REALNA, KOMPLEKSNA ANALIZA I HILBERTOVI PROSTORI

M. MATELJEVIĆ

ABSTRACT. $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{M}$

Uvod

Radna verzija, Maj 2006, Januar 2007.
Kurs iz Teorije Realnih i Kompleksnih funkcija (TR-KF, popularno TRiK) sastoji se okvirno iz prve tri glave MM [Ma 9]: Kompleksna Analiza, BL 2004 (v. takodje Mitrinović [Mi]) i dodatka u prilogu. Dodatak se odnosi na realnu analizu. Za više detalja o realnoj analizi videti npr. u Aljančić [Alj] i Rudin [Ru] (v. takodje Kolmogorov, Fomin [Ko-Fo]; Arsenović, Dostanić i Jocić [Ar-Do-Jo]). S obzirom da je kurs prvenstveno namenjen studentima R-smera "teži" dokazi i delovi koji izlaze iz osnovnog dela kursa su samo skicirani i obično označeni sa *.
Nadamo se da ce dalje dopune i korekcije uzeti u obzir primedbe kolega i studenata.

1. Integracija 1

U ovoj sekciji dajemo kratak pregled osnovnih svojstava mere i Lebeg-ovog integrala (detalje v. u Aljančić [Alj] i Rudin [Ru]).

1.1. **mera.** Svakom intervalu $I = (a, b)$ na realnoj pravoj odgovara merni broj $m(I)$ - dužina $b - a$. Da li i drugim skupovima $A \subset \mathbb{R}$ odgovara odredjen realan broj-mera skupa $m(A)$ tako da je
1. $m(A)$ dužina intervala kada je A interval
2. $m(A)$ ima karakteristične osobine dužine intervala:
a. m je nenegativna i
b. (aditivnost) mera unije disjunktnih skupova jednaka je zbiru mera skupova

Ne postoji funkcija navedenih osobina na $P\mathbb{R}$. Interesantno je odrediti "maksimalnu" familiju podskupova skupa $\mathbb{R}$ (odrediti merljive skupove) na kojoj postoji funkcija navedenih osobina i specijalno ispitati svojstvo aditivnost.

Pomoću merljivih skupova definišu se merljive funkcije i uvodi Lebeg-ov integral, koji uopštava Riemann-ov i ima interesantne (važne) primene.

Neka je X osnovni skup.

Definicija 1.1. Neprazna familija skupova $\mathfrak{R} \subset \mathbf{P}X$ je *prsten* ako iz

$$A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cup B,\ A \setminus B \in \mathfrak{R}$$

Definicija 1.2. Prsten $\mathfrak{R}$ (? Neprazna familija skupova $\mathfrak{R} \subset \mathbf{P}X$) je σ-*prsten* ako iz

$$A_k \in \mathfrak{R}(k = 1, 2, ...) \Rightarrow \cup A_k \in \mathfrak{R};$$

σ-prsten $\mathfrak{R}$ se naziva σ-algebra ako $X \in \mathfrak{R}$.

Date: Januar, 2007.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 30.

Definicija 1.3. Neka je $\mathfrak{R}$ prsten. Preslikavanje $\phi : \mathfrak{R} \to (-\infty, +\infty]$ naziva se funkcija skupa.
Funkcija skupa ϕ je aditivna ako

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B),$$

odnosno σ-aditivna ako

$$A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j) \;\Rightarrow\; \phi(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(A_k).$$

Da bi izbegli specijalnu situaciju, pretpostavimo da ϕ ne uzima svuda na $\mathfrak{R}$ vrednost $+\infty$. Kada je reč o σ-aditivnosti, tada red $\sum_{k=1}^{\infty} \phi(A_k)$ konvergira ili odredjeno divergira ka $+\infty$. Kako $\phi(\cup_{k=1}^{\infty} A_k)$ ne zavisi od poretka u kome skupovi A_k ulaze u uniju, to ni numerički red $\sum_{k=1}^{\infty} \phi(A_k)$ ne zavisi od poretka svojih članova. Otuda ako je red $S = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(A_k)$ konvergentan, onda je i apsolutno konvergentan. Specijalno, ako je $\mathfrak{R}$ σ-prsten i ako sa S^+ označimo sumu koja sadrži pozitivne , a sa S^- negativne brojeve $\phi(A_k)$, tada je $-\infty < S^- \leq 0$ i $0 \leq S^+ \leq +\infty$. Dakle S^- je konačan broj. ?

Propozicija 1.1. Neka je ϕ aditivna funkcija na prstenu $\mathfrak{R}$. Tada

(1) $\phi(\emptyset) = 0$
(2) $\phi(\cup_{\nu=1}^{n} A_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \phi(A_\nu)$, gde su A_ν disjunktni skupovi.
(3) Za $A, B \in \mathfrak{R}$,
$$\phi(A \cup B) + \phi(A \cap B) = \phi(A) + \phi(B)$$
(4) ako je $A \subset B$ i $\phi(A) < +\infty$, tada
$$\phi(B \setminus A) = \phi(B) - \phi(A)$$
(5) ako je $\phi \geq 0$, tada za $A, B \in \mathfrak{R}$
$$\phi(A \cup B) \leq \phi(A) + \phi(B)$$
a iz
$$A \subset B \Rightarrow \phi(A) \leq \phi(B)$$
(6) ako je $\phi \geq 0$, niz (A_n) disjunktnih skupova iz $\mathfrak{R}$ i $A = \cup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \in \mathfrak{R}$, tada je

$$\phi(A) \geq \sum_{\nu=1}^{\infty} \phi(A_\nu). \tag{1.1}$$

Dokaz (1)-(5), koji se bazira na jasnoj primeni svojstvu aditivnosti, ostavljamo za vežbu.
3° Kako su $A \setminus B$ i $A \cap B$, odnosno $A \setminus B$ i B parovi disjunktnih skupova, iz ?? sledi

$$\phi[(A \setminus B) \cup (A \cap B)] = \phi(A \setminus B) + \phi(A \cap B),$$
$$\phi[(A \setminus B) \cup B] = \phi(A \setminus B) + \phi(B),$$

tj.

$$\phi(A \setminus B) + \phi(A \cap B) = \phi(A),$$
$$\phi(A \cup B) = \phi(A \setminus B) + \phi(B).$$

Sabiranjem ove dve nejednakosti sledi tvrdjenje ako je $\phi(A \setminus B) < +\infty$. Ako je $\phi(A \setminus B) = +\infty$, tada je prema prethodnim jednačinama $\phi(A) = +\infty$, $\phi(A \cup B) = +\infty$, pa su obe strane u 3° jednake $+\infty$.

Na osnovu druge nejednačine u (5) i aditivnosti, iz $A \supset \cup_{\nu=1}^{n} A_\nu$ za svako n sledi

$$\phi(A) \geq \phi(\cup_{\nu=1}^{n} A_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \phi(A_\nu)$$

za svako n i otuda 1.1.

Propozicija 1.2. Neka je ϕ σ-aditivna funkcija na prstenu $\mathfrak{R}$. Tada

(1) ako je niz (A_n) iz $\mathfrak{R}$, $A = \cup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \in \mathfrak{R}$ i $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ...$, tada

$$\phi(A_n) \to \phi(A)$$

(2) ako je niz (A_n) iz $\mathfrak{R}$, $A = \cap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \in \mathfrak{R}$, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...$ i ako je $\phi(A_k) < \infty$ (za neko fiksirano k), tada

$$\phi(A_n) \to \phi(A).$$

Uputstvo za (1). Definišimo $B_1 = A_1$ i $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ $(n = 2, 3, ...,)$. Skupovi B_n su medjusobno disjunktni i $A_n = \bigcup_{\nu=1}^{n} B_\nu$, $A = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} B_\nu$. Primeniti σ-aditivnost.

Uputstvo za (2). Pretpostavimo da je $k = 1$. Definišimo $C_n = A_1 \setminus A_n$. Tada je $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset ...$, $A_1 \setminus A = \cup_{\nu=1}^{\infty} C_\nu$. Na osnovu prvog dela,

$$\phi(A_1 \setminus A_n) = \phi(C_n) \to \phi(A_1 \setminus A).$$

Definicija 1.4. Nenegativna (sa vrednostima u $[0, \infty]$) σ-aditivna funkcija definisana na σ-algebri (ili prstenu) $\mathfrak{R}$ naziva se *pozitivna mera* na $\mathfrak{R}$. Skupovi iz $\mathfrak{R}$ nazivaju se *merljivi skupovi.*

1.1.1. *Elementarni skupovi.* Otvoren interval u $\mathbb{R}^m$ je skup

$$I = \{x = (x_k) : x_k \in (\alpha_k, \beta_k), k = 1, 2, ..., m\},$$

gde su α_k i β_k $(\alpha_k \leq \beta_k)$ konačni realni brojevi. Za $m = 1$ to je interval na pravoj, za $m = 2$ pravougaonik u ravni, za $m = 3$ kvadar u prostoru, itd. Intervalu I dodeljujemo merni broj

$$m(I) = \prod_{k=1}^{m} (\beta_k - \alpha_k),$$

tj. dužinu za $m = 1$, površinu za $m = 2$, zapreminu za $m = 3$.

U nekim situacijima, pogodno je da za otvorene, poluotvorene i zatvorene intervale koristiti zajednički naziv interval.

Definicija 1.5. $A \subset \mathbb{R}^m$ je *elementaran skup* u $\mathbb{R}^m$ ako je unija konačno intervala.

Familiju elementarnih skupova označavamo sa $\mathcal{E}$.

Propozicija 1.3. Ako je je $A \in \mathcal{E}$, tada postoji jedno razlaganje skupa A na konačno disjunktnih intervala I_ν (tj. postoji konačno disjunktnih intervala I_ν tako da je $A = \cup_{\nu=1}^{n} I_\nu$).

Vežba 1.1. Razmotriti prvo dokaza za 1-dimenzione elementarne skupove.

Uputstvo u slučaju ravni. Neka je A unija intervala J_μ i S skup temena ovih intervala; a S_1 i S_2 projekcije skupa S respektivno na x i y -ose. Konstruišimo pomoću S_1 i S_2 odgovarajuću mrežu pravougaonika i neka npr. pravougaonici I_ν pripadaju skupu A. XX

Vežba 1.2. Generalisati ovaj dokaz za m-dimenzione elementarne skupove za $m \geq 2$.

Definicija 1.6. Neka je $A \in \mathcal{E}$ i neka je $\cup_{\nu=1}^n I_\nu$ jedno razlaganje skupa A na disjunktne intervale I_ν. Definišimo

$$m(A) = \sum_{\nu=1}^{n} m(I_\nu).$$

Proveriti da mera m ne zavisi od razlaganja. Neka su I_ν i J_μ dva različita razlaganja skupa A na konačno disjunktnih intervala. Kako je presek dva intervala opet interval, nalazimo $m(I_\nu) = \sum_\mu m(I_\nu \cap J_\mu)$ za svako ν, i $m(J_\mu) = \sum_\nu m(I_\nu \cap J_\mu)$ za svako μ. Otuda

$$\sum_\nu m(I_\nu) = \sum_{\nu,\mu} m(I_\nu \cap J_\mu) = \sum_\mu m(J_\mu).$$

Propozicija 1.4. Ako $A \in \mathcal{E}$, za svako $\varepsilon > 0$ postoje otvoren elementaran skup G i zatvoren elementaran skup F, tako da je $F \subset A \subset G$ i

$$m(A) < m(F) + \varepsilon, \; m(G) < m(A) + \varepsilon.$$

Uputstvo: Ako je A interval za G uzeti dovoljno blizak otvoren interval, a za F uzeti dovoljno blizak zatvoren interval. U opštem slučaju koristiti razlaganje dato Propozicijom 1.3.

Teorema 1.1. *Funkcija m je mera na prstenu $\mathcal{E}$.*

Prvo pokažimo da je m aditivna. Pretpostavimo $A, B \in \mathcal{E}$.

Na osnovu Propozicije 1.3, postoje razlaganja skupova A i B na konačno disjunktnih intervala I_ν i J_μ respektivno (tj. postoji konačno disjunktnih intervala I_ν i J_μ tako da je $A = \cup_{\nu=1}^n I_\nu$ i $B = \cup_{\nu=1}^m J_\mu$).
Ako je $A \cap B = \emptyset$, tada je unija svih I_ν i J_μ jedno razlaganje skupa $A \cup B$ na disjunktne intervale. Otuda, na osnovu Definicije 1.6

$$m(A \cup B) = \sum_{\nu=1}^{n} m(I_\nu) + \sum_{\mu=1}^{m} m(J_\mu) = m(A) + m(B).$$

Skica dokaza da je m σ-aditivna.
Pretpostavimo da su skupovi $A_\nu \in \mathcal{E}$ disjunktni i da $A = \cup_{\nu=1}^\infty A_\nu \in \mathcal{E}$. Na osnovu aditivnosi m (preciznije nejednakosti 1.1), sledi

$$m(A) \geq \sum_{\nu=1}^{\infty} m(A_\nu) =: S.$$

Interesantno je da je ideja dokaza obrnute nejednačine da se A aproksimira pomoću konačnog pokrivača. Dokaz obrnute nejednačine bazira se na Propoziciji 1.4 i Heine-Borel stavu: iz otvorenog pokrivača zatvorenog i ograničenog skupa može se izdvojiti konačno pokrivanje (uporediti sa dokazom da je m^* σ-subaditivna).

Za svako $\varepsilon > 0$, na osnovu Propozicije 1.4, postoji zatvoren elementaran skup F i postoje otvoreni elementarani skup G_n, tako da je $F \subset A$, $A_n \subset G_n$ i

$$m(A) < m(F) + \varepsilon, \ m(G_n) < m(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad n \geq 1.$$

Kako je $\{G_n\}$ jedno otvoreno pokrivanje skupa F, može se izdvojiti jedno konačno pokrivanje, tj. postoji prirodan broj p tako da je

$$\cup_{n=1}^{p} G_n \supset F.$$

Otuda je

$$m(A) - \varepsilon < m(F) \leq \sum_{n=1}^{p} m(G_n) < S + \varepsilon,$$

tj. $m(A) < S + 2\varepsilon$ odnosno $m(A) \leq S$, jer ε možemo birati proizvoljno malo. □

Sledeći primer ilustruje stav: funkcija m je mera na prstenu $\mathcal{E}$.

Primer 1.1. Neka je $I_k = [\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}})$. Proveriti da je $(0,1) = \cup_{k=1}^{\infty} I_k$ i da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Navesti sličan primer za skupove u ravni.

Spoljna mera

Spoljna mera $m^*(A)$ definiše se sa

$$m^*(A) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k), \tag{1.2}$$

gde se infimum uzima preko svih najviše prebrojivih pokrivanja skupa A intervalima (I_k), $\cup_{k=1}^{\infty} I_k \supset A$.

Važno svojstvo spoljne mere je σ- subaditivnost, Propozicija 1.5, svojstvo 4^0 : ako je $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$, tada $m^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$.

Propozicija 1.5. Spoljna mera m^* ima sledeće osobine:
1^0. Ako je $A \in \mathcal{E}$, tada $m^*(A) = m(A)$.
2^0. $m^*(A) \geq 0$.
3^0. Iz $A \subset B$, sledi $m^*(A) \leq m^*(B)$.
4^0. Iz $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$, sledi $m^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$.
5^0. ako je m^* aditivna na nekom σ-prstenu $\mathcal{R} \subset P\mathbb{R}^m$, tada je i σ-aditivna.

Interesantno je primetiti ako je m^* aditivna na nekom σ-prstenu $\mathfrak{R}$, tada na osnovu 4^0 i nejednakosti 1.1, je i σ-aditivna. Ponovimo dokaz nejednakosti 1.1. Neka su (A_k) disjunktni skupovi u $\mathfrak{R}$ i $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$, tada je $m^*(\cup_{k=1}^{n} A_k) \leq m^*(A)$ i otuda $\sum_{k=1}^{n} m^*(A_k) \leq m^*(A)$. Stoga, na osnovu 4., sledi

$$m^*(A) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A_k). \tag{1.3}$$

Primer 1.2. Navesti primer disjunktnih skupova A_k tako da u 4^0 ne važi jednakost. U skupu realnih $\mathbb{R}$ brojeva uvedimo relaciju ekvivalencije $x \sim y$ ako i samo ako $x - y$ racionalan broj. U svakoj klasi ekvivalencije izaberimo po jednog predstavnika iz intervala $(0,1)$. Označimo sa E skup tih predstavnika.
Neka je $E_r = \{x + r : x \in E\}$.
Konstrukcija se bazira na sledećim tačkama.

1° Ako $x \in (0,1)$, postoji $y \in E$, tako da je $x \sim y$. Definišimo $r = x - y$. Tada je $x = y + r$, tj. $x \in E_r$ za neko $r \in (0,1)$.

