Matematički fakultet
Beograd
novembar 2005. godine

Diferencijabilnost funkcije više promenljivih*

1 Osnovne definicije i teoreme, primeri

Diferencijabilnost je jedan od centralnih pojmova u matematičkoj analizi. Neka je $X \subset \mathbb{R}^n$ i neka $x \in X \cap X'$. Stavimo $A_x = \{h \in \mathbb{R}^n \mid (x+h) \in X\}$; skup A_x je neprazan i $0 \in A'$.

Definicija 1 *Funkcija $f : X \to \mathbb{R}^m$ se naziva diferencijabilnom u tački $x \in X \cap X'$ ako postoje linearno preslikavanje $L_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i preslikavanje $\alpha_x : A_x \to \mathbb{R}^m$ takva da važi*

$$(1) \qquad (\forall h \in A_x) \qquad f(x+h) - f(x) = L_x(h) + \alpha_x(h),$$

pri čemu se pretpostavlja i da je $\alpha_x(h) = o(h)$ kada $h \to 0$.

Ako je preslikavanje f diferencijabilno u svakoj tački $x \in X$ onda se f naziva diferencijabilnim preslikavanjem na skupu X.

Definicija 2 *Linearni operator L_x iz definicije **(1)** naziva se izvodom funkcije f u tački $x \in X$ i označava sa f'(x). Vektor $\triangle x(h) = (h+x) - x = h$ se naziva priraštajem nezavisno promenljive, a vektor $\triangle f(x;h) = f(x+h) - f(x)$ priraštajem funkcije f koji odgovara priraštaju h nezavisno promenljive. Vektor $f'(x;h) = L_x(h)$ se naziva diferencijalom funkcije f u tački x, koji odgovara priraštaju h nezavisno promenljive.*

Može se dokazati da važi tvrdjenje: Ako je preslikavanje f diferencijabilno u tački x, onda postoji samo jedan linearni operator L_x takav da važi **(1)** .

Preslikavanja $L_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $\alpha_x : A_x \to \mathbb{R}^m$ iz definicije **(1)** odredjena su svojim koordinatnim funkcijama $L_{x_j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $\alpha_{x_j} : A_x \to \mathbb{R}^m$, $(1 \le j \le m)$:

$$(\forall h \in \mathbb{R}^n) \qquad L_x(h) = (L_{x,1}(h), \ldots, L_{x,m}(h)),$$

$$(\forall h \in A_x) \qquad \alpha_x(h) = (\alpha_{x,1}(h), \ldots, \alpha_{x,m}(h)).$$

Ako se jednakost **(1)** napiše u koordinatnom obliku onda se vidi da je ta jednakost ekvivalentna sistemu jednakosti:

$$(2) \qquad f_j(x+h) - f_j(x) = L_{x,j}(h) + \alpha_{x,j}(h), \qquad (1 \le j \le m)$$

gde su f_j koordinatne funkcije preslikavanja f. S obzirom da su funkcije $L_{x,j}$ linearne i da važi jednakost:

$$(\forall j \in \{1, \ldots, m\}) \qquad \alpha_{x,j}(h) = o(h), \qquad h \to 0.$$

odatle zaključujemo da važi sledeće tvrdjenje:

*Domaći zadatak studenata II godine u okviru kursa Analize II.

Teorema 1 *Funkcija $f : X \to \mathbb{R}^m$ je diferencijabilna u tački $x \in X \cap X'$ ako i samo ako su u toj tački diferencijabilne sve koordinatne funkcije f_j. Pri tome je $f_j'(x) = L_{x,j}$ gde su $L_{x,j}$, $(1 \leq j \leq m)$ koordinatne funkcije izvoda L_x funkcije f u tački x.*

Definicija 3 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ definisana na skupu $X \subset \mathbb{R}^n$ i neka je $x \in X \cap X'$. Limes*

$$\lim_{h_i \to o} \frac{f(x_1, \ldots x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{h_i} \ ,$$

ako pos toji naziva se parcijalnim izvodom funkcije f po promenljivoj x_i u tački x i označava se jednim od simbola:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \qquad \partial_i f(x), \qquad f'_{x_i}(x).$$

