \text{ ou pour } x \in V)$$

le polynome en $A(x)$ au premier membre étant le polynome minimal de la matrice $A(x)$, alors on peut prendre pour $B(x)$ dans E_r (dans V)

$$B(x)=\frac{1}{\lambda_{m-1}(x)}\left(A^{m-2}(x)+\lambda_1 A^{m-3}(x)+\cdots+\lambda_{m-2}(x)I\right). \tag{10}$$

En effet, après la multiplication de (11) à gauche par M_i et à droite par M_i^{-1}, on aboutit, d'après l'égalité

$$A(\theta_i x) = M_i A(x) M_i^{-1} \qquad (i=1, \ldots, n),$$

à la conclusion que matrices $A(x)$ et $A(\theta_i x)$ possédent le même polynome minimal. Il s'ensuit que $\lambda_j(\theta_i x) = \lambda_j(x)$ $(j=1, \ldots, m-1;\ i=1, \ldots, n;\ x \in E,$ ou $x \in V)$. D'après les dernières égalités, la matrice $B(x)$ déterminée par la formule (10) est compatible avec le groupe G pour $x \in E_r$ (ou pour $x \in V$) On déduit, d'autre part, de (9) qu'elle remplit aussi la condition (C_2).

Remarque. — Les lemmes 1 et 2, de même que le théorème 1, ont été démontrés dans [**1**].

Pour les fonctions a_i et g données l'équation (1) peut ne pas avoir de solution par rapport à la fonction f. Plus précisément, nous avons le lemme suivant.

Lemme 3. *Soit $B(x)$ une matrice pour laquelle sont valables les condition (C_1) et (C_2). L'équation* (1) *est possible si et seulement si la condition*

$$(C_3) \qquad (A(x)B(x)+I)\left\| \begin{matrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{matrix} \right\| = 0$$

est remplie.

Démonstration. Si l'équation (1) est possible, alors on obtient (C_3) immédiatement en multipliant (2) à gauche par $A(x)B(x)+I$.

Si la condition (C_3) est remplie, alors l'égalité

$$\left\| \begin{matrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{matrix} \right\| = -B(x) \left\| \begin{matrix} (x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{matrix} \right\|$$

détermine une solution particulière de l'équation (1).

Le théorème suivant (résultat principal de cet article) découle immédiatement du lemme 3 et du théorème 1.

Théorème 2. *Soit $B(x)$ une matrice satisfaisant aux conditions (C_1) et (C_2). L'équation* (1) *est possible si et seulement si la condition*

$$(C_3) \qquad (A(x)B(x)+I)\left\| \begin{matrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{matrix} \right\| = 0$$

est remplie.

Si la condition (C_3) *est remplie, alors la solution générale de l'équation* (1) *est déterminée par la formule*

$$(11)\qquad \begin{Vmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{Vmatrix} = -B(x) \begin{Vmatrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{Vmatrix} + (B(x)A(x)+I) \begin{Vmatrix} h(x) \\ h(\theta_2 x) \\ \vdots \\ h(\theta_n x) \end{Vmatrix} \qquad (I \textit{ matrice unité}),$$

où $h(\in F)$ *est une fonction arbitraire.*

Remarque. Le second terme du second membre de la formule (11) détermine la solution générale de l'équation homogène corespondante (celle où $g=0$).

RÉFÉRENCE

[1] S. B. Prešić, *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires*, Ces Publications, № **115** — № **121** (1963), 21—28.