2° Ako su r i s dva različita racionalna broja, skupovi E_r i E_s su disjunktni. Pretpostavimo da E_r i E_s $(r \neq s)$ nisu disjunktni, tj. da postoji $x \in E_r \cap E_s$. Otuda postoje tačke $y, z \in E$, tako da je $x = y + r = z + s$. No tada je $y - z = s - r \neq 0$, tj. $y \sim z$ i $y \neq z$, što bi značilo da E sadrži dva različite tačke iz iste klase ekvivalencije, suprotno definiciji skupa E.
Racionalne brojeve razmaka $(-1,1)$ uredimo u niz (r_n) i definišimo $A_n = E_{r_n}$.
Na osnovu 2°, skupovi A_n su disjunktni. Neka je $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
Iz 1° sledi, $(0,1) \subset A$ i stoga $1 \leq m^*(A)$. Kako su skupovi A_n dobijeni translacijom skupa E, ovi skupovi imaju istu spoljnu meru. Otuda, sobzirom na nejednačini 4°, sledi $m^*(A_n) = \ \alpha > 0$.
Dakle desna strana u nejednačini 4° jednaka je $+\infty$, dok leva, s obzirom na $A \subset (-1,2)$, nije veća od 3.

Neka $A, B \subset \mathbb{R}^m$. Definišimo

$$d(A,B) = m^*(A \Delta B).$$

Kažemo da $A_n \to A$ ako $d(A_n, A) \to 0$.

Definicija 1.7. Skup A iz $\mathbb{R}^m$ pripada kolekciji $\mathfrak{M}_K$ ako postoji niz elementarnih skupova (A_n) tako da $A_n \to A$. Skup A iz $\mathbb{R}^m$ pripada kolekciji $\mathfrak{M}$(Lebeg-ov σ -prsten) ako je najviše prebrojiva unija skupova iz $\mathfrak{M}_K$.

Ako $A, B \in \mathfrak{M}_K$, tada postoje nizovi elementarnih skupova A_n i B_n tako da $A_n \to A$ i $B_n \to B$. Iz aditivnosti m na $\mathcal{E}$ sledi

$$m(A_n) + m(B_n) = m(A_n \cup B_n) + m(A_n \cap B_n)$$

Na osnovu Propozicije 1.5, svojstvo 1^0, prelaskom na limes nalazimo

$$m^*(A) + m^*(B) = m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B).$$

Na osnovu prethodnog razmatranja dokazuje se (detalji su ostavljeni čitaocu) sledeća lema.

Lema 1.1. *$\mathfrak{M}_K$ je prsten i m^* je aditivna i konačna na $\mathfrak{M}_K$.*

Otuda sledi da je m^* aditivna na $\mathfrak{M}_K$ (ključno svojstvo pomoću koga se zatim dokazuje da je m^* σ-aditivna na $\mathfrak{M}$).

$\mathfrak{M}$ je σ -prsten i m^* je σ -aditivna funkcija skupa na $\mathfrak{M}$.

Ako A iz $\mathbb{R}^m$ pripada kolekciji $\mathfrak{M}$(Lebeg-ov σ -prsten) kažemo da je A merljiv u Lebeg-ovom smislu (kratko merljiv).

Primer 1.3. Pokazati da skup E konstruisan u Primeru 1.2 nije merljiv.
Ako je skup E konstruisan u Primeru 1.2 merljiv, tada su i $A_n = E_{r_n}$ merljivi i onda u 4° važi jednakost.

Lema 1.2. *Svaki skup A iz $\mathfrak{M}$ može se prikazati kao najviše prebrojiva unija disjunktnih skupova A_n iz $\mathfrak{M}_K$. Ako je skup A najviše prebrojiva unija disjunktnih skupova A_n iz $\mathfrak{M}_K$, tada je*

$$m^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) \tag{1.4}$$

Primetimo da smo već dokazali 1.4 (? sledi iz 1.3).
Na osnovu definicije $\mathfrak{M}$, postoje skupovi B_k, $k \geq 1$, u $\mathfrak{M}_K$ tako da je $A = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$.
Definišimo $C_n = \cup_{k=1}^{n} B_k$,

$$A_1 = B_1 \ i \ A_n = C_n \setminus C_{n-1}, \ (n = 2, 3, ...).$$

Jednostavno se proverava da skupovi A_n ispunjavaju tražene uslove.

Lema 1.3. *Ako $A \in \mathfrak{M}$ i $m^*(A) < +\infty$, tada $A \in \mathfrak{M}_K$.*

Na osnovu Leme 1.2 postoje disjunktni skupovi A_k u $\mathfrak{M}_K$ tako da je $A = \cup A_k$ i $m^*(A) = \sum m^*(A_k)$. Označimo $\cup_{k=1}^{n} A_k$ sa B_n. Iz

$$d(A, B_n) = m^*(\cup_{k=n+1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} m^*(A_k) \to 0$$

sledi da $B_n \to A$. □

Na osnovu Lema 1.1, 1.2 i 1.3, dokazuje se centralni stav u Lebeg-ovoj teoriji mere

Teorema 1.2 (*). *$\mathfrak{M}$ je σ -prsten i m^* je σ -aditivna funkcija skupa na $\mathfrak{M}$.*

Primer 1.4. Neka je $I_k^s = (k, k + 1/k^s) \times (0, 1)$, $J_n^s = \cup_{k=1}^{n} I_k$ i $J_s == \cup_{k=1}^{\infty} I_k^s$, $s \geq 0$; tada $J_n^s \in \mathcal{E}$, $J_s \notin \mathcal{E}$;
kako red $\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k^s)$ konvergira za za $s > 1$, $J_s \in \mathcal{M}_K \setminus \mathcal{E}$ za $s > 1$;
kako red $\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k^s)$ divergira za za $s \leq 1$, $J_s \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_K$ za $s \leq 1$.

Klase merljivih skupova i funkcija

Teorema 1.3. *Otvoreni i zatvoreni skupovi u $\mathbb{R}^m$ su m-merljivi.*

Svaki neprazan otvoren skup u $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$) je prebrojiva unija zatvorenih kocki koje nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka i čije su strane paralelne koordinatnim ravnima. Zatvoreni skupovi su merljivi kao komplementi otvorenih.

Propozicija 1.6. Ako $A \in \mathfrak{M}$, za svako $\varepsilon > 0$ postoje otvoren skup G i zatvoren skup F, tako da je $F \subset A \subset G$ i

$$m(A \setminus F) < \varepsilon, \ m(G \setminus A) < \varepsilon.$$

Uputstvo: Za G uzeti dovoljno blisko pokrivanje otvorenim intervalima; izdvojiti slučaj $m(A) = \infty$.
Ako je proizvoljan skup $m^*(A) < +\infty$ (u opštem slučaju nemerljiv), tada postoji pokrivanje skupa A otvorenim intervalima I_n tako da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k) < m^*(A) + \varepsilon. \tag{1.5}$$

Neka je $G = \cup_{k=1}^{\infty} I_k$. Tada je G otvoren, $A \subset G$ i $m^*(G) < m^*(A) + \varepsilon$. Otuda, ako je A m-merljiv, sledi

$$m^*(G \setminus A) = m(G \setminus A) < \varepsilon.$$

Vežba 1.3. Objasniti zašto, bez pretpostavke da je A m-merljiv, prethodna nejednakost ne važi.

Mada su skupovi $G \setminus A$ i A disjunktni jednakost: $m^*(G \setminus A) + m^*(A) = m^*(G)$ ne važi ako je A nemerljiv skup. Ako ova jednakost važi za svaki otvoren skup G koji sadrži A, onda kao u dokazu sledeće Propozicije, sledi da je A merljiv.
Ova situacija pokazuje da je aditivnost važno svojstvo kao i klasa merljivih skupova.
$\square$

Borel-ov skup je svaki skup koji se može dobiti iz otvorenih skupova primenjujući najviše prebrojivo unija, preseka i komplemenata.

U praksi, dovoljno je raditi sa klasom $\mathfrak{B}$ Borel-ovih skupova. $\mathfrak{B}$ je najmanji σ-prsten koji sadrži sve otvorene skupove.

Propozicija 1.7. Ako $A \in \mathfrak{M}$, tada postoje Borelovi skupovi G i F, tako da je $F \subset A \subset G$ i
$$m(A \setminus F) = 0,\ m(G \setminus A) = 0.$$

Dakle, svaki m-merljiv skup može se prikazati kao unija Borelovog skupa i skupa m-mere 0: $A = B \cup (A \setminus B)$.

Uputstvo: Na osnovu Propozicije 1.6, za svako fiksirano n ($n = 1, 2, ...$) postoje otvoreni skupovi G_n i zatvoreni skupovi F_n tako da je $F_n \subset A \subset G_n$ i
$$m(A \setminus F_n) < 1/n,\ m(G \setminus A_n) < 1/n.$$
Definišimo $G = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$, $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. Kako je
$$m(A \setminus F) \leq m(A \setminus F_n) < 1/n,\ \ m(G \setminus A) \leq m(G_n \setminus A) < 1/n,$$
kada $n \to \infty$ dobija se Propozicija 1.7.

Merljive funkcije
Ponovimo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Koristi se i oznaka $\overline{\mathbb{R}}$.

Definicija 1.8. Funkcija $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^*$ je merljiva ako je $\{x : f(x) > s\}$ merljiv za svako realno s. Kompleksna funkcija $f = u + i\,v$ je merljiva ako su realne funkcije u i v merljive.

Propozicija 1.8. Ako je jedan od skupova $\{x : f(x) > s\}$, $\{x : f(x) \geq s\}$, $\{x : f(x) < s\}$, $\{x : f(x) \leq s\}$ merljiv za svako realno s, takvi su i ostala tri.

$\triangleright$
$$\{x : f(x) \geq s\} = \cap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) > s - \frac{1}{n}\}$$

Propozicija 1.9. Ako je f merljiva, tada je $|f|$ merljiva.
Ako je (f_k) niz realnih merljivih funkcija, tada su
$$\sup f_k,\ \inf f_k,\ \limsup f_k,\ \liminf f_k$$
merljive funkcije.

$\triangleright$ $\{x : |f(x)| < s\} = \{x : f(x) < s\} \cap \{x : f(x) > -s\}$.

Specijalno, ako je f realna merljiva, funkcije $f^+ = max\{f(x), 0\}$ i $f^- = max\{-f(x), 0\}$ su merljive. Pomoću f^+ i f^-, funkcije f i $|f|$ razlažu se na razliku i zbir dve nenegativne funkcije:
$$f = f^+ - f^-,\ \ |f| = f^+ + f^-$$

Propozicija 1.10. Neka je $f = u + iv$ kompleksna funkcija merljiva na $\mathbb{R}^m$ i Φ neprekidna funkcija na $\mathbb{C}$, tada je funkcija $h = \Phi \circ f$ merljiva.

Dokaz: Neka je $I_c = (c, \infty)$. Kako je Φ neprekidna funkcija skup $V = \Phi^{-1}(I_c)$ je otvoren skup.
Dovoljno je dokazati da je $f^{-1}(V)$ je merljiv. Ako je R pravougaonik u ravni sa stranama paralelnim osama tada je R produkt dva segmenta I_1 i I_2 i

$$f^{-1}(R) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2),$$

a ovaj skup je merljiv s obzirom da su u i v merljive. Svaki otvoren skup V u ravni je prebrojiva unija takvih pravougaonika, i kako je

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\cup_{i=1}^{\infty} R_i) = \cup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(R_i),$$

$f^{-1}(V)$ je merljiv. □

1.2. **Lebeg-ov integral.**

1.2.1. *Lebeg-ov integral pozitivne funkcije.* **Jednostavne funkcije Lebeg-ov integral**

Funkcija j, definisana na $\mathbb{R}^m$ je jednostavna funkcija ako uzima samo konačno mnogo različitih vrednosti u $[0, +\infty]$.

Aproksimacija jednostavnim funkcijama

Teorema 1.4. *Neka je f nenegativna merljiva funkcija na $\mathbb{R}^m$, i neka je $I_{n,k} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$,*

$$E_{n,k} = f^{-1}(I_{n,k}) \;\; i \;\; F_n = f^{-1}([n, \infty]), \tag{1.6}$$

i s_n jednako $\frac{k-1}{2^n}$ na $E_{n,k}$ i n na F_n.
Tada
(a) $0 \le s_1 \le s_2 \le ... \le f$
(b) $s_n \to f(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}^m$
(c) ako je f ograničena funkcija, tada niz (s_n) konvergira ravnomerno ka f.

Teorema 1.4 je važna za razumevanje Lebegovog integrala. Za razliku od suma u Rimanovom pristupu, koje nastaju pomoću podele na "x"-osi, ovde "imamo podelu" "y"-ose. Skupovi $E_{n,k}$, koji su inverzne slike intervala, mogu biti "komplikovaniji" od intervala i pomoću njihovih mera definiše se Lebegov integral (v. Primer 1.5, koji sledi). Otuda mera (svojstvo σ-aditivnosti) i merljivi skupovi imaju bitnu ulogu.

Propozicija 1.11. Pri oznakama uvedenim u Teoremi 1.4, neka je

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} m(E_{n,k}) + n\, m(F_n).$$

Pokazati da je τ_n neopadajući niz.

Npr. ako je $m = 1$, τ_n je površina koju ograničava grafik funkcije s_n. Uskoro će biti jasno da je granična vrednost niza τ_n Lebegov integral funkcije f.

beskonačno puta nula u integraciji, $0\infty = 0$.
Realna linija ima beskonačnu dužinu. ∞ se pojavljuje u teoriji integracije.?? I ako smo primarno zainteresovani za realne funkcije lim sup ili suma niza pozitivnih realnih funkcija može imati vrednost ∞ u nekim tačkama; i teorija gubi elegantnost ako uvodimo specijalne pretpostavke kada se takva situacija pojavi.

? Definišimo $a + \infty = \infty + a = \infty$ ako je $0 \leq a \leq \infty$, i $a \cdot \infty = \infty \cdot a$ jednako ∞ ako je $0 < a \leq \infty$, i $0 \cdot \infty = 0$. Za ovu definiciju važe komutativni, asocijativni, i distributivni zakon u $[0, \infty]$.
Primetimo da važi sl. propozicija:
Ako a_n i b_n nenegativni nizovi, $a_n \to a$, $b_n \to b$, tada $a_n \cdot b_n \to ab$.
Pitanje. Ako su $a_n \to 0$ i $b_n \to \infty$, da li $a_n \cdot b_n \to 0\infty = 0$?
ODGOVOR: Ne. Konvencija o množenju sa ∞ ne primenjuje ? se na konvergenciju nizova ? (Objasniti!).

Sa K_E označavamo karakterističnu funkciju skupa E definisanu sa $K_E(x) = 1$ ako $x \in E$ i $K_E(x) = 0$ ako $x \notin E$.

Definicija 1.9. Merljiva funkcija $j(x)$, definisana na $\mathbb{R}^m$ je jednostavna merljiva funkcija, ako uzima samo konačno mnogo različitih vrednosti u $[0, \infty)$.

Neka su α_ν medjusobno različite vrednosti jednostavne merljive funkcije i neka je $A_\nu = \{x : j(x) = \alpha_\nu\}$.

Pravolinijski se proverava

$$j(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu K_{A_\nu}.$$

Definicija 1.10. Neka je

$$j(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu K_{A_\nu}$$

jednostavna merljiva funkcija, gde su α_ν medjusobno različite vrednosti. Lebeg-ov integral jednostavne funkcije j na merljivom skupu E definisan je sa

$$\int_E j\, dm = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu\, m(A_\nu \cap E).$$

Za jednostavne funkcije umesto j koristi se i oznaka s.

Definicija 1.11. Neka je $E \subset \mathbb{R}^m$ merljiv skup i neka je f nenegativna merljiva funkcija na $\mathbb{R}^m$. Lebeg-ov integral funkcije f na merljivom skupu E definisan je sa

$$\int_E f\, dm = \sup \int_E j\, dm,$$

gde se supremum uzima preko svih jednostavnih merljivih funkcija j za koje je $0 \leq j(x) \leq f(x)$ na $\mathbb{R}^m$.

Ako je μ pozitivna mera na σ-algebri $\mathfrak{M}$ na skupu X, analogno se definiše Lebeg-ov integral:

Definicija 1.12. Neka je

$$j(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu K_{A_\nu}$$

jednostavna merljiva funkcija, gde su α_ν medjusobno različite vrednosti. Lebeg-ov integral jednostavne funkcije j na merljivom skupu $E \subset X$ definisan je sa

$$\int_E j\, d\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu\, \mu(A_\nu \cap E).$$

Za jednostavne funkcije umesto j koristi se i oznaka s.