Teorema 2 *Ako je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ definisana na skupu $X \subset \mathbb{R}^n$ i diferencijabilna u unutrašnjoj tački x tog skupa onda f u tački x ima parcijalne izvode po svim promenljivim x_1 do x_n. Pri tome važe jednakosti*

$$(\forall h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n) \qquad f'(x)h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)h_n.$$

Primer 1. $\triangleleft$ Posmatrajmo realnu funkciju $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 e^{x_1} + x_1 x_2 x_3$ definisanu na prostoru $\mathbb{R}^3$. Ona je diferencijabilna kao kompozicija elementarnih funkcija, pa u svakoj tački $x = (x_1, x_2, x_3)$ postoje parcijalni izvodi te funkcije i važe jednakosti:

$$\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 2x_2^2 e^{x_1} + x_2 x_3,$$

$$\tfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = 4x_2 e^{x_1} + x_1 x_3,$$

$$\tfrac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2.$$

Odredimo matricu koja predstavlja izvod $f'(x)$ preslikavanja $f : X \to \mathbb{R}^m$, diferencijabilnog u unutrašnjoj tački x skupa $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Neka su $f_j : X \to \mathbb{R}$, $(1 \leq j \leq m)$ koordinatne funkcije preslikavanja f. Iz teoreme **(1)** slede jednakosti:

$$(\forall h \in \mathbb{R}^n) \qquad f'(x)h = \begin{bmatrix} f_1'(x)h \\ \vdots \\ f_m'(x)h \end{bmatrix},$$

a odatle sledi

$$(\forall h \in \mathbb{R}^n) \qquad f'(x)h = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x)h_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x)h_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}.$$

Dakle,

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}. \ \triangleright$$

Primer 2. Naći $\frac{\partial f}{\partial x}(x,1)$ za funkciju $f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$.
$\triangleleft$ Saglasno definiciji parcijalnog izvoda, važi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,1)-f(x,1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1. \ \triangleright$$

Definicija 4 *Matrica (1) se naziva Jakobijevom matricom preslikavanja f u tački $x \in X$. Ako je $n = m$ onda se determinanta te matrice naziva jakobijanom preslikavanja f u tački x.*

Teorema 3 *Neka je funkcija $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ definisana u nekoj okolini $U(x_0)$ tačke $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i neka postoje parcijalni izvodi $\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x)$ u svakoj tački $x \in U(x_0)$. Ako su sve funkcije $\partial_i f : U(x_0) \to \mathbb{R}$,$(1 \le j \le n)$ neprekidne u tački x_0, onda je funkcija f diferencijabilna u toj tački.*

2 Odnos izmedju diferencijabilnosti, neprekidnosti i parcijalnih izvoda

Odnos izmedju neprekidnosti i diferencijabilnosti je isti kao u jednodimenzionom prostoru. Iz diferencijabilnosti sledi neprekidnost, ali obrnuto ne mora da važi. U slučaju funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ gde je $X \subset \mathbb{R}^n$, a diferencijabilnost funkcije u tački $x \in X$ obezbedjuje egzistenciju svih parcijalnih izvoda u toj tački.
Obratno ne važi: Iz egzistencije parcijalnih izvoda po svim promenljivim u nekoj tački ne sledi diferencijabilnost funkcije u toj tački.

Primer 3. Neka je data funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Ispitati njenu diferencijabilnost.

