ALGÈBRE. — *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires.* Note (*) de M. **Slaviša B. Prešić**, présentée par M. Maurice Fréchet.

1. Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ des applications biunivoques d'un ensemble donné E sur E lesquelles forment un groupe G de l'ordre $n$, où $\theta_1$ représente l'application identique. Soient K un corps commutatif donné et F l'ensemble de toutes les fonctions qui appliquent E dans K.

Dans cette Note, nous allons indiquer une méthode de résolution de l'équation fonctionnelle suivante (1) :

$$(1)\quad a_1(x)f(\theta_1 x)+a_2(x)f(\theta_2 x)+\ldots+a_n(x)f(\theta_n x)=0 \qquad [\theta_i x \equiv \theta_i(x)],$$

où $a_i\,(\in \mathrm{F})$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ sont des fonctions données et $f\,(\in \mathrm{F})$ une fonction inconnue.

Désignons par $\mathrm{P}=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ un ensemble de permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que la correspondance $i \leftrightarrow \theta_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ soit un isomorphisme du groupe des permutations P et du groupe G. Soit encore $\mathrm{M}=\{\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_n\}$ l'ensemble des matrices suivantes : $\mathrm{M}_\nu=\|a^\nu_{ij}\|$, avec $a^\nu_{ij}=1$ pour $j=ip_\nu$ et $a^\nu_{ij}=0$ pour $j\neq ip_\nu$.

2. Si l'on pose successivement $x, \theta_2 x, \ldots, \theta_n x$, dans l'équation (1), au lieu de $x$, on obtient un système d'équations qui, dans la forme matricielle, s'écrit

$$(2)\quad \Lambda(x)\begin{Vmatrix} f(x)\\ f(\theta_2 x)\\ \vdots\\ f(\theta_n x)\end{Vmatrix}=0, \qquad \text{avec}\quad \Lambda(x)=\|a_{ij}(x)\|, \qquad a_{ij}(x)=a_{jp_i^{-1}}(\theta_i x).$$

Les lemmes suivants sont valables :

Lemme 1. — *Il existe au moins une matrice carrée* R $(x)$ *de l'ordre $n$ dont les éléments sont* $b_{ij}(x)$, *avec* $b_{ij}\in \mathrm{F}$, *pour laquelle sont remplies les conditions que voici :*

(C₁) $\Lambda(x)\,\mathrm{R}(x)\,\Lambda(x)+\Lambda(x)=0$ *pour tout* $x\in \mathrm{E}$;

(C₂) *pour tout* $f\,(\in \mathrm{F})$ *l'égalité*

$$\begin{Vmatrix} g(x)\\ g(\theta_2 x)\\ \vdots\\ g(\theta_n x)\end{Vmatrix}=\mathrm{R}(x)\begin{Vmatrix} f(x)\\ f(\theta_2 x)\\ \vdots\\ f(\theta_n x)\end{Vmatrix} \qquad (x\in \mathrm{E})$$

*définit une fonction uniforme* $g\,(\in \mathrm{F})$.

LEMME 2. — *Si* $R_0(x)$ *est une matrice remplissant la condition* $(C_1)$ *du lemme* 1, *alors la matrice*

$$R(x) = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} R_0(\theta_\nu x) M_\nu$$

*remplit les conditions* $(C_1)$ *et* $(C_2)$ *du lemme* 1.