Definicija 1.13. Neka je μ pozitivna mera na σ-algebri $\mathfrak{M}$ na skupu X i neka je $E \subset X$ merljiv skup i neka je f nenegativna merljiva funkcija na E. Lebeg-ov integral funkcije f na merljivom skupu E definisan je sa

$$\int_E f\,d\mu = \sup \int_E j\,d\mu,$$

gde se supremum uzima preko svih jednostavnih merljivih funkcija j za koje je $0 \le j(x) \le f(x)$ na E.

Sledeća propozicija je neposredna posledica definicije. Pretpostavlja se da su skupovi i funkcije koje se pojavljuju merljivi.

Propozicija 1.12. (1) ako je $0 \le f \le g$, tada je $\int_E f\,dm \le \int_E g\,dm$
(2) ako je $A \subset B$ i $f \ge 0$, tada $\int_A f\,dm \le \int_B f\,dm$
(3) ako je $f \ge 0$ i c konstanta,$0 \le c \le \infty$, tada

$$\int_E cf dm = c \int_E f dm$$

(4) ako je $f = 0$ za sve $x \in E$, tada $\int_E f dm = 0$
(5) ako je $m(E) = 0$, tada je $\int_E f dm = 0$
(6) ako je $f \ge 0$, tada $\int_E f dm = \int_{\mathbb{R}^m} K_E\, f dm$.

Uputstvo za (3): Ako je s merljiva jednostavna funkcija tako da je $0 \le s \le f$, tada je cs merljiva jednostavna funkcija, $0 \le cs \le cf$ i $\displaystyle\int_E c\,s\,dm = c\int_E s\,dm$. Otuda prvo, sledi $\displaystyle\int_E c\,f\,dm \ge c\int_E f\,dm$ i stoga (3).
Na osnovu osobine 6°, sledi da se m-integral može definisati prvo za funkcije definisane na celom $\mathbb{R}^m$, a zatim pomoću 6° na podskupovima u $\mathbb{R}^m$. Ovu primedbu možemo koristiti da iskaze o integralima na celom $\mathbb{R}^m$ kao integracionom području formulišemo u odgovarajuće iskaze gde integraciono područje neki merljiv podskup u $\mathbb{R}^m$.
Primetimo: Ako je $f : \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$ nenegativna m-integrabilna funkcija na $\mathbb{R}^m$, tada je f konačna s.s. na $\mathbb{R}^m$.

Propozicija 1.13 (jednostavne funkcije definišu meru)**.** Neka su s i t jednostavne merljive funkcije na $\mathbb{R}^m$. Za $E \in \mathfrak{M}$, definišimo

$$\phi(E) = \int_E s\,dm. \tag{1.7}$$

Tada je ϕ mera na $\mathfrak{M}$ i

$$\int_{\mathbb{R}^m} (s+t)\,dm = \int_{\mathbb{R}^m} sdm + \int_{\mathbb{R}^m} tdm. \tag{1.8}$$

Neka je s kao u Definiciji 1.12, i ako su $E_1, E_2, ...$ disjunktni merljivi skupovi čija je unija E, na osnovu σ-aditivnosti Lebegove mere m, sledi

$$\phi(E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, m(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{\nu=1}^{\infty} m(A_i \cap E_\nu) =$$
$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, m(A_i \cap E_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \phi(E_\nu)$$

Takodje, $\phi(\emptyset) = 0$, tako da ϕ nije identički ∞.

Dalje neka su $\beta_1, ..., \beta_m$ različite vrednosti funkcije t, i neka je $B_j = \{x : t(x) = \beta_j\}$. Ako je $E_{ij} = A_i \cap B_j$, tada

$$\int_{E_{ij}} (s+t)dm = (\alpha_i + \beta_j)m(E_{ij})$$

i

$$\int_{E_{ij}} sdm + \int_{E_{ij}} tdm = \alpha_i \, m(E_{ij}) + \beta_j \, m(E_{ij})$$

Dakle (1.8) važi sa E_{ij} umesto $\mathbb{R}^m$. Kako je $\mathbb{R}^m$ disjunktna unija skupova E_{ij}, (1.8) sledi iz prvog dela Propozicije.

Teorema 1.5. * **(Beppo-Levi, Lebeg-ov stav o monotonoj kovergenciji)** *Neka je $\{f_n\}$ niz merljivih funkcija na $\mathbb{R}^m$, i pretpostavimo*
(a) $0 \le f_1 \le f_2 \le ... \le \infty$
(b) $f_n \to f(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}^m$
Tada je f merljiva funkcija, i

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_n \, dm \to \int_{\mathbb{R}^m} f \, dm.$$

Ideja. Neka je s jednostavna merljiva funkcija tako da je $0 \le s \le f$, i c konstanta, $0 < c < 1$. Definišimo

$$E_n = \{x : f_n(x) \ge c\, s(x)\}. \tag{1.9}$$

Tada je,

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_n \, dm \ge c \int_{E_n} s \, dm,$$

a na osnovu Propozicije 1.13(jednostavne funkcije definišu meru),

$$\int_{E_n} s \, dm \to \int_{\mathbb{R}^m} s \, dm.$$

Primer 1.5. Pretpostavimo da imamo oznake iz Teoreme 1.4. Tada

$$\int_{\mathbb{R}^m} s_n \, dm \to \int_{\mathbb{R}^m} f \, dm.$$

Ovaj primer pokazuje da je u definiciji Lebeg-ovog integrala dovoljno uzeti supremum po specijalnim jednostavnim funkcijama s_n.

Integracija redova sa nenegativnim članovima

Teorema 1.6 (Integracija redova sa nenegativnim članovima)**.** *Pretpostavimo da je $f_n : \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$ niz nenegativnih merljivih funkcija, za $n = 1, 2, 3, ...,$ i*

$$f(x) = \sum_1^\infty f_k(x) \;\; (x \in \mathbb{R}^m). \tag{1.10}$$

Tada

$$\int_{\mathbb{R}^m} f dm = \sum_1^\infty \int_{\mathbb{R}^m} f_k dm. \tag{1.11}$$

Uputstvo. Prvo, postoje nizovi $\{s_i^1\}$, $\{s_i^2\}$ prostih merljivih funkcija tako da $s_i^1 \to f_1$ i $s_i^2 \to f_2$, kao u Teoremi 1.4. Ako je $s_i = s_i^1 + s_i^1$, tada $s_i \to f_1 + f_2$, i na osnovu Stava o monotonoj konvergenciji i Propozicije 1.13, sledi

$$\int_{\mathbb{R}^m} (f_1 + f_2)dm = \int_{\mathbb{R}^m} f_1 dm + \int_{\mathbb{R}^m} f_2 dm. \tag{1.12}$$

Dalje, na niz $s_n(x) = \sum_1^n f_k(x)$, primeniti Stav o monotonoj konvergenciji.

Teorema 1.7 (Fatouova lema). *Neka je (f_n) niz nenegativnih merljivih funkcija na $\mathbb{R}^m$ i*

$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

Tada je

$$\int_{\mathbb{R}^m} f dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_n dm \tag{1.13}$$

Neka je

$$f_n^-(x) = g_n(x) = \inf_{\nu \geq n} f_\nu(x) \tag{1.14}$$

Tada je $g_n \leq f_n$ i otuda

$$\int_{\mathbb{R}^m} g_n dm \leq \int_{\mathbb{R}^m} f_n dm \tag{1.15}$$

leva strana (1.15) teži levoj strani (1.13). Otuda (1.13) sledi iz (1.15).

Propozicija 1.14. Neka je f nenegativna merljiva funkcija na $\mathbb{R}^m$. Za $E \in \mathfrak{M}$, definišimo

$$\mu(E) = \int_E f\, dm. \tag{1.16}$$

Tada je μ mera na $\mathfrak{M}$ i

$$\int_E f\, dm = \int_{E_1} f dm + \int_{E_2} f dm + ... \tag{1.17}$$

ako su skupovi $E_1, E_2, ...$ merljivi, medjusobno disjunktni i $E = \cup_{k=1}^\infty E_k$.

Iz

$$K_E = \sum_{n=1}^\infty K_{E_n}$$

dobija se

$$K_E(x)f(x) = \sum_{n=1}^\infty K_{E_n}(x)f(x).$$

Integrišući levu i desnu stranu, nalazi se (1.17).

1.2.2. *Lebeg-ov integral realnih i kompleksnih funkcija.* Neka je f realna m-merljiva funkcija na m-merljivom skupu $E \subset \mathbb{R}^m$. Ako bar jedan od integrala $\int_E f^+ dm$, $\int_E f^- dm$ ima konačnu vrednost, tada se Lebeg-ov integral f na E definiše sa

$$\int_E f dm = \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm$$

Ako je Lebeg-ov integral funkcije f na E konačan kažemo da je f integrabilna u Lebeg-ov smislu ili m-integrabilna.

Klasu m-integrabilnih funkcija označavamo sa $L(E) = L_R(E)$.

Propozicija 1.15. Neka je f realna m-merljiva funkcija na m-merljivom skupu $E \subset \mathbb{R}^m$. Tada $f \in L(E)$ ako i samo ako $|f| \in L(E)$

Ako $f \in L(E)$, tada oba integrala $\int_E f^+ dm$, $\int_E f^- dm$ imaju konačnu vrednost, pa na osnovu specijalnog slučaja Teoreme 1.6 (integracija redova sa nenegativnim članovima), funkcija $|f| = f^+ + f^-$ je m-integrabilna.
Obrnuto, koristiti $f^+, f^- \leq |f|$.

Definicija 1.14. Neka je E merljiv; $L^1(E) = L(E)$ je familija kompleksnih merljivih funkcija na E za koje

$$\int_E |f|\, dm < +\infty.$$

Ako je $f = u + i\,v$ i $f \in L^1(E)$, definišimo

$$\int_E f dm = \int_E u dm + i \int_E v dm$$

Propozicija 1.16. Pretpostavimo da je E merljiv skup, f i $g \in L^1(E)$ i a i b kompleksni brojevi. Tada $af + bg \in L^1(E)$ i

$$\int_E (af + bg) dm = a \int_E f dm + b \int_E g dm \tag{1.18}$$

(1.18) sledi iz

$$\int_E (f + g) dm = \int_E f dm + \int_E g dm \tag{1.19}$$

i

$$\int_E (af) dm = a \int_E f dm. \tag{1.20}$$

Opšti slučaj (1.19), sledi ako dokažemo (1.19) za realne funkcije f i g.
Pretpostavimo ovo, i definišimo $h = f + g$. Tada je

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+. \tag{1.21}$$

Na osnovu Propozicije 1.12, sv.(3), (1.20) važi ako je $a \geq 0$. Koristeći relacije kao $(-u)^+ = u^-$, proveriti da (1.20) važi za $a = -1$. Slučaj $a = i$, jednostavno se proverava. Ako je $f = u + iv$, tada

$$\int (if) dm = \int (iu - v) dm = \int (-v) dm + i \int u dm =$$
$$-\int (v) dm + i \int u dm = i(\int u dm + i \int v) dm = i \int f.$$

Na osnovu idukcije i formule (1.19), sledi:

Propozicija 1.17 (aditivnost integrala za konačne sume)**.** Pretpostavimo da je E merljiv skup, $f_k \in L^1(E)$, $(k = 1, \cdots, n)$, i $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$. Tada je

$$\int_E s_n dm = \sum_{k=1}^n \int_E f_k dm$$

Teorema 1.8. *Ako je $f \in L^1(E)$, tada je*

$$|\int_E f dm| \leq \int_E |f| dm \tag{1.22}$$

Neka je $z = \int_E f dm$. Na osnovu leme o polarnoj formi $z = re^{i\varphi}$, gde je $r = |z|$; otuda je

$$|z| = \int_E e^{-i\varphi} f dm = \int_E Re(e^{-i\varphi} f) dm \le \int_E |f| dm.$$

Teorema 1.9. (Lebegov stav o dominantnoj konvergenciji) *Pretpostavimo da je $\{f_n\}$ niz kompleksnih merljivih funkcija na $\mathbb{R}^m$ i da*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{1.23}$$

postoji za svako $x \in \mathbb{R}^m$. Ako postoji funkcija $g \in L^1$ tako da

$$|f_n(x)| \le g(x) \;\; (n = 1, 2, 3, ...; x \in \mathbb{R}^m), \tag{1.24}$$

tada $f \in L^1$,

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| dm = 0, \tag{1.25}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x) dm = \int f dm \tag{1.26}$$

$\triangleright$ Neka je $s_n = 2g - |f_n - f|$,

$$J_n = \int |f_n - f| dm \text{ i } I_n = \int s_n dm.$$

Tada

$$\liminf_{n\to\infty} I_n = \int 2g\, dm - \limsup_{n\to\infty} J_n. \tag{1.27}$$

Kako je $|f_n - f| \le 2g$, $s_n = 2g - |f_n - f|$ je niz nenegativnih funkcija. Otuda, kako $s_n \to 2g$, primenom Fatou-ve leme, dobija se

$$\int 2g\, dm - \limsup_{n\to\infty} J_n \ge \int_{\mathbb{R}^m} 2g\, dm.$$

Kako je $\int 2g\, dm$ konačan,

$$\limsup_{n\to\infty} J_n \le 0.$$

Stavovi o montonoj konvergenciji, dominatnoj konvergenciji i integraciji redova sa proizvoljnim članovima ?? pokazuju prednosti Lebegovog integrala nad Rimanovim jer se za primenu pod pogodnijim uslovima može zaključiti da niz integrala konvergira integralu granične funkcije.

Propozicija 1.18. Neka je f merljiva funkcija na $\mathbb{R}^m$ i $f \in L(\mathbb{R}^m)$. Za $E \in \mathfrak{M}$, definišimo

$$\phi(E) = \int_E f\, dm. \tag{1.28}$$

Tada je ϕ σ-aditivna kompleksna funkcija skupa (kompleksna mera) na $\mathfrak{M}$ i

$$\int_E f\, dm = \int_{E_1} f dm + \int_{E_2} f dm + ... \tag{1.29}$$

ako su skupovi $E_1, E_2, ...$ merljivi, medjusobno disjunktni i $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Uputstvo: Ako je f realna funkcija, primeniti Propoziciju 1.14 na f^+ i f^-. Ovde se, za razliku od Propozicije 1.14, pretpostavlja da je f m-integrabilna funkcija na $\mathbb{R}^m$. Otuda je ϕ ograničena na $\mathfrak{M}$, jer je

$$|\phi(E)| \leq \int_E |f| dm \leq \int_{\mathbb{R}^m} |f| dm \leq +\infty$$

za svako $E \in \mathfrak{M}(m)$.

Primer 1.6. Neka nenegativna funkcija $f \in L(\mathbb{R}^m)$ i neka je

$$[f]_n = \begin{cases} f & \text{ako} f \leq n \\ n & \text{ako} f \geq n \end{cases}$$

niz tzv. *sasečenih funkcija* funkcije f. Kako niz $[f]_n \to f$, na osnovu Stava o monotonoj konvergenciji

$$\lim_{n\to\infty} \int [f]_n(x) dm = \int f dm. \tag{1.30}$$

Propozicija 1.19. **(apsolutna neprekidnost m -integrala)**
Neka je $f \in L(\mathbb{R}^m)$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$ tako da za svaki m-merljiv skup E iz $\mathbb{R}^m$

$$m(E) < \delta \Rightarrow |\int_E f dm| < \varepsilon. \tag{1.31}$$

Dovoljno je dokazati za realne funkcije f. Kako je $f = f^+ - f^-$, možemo pretpostaviti da je $f \geq 0$. Na osnovu Primera 1.6,

$$\lim_{n\to\infty} \int (f - [f]_{n_0})\, dm = 0, \tag{1.32}$$

i otuda postoji prirodan broj n_0 tako da

$$\int |f - [f]_{n_0}|\, dm < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.33}$$

Neka je $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\, n_0}$. Otuda, kako je

$$\int_E |f|\, dm \leq \int_E |f - [f]_{n_0}|\, dm + \int_E |[f]_{n_0}(x)|\, dm,$$

sledi dokaz.

1.2.3. **Lebeg-ov integral i skupovi mere nula.** Konačni i prebrojivi skupovi su mere nula. Interesantniji primer je Kantorov skup K (videti 1.14), koji je zatvoren, neprebrojiv i ima meru nula. Ovaj primer pokazuje da je vizuelno teško opisati skupove mere nula, koji imaju važnu ulogu u Lebeg-ovoj teoriji integrala.

Kompaktan skup F ima meru nula akko ima svojstvo konačnog pokrivanja intervalima čija je totalna dužina proizvoljno mala : za svako $\varepsilon > 0$ postoji konačno mnogo intervala koji pokrivaju F i čija je totalna dužina manja od ε.

Skup Q racionalnih brojeva je prebrojiv i otuda ima meru nula.
Interesantno je da skup $Q \cap [0, 1]$ nema svojstvo konačnog pokrivanja intervalima cija je totalna dužina proizvoljno mala .