$\triangleleft$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0.$$

Funkcija f je diferencijabilna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ kao kompozicija elementarnih funkcija. U tački (0,0) zaključujemo da postoje njeni parcijalni izvodi, ali ona u toj tački nije diferencijabilna jer nije neprekidna u toj tački. $\triangleright$

3 Osnovna pravila diferencijabilnosti

Teorema 4 *Ako su preslikavanja $f : X \to \mathbb{R}^m$ i $g : X \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna u tački $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ onda je preslikavanje $(\alpha f + \beta g) : X \to \mathbb{R}^m$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ diferencijabilno u tački x i vači jednakost:*

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

Teorema 5 *Ako su funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ i $g : X \to \mathbb{R}$ diferencijabilne u tački $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ onda je:*
(a) funkcija $(fg) : X \to \mathbb{R}$ u tački x i važi jednakost

$$(fg)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x);$$

(b) funkcija $\frac{f}{g} : X \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u tački x ako je $g \neq 0$ na skupu X i važi jednakost

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

4 Parcijalni izvodi višeg reda

Definicija 5 *Funkcija $\partial_j(\partial_i f) : B \to \mathbb{R}$, (broj $\partial_j(\partial_i f)(x)$) naziva se parcijalnim izvodom drugog reda funkcije f po promenljivim x_i, x_j na skupu $B \subseteq X$ (u tački $x \in A$), i označava se jednim od simbola:*

$$\partial_{ji} f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \partial''_{x_j x_i} \quad \left(\partial_{ji} f(x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x), \quad \partial''_{x_j x_i}(x) \right).$$

Primer 4.

$$f(x, y, z) = 2x^5 y^2 z^3 + 4yz + y^2 e^{yz} + 3xz$$

$\triangleleft$ Ova realna funkcija ima u svakoj tački $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sve parcijalne izvode, što sledi iz njene diferencijabilnosti u svakoj tački $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 10x^4 y^2 z^3 + 3z, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 4x^5 y z^3 + 4z + 2ye^{yz} + y^2 e^{yz} z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 6x^5 y^2 z^2 + 4y + y^3 e^{yz} + 3x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 40x^3 y^2 z^3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = 20x^4 y z^3, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = 30x^4 y^2 z^2 + 3,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}(x, y, z) = 60x^4 y^2 z, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y, z) = 120x^2 y^2 z^3.$$

Redosled promenljivih po kojima se vrši diferenciranje ne utiče na vrednost parcijalnog izvoda u opštem slučaju. $\triangleright$

Teorema 6 *Ako $f \in C^{(k)}(X)$, onda vrednost parcijalnog izvoda*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(x)$$

ne zavisi od poretka promenljivih $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ po kojima se vrši diferenciranje, tj. ista je za svaku permutaciju indeksa $i_1, \ldots, i_k$ $(1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n)$.

Primer 5. Ispitati diferencijabilnost funkcije $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ u tački $(0, 0)$.

$\triangleleft$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h \cdot 0} - 0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\sqrt[3]{k \cdot 0} - 0}{k} = 0.$$

Medjutim, funkcija nije diferencijabilna u tački $(0,0)$ jer u toj tački nije ispunjen neophodan uslov diferencijabilnosti:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot k}{\sqrt{k^2+h^2}} \neq 0. \ \triangleright$$

Primer 6. Ispitati diferencijabilnost funkcije $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ u tački $(0,0)$.
$\triangleleft$ Nalazimo parcijalne izvode:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{k} = 1.$$

Proveravamo "osnovni uslov" diferencijabilnosti:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h^3+k^3} - 0 - 1\cdot h - 1\cdot k}{\sqrt{k^2+h^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h^3+k^3} - h - k}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Kako je (za npr. pravac $h=k=t$) ovaj limes različit od nule, funkcija nije diferencijabilna u datoj tački. $\triangleright$

Primer 7. Ispitati diferencijabilnost funkcije:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & , \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

$\triangleleft$ Za $(x,y)\neq(0,0)$ funkcija je diferencijabilna kao superpozicija diferencijabilnih funkcija. Ispitajmo diferencijabilnost u tački (0,0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot e^{-\frac{1}{h^2}} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\cdot e^{-\frac{1}{k^2}} = 0;$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{h^2+k^2}} - 0 - 0\cdot h - 0\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Odatle sledi da je funkcija diferencijabilna u tački $(0,0)$. $\triangleright$