A partir de ces lemmes, on peut prouver le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soit* $R(x)$ *une matrice pour laquelle sont valables les conditions* $(C_1)$ *et* $(C_2)$. *La solution générale de l'équation* (1) *est donnée par*

$$(3) \qquad \begin{Vmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{Vmatrix} = (R(x)\,A(x) + I) \begin{Vmatrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{Vmatrix} \qquad (I, \text{ matrice unité}),$$

*où* $g\ (\in F)$ *désigne une fonction quelconque.*

Vu le théorème énoncé et le lemme 2, la résolution de l'équation (1) se ramène à la détermination d'une matrice quelconque $R_0(x)$ pour laquelle est remplie la condition $(C_1)$. Pour obtenir $R_0(x)$ il faut ramener la matrice $A(x)$, à l'aide des transformations élémentaires, à la forme

$$A(x) = P(x)\,D(x)\,Q(x),$$

où $P(x)$, $Q(x)$ sont des matrices régulières, $D(x)$ une matrice diagonale aux éléments 1 ou 0 de sorte que le nombre d'unités soit égal au rang de la matrice $A(x)$.

Dans certains cas, on détermine $R_0(x)$ au moyen du polynome minimal de la matrice $A(x)$.

*Exemple* 1. — Si dans le corps commutatif K n'est pas $nx = 0$ pour tout $x$, la solution générale de l'équation

$$f(x) + f(\theta_2 x) + \ldots + f(\theta_n x) = 0$$

est

$$f(x) = \frac{1}{n}\Big[(n-1)\,g(x) - g(\theta_2 x) - \ldots - g(\theta_n x)\Big],$$

où $g\ (\in F)$ est une fonction quelconque.

On arrive immédiatement à ce résultat à partir de (3), car, dans ce cas, on peut poser $R(x) = -(1/n)\,I$.

*Exemple* 2. — Dans ce qui suit il s'agit des fonctions réelles de variables réelles.

A l'équation fonctionnelle suivante :

$$(4) \qquad x_1 f(x_1, x_2, x_3) + x_2 f(x_2, x_3, x_1) - (x_1 + x_2) f(x_3, x_1, x_2) = 0$$

correspond la matrice A $(x)$ :

$$A(x) = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & -x_1-x_2 \\ -x_2-x_3 & x_2 & x_3 \\ x_1 & -x_1-x_3 & x_3 \end{Vmatrix} \qquad [x=(x_1, x_2, x_3)].$$

Les conditions du lemme 1 sont remplies par la matrice R $(x)$ suivante :

$$\begin{aligned} R(x) &= (x_1+x_2+x_3)^{-2}\,(A(x)-(x_1+x_2+x_3)\,I) \qquad \text{si} \quad x_1+x_2+x_3 \neq 0, \\ &= -\frac{1}{3}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-1}\,\|c_{ij}\|, \qquad \text{si} \quad x_1+x_2+x_3=0 \quad \text{et} \quad x_1^2+x_2^2+x_3^2 \neq 0, \\ &= 0 \qquad \text{si} \quad x_1=x_2=x_3=0, \end{aligned}$$

avec

$$c_{ij} = x_j \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Selon (3), la solution générale de l'équation (4) est donnée par

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1+x_2+x_3)^{-1}\,[x_3 g(x_1, x_2, x_3) + x_1 g(x_2, x_3, x_1) + x_2 g(x_3, x_1, x_2)] \\ &\qquad\qquad \text{si} \quad x_1+x_2+x_3 \neq 0, \\ &= (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-1}\,[(x_2^2+x_3^2)\,g(x_1, x_2, x_3) \\ &\qquad - x_1x_2\,g(x_2, x_3, x_1) - x_1x_3\,g(x_3, x_1, x_2)] \\ &\qquad\qquad \text{si} \quad x_1+x_2+x_3=0 \quad \text{et} \quad x_1^2+x_2^2+x_3^2 \neq 0, \\ &= g(0, 0, 0) \qquad \text{si} \quad x_1=x_2=x_3=0, \end{aligned}$$

où $g$ est une fonction quelconque.

Les démonstrations et les développements des résultats énoncés dans cette Note seront publiés ailleurs.

(*) Séance du 30 septembre 1963.

(1) Dans la monographie : M. GHERMĂNESCU, *Ecuatii funcționale*, Bucarest, 1960, p. 430-407, est traité le cas dans lequel le groupe G est cyclique.