Neka je P svojstvo koje tačka x ima ili nema.
Neka je E merljiv. P skoro svuda na E (P s. s. na E) znači postoji skup N mere nula tako da P važi na $E \setminus N$.

Npr. ako su f i g merljive funkcije na $\mathbb{R}^m$ i

$$m(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0 \tag{1.34}$$

kažemo da je $f = g$ s.s. $[m]$ i pišemo $f \sim g$.
Podvucimo ako je $f \sim g$, tada je

$$\int_E f dm = \int_E g dm. \tag{1.35}$$

za svaki merljiv skup E.
Neka je $N = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ (definisan sa (1.34)); E je unija skupova $E \setminus N$ i $E \cap N$; $f = g$ na $E \setminus N$ i $m(E \cap N) = 0$; otuda, na osnovu Propozicije 1.18(tj. jednakosti (1.29) za specijalan slučaj dva skupa), sledi

$$\int_E (f-g) dm = \int_{E \setminus N} (f-g) dm + \int_N (f-g) dm = 0. \tag{1.36}$$

Na sličan način, pomoću skupa $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ umesto skupa N, dokazuje se: Ako je $f = g$ s.s. na merljivom skupu E, tada je

$$\int_E f dm = \int_E g dm. \tag{1.37}$$

Ovu osobinu integrala možemo i ovako formulisati: Ako je $f = 0$ s.s. na E, tada je $\int_E f dm = 0$.

Videti Stavove 11, 12,14,15,16 [Alj].

Integracija redova sa proizvoljnim članovima

Teorema 1.10. *Pretpostavimo da je $\{f_n\}$ niz kompleksnih merljivih funkcija definisanih s.s. na $\mathbb{R}^m$ i da*

$$\sum_1^\infty \int_{\mathbb{R}^m} |f_k| dm < +\infty \tag{1.38}$$

Tada

$$f(x) = \sum_1^\infty f_k(x) \tag{1.39}$$

konvergira za skoro svako $x \in \mathbb{R}^m$, $f \in L^1$, i

$$\int_{\mathbb{R}^m} f dm = \sum_1^\infty \int_{\mathbb{R}^m} f_k dm \tag{1.40}$$

$\triangleright$ Neka su funkcije $\{f_n\}$ definisane na skupovima E_n i neka je $E = \cap_{k=1}^\infty E_k$. Proveriti da je $m(\mathbb{R}^m \setminus E) = 0$.
Definišimo $S^+(x) = \sum_1^\infty |f_k(x)|$, $s_n = \sum_1^n f_k$.
Tada $|s_n| \leq S^+$, $s_n(x) \to f(x)$. Na osnovu pretpostavke (1.38) i Teoreme 1.6 (Integracija redova sa nenegativnim članovima), $S^+(x)$ je integrabilna funkcija na $\mathbb{R}^m$. Otuda $S^+(x)$ je konačna funkcija s.s. i stoga red (1.39) konvergira s.s.

??Kako $s_n(x) \to f(x)$ s.s, primenom Lebeg-ovog stava o dominantnoj konvergenciji na niz funkcija s_n, nalazimo

$$\int_{\mathbb{R}^m} s_n dm \to \int_{\mathbb{R}^m} f dm$$

kada $n \to \infty$.
S druge strane na osnovu Propozicije o aditivnost integrala za konačne sume,

$$\int_{\mathbb{R}^m} s_n dm = \sum_1^n \int_{\mathbb{R}^m} f_k dm.$$

Otuda sledi (1.40).

Podvucimo sledeće: ako su $\{f_n\}$ definisane za svako $x \in \mathbb{R}^m$, iz (1.38) sledi samo da red (1.39) konvergira s.s.

Primer 1.7. Neka je f nenegativna m-merljiva funkcija i neka je E m-merljiv skup. Tada

$$\int_E f dm = 0 \Rightarrow f = 0 \; s.s. \, na \; E.$$

Uputstvo: Neka je $E_n = \{x \in E : f(x) > 1/n\}$. Tada se skup tačaka $A \subset E$, na kojem je $f(x) > 0$ može napisati u obliku $A = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Propozicija 1.20. Neka je $f \in L(\mathbb{R}^m)$ i neka je

$$\int_E f dm = 0 \tag{1.41}$$

za svaki m-merljiv skup E u $\mathbb{R}^m$. Tada je $f = 0$ s.s. na $\mathbb{R}^m$.

Uputstvo: Neka je $A = \{x : f(x) \geq 0\}$ i $B = \{x : f(x) \leq 0\}$. Tada je, na osnovu Primera 1.7, $f = 0$ s.s. na A i B.

Propozicija 1.21. Neka je $f \in L(\mathbb{R})$ i neka je

$$\int_{-\infty}^{x} f dm = 0 \tag{1.42}$$

za svako $x \in \mathbb{R}$. Tada je $f = 0$ s.s. na $\mathbb{R}$.

Uputstvo: Dokažimo da

$$\int_E f dm = 0 \tag{1.43}$$

za svaki m-merljiv skup E.
Iz (1.42) sledi da (1.43) važi za svaki otvoren interval u $\mathbb{R}$ i otuda za svaki otvoren skup, jer su otvoreni skupovi u $\mathbb{R}$ najviše prebrojiva unija disjunktnih otvorenih intervala. No tada (1.43) važi za svaki Borelov skup E, a time na osnovu Stava ?? i za svaki m-merljiv skup E.

1.2.4. **Odnos izmedju Lebeg-ovog i Riemann-ovog integrala.**

Teorema 1.11. *Ako je f R-integrabilna na $[a, b]$, tada je f i Lebeg-integrabilna na $[a, b]$ i*

$$\int_a^b f dm = \int_a^b f dx$$

Obrnuto ne važi kao što pokazuje sledeći primer:

Primer 1.8 (Dirihleova funkcija)**.** Neka je f definisano na $[0,1]$ sa $f(x)=1$ kada je x iracionalan broj i $f(x)=0$ kada je x racionalan broj.

Ako je $f\in\Re[a,b]$, tada je $|f|$ ograničena funkcija na $[a,b]$ i stoga postoji konstanta M tako da je $f+M$ nenegativna funkcija na $[a,b]$.
Dakle, možemo pretpostaviti da radimo sa nenegativnim funkcijama. Podvucimo da iz $f\in\Re$ sledi da je f ograničena. Otuda, ako je f merljiva sledi da je m-integrabilna. Neka je $f\geq 0$ R-integrabilna na $[a,b]$ i neka je podela (P_n) zadata tačkama $x_k=a+\frac{k}{2^n}(b-a)$, $I_k^{(n)}=(x_{k-1},x_k]$, $m_k^{(n)}=\inf\{f(x):x\in I_k^{(n)}\}$ i $M_k^{(n)}=\sup\{f(x):x\in I_k^{(n)}\}$. Za fiksirano n definišimo jednostavne funkcije s_n i S_n na $[a,b]$: $s_n(x)=m_k^{(n)}$ i $S_n(x)=M_k^{(n)}$ za $x\in I_k^{(n)}$ $(k=1,2,...,2^n)$. Na osnovu teoreme o karakterizaciji R-integrala gornja i donja Darbuova suma

$$s(P_n)=\int_a^b s_n(x)dx \;\; i \;\; S(P_n)=\int_a^b S_n(x)dx \tag{1.44}$$

teže ka $I=\int_a^b fdx$.
Definišimo

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x) \text{ i } S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x).$$

Primenom teoreme o monotonoj kovergenciji, sledi da $s(P_n)$ i $S(P_n)$ respektivno teže ka $I=\int_a^b sdm$ i $I=\int_a^b Sdm$. Otuda, pokazati da

$$s(x)=S(x)=f(x) \;\; s.s. \; na\,[a,b].$$

Funkcije s i S su merljive kao granične vrednosti merljivih funkcija, pa je takva i f. $\square$

Napomena: Označimo sa $\Re$ klasu R-integrabilnih funkcija.
U literaturi se često navodi u dokazu ove teoreme: Kako je i Riemann-ov inegral apsolutno integrabilan, dovoljno je da u nizu implikacija $f\in\Re\Rightarrow|f|\in\Re\Rightarrow|f|\in L\Rightarrow f\in L$ dokažemo drugu imlikaciju.
Ako je f merljiva onda je tačna treća implikacija. Da li je tačna treća implikacija u opštem slučaju ?
Npr. neka je E nemerljiv skup, razmtran u Sekciji XX i funkcija f jednaka -1 na E i 1 na $[0,1]\subset E$, tada je $|f|$ jednako 1 na $[0,1]$, f nije merljiva funkcija.
Kako je $|f(x)-f(y)|=|f(x)|+|f(y)|$, ako su $f(x)$ i $f(y)$ različitog znaka, iz $f\in\Re$ sledi $f^+\in\Re$.

Teorema 1.12. *Ograničena funkcija f je R-integrabilna na $[a,b]$ ako i samo ako je neprekidna s.s. na $[a,b]$.*

Dokaz se izvodi u kursevima Analizi 1-2.

Primer 1.9. a. Ako je f neprekidna s.s. na $[a,b]$, dokazati da je f merljiva na $[a,b]$.
b. Pomoću a. i Teoreme 1.12, dokazati Teoremu 1.11.

Dokaz b. Pretpostavimo da je f R-integrabilna. Dakle, na osnovu a. i Teoreme 1.12, sledi da je f merljiva na $[a,b]$; i stoga postoji Lebegov integral $\int_a^b fdm$. Teorema 1.11 sada sledi iz nejednakosti $s(P_n)\leq\int_a^b fdm\leq S(P_n)$. $\square$

Primer 1.10. Neka je $f(x) = \frac{sinx}{x}$.
a. f ima na $(0, \infty)$ nesvojstven Riemann-ov integral.
b. Izračunati $I = \int_0^\infty f dx$, metodama kompleksne analize.
c. Pokazati da f nije m-integrabilna na $(0, \infty)$
Uputstvo za a. Na osnovu parcijalne inegracije $\int f dx = \frac{\cos x}{x} - \int \frac{\cos x}{x^2}$.
Uputstvo za b. Ponoviti Primere iz Furije-ov tip integrala.
Uputstvo za c.

$$\int_0^\infty |f| dm = \sum_{k=0}^\infty \int_0^\pi \frac{sinx}{x + k\pi} dm = \infty.$$

Primer 1.11. Neka je $I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dm$.
a. ako je $f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$, proveriti da je $f_n(x) \le \frac{1}{\sqrt{x}}$ na $[0, 1]$.
b. Izračunati $\lim I_n$.
c. ako je $f_n(x) = \frac{n^3 x^{3/4}}{1+n^4x^2}$, izračunati $\lim I_n$.

Uputstvo: $t = t_n = n^2 x$ $n = \sqrt{t}/\sqrt{x}$, $f_n(x) = s(t)g(x)$, gde je $s(t) = \frac{t^{3/2}}{1+t^2}$, $g(x) = \frac{1}{x^{3/4}}$. Kako je $s(t) \le 1$, $|f_n(x)| \le g(x)$.

Primer 1.12. Neka je $f_n(t) = e^{-xt} \frac{t^n}{1-e^{-t}}$. Za $0 < x < 1$ i $n \ge 1$ prirodan broj dokazati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\, dm(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{n!}{(x+k)^{n+1}}.$$

Uputstvo: $(1 - e^{-t})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kt}$, $t > 0$; i $(1 - e^{-t})^{-1} = -e^t(1 - e^t)^{-1} = -\sum_{k=1}^{+\infty} e^{kt}$, $t < 0$. Na osnovu stava o integraciji redova sa nenegativnim članovima, $I_2 = \int_{-\infty}^0 f_n(t)dt = \sum_{\nu=-\infty}^{-1} A_\nu$, gde je $A_\nu = -\int_{-\infty}^0 t^n e^{-(x+\nu)t} dt$; smenom $\tau = (x + \nu)t \ge 0$, dobija se $A_\nu = \frac{1}{(x+\nu)^\nu} \int_0^{+\infty} \tau^n e^{-\tau} dt = \frac{n!}{(x+\nu)^\nu}$.

Primer 1.13. Neka je na $(0, 1)$ definisan niz m-integrabilnih funkcija

$$f_n = \begin{cases} n(n+1) & \text{ako } x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{u ostalim tačkama} \end{cases}$$

Granična vrednost f ovog niza je 0, a $\int_0^1 f_n\, dm = 1$.
Niz $(-f_n)$ pokazuje da se Fatou lema ne proširuje na negativne funkcije u opštem slučaju.

Kantorov skup

Primer 1.14. (Kantorov skup K_s) Neka je $0 < s \le \frac{1}{3}$ i neka je $G_1 = (\frac{1}{2} - \frac{s}{2}, \frac{1}{2} + \frac{s}{2})$ interval dužine s, tj. srednji deo segmenta $\mathrm{I} = [0, 1]$ i $F_1 = [0, 1] \setminus G_1$. Skup F_1 sastoji se od dva segmenta;iz svakog od njih odstranimo srednji deo dužine $s\,\frac{1}{3}$ i tako dobijeni skup označimo sa F_2. Itd. u n-tom koraku odstranimo 2^{n-1} intervala dužine $s\,\frac{1}{3^{n-1}}$ i neka je G_n skup tačaka odstranjenih posle prvih n koraka i $F_n = F_n^s$ skup preostalih tačaka, tj. $F_n = [0, 1] \setminus G_n$. Pogodno je uvesti smenu $t = 3s$.
Skup $\mathbb{K} = \mathbb{K}_t = \bigcap_1^\infty F_k^s$ naziva se $\widehat{\text{K}}$antor-ov skup. Kako je dužina odstranjenih intervala jednaka

$$s + s\,\frac{2}{3} + s\,\frac{4}{3^2} + \cdots + s\,(\frac{2}{3})^n + \cdots = 3\,s = t$$

i $0 < s < \frac{1}{3}$, to *Kantor-ov skup* $\mathbb{K} = \mathbb{K}_t$ ima pozitivne mere $1 - 3s = 1 - t > 0$ ako je $0 < s < \frac{1}{3}$, tj $0 < t < 1$.
Razmotrimo strukturu Kantor-ovog skupa $K = K_1$.
Kantor-ovom skupu, jasno, pripadaju krajevi izbačenih intervala : $0, 1, 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9, \dots$.
Primetimo da na prvi pogled izgleda kao da Kantor-ovom skupu ? $K = K_1$ pripadaju samo krajevi izbačenih intervala, ali ovaj skup je neprebrojiv i ima komplikovanu strukturu i meru 0.
? Dokazati neposredno, da tačka $1/4$ pripada K, a ne pripada krajevima izbačenih intervala.
Zapišimo svako x, $0 \le x \le 1$ u trojnom (trijadskom) sistemu

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \dots,$$

gde brojevi a_n uzimaju vrednosti $0, 1$ i 2.
Kao i u slučaju decimalnog zapisa neki brojevi dozvoljavaju dva zapisa

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \cdots + \frac{0}{3^n} + \cdots = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n} + \dots$$

Ako se isključe zapisi koji počev od nekog mesta imaju samo dvojke, onda je zapisivanje jednoznačno.
Jednostavno se proverava da skupu K pripadaju tačke x koje se bar na jedan način mogu zapisati u trojnom (trijadskom) sistemu pomću 0 i 2. Svakom $x \in K$ korespondiramo niz

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \tag{1.45}$$

gde je a_n 0 ili 2 i

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots, \tag{1.46}$$

gde je $b_n = 0$ ako je $a_n = 0$; i $b_n = 1$ ako je $a_n = 2$.
Nizove (1.46) pretstavljaju dijadski zapis segmenta $[0, 1]$. Takvim postupkom, definiše se preslikavanje K na $[0, 1]$ i otuda K ima moć kontinuma.

Primer 1.15 (Inegral na komlementu Cantor-ovog skupa)**.** Neka je f nula na Cantor-ovom skupu $K = K_1$ i $f(x) = k$ na svakom od komplementarnih intervala dužine 3^{-k}. Dokazati da je $I = \int_0^1 f dm = 3$
Uputstvo: $I = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{2^{k-1}}{3^k}$.

Primer 1.16. Izračunati

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{x/2} dm$$

i

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n e^{-2x} dm.$$

Primer 1.17 (Inegral Puason-ovog jezgra)**.** Ponoviti integral Puason-ovog jezgra P_r. Da li se za izračunavanje $\lim I_r$, gde je $I_r = \int P_r(t)dt$, kada r teži 1, može primeniti Lebeg-ov stav o dominantnoj konvergenciji?

Čitaoci koji nisu upoznati sa Hilbert-ovim prostorima mogu pogledati sekciju o Hilbert-ovim prostorima u vezi Primera 1.18.