Primer 8. Da li je funkcija $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}$ diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$?
$\triangleleft$ Za $x^2+y^2\neq 0$, funkcija f je diferencijabilna kao kompozicija diferencijabilnih funkcija. U $(0,0)$ funkcija f nije diferencijabilna jer ne postoje parcijalni izvodi:

$$\lim_{h\to 0\pm} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0\pm} \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \pm\infty,$$

$$\lim_{k\to 0\pm}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0\pm}\frac{k^{\frac{2}{3}}}{k}=\pm\infty.\ \triangleright$$

Primer 9. Ispitati diferencijabilnost sledeće funkcije:

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}(x_1^2+x_2^2)\sin(x_1^2+x_2^2)^{-1} & , \quad (x_1,x_2)\neq(0,0)\\ 0 & , \quad (x_1,x_2)=(0,0)\end{cases}.$$

$\triangleleft$ Funkcija je diferencijabilna u svakoj tački $(x_1,x_2\neq(0,0))$ kao kompozicija elementarnih funkcija.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1\sin(x_1^2+x_2^2)^{-1}-\frac{2x_1\cos(x_1^2+x_2^2)^{-1}}{(x_1^2+x_2^2)},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=2x_2\sin(x_1^2+x_2^2)^{-1}-\frac{2x_2\cos(x_1^2+x_2^2)^{-1}}{(x_1^2+x_2^2)},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}}{h}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(k,0)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k^2\sin\frac{1}{k^2}}{k}=0.$$

Ako su ovi parcijalni izvodi neprekidni u nuli, funkcija će biti diferencijabilna.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2})\neq 0.$$

Iz ovog izraza sledi da parcijalni izvodi nisu neprekidni u $(0,0)$. Medjutim, to još uvek ne znači da funkcija nije diferencijabilna u toj tački.
Ispitajmo dovoljan uslov diferencijabilnosti:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$$

Leva strana ove jednakosti jednaka je sledećim izrazima:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h^2+k^2)\sin\frac{1}{h^2+k^2}-0-0\cdot h-0\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{h^2+k^2}=0.$$

Kako možemo da zaključimo da je ispunjen dovoljan uslov diferencijabilnosti u tački $(0,0)$, pokazali smo da je funkcija diferencijabilna u toj tački. $\triangleright$

Primer 10. Ispitati diferencijabilnost funkcije

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^y\sin x^2y}{x} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}.$$

$\triangleleft$ U tačkama (x,y),$x\neq 0$, funkcija f je diferencijabilna kao kompozicija diferencijabilnih funkcija:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^y\sin h^2y}{h^2}=\lim_{h\to 0}y\frac{e^y\sin h^2y}{h^2y}=y\cdot e^y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,y+k)-f(0,y)}{k} = \ldots = 0.$$

Funkcija f je diferencijabilna ako važi:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,y+k)-f(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)\cdot h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)\cdot k}{\sqrt{k^2+h^2}} = 0.$$

Dokažimo da je ta jednakost tačna. Proverimo:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{e^{y+k}\sin h^2(y+k)}{h}-0-y\cdot e^y h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\left(\frac{e^{y+k}\sin h^2(y+k)}{h\cdot\sqrt{h^2+k^2}}-\frac{y\cdot h\cdot e^y}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} e^y\left(\frac{\sin h^2(y+k)}{h\cdot\sqrt{h^2+k^2}}-\frac{y\cdot h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)\to e^y(y-y)=0$$

$\Rightarrow$ jednakost je tačna pa zaključujemo da je funkcija f diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$. $\triangleright$

Primer 11. Postoji li $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ ako je:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & , \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0)\end{cases} ?$$

$\triangleleft$ Ako je $(x,y)\neq(0,0)$ imamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Polazeći od definicije izvoda, dobijamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

Kako limes

$$\lim_{k\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{2k^3}{k^4}}{k}$$

ne postoji, stoga izvod $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ u $(0,0)$ takodje ne postoji. $\triangleright$