Primer 1.18 (nekompletnost $\mathcal{R}_2$)**.** Proveriti
a) vektorski prostor $\mathrm{C}_2[a,b]$ neprekidnih funkcija na $[a,b]$ sa skalarnim proizvodom

$$(f,g)=\int_a^b f\,\overline{g}\,dt$$

nije *Hilbert-ov prostor* .
b) $\mathrm{C}_2[a,b]$ nije zatvoren potprostor u $\mathcal{R}_2[a,b]$.
c) vektorski prostor $\mathrm{C}[a,b]$ neprekidnih funkcija na $[a,b]$ je kompletan u odnosu na max normu.
d) $\mathcal{R}_2[a,b]$ nije kompletan.
e) $\mathcal{L}_2[a,b]$ je kompletan.
$\triangleright$ a)Primer : $f_n(x)=-1,\, za\, -1\le x\le -\frac{1}{n}$, $f_n(x)=n\,x, za\, -\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}$ i $f_n(x)=1, za\,\frac{1}{n}\le x\le 1$; pokazuje da $\mathrm{C}_2[a,b]$ nije *Hilbert-ov prostor* .
d) Neka je $0<s<\frac{1}{3}$ i f_n karakteristična funkcija skupa $F_n=F_n^s$(koristimo oznake iz Primera 1.14); niz f_n je *Koši-jev niz* u $\mathcal{R}_2[a,b]$. Pretpostavimo da f_n konvergira nekom $f\in\mathcal{R}_2[0,1]$. Tada je f s.s. jednako karakterističnoj funkciji skupa $\mathbb{K}=\mathbb{K}_s$ i otuda f je prekidna s.s. na $\mathbb{K}$; tako da, na osnovu *Lebeg-ovog kriterijuma* , sledi $f\notin\mathcal{R}_2[0,1]$. Dakle ,$\mathcal{R}_2[a,b]$ nije kompletan. $\diamondsuit$

2. Integracija 2

2.1. **integracija na $\mathbb{R}$.** [Ponoviti Riemann-Stieltjesov integral (Stav 6,7,8,9 i 10 [Alj])]
O integraciji v. [Alj], glava III: Apstraktna mera i integral, Realna mera,Radon-Nikodimov stav i Lebeg-ovo razlaganje mere, Neprekidnost i diferencijabilnost, Izvod monotone funkcije i integral njenog izvoda, Diferenciranje i integracija, Neke osobine Lebeg-ovog integrala na $\mathbb{R}$, Prostor $L_p(a,b)$.
Navedimo samo neke rezultate.

2.1.1. *Riman-Stiltesov integral.* **Funkcije Ograničene varijacije**

Za funkciju f koja preslikava konačan i zatvoren razmak $[a,b]$ (respektivno otvoren (a,b)) u $\mathbb{R}$ kažemo da ne opada (monotono raste) ako za svaki par tačaka x_1,x_2 iz $[a,b]$ (respektivno iz (a,b))

$$x_1<x_2 \quad\Rightarrow\quad f(x_1)\le f(x_2).$$

Funkcija f strogo monotono raste ako je pod navedinim uslovima $f(x_1)<f(x_2)$.

Na simetričan način se definišu funkcije koje ne rastu (monotono opadaju) i strogo monotono opadaju.
Klasa monotonih funkcija satoji se od neopadjućih i nerastućih funkcija.

Podvucimo ako f ne opada na konačanom i zatvorenom razmak $[a,b]$, tada je f ograničena na $[a,b]$ i $f([a,b])\subset\big[f(a),f(b)\big]$. Ako funkcija f ima skokove onda je $f([a,b])\neq\big[f(a),f(b)\big]$; navesti neki primer.

Ponoviti sledeća svojstva monotonih funkcija ([Ka-Ad]):

Monotona funkcija može imati samo prekide prve vrste. Skup prekida prve vrste je konačan ili prebrojiv.

Svaka monotono rastuća funkcija f može se napisati u obliku $f=s_f+g$, gde je s_f njena funkcija skoka, g monotono rastuća i neprekidna funkcija.

Iz pedagoških razloga definišemo prvo funkcije *ograničene varijacije* na konačnom intervalu, a zatim na celom $\mathbb{R}$.
Neka je realna funkcija f definisana na konačnom razmaku $[a, b]$ i neka je $\mathcal{P}$ podela tog razmaka

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Definicija 2.1. Ako je

$$V(f) = V_a^b(f) = \sup \sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})|,$$

gde se supremum uzima po svim podelama $\mathcal{P}$ razmaka $[a, b]$, konačan broj, kažemo da je f *ograničene varijacije* na $[a, b]$. $V_a^b(f)$ je njena *totalna varijacija*. Klasu funkcija ograničene varijacije označavamo sa BV. Na isti način definišu se ovi pojmovi i za kompleksnu funkciju.

Primer 2.1. Ako je f monotona na $[a, b]$, tada je f ograničene varijacije na $[a, b]$; i $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.

Primer 2.2. Funkcija

$$f(x) = x \cos \pi/2x \ (0 < x \leq 1), \ f(0) = 0,$$

je neprekidna na $[0, 1]$, ali nije ograničene varijacije.

? $\cos \pi/2x = \pm 1$ akko $x = x_{2n} = \frac{1}{2n}$ i $\cos \pi/2x = 0$ akko $x = x_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$. Zaista, ako za podeone tačke uzmemo, $0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \cdots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$, dobijamo

$$\sum_{\nu=1}^{2n} |f(x_{\nu+1}) - f(x_\nu| = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \to \infty \ (n \to \infty).$$

Ako su g i h dve monotono neopadajuće funkcije na $[a, b]$, tada je funkcija $g - h$ ograničene varijacije na $[a, b]$. Važi i obrnuto. U tom cilju definišimo dve monotono neopadajuće funkcije.
Za datu podelu $\mathcal{P}$

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = x, \ x \leq b$$

razmaka $[a, x]$ rastavimo

$$\sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})|$$

na dve sume Σ^+ i Σ^-, tako da se u Σ^+ nalaze pozitivne, a u Σ^- negativne diferencije $f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})$. Definišimo

$$p(x) = \sup \sum {}^{+}[f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})]$$

i

$$n(x) = \sup \sum {}^{-}|f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})|.$$

Teorema 2.1. ** Ako je f ograničene varijacije na $[a, b]$, tada je*

$$f(x) - f(a) = p(x) - n(x) \tag{2.1}$$

i

$$V(x) = p(x) + n(x), \tag{2.2}$$

gde je $V(x) = T_f(x) = V_a^x(f)$.

Za bilo koju podelu razmaka $[a, x]$,

$$f(x) - f(a) = \sum{}^{+}[f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})] - \sum{}^{-}|f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})|. \tag{2.3}$$

Otuda, na osnovu definicije funkcija p i n, sledi prvo

$$f(x) - f(a) + \sum{}^{-} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| = \sum{}^{+}[f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})] \le p(x)$$

i

$$\sum{}^{+}[f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})] - f(x) + f(a) = \sum{}^{-} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| \le n(x),$$

a zatim

$$f(x) - f(a) + n(x) \le p(x)$$

i

$$p(x) - f(x) + f(a) \le n(x).$$

Iz poslednje dve nejednakosti sledi (2.1).

Ako je f kompleksna funkcija, tada je $f = \gamma$ put u $\mathbb{C}$. Dužina puta γ se obično definiše kao supremum dužina svih "upisanih" poligonalnih linija u γ i označava sa $|\gamma|$. Kažemo da γ ima konačnu dužinu (γ je rektificibilno) ako je dužina $|\gamma|$ konačana. Jasno je da γ ima konačnu dužinu akko je *ograničene varijacije* i da je $V_a^b\gamma = |\gamma|$.

Funkcije definisane na $\mathbb{R}$.

Za kompleksnu funkciju f definisanu na $\mathbb{R}$ njena *funkcija totalne varijacije* T_f definiše se sa

$$T_f(x) = \sup \sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})|, \ -\infty < x < \infty,$$

gde se supremum uzima po svim podelama $\mathcal{P}$

$$-\infty < x_0 < x_1 < ... < x_n = x.$$

Ako je T_f ograničena funkcija, tada postoji konačan

$$V(f) = \lim_{x \to +\infty} T_f(x). \tag{2.4}$$

U ovom slučaju kažemo da je f *ograničene varijacije* i da je $V(f)$ *totalna varijacija* funkcije f. Klasu funkcija ograničene varijacije označavamo sa BV.

Kažemo da je $f \in BV$ *normalizovano* ako $f(x) \to 0$ kada $x \to -\infty$ i ako je f neprekidna sa leve (respektivno sa desne) strane na $\mathbb{R}$. Klasu ovih funkcija označavamo sa NBV (respektivno sa NBV_d).

$\triangle$ Definišimo

$$f_1 = \frac{1}{2}(T_f + f), \ f_2 = \frac{1}{2}(T_f - f) \tag{2.5}$$

Pokazati ako je f realna funkcija da funkcije f_1 i f_2 pripadaju NBV (normalizovane ograničene varijacije), da su monotono neopadajuće funkcije i da takodje daju traženo razlaganje funkcije f u Teoremi 2.1.

Dokazati
(a) Ako $f \in BV$ i $x < y$, tada

$$|f(y) - f(x)| \leq T_f(y) - T_f(x)$$

(b) Ako $f \in BV$, tada $f(x_-)$ i $f(x_+)$ postoje za svako $x \in \mathbb{R}$, skup tačaka prekida je najviše prebrojiv, i postoji jedna konstanta c i jedinstvena funkcija $g \in NBV$ tako da je $f(x) = c + g(x)$ u svim tačkama neprekidnosti funkcije f. Takodje, $V(g) \leq V(f)$.
(c) Funkcije

$$f_1 = \frac{1}{2}(T_f + f), \ f_2 = \frac{1}{2}(T_f - f) \tag{2.6}$$

pripadaju NBV (? normalizovane ograničene varijacije), su monotono neopadajuće funkcije i daju takodje razlaganje funkcije $f = f_1 - f_2$.

Neka su realne funkcije f i g definisane i ograničene na konačnom razmaku $[a, b]$ i neka je $\mathcal{P}$ podela tog razmaka

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Neka ξ_ν pripadaju podrazmacima $[x_{\nu-1}, x_\nu]$. Označimo sa $m(\mathcal{P})$ najveću od dužina podrazmaka podele $\mathcal{P}$ i definišimo

$$\sigma(\mathcal{P}) = \sigma(f, g; \mathcal{P}) = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)[g(x_\nu) - g(x_{\nu-1})].$$

Definicija 2.2. Ako postoji broj $I(f, g)$ tako da svakom $\varepsilon > 0$ odgovara $\delta > 0$, tako da za svaki izbor tačaka ξ_ν u $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ i nezavisno od uočene podele $\mathcal{P}$

$$m(\mathcal{P}) < \delta \ \Rightarrow \ |\sigma(f, g; \mathcal{P}) - I(f, g)| < \varepsilon,$$

kažemo da je $I(f, g)$ *Riman-Stieltjesov integral* funkcije f u odnosu na funkciju g na razmaku $[a, b]$.

Riman-Stieltjesov integral označavamo sa

$$\int_a^b f \, dg.$$

2.1.2. **Fubini-evi stavovi.** *

Neka je G oblast u ravni ograničena vertikalnim pravama $x = a$, $x = b$ i funkcijama $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$.
Površina oblasti G data je sa

$$V(G) = \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))dx.$$

Pri tom je razlika $\varphi(x_0) - \psi(x_0)$ jednaka dužini preseka oblasti G sa vertikalnom pravom $x = x_0$.
Razmotrimo generalizacije ove formule na više dimenzione prostore.
Uvedimo za proizvoljan skup $Q \subset \mathbb{R}^{r+s}$ oznake

$$Q_x = \{y : (x, y) \in Q\},$$

$$Q_y = \{x : (x, y) \in Q\}.$$

Neka su $r, s \geq 1$ prirodni brojevi, $f = f(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^r$ i $y \in \mathbb{R}^s$; $f_y(x) = f(x, y)$ i $f^x(y) = f(x, y)$. Podvucimo za fiksirano y, f_y u ovom kontekstu označava funkciju promenljive x (a ne parcijalni izvod !); slično za fiksirano x, f^x u ovom kontekstu označava funkciju promenljive y.

Lema 2.1. *Neka je Q $\mathfrak{M}_{r+s}$-merljiv skup. Tada je*

$$m_{r+s}(Q) = \int_{\mathbb{R}^r} m_s(Q_x) dm_r(x) = \int_{\mathbb{R}^s} m_r(Q_y) dm_s(y) \tag{2.7}$$

Dovoljno je dokazati

$$m_{r+s}(Q) = \int_{\mathbb{R}^r} \varphi_Q(x)\, dm_r(x), \tag{2.8}$$

gde je $\varphi_Q(x) = m_s(Q_x)$. Pogodno je koristiti i oznaku $\varphi_x(Q)$ umesto $\varphi_Q(x)$.
Na osnovu Propozicije 1.7, postoji Borelov skup B tako da je
1. $Q \subset B$, $m(B) = m(Q)$ i
2. B presek nerastućeg niza otvorenih skupova B_n.
Kako se otvoren skup B_n može predstaviti kao unija nerastućeg niza B_{nk} elementarnih skupova primenom Teoreme o monotonoj konvergenciji prvo na niz funkcija $\varphi_{B_{nk}}$ $(k = 1, 2, ...)$, sledi da Lema važi za skupove B_n; i otuda primenom Teoreme o monotonoj konvergenciji na niz funkcija φ_{B_n} $(n = 1, 2, ...)$, sledi da Lema važi za skup B.
Ako je $m(Q) = 0$, tada je i $m(B) = 0$. Kako Lema važi za B, sledi da je $\varphi_B(x) = 0$ s.s. na $\mathbb{R}^r$. Otuda sledi da je

$$\int\limits_{\mathbb{R}^r} \varphi_Q(x) dm_r(x) = 0 = m(Q).$$

Dakle, formula (2.8) važi ako je $m(Q) = 0$.
U opštem sliučaju $Q = B \setminus C$, tj. $B = Q \cup C$, gde je B Borel-ov skup i $m(C) = 0$ i tvrdjenje (formula (2.8)) sledi iz aditivnosti mera m_{r+s} i φ_x. ? □

Teorema 2.2. *Neka je f nenegativna ($0 \leq f \leq +\infty$) $\mathfrak{M}_{r+s}$-merljiva funkcija. Tada su funkcije*

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}^r} f_y(x)\, dm_r \text{ i } J(x) = \int_{\mathbb{R}^s} f^x(y)\, dm_s \tag{2.9}$$

respektivno $\mathfrak{M}_s$, $\mathfrak{M}_r$-merljive funkcije, i

$$\int_{\mathbb{R}^s} dm_s \int_{\mathbb{R}^r} f_y(x)\, dm_r = \int_{\mathbb{R}^{r+s}} f\, dm_{r+s} = \int_{\mathbb{R}^r} dm_r \int_{\mathbb{R}^s} f^x(y)\, dm_s. \tag{2.10}$$

Uputstvo: Neka je $\mathfrak{F}$ familija $\mathfrak{M}_{r+s}$-merljivog skupa Q tako da jednačina (2.10) važi za $f = K_Q$, gde je K_Q karakteristična funkcija skupa Q. Dokazati prvo da je $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_{r+s}$(ovo sledi iz Leme 2.1).

Otuda sledi da Teorema važi ako je f jednostavna funkcija. Kako je $0 \leq f \leq +\infty$, postoji neopadajući niz jednostavnih funkcija s_n tako da $s_n \to f(x, y)$. Ako je I_n asocirano sa s_n na isti način kao I sa f, dobija se

$$\int_{\mathbb{R}^s} I_n(y)\, dm_s(y) = \int_{\mathbb{R}^{r+s}} s_n\, dm_{r+s}. \tag{2.11}$$

Primenom Teoreme o monotonoj konvergenciji prvo dobijamo da je I_n neopadajući niz funkcija. Otuda, ponovo primenom Teoreme o monotonoj konvergenciji na dva integrala u (2.11) dobija se prva jednakost u (2.10). Druga jednakost u (2.10) sledi ako promenimo uloge x i y.

Teorema 2.3. *Ako je f $\mathfrak{M}_{r+s}$-merljiva funkcija na $\mathbb{R}^{r+s}$ i bar jedan od integrala*

$$\int_{\mathbb{R}^s} dm_s \int_{\mathbb{R}^r} |f_y(x)|\, dm_r, \quad \int_{\mathbb{R}^r} dm_r \int_{\mathbb{R}^s} |f^x(y)|\, dm_s \tag{2.12}$$

konačan, tada $f \in L(\mathbb{R}^{r+s})$.

Upustvo: Primeniti Teoremu 2.2 na funkciju $|f|$.

Teorema 2.4. *Neka je f $\mathfrak{M}_{r+s}$-merljiva funkcija i $f \in L(\mathbb{R}^{r+s})$. Tada*
1. Funkcije I i J definisane su s.s. i $I \in L(\mathbb{R}^s)$, $J \in L(\mathbb{R}^r)$ i
2. važi jednakost (2.10)

Uputstvo: Jasno, dovoljno je dokazati Teoremu ako je f realna funkcija; kompleksan slučaj onda sledi na uobičajen način. Ako je f realna funkcija primeniti dokazano (Teoremu 2.2) na f^+ i f^-.

Iz Teorema 2.3 i 2.4, sledi da pri uslovima Teoreme 2.3 važi jednakost (2.10).
Na sličan način se pokazuje da Fubinijeve teoreme važe i za σ-konačne prostore sa apstraktnom merom.
Značaj Fubinijevih teorema je npr. što daju dovoljne uslove za izmenu poretka dva ponovljena integrala.
O primenama Fubinijeve teoreme na konvoluciju v. [Ru].

Primer 2.3. Neka je $Q = [-1, 1]^2$ i

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

za $x^2 + y^2 > 0$ i $f(0, 0) = 0$.
Pokazati da su ponovljeni integrali 0, a da Lebegov integral po kvadratu ne postoji.

Uputstvo:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |f(x, y)| dx\, dy \geq \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \frac{|\sin\varphi\, \cos\varphi|}{r}\, d\varphi = 2\int_0^1 \frac{dr}{r} = +\infty$$

Primer 2.4. Neka je $f = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-2}$, $J(x) = \int_0^1 f dy$ i $I(y) = \int_0^1 f dx$. Dokazati da je $\int_0^1 J dx = \pi/4$ i $\int_0^1 I dy = -\pi/4$.
Da li je to u kontradikciji sa Fubinijevom teoremem ?

Uputstvo: Neka je $F = y(x^2 + y^2)^{-1}$; tada je $\partial_2 F = f$ i otuda $J = \arctan$; $I = -J = -\arctan$.
Neka je $D = \{(x, y) : 0 < x, y < 1, x^2 + y^2 < 1\}$. Koristeći polarne kordinate pokazati da integral $\int_D |f| dxdy = +\infty$; ?? divergira; f nije Lebeg integrabilna na $[0, 1] \times [0, 1]$.

2.1.3. **Apstraktna mera.** *

Definicija 2.3. Neka je X proizvoljan skup i $\mathfrak{M}$ σ-algebra u X.
Par $(X, \mathfrak{M})$ naziva se merljiv prostor.
Elementi skupa $\mathfrak{M}$ nazivaju se merljivi skupovi.
Nenegativna funkcija skupa μ koja je definisana na $\mathfrak{M}$, uzima vrednosti u $[0, \infty]$ i koja je σ-aditivna naziva se *mera* na $\mathfrak{M}$.

Kompleksna (realna) funkcija skupa μ koja je definisana na $\mathfrak{M}$, i koja je σ-aditivna naziva se respektivno kompleksna (realna) *mera* na $\mathfrak{M}$.

Ova definicija mere se razlikuje od Definicije 1.4, u tome što je ovde definiciono područje σ-algebra. Dalje ćemo koristiti Definiciju 2.3.

Definicija 2.4. Neka je $(X, \mathfrak{M})$ merljiv prostor i neka f preslikava X u $\mathbb{R}^*$. Ako je skup $\{f < c\}$ merljiv za svako realno c, kažemo da je f *merljiva funkcija* na X.

Definicija 2.5. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ naziva se prostor sa merom.

Zamenjujući Lebeg-ovu meru m *merom* μ uvesti odgovarajuće definicije i dokazati odgovarajuće stavove.
Ako je $\mathbf{P}(X) = \mu(X) = 1$ odgovarajuća uredjena trojka (obično se koriste oznake $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$) naziva se prostor verovatnoća.
Slučajna promenljiva ξ je merljiva ($\mathfrak{F}$-merljiva) finitna(znači sa vrednostima u $\mathbb{R}$) funkcija koja Ω preslikava u realnu pravu $\mathbb{R}$. Odavde sledi da je, na primer, inverzna slika poluotvorenog intervala $[a, b)$ takodje u $\mathfrak{F}$. Dalje, s obzirom da je $\mathfrak{F}$ σ-polje, inverzna slika svakog Borel-ovog skupa je element iz $\mathfrak{F}$. Dakle u teoriji verovatnoće obično se koristi oznaka Ω za okvirni prostor (skup elementarnih dogadjaja).
?? [0]U konteksu kursa kompleksne analize Ω obično označava otvorene skupove!

Primer 2.5. Pretpostavimo da je μ pozitivna mera na X, $f : X \to [0, \infty]$ merljiva funkcija, $\int_X f d\mu = c$, gde je $0 < c < \infty$, i α pozitivna konstanta. Dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \ln[1 + (f/n)^\alpha] d\mu$$

∞ ako je $0 < \alpha < 1$; c ako je $\alpha = 1$; 0 ako je $1 < \alpha < \infty$.

Uputstvo: Neka je $\xi(x) = \ln(1 + x^\alpha)$. Ako je $\alpha \geq 1$, tada je $\xi'(x) \leq \alpha$ i stoga $\ln(1 + x^\alpha) \leq \alpha x$, $x \geq 0$; Dakle, $n \ln[1 + (f/n)^\alpha] \leq n\alpha f/n) = \alpha f$ i otuda integrand se majorira sa αf. Ako je $\alpha < 1$, može se primeniti Fatuova lema. Naime, u tačkama gde $f(x)$ konačno, $\ln[1 + (f/n)^\alpha] \sim (f/n)^\alpha$, kada $n \to +\infty$, tako da $n \ln[1 + (f/n)^\alpha] \to +\infty$, kada $n \to +\infty$.

Definicija 2.6. (Lebeg- Stieltjesova mera)
Neka je $\alpha \in NBV_d$ (NBV neprekidne sa desne strane), tj. α neopadajuća funkcija na $\mathbb{R}$ neprekidna sa desne strane. Intervalu (a, b), korespondiramo

$$m_\alpha([a, b]) = \alpha(b) - \alpha(a_-),$$
$$m_\alpha([a, b)) = \alpha(b_-) - \alpha(a_-),$$
$$m_\alpha((a, b]) = \alpha(b) - \alpha(a),$$
$$m_\alpha((a, b)) = \alpha(b_-) - \alpha(a).$$

Definisati funkciju m^*_α, koja je analogon spoljne mere m^*, i konstrusati σ-prsten $\mathfrak{M}(m_\alpha)$.
Ako je $\alpha \in NBV$ (ponovimo NBV su neprekidne sa leve strane) neopadajuća funkcija, može se postupiti i na sledeći način:
Dodelimo svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ skup $\Phi[x]$: ako je α neprekidna u x, $\Phi[x]$ je tačka $\alpha(x)$; ako je $\alpha(x_+) > \alpha(x)$, tada $\Phi[x]$ je interval $[\alpha(x), \alpha(x_+)]$. Ako $E \subset \mathbb{R}$, neka $\Phi[E]$ označava skup svih $\Phi[x]$, za $x \in E$; i neka je

$$m_\alpha(E) = m(\Phi[E]) \tag{2.13}$$

Otuda

Teorema 2.5. *(a) Ako je μ kompleksna Borel-ova mera na $\mathbb{R}$ i ako je*

$$f(x) = \mu((-\infty, x)) \ (x \in \mathbb{R}), \tag{2.14}$$

tada $f \in NBV$.
(b) Suprotno, svakom $f \in NBV$ odgovara jedinstvena kompleksna Borel-ova mera μ tako da važi (2.14).
(c) Ako važi (2.14), f je neprekidno tačno u onim tačkama x u kojima je $\mu(\{x\}) = 0$

Vežba 2.1. Ako $\alpha \in NBV_d$, formulisati analogon prethodne teoreme.

2.1.4. *Diferenciranje Monotone funkcije.*

Definicija 2.7. Neka f preslikava R u R^* i definišimo

$$D(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Kada $h \to \pm 0$ svakom fiksiranom x odgovaraju

$$\limsup_{h \to +0} D(x, h), \ \liminf_{h \to +0} D(x, h), \ \limsup_{h \to -0} D(x, h), \ \liminf_{h \to -0} D(x, h).$$

Nazivamo ih izvodima-gornji desni, donji desni, gornji levi i donji levi funkcije f u tački x i označavamo sa $D^+ f, D_+ f, D^- f, D_- f$.
Sa Df označavamo bilo kojo od njih.
ako su sva četri izvoda jednaka, funkcija f ima izvod f' u tački x.
*Kompleksna Borelova mera μ na $\mathbb{R}^m$ ima izvod $D\mu$ s.s $[m]$, $D\mu \in L(\mathbb{R}^m)$ i razlaže se na singularni i apsolutno neprekidni deo (na ovom osnovnom stavu baziraju se dokazi u [Ru]; ovaj pristup je apstraktan). ?
Ponoviti sledeće svojstvo monotonih funkcija ? ([Ka-Ad]):

Teorema A. (Neprekidnost monotone funkcije) Monotona funkcija može imati samo prekida prve vrste. Skup prekide prve vrste je konačan ili prebrojiv.

Teorema B. (Integrabilnost monotone funkcije) Svaka monotona funkcija na zatvorenom razmaku $[a, b]$ je merljiva i ograničena, i stoga, integrabilna.

Dokaz: Neka je f monotono neopadajuća funkcija. Tada je, na osnovu definicije monotonosti, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ za $x \in [a, b]$.
Za proizvolnu konstatu c skup $A_c = \{x : f(x) < c\}$ je ili segment, poluinterval ili prazan.

Zaista, pretpostavimo da postoji tačka x_0 u kojoj je $f(x_0) < c$ i neka je d supremum takvih tačaka. Tada je A_c ili razmak $[a, d]$ ili $[a, d)$. □

Sledeći rezultat, koji tvrdi da monotona funkcija ima konačan izvod s.s, zahteva složeniju tehniku u odnosu na dokaze Teoreme A i B. Podvucimo da je to obično slučaj sa tvrdjenijma koja važe s.s.

Teorema 2.6 (Lebeg, Monotona funkcija ima konačan izvod s.s.)**.** *Monotona funkcija na $[a, b]$ ima konačan izvod s.s. na $[a, b]$.*

Studeti ponekad povezuju (pa i poistovećuju) ovu teoremu sa Teoremom A.

Primenom Vital-jevih stavova (v. [Alj], klasični pristup) može se dokazati ovaj osnovni rezultat.
Autoru izgleda pogodno da se primeni kocept nevidljivih tačaka i izbegnu Vital-jevi stavovi.
Ideja dokaza: Ako je $f' < c$ na intervalu $[\alpha, \beta]$, tada je na osnovu Lagranžove teoreme $f(\beta) - f(\alpha) \leq c(\beta - \alpha)$.

Prirodno je očekivati da se ovo tvrdjenje važi ako samo pretpostavimo $D_-f(x) < c$ za $x \in [\alpha, \beta]$ i da očekujemo da $D^+f > C$ na $[\alpha, \beta]$ povlači $f(\beta) - f(\alpha) \geq C(\beta - \alpha)$. Za dokazivanje stavova ovog tipa pogodno je primeniti kocept nevidljivih tačaka, koji omogućuje da radimo sa otvorenim skupovima i stoga intervalima.

Neka su c i C par racionalnih brojeva, za koje je $0 < c < C < \infty$ i $s = c/C$. Označimo sa $E_{c,C}$ skup tačaka u kojima je $D_-f(x) < c < C < D^+f(x)$.

Razmotrimo skup E_c tačaka $x \in (\alpha, \beta)$, za koje je $D_-f(x) < c$. S obzirom na definiciju $D_-f(x)$, za svako takvo x postoji $h < 0$ tako da je

$$D(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < c,$$

tj. $f(x+h) - f(x) > ch$. Neka je $t = x + h$; tada je $f(t) - f(x) > c(t - x)$; dakle postoji

$t < x$ tako da je $f(t) - ct > f(x) - cx$. Otuda x je ? "nevidljiva" sleva za funkciju $f(x) - cx$ i po lemi Risa skup V_c takvih x predstavlja se ? kao unija najviše prebrojive familije disjunktnih intervala $(\alpha_k, \beta_k) \subset (\alpha, \beta)$, pri čemu je

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq c(\beta_k - \alpha_k). \tag{2.15}$$

Zatim u svakom od intervala (α_k, β_k) razmotrimo skup G_k tačaka za koje $D^+f > C$. Slično kao gore, dokazje se da je svaka tačka $x \in G_k$? "nevidljiva" sdesna za funkciju $f(x) - Cx$. Ponovo, po lemi Risa, skup V_C tačaka u intervalu (α_k, β_k) "nevidljiva" sdesna za funkciju $f(x) - Cx$ se predstavlja kao unija najvše prebrojive familije disjunktnih intervala $(\alpha_{kj}, \beta_{kj})$. Otuda, sledi $\sum_{kj}(\beta_{kj} - \alpha_{kj}) \leq s(\beta - \alpha)$. Podvucimo da dokazujemo da je skup $V_{c,C} = V_c \cap V_C$ mere nula ako je $c < C$.

Dokaz: Dokaz se bazira na

Neka f monotono raste na $[a, b]$. Tada

1°. Skup S tačaka u kojima je $D^+f(x) = +\infty$ ima meru nula.

2°. Skup T tačaka u kojima je $D^+f(x) > D_-f(x)$ ima meru nula.

Dokaz 1°: Pretpostavimo da je $m^*(S) = k > 0$. Tada svakom $x \in S$ može koordinirati niz zatvorenih razmaka čija dužina teži nuli tako da

$$\Delta f > K\Delta x,$$

gde K može biti proizvoljno veliko. Nizovi ovih razmaka kada x prolazi skup S, obrazuju Vitalijevo pokrivanje $\{I\}$ skupa S, pa je moguće odabrati konačno mnogo disjunktnih intervala totalne dužine veće od $k/2$. Sumirajući diferencije funkcija preko ovih disjunktnih intervala dobija se

$$\sum \Delta f > K \sum \Delta x > \frac{kK}{2}.$$

Kako f raste, otuda je $f(b) - f(a) > \frac{kK}{2}$, što je nemoguće ako je $k > 0$ i K dovoljno veliki broj.

Definicija 2.8. Neka je $E \subset \mathbb{R}$ i neka je $\{I\}$ kolekcija zatvorenih razmaka pozitivne dužine. Kolekcija $\{I\}$ pokriva u *Vitalijevom* smislu skup E ako svakom $x \in E$ odgovara niz razmaka iz $\{I\}$ čije dužine teže nuli i koji sadrže tačku x.

Teorema 2.7 (Vitalijev stav)**.** *Neka je $m^*(E) < +\infty$ i $\delta > 0$ proizvoljan broj. Tada se iz svakog Vitalijevog pokrivanja $\{I\}$ skupa E može izdvojiti konačno mnogo disjunktnih razmaka $I_1, I_2, \ldots, I_n$, tako da skup tačaka iz E koje ne pripadaju $\cup I_k$ ima spoljnu meru manju od δ.*

Umesto, Vitalije teoreme može se koristiti Risova lema.
Neka je g neprekidna funkcija definisana na $[a, b]$.

Tačka x_0 naziva se "nevidljiva" sdesna (respektivno sleva) za g, ako postoji ξ, $x_0 < \xi$ (res. $x_0 > \xi$) tako da je $g(x_0) < g(\xi)$.

Lema 2.2 (Risova lema)**.** *Za proizvoljnu neprekidnu funkciju g, skup tačaka "nevidljiva" sdesna, otvoren je na $[a, b]$ i otuda, unija konačne ili prebrojive familije intervala (a_k, b_k). Na krajevima tih intervala, važi $g(a_k) \leq g(b_k)$.*

Koncept "nevidljivih" tačaka (sdesna i sleva) primenjuje sa na izvode ? monotonih funkcija, preko Risove leme.

Vežba 2.2. Dokažati 1° pomoću Risove leme.

Dokažimo 2° pomoću Risove leme.?

Neka su c i C par racionalnih brojeva, za koje je $0 < c < C < \infty$ i $s = c/C$. Označimo sa $E_{c,C}$ skup tačaka x u kojima je $D_-f(x) < c < C < D^+f(x)$.
Ako dokažemo da $E_{c,C}$ ima meru nula, onda otuda sledi, da je $D_-f \geq D^+f$ s.s, jer se skup $T = \{x : D^+f(x) > D_-f(x)\}$ suma ne više od prebrojive familije skupova oblika $E_{c,C}$.

Ustanovimo sada osnovnu nejednakost:
Neka je $0 < c < C < \infty$ i $s = c/C$. Za proizvoljan interval $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$

$$m\big(E_{c,C} \cap (\alpha, \beta)\big) \leq s(\beta - \alpha).$$

DOKAZ. Razmotrimo skup E_c tačaka $x \in (\alpha, \beta)$, za koje je $D_-f(x) < c$. Za svako takvo x postoji $t < x$ tako da je $f(t) - ct > f(x) - cx$. Otuda x je ? "nevidljiva" sleva za funkciju $f(x) - cx$ i po lemi Risa skup takvih x predstavlja se ? kao unija najviše prebrojive familije disjunktnih intervala $(\alpha_k, \beta_k) \subset (\alpha, \beta)$, pri čemu je

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq c(\beta_k - \alpha_k). \tag{2.16}$$

Zatim u svakom od intervala (α_k, β_k) razmotrimo skup G_k tačaka za koje $D^+f > C$. Slično kao gore, dokazje se da svaka je svaka tačka $x \in G_k$? "nevidljiva" sdesna za funkciju $f(x) - Cx$. Ponovo, po lemi Risa, skup tačaka u intervalu (α_k, β_k) "nevidljiva" sdesna za funkciju $f(x) - Cx$ se predstavlja kao unija najvše prebrojive familije disjunktnih intervala $(\alpha_{kj}, \beta_{kj})$ i

$$\beta_{kj} - \alpha_{kj} \leq \frac{1}{C}[f(\beta_{kj}) - f(\alpha_{kj})]. \tag{2.17}$$

Jasno je da sistem intervala $(\alpha_{kj}, \beta_{kj})$ pokriva skup $E_{c,C} \cap (\alpha, \beta)$, i otuda na osnovu (2.16) i (2.17), nalazimo

$$\sum_{k,j}(\beta_{kj} - \alpha_{kj}) \leq \frac{1}{C}\sum_{k,j}[f(\beta_{kj}) - f(\alpha_{kj})] \leq \tag{2.18}$$

$$\frac{1}{C}\sum_k[f(\beta_k) - f(\alpha_k)] \leq \frac{c}{C}\sum_k(\beta_k - \alpha_k) \leq s(\beta - \alpha), \tag{2.19}$$

i osnovna nejednakost je dokazana. □

Sada je jednostavno dokazati, da je $m(E_{c,C} = 0)$.
U dokazu se koristi samo svojstvo skupa $E_{c,C}$, koje opisuje osnovna nejednakost.

Lema 2.3. *Neka je A merljiv skup na $[a,b]$ tako da za proizvoljan interval $(\alpha,\beta)\subset [a,b]$, važi*
$m\big(A\cap(\alpha,\beta)\big)\le s(\beta-\alpha)$, gde je $0<s<1$. Tada $m(A)=0$.

DOKAZ: Neka je $\tau=m(A)$. Za proizvoljno $\varepsilon>0$ postoji otvoren skup G, koji je unija prebrojive familije disjunktnih intervala (a_m,b_m) tako da je $A\subset G$ i $\sum_m(b_m-a_m)<\tau+\varepsilon$. Definišimo $\tau_m=m(A\cap(a_m,b_m))$. Jasno je $\tau=\sum_m\tau_m$. Po uslovu Leme, $\tau_m\le s(b_m-a_m)$. Otuda, $\tau\le s\sum_m(b_m-a_m)<s(\tau+\varepsilon)$, i kako je $\varepsilon>0$ proizvoljno, to je $\tau\le s\tau$. Kako je $0<s<1$, sledi $\tau=0$. □

Teorema 2.8 (Izvod monotone funkcije je integrabilan)**.** *Ako f neopada na $[a,b]$, tada je f' integrabilna na $[a,b]$ i*

$$\int_a^b f'(x)dx\le f(b)-f(a). \tag{2.20}$$

Uputstvo: Za $x>b$ definišimo f sa $f(b)$. Neka niz brojeva $h_n\to 0_+$ kada $n\to\infty$ i neka je

$$\varphi_n(x)=\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}.$$

Na osnovu Teoreme 2.6, sledi $\varphi_n(x)\to f'(x)$ s.s. na $[a,b]$. Primenom Fatuove leme na φ_n, dobija

$$\int_a^b f'(x)dx\le \liminf_{n\to\infty} J_n, \tag{2.21}$$

dge je $J_n=\int_a^b\varphi_n(x)dx$. Kako je

$$\begin{aligned} J_n&=\frac{1}{h_n}\left(\int_{a+h_n}^{b+h_n} f\,dx-\int_a^b f\,dx\right)\\ &=\frac{1}{h_n}\left(\int_b^{b+h_n} f\,dx-\int_a^{a+h_n} f\,dx\right), \end{aligned}$$

sledi $J_n=J_n(b)-J_n(a)$, gde je $J_n(b)=\frac{1}{h_n}\int_b^{b+h_n} f\,dx=f(b)$ i $J_n(a)=\frac{1}{h_n}\int_a^{a+h_n} f\,dx$. Kako f ne opada, $J_n(a)\ge f(a)$, i stoga

$$J_n\le f(b)-f(a).$$

Otuda, na osnovu (2.21), sledi tvrdjenje.

Primer 2.6. (Primer *Kantor-ova funkcija*) Definišimo Kantorovu funkciju k_s na Katorovom skupu K_s (videti Primer 1.14). Neka je k_s jednako $\frac12$ na intervalu izbačenom u prvom koraku; respektivno $\frac14$, $\frac34$ na intervalima izbačenim u drugom koraku; $\frac{1}{2^n}$, $\frac{3}{2^n}$,..., $\frac{2^n-1}{2^n}$ na intervalima izbačenim u n-tom koraku. Definišimo $k(0)=0$ i $k(1)=1$, a u tački x u kojoj k nije definisana prethodnim postupkom $k(x)=\sup k(t)$, gde se supremum uzima po svim tačkama t koje su manje od x. Funkcija k_s naziva se *Kantor-ova funkcija.* Umesto k_1 pišemo kratko k.
Dokazati
a. k_s je monotona i neprekidna funkcija na $[0,1]$.
b. $k'(x)=0$ s.s. na $[0,1]$.
c. Izraziti $\int_0^1 k_s\,dx$.
d. Neka je $f(x)=\frac{x+k(x)}{2}$. Pokazati da je f strogo monotona i neprekidna funkcija

na $[0,1]$.
Da li f preslikava skupove pozitivne mere na skupove pozitivne mere?

Rešene za d (homeomorfizam f preslikava skup mere 0 na skup pozitvne mere !):
?? Funkcija f preslikava $[0,1]$ na sebe.
Neka je $E=[0,1]\setminus K$. Skup E se sastoji od "izbačenih" intervala $I=(\alpha,\beta)$. Kako je $f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)/2$ i $f(I)=\big(f(\alpha),f(\beta)\big)$, sledi $m\big(f(I)\big)=(\beta-\alpha)/2$ i otuda je prvo $m(f(E))=1/2$ i stoga $m(f(K))=1/2$. Dakle, homeomorfizam f preslikava skup K mere 0 na skup pozitvne mere !

Put γ_s definisan sa $\gamma_s(x)=x+ik_s(x)$, $0\le x\le 1$, nazivamo Katorovog put. Pišemo γ umesto γ_1.

Primer 2.7 (dužina Kantorov puta)**.** * Da li je dužina Kantorov puta γ jednaka 2?
a) Da li je $\gamma'=1$ s.s na $[0,1]$.
b) Da li važi formula za dužinu: $|\gamma|=\int_0^1|\gamma'(x)|dx=1$?

Uputstvoza *a*) : Neka podela $\mathcal{P}_n$ definisana krajevima intervalima izbačenim u prvih n-tom koraku i P_n odgovarajuća poligonalna linija "upisana" u Kantorov put γ. Poligonalna linija se sastoji od 2^n podudarnih intervala nagiba $3^n/2^n$; i 2^n-1 horizontalnih intervala.

Kako je $k(1/3^n)=1/2^n$, dužina nehorizontalnih intervala je

$$l_n=\sqrt{\left(\frac{1}{3^n}\right)^2+\left(\frac{1}{2^n}\right)^2}\,.$$

Otuda ukupna dužina nehorizontalnih intervala $s_n=2^n l_n\to 1$, kada $n\to\infty$.
Za dokaz je dovoljno primetiti da je $s_n\ge 1$.
Stoga, s obzirom da ukupna dužina horizontalnih intervala $s_n^h\to 1$, sledi da $|P_n|\to 2$.
S druge strane, dužina proizvoljne poliginonalne linije "upisane" u γ nije veća od zbira dužina projekcija na koordinatne ose, tj. od 2, i stoga $|\gamma|\le 2$, i otuda $|\gamma|=2$.
b) Ne (Objasniti!).

Primer 2.8. * Neka je $u:[0,1]\to[0,1]$ nepadajuća funkcija i put γ definisan sa $\gamma(x)=x+iu(x)$, $0\le x\le 1$. Dokazati da je
a) $|\gamma|\le 2$
b) $|\gamma|=2$ akko $u(0)=0$, $u(1)=1$ i u je singularna funkcija.

Uputstvo za *b*): Neka je $0<\alpha<\beta<\pi/2$ and $q_0=\sin\alpha+\cos\beta>1$ i $A=A(\alpha,\beta)=\{x:\tan\alpha<u'(x)<\tan\beta\}$. Neka je $0\le x\le 1$, $h>0$, $r=|\gamma(x+h)-\gamma(x)|$, l dužina puta γ i $l_1=l_1(h)=s(x;h)$ dužina puta koji odgovara odsečku $[x,x+h]$. Na osnovu, polarne reprezentacije, $\gamma(x+h)-\gamma(x)=re^{i\varphi}$ i otuda, na osnovu pretpostavki u tački *b*), $l_1=r\cos\varphi+r\sin\varphi=qr$, gde je $q=\cos\varphi+\sin\varphi$.
Neka je A_1 skup tačaka x tako da važi

$$s(x;h)>q_0 r \tag{2.22}$$

za dovoljno malo h. Dakle, $A\subset A_1$.
S druge strane za svako $\varepsilon=1/n$ postoji $\delta=\delta_n$ tako ako je maximum podele P intervala $[0,1]$ manji od δ, tada je $l-l_n\le 1/n$, gde je l_n dužina odgovarajuće

poligonalna linije.
Pretpostavimo da je $m(A_1) = k > 0$.
Koristićemo Vitalijevo pokrivanje skupa A_1 odgovarajuím intervalima I_k, dužine manje od δ_n, tj. $0 < h < \delta_n$; za koje važi formula (2.22). Iz ovog pokrivanja može se izdvojiti konačno mnogo disjunktnih razmaka čija je totalna dužina veća od $k/2$. Neka je S_n zbir dužina puta koji odgovara ovim razmacima. Tada je prvo $S_n \geq k/2$ i sumirajaći po ovim razmacima, na osnovu formule (2.22), dobija se $S_n = \sum s_k \geq q_0 R_n$, gde je $R_n := \sum r_k$. Otuda je $R_n \geq S_n - 1/n$ i stoga $S_n = q_0 R_n \geq q_0(S_n - 1/n)$ i kada $n \to +\infty$ sledi $m(A_1) = 0$.
Skup $A = \{x : 0 < u'(x) < +\infty\}$ je prebrojiva unija skupova oblika $A(\alpha, \beta)$.
Napomena :prvobitna ideja autora za b): koristiti Vitalijevo pokrivanje ili Risovu lemu kao u dokazu teoreme o postojanju izvoda s.s monotone funkcije ! Formula (2.22) ima važnu ulogu!

2.1.5. **Apsolutna neprekidnost, diferenciranje i integracija.** *
Osnovno pravilo Diferencijalnog i Integralnog računa:
(A) Ako je f integrabilna na $[a, b]$, integral

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

ima izvod i $F' = f$ na $[a, b]$.
(B) Ako je G ima izvod $G' = g$ na $[a, b]$, tada

$$\int_a^x g(t)dt = G(x) - G(a) \ \ (a \leq x \leq b)$$

G je primitivna funkcija od g.
? Ako razmtramo Rimanov integral, iskazi (A) i (B) važe ako su npr. f i g neprekidne funkcije.
? Ako razmtramo Lebegov integral, iskaz (A) važi u smislu da je $F' = f$ s.s. na $[a, b]$.
? Ako je f integrabilna na $[a, b]$, njen integral F je kako neprekidna, tako i funkcija ograničine varijacije. Da je F ograničine varijacije na $[a, b]$ sledi neposredno iz

$$F(x) = \int_a^x f^+(t)dt - \int_a^x f^-(t)dt,$$

jer, kako je $f^+ \geq 0$ i $f^- \geq 0$, integrali na desnoj strani su neopadajuće funkcije.

Teorema 2.9. (Diferenciranje integrala) *Neka je f integrabilna na $[a, b]$ i neka je F njen integral. Tada*
a. F ima konačan izvod s.s. na $[a, b]$ i $F' = f$ s.s. na $[a, b]$

$\triangleright$ Kako je F ograničene varijacije, F ima konačan izvod s.s. na $[a, b]$. Neka je

$$\varphi_n(x) = \frac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n},$$

gde $h_n \to 0_+$ kada $n \to +\infty$. Neka je $c \in [a, b]$ i $J_n = \displaystyle\int_a^c \varphi_n(x)dx$.
Tada je $J_n = \frac{1}{h_n}\int_a^c [F(x + h_n) - F(x)]dx = J_n(c) - J_n(a) = \frac{1}{h_n}\int_c^{c+h_n} F(x)dx - \frac{1}{h_n}\int_a^{a+h_n} F(x)dx$, gde je $J_n(c) = \displaystyle\frac{1}{h_n}\int_c^{c+h_n} F(x)dx$ i $J_n(a) = \displaystyle\frac{1}{h_n}\int_a^{a+h_n} F(x)dx$.

Otuda, kako je F neprekidna funkcija,

$$J_n = \int_a^c \varphi_n(x)dx \to F(c) - F(a), \tag{2.23}$$

kada $n \to +\infty$(proveriti !).
Pretpostavimo prvo da je $|f| \leq M$ na $[a,b]$.
Kako $\varphi_n(x) \to F'(x)$ s.s. na $[a,b]$ i

$$|\varphi_n(x)| \leq \frac{1}{h_n} \int_{h_n}^{x+h_n} |f(t)|\, dt \leq M,$$

na osnovu (2.23), primenom Lebegovog stava o dominantnoj konvergenciji, sledi

$$\int_a^c F'(x)dx = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx.$$

Dakle

$$\int_a^c [F'(x) - f(x)]\, dx = 0$$

za svako $c \in [a,b]$ i otuda, na osnovu Propozicije 1.42 (sledeće Leme, Stav 5.16, [Alj]) $F' = f$ s.s. na $[a,b]$.

Lema 2.4. *Neka je f integrabilna na $\mathbb{R}$ i neka je $\int_{-\infty}^x f\, dm = 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Tada je $f = 0$ s.s. na $\mathbb{R}$.*

? Da bismo opisali funkcije za koje važi iskaz (B), uvodimo sledeću definiciju (apsolutno neprekidne funkcije). ? Ako je G apsolutno neprekidna funkcija važi iskaz (B). Drugim rečima apsolutno neprekidna funkcija je integral svog izvoda na konačnim intervalima(? mada to nije jasno iz definicije koja sledi).

Definicija 2.9. Neka je f definisana na $[a,b]$ (respektivno $\mathbb{R}$) i neka su $[x_\nu, x_\nu + h_\nu]$ $(h_\nu > 0, \nu = 1,2,...,n)$ medjusobno disjunktni razmaci(segmenti) koji pripadaju $[a,b]$ (respektivno $\mathbb{R}$). Ako svakom $\varepsilon > 0$ odgovara broj $\delta > 0$ tako da je

$$\Sigma_{\nu=1}^n |f(x_\nu + h_\nu) - f(x_\nu)| < \varepsilon$$

za svaki izbor podsegmenata $[x_\nu, x_\nu + h_\nu]$, čija je totalna dužina $\Sigma_{\nu=1}^n h_\nu < \delta$, kažemo da je f *apsolutno neprekidna* funkcija na $[a,b]$(respektivno $\mathbb{R}$).

U ovom tekstu kada kažemo samo f je apsolutno neprekidna, to se odnosi na ograničen zatvoren interval (segment). Npr. fukcija $f(x) = x^2$ je apsolutne neprekidne na svakom ograničenom intervalu, ali nije $\mathbb{R}$.

Svaka apsolutno neprekidna funkcija je ravnomerno neprekidna i
restrikcija apsolutne neprekidne na ograničenim intervalima je funkcija ograničene varijacije. Ipak, ako je $f(x) = sinx$, ili $f(x) = x + |x|$ na $\mathbb{R}$, tada f je apsolutno neprekidna, ali $f \notin BV$.
Ako je f apsolutno neprekidna realna funkcija, tada f preslikava skupove mere 0 u skupove mere 0. Kantorova funkcija ne zadovoljava ovo svojstvo: Kantorova funkcija preslikava Kantorov skup mere 0 na skup mere 1.

Propozicija 2.1. Restrikcija apsolutne neprekidne funkcije f na ograničenim intervalima je funkcija ograničene varijacije.

Neka je ograničeni interval $[a,b]$. Ako je data podela P razmaka $[a,b]$, možemo, dodajući eventualno nove podeone tačke, sve podrazmake tako dobivene sukcesivne podele P' razvrstati u grupe podrazmaka, tako da je totalna dužina podrazmaka iz iste grupe jednaka polovini broja δ iz Definicije 2.9 (za neko fiksirano $\varepsilon = \varepsilon_0$). Takvih grupa podrazmaka ima najviše $n_0 = [\frac{2(b-a)}{\delta}]+1$. Proveriti da je $V_a^b(f) \leq n_0\, \varepsilon_0$.

Propozicija 2.2 (Integral je apsolutno neprekidna funkcija)**.** Neka je f integrabilna na $[a,b]$ i neka je F njen integral. Tada
1. F je apsolutno neprekidna funkcija na $[a,b]$.
2. F je ograničene varijacije i

$$V(F) \leq \int_a^b |f(t)|dt. \tag{2.24}$$

Apsolutna neprekidnost funkcije F je neposredna posledica apsolutne neprekidnosti Lebeg-ovog integrala.
Dokaz. Označimo sa E uniju disjunktnih podrazmaka $[x_\nu, x_\nu + h_\nu]$ iz $[a,b]$. Kako je sa f i $|f|$ je integrabilna na $[a,b]$, na osnovu Teoreme o apsolutnoj neprekidnosti m-integrala, izraz

$$\sum |F(x_\nu + h_\nu) - F(x_\nu)| = \sum |\int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu} f(t)dt| \leq \tag{2.25}$$

$$\sum \int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu} |f(t)|dt = \int_E |f(t)|dt$$

je proizvolno mali ako je $m(E) = \sum h_\nu$ dovolno malo. Nejednakost (2.24) sledi iz nejednakost (2.25) $\square$

Lema 2.5. *Ako je f apsolutno neprekidna na $[a,b]$ i $f' = 0$ s.s. na $[a,b]$, tada je $f = konst$ na $[a,b]$.*

Uputstvo: ? Neka je $E = \{x : f'(x) = 0\}$ i $\varepsilon > 0$. Kako je f apsolutno neprekidna, postoji $\delta > 0$ tako da

$$\sum |\Delta f| < \varepsilon. \tag{2.26}$$

Za svako $x \in E$, postoji niz razmaka $[x, x+h_n]$, $h_n \to 0$ tako da

$$|f(x+h_n) - f(x)| < \varepsilon\, h_n. \tag{2.27}$$

Kolekcija ovih razmaka, kada x prolazi E, pokriva E u Vitalijevom smislu. S obzirom da je mera skupa E jednaka $b-a$, otuda postoji konačno mnogo medjusobno disjunktnih razmaka $\{I\}$, koji pokrivaju E, tako da je ukupna dužina (zbir dužina) svih komplementarnih razmaka $\{J\}$ u $[a,b]$, manja od δ.

Iz (2.26) i (2.27), sledi

$$|f(b) - f(a)| \leq \sum_{\{I\}} |\Delta f| + \sum_{\{J\}} |\Delta f| < \varepsilon(b-a) + \varepsilon.$$

Otuda sledi $f(b) = f(a)$ jer ε možemo birati proizvoljno malo. $\square$

Dokaz prethodne teoreme moze se bazirati i na lemi Risa.
Neka $x_0 \in E$. Tada, na osnovu (2.27), sledi postoji $x > x_0$ tako da je $\varepsilon x_0 - f(x_0) < \varepsilon x - f(x)$; dakle, tačka x_0 je nevidljiva s desna za funkciju $g(x) = \varepsilon x - f(x)$ i po lemi Risa skup takvih x predstavlja se kao unija najviše prebrojive familije disjunktnih intervala $(\alpha_k, \beta_k$, pri čemu je

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq \varepsilon(\beta_k - \alpha_k), \tag{2.28}$$

i otuda

$$\sum_k (f(\beta_k) - f(\alpha_k)) \leq \varepsilon \sum_k (\beta_k - \alpha_k) \leq \varepsilon(b-a). \tag{2.29}$$

Dakle, $f(E)$ je pokriveno sistemom intervala , čija je suma dužina manja od ε. Kako je ε proizvoljno sledi da je $m\big(f(E)\big) = 0$. Neka je $Z = [a,b] \setminus E$. Kako je $m\big(f(E)\big) = 0$, i $[f(a), f(b)]$ unija skupova $f(E)$ i $f(Z)$, otuda je dužina razmaka $[f(a), f(b)]$ jednaka nuli i stoga $f(x) = konst.$

Teorema 2.10 (Lebeg, Osnovno svojstvo apsolutno neprekidnih funkcija)**.** *Neka je f apsolutno neprekidna funkcija na $[a,b]$. Tada*
a. f ima s.s. na $[a,b]$ konačan integrabilan izvod
b. $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a), \quad (a \leq x \leq b)$.

Uputstvo. f je ograničene varijacije i otuda razlika dve monotone funkcije. Kako monotona funkcija ima s.s. konačan i integrabilan izvod, sledi $f' \in L(a,b)$. Specijalno, sledi a.
Neka je $F(x) = \int_a^x f'(t)dt$. Kako je f' integrabilna funkcija, na osnovu Propozicije 2.2 (Integral je apsolutno neprekidna funkcija), prvo funkcija F je apsolutno neprekidna funkcija na $[a,b]$ i stoga

$$s(x) = f(x) - \int_a^x f'(t)dt \tag{2.30}$$

je apsolutno neprekidna funkcija na $[a,b]$, jer je zbir dve takve funkcije. Na osnovu Teoreme o diferenciranju integrala, prvo sledi $F' = f'$ s.s. i stoga $s'(x) = f'(x) - F'(x) = f'(x) - f'(x) = 0$ s.s. na $[a,b]$, a zatim, na osnovu Leme 2.5, $s = const. = c$ na $[a,b]$, tj.

$$f(x) - \int_a^x f'(t)dt = c, \quad x \in [a,b].$$

Otuda, za $x = a$, sledi $c = f(a)$; i na osnovu (2.30) sledi b.

Primer 2.9. Pokazati da f može imati konačan izvod f' na $[a,b]$, koji nije integrabilan.
Uputstvo. Funkcija f, definisana sa $f(x) = x^2 \sin x^{-2}$ za $0 < x \leq 1$ i $f(0) = 0$, ima izvod na $[0,1]$: $f'(x) = 2x \sin x^{-2} - x^{-1} \cos x^{-2}$ za $0 < x \leq 1$, $f'(0) = 0$; koji nije integrabilan na $[0,1]$.

Definicija 2.10. Funkcija f koja je neprekidna i ograničene varijacije na $[a,b]$ i čiji je izvod skoro svuda jednak nuli naziva se *singularna funkcija.*

Primer 2.10 (Kantorove merdevine- djavolje merdevine)**.** Kantorova funkcija $k = k_1$ je singularna.

Kako je Kantorova funkcija k konstantna na izbačenim intervalima i ukupna mera izbačenih intervala 1, to je $k' = 0$ s.s na $[0,1]$.
?? Ova funkcija ima dodatna interesantna svojstva(koja opravdavaju naziv djavolje merdevine):
k monotone raste na $[0,1]$ i preslikava $[0,1]$ na sebe.
Kantorova funkcija $k = k_1$ nije integral svog izvoda i dakle nije apsolutno integrabilna.
Kantorova funkcija $k = k_1$ prelikava skup mere 1 na preborijiv skup, a Kantorov skup mere 0 na skup mere 1.

Teorema 2.11. *Funkcija f koja je neprekidna i ograničene varijacije na $[a,b]$ može se jednoznačno predstaviti*

$$f = g + h, \tag{2.31}$$

gde je g apsolutno neprekidna, $g(a) = f(a)$ i h singularna funkcija ili identički jednaka nuli.

2.1.6. **Osobine Lebegovog integrala na $\mathbb{R}$.**

Teorema 2.12. *Neka je f neprekidna, a g apsolutno neprekidna funkcija na $[a,b]$. Tada je*

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f\, g'\, dx. \tag{2.32}$$

Neka je f ograničene varijacije, a g apsolutno neprekidna funkcija na $[a,b]$, tada takodje važi (2.32).

Neka je $P : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ podela razmaka $[a,b]$ i σ odgovarajuća suma koja dovodi do Riman-Stiltesovog integrala. Iz apsolutne neprekidnosti funkcije g, sledi

$$g(x_\nu) - g(x_{\nu-1}) = \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} g'(x)dx\, (\nu = 1, 2, ..., n). \tag{2.33}$$

Iz ove formule, sledi

$$\sigma(\mathcal{P}) = \sigma(f, g; \mathcal{P}) = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)[g(x_\nu) - g(x_{\nu-1})]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu) \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} g'(x)dx = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(\xi_\nu)\, g'(x)dx. \tag{2.34}$$

Otuda je

$$\epsilon = |\sigma - \int_a^b f g' dx| = |\sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} [f(\xi_\nu) - f(x)]\, g'(x)\, dx|. \tag{2.35}$$

Kako je g' integrabilna, $I_0 = \int_a^b |g'|dx < +\infty$. Neka je (ε, δ) par iz definicije uniformne neprekidnosti funkcije f na $[a,b]$. Ako je podela P takva da je $m(P) < \delta$, tada je $|f(\xi_\nu) - f(x)| \le \varepsilon$ za $x_{\nu-1} \le x \le x_\nu$, i na osnovu (2.35), sledi

$$\epsilon \le \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |f(\xi_\nu) - f(x)|\, |g'(x)|\, dx$$

$$\le \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varepsilon\, |g'(x)|\, dx \le \varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |g'(x)|\, dx.$$

Otuda, sledi $\epsilon < \varepsilon I_0$. Kako ε možemo birati proizvoljno malo, sledi da je $\epsilon = 0$, tj. tvrdjenje.

Teorema 2.13. *Ako su f i g apsolutno neprekidne na $[a,b]$, tada važi formula za parcijalnu integraciju.*

Sledi iz Teoreme 2.12 i formule za parcijalnu integraciju Riman-Stiltesovog integrala. $\square$

2.2. L_p-prostori.

Definicija 2.11. Merljiva funkcija f na (a,b) pripada $L_p = L_p(a,b)$ $(p \geq 1; -\infty \leq a, b \leq +\infty)$ ako je

$$||f||_p = (\int_a^b |f|^p dm)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Na ovaj način definisana je norma u L_p, koja definiše metriku na uobičajen način $d(f,g) = ||f-g||_p$.
Skup A je gust u skupu B ako je $B \subset \overline{A}$.

Teorema 2.14. *Skup neprekidnih funkcija je gust u* $L_p(a,b)$.

Ponovimo

Definicija 2.12. Neka je μ pozitivna mera na σ-algebri $\mathfrak{M}$ na skupu X i neka je $E \subset X$ merljiv skup i neka je f nenegativna merljiva funkcija na E. Lebeg-ov integral funkcije f na merljivom skupu E definisan je sa

$$\int_E f dm = \sup \int_E j dm,$$

gde se supremum uzima preko svih jednostavnih merljivih funkcija j za koje je $0 \leq j(x) \leq f(x)$ na E.

Dati analogne definicje zamenjujući Lebegovu meru m pozitivnom merom μ i dokazati odgovarajuće rezultate.
Ako je μ pozitivna mera na σ-algebri $\mathfrak{M}$ na skupu X, analogno se definiše $L_p(\mu)$: ako je f kompleksna merljiva funkcija na skupu X, definišimo

$$||f||_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

i neka se $L_p(\mu)$ sastoji od funkcija f za koje je

$$||f||_p < +\infty.$$

? Za $f, g \in L_p(\mu)$ definiše se rastojanje $d(f,g) = ||f-g||_p$.

Teorema 2.15. *Prostor* $L_p(a,b)$ *je kompletan.*

Teorema 2.18, koja sledi, uopštava ovaj rezultat: ako je μ pozitivna mera i $1 \leq p < \infty$, tada je prostor $L_p(\mu)$ kompletan.

Definicija 2.13. Realna funkcija φ definisana na intervalu (a,b), gde je $-\infty \leq a, b \leq \infty$, naziva se konveksna ako nejednakost

$$\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y) \tag{2.36}$$

važi za svako $a < x, y < b$, i svako $0 \leq \lambda \leq 1$.

Kažemo da je prava L definisana sa $L(s) = \varphi(t_0) + \beta(s - t_0)$ $(a < s < b)$ prava oslonca za konveksnu funkciju φ u tački $A = (t_0, \varphi(t_0))$ ako je $\varphi(s) \geq L(s)$ za $a < s < b$. Dakle prava oslonca L "prolazi" kroz taču A i nema tačaka iznad grafika funkcije φ.

Teorema 2.16. (Jensen-ova nejednakost) *Neka je μ pozitivna mera na σ-algebri $\mathfrak{M}$ u jednom skupu Ω, tako da je $\mu(\Omega) = 1$. Ako je f realna funkcija u prostoru $L_1(\mu)$, $a < f(x) < b$ za sve $x \in \Omega$, i ako je φ konveksna na (a,b), tada je*

$$\varphi(\int_\Omega f\, d\mu) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f)\, d\mu. \tag{2.37}$$

Neka je $t_0 = \int_\Omega f\,d\mu$. Iz pretpostavke $a < f(x) < b$ za sve $x \in \Omega$, sledi $\int_\Omega a\,d\mu < \int_\Omega f(x)d\mu < \int_\Omega b\,d\mu$. Kako je $\mu(\Omega) = 1$, otuda nalzimo $a < t_0 < b$. Kako je φ konveksna na (a, b), postoji prava oslonca u tački $(t_0, \varphi(t_0))$. Ako sa β označimo koeficijent pravca te prave, tada je

$$\varphi(s) \geq \varphi(t_0) + \beta(s - t_0) \;\; (a < s < b). \tag{2.38}$$

Ako zamenimo $s = f(x)$ u prethodnu nejednakost

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi(t_0) + \beta(f(x) - t_0) \;\; (a < s < b). \tag{2.39}$$

i integralimo

$$\int_\Omega \varphi(f(x))d\mu \geq \int_\Omega \varphi(t_0)d\mu + \beta \int_\Omega (f(x) - t_0)\,d\mu. \tag{2.40}$$

Kako je $\mu(\Omega) = 1$, dobijamo prvo $\int_\Omega \varphi(t_0)d\mu = \varphi(t_0)\,\mu(\Omega) = \varphi(t_0)$, $\int_\Omega (f(x) - t_0)\,d\mu = \int_\Omega f(x)d\mu - \int_\Omega t_0\,d\mu = t_0 - t_0 = 0$ i stoga (2.37).

Neka je $\varphi(x) = e^x$. Tada (2.37) postaje

$$\exp(\int_\Omega f\,d\mu) \leq \int_\Omega e^f\,d\mu. \tag{2.41}$$

Ako je Ω konačan skup, koji se sastoji od tačaka $p_1, ...p_n$ i ako $\mu\{p_k\} = \alpha_k > 0$, $f(p_k) = x_k$, $y_k = e^{x_k}$, gde je $\sum \alpha_k = 1$, dobija se

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n. \tag{2.42}$$

Neka su p i q konjugovani eksponenti, $1 < p < \infty$, i $a, b \geq 0$. Tada je

$$ab \leq p^{-1}\,a^p + q^{-1}\,b^q. \tag{2.43}$$

$\triangleright$ Neka je $a = e^{s/p}$ i $b = e^{t/q}$. Kako je $1/p + 1/q = 1$, i kako je exp konveksna funkcija, dobija se

$$e^{s/p+t/q} \leq p^{-1}\,e^s + q^{-1}\,e^t. \tag{2.44}$$

Videti Vežbu 2.3 za geometrijsku interpretaciju ove nejednakosti.
Alternatvni dokaz: Podelom sa b^q i uvodjenjem smene $x = a^p/b^q$, kako je tada $ab^{q-1} = x^\alpha$, gde je $\alpha = 1/p$, nejednakost (2.49) se svodi na $x^\alpha \leq 1 + \alpha(x - 1)$ za $x \geq 0$ i $0 < \alpha < 1$.
Funkcija $y = x^\alpha$ konveksna je prema gore za $x \geq 0$; ordinate njene tangente u $x = 1$ nisu manje od odgovarajućih ordinata funkcije.

Ponoviti Holder-ovu i Minkowski-evu nejednakost:

Teorema 2.17. (Holder-ova i Minkowski-eva nejednakost) *Neka su p i q konjugovani eksponenti, $1 < p < \infty$. Neka je (X, μ) prostor sa merom. Neka su f i g merljive funkcije na X sa vrednostima u $[0, \infty]$. Tada je*

$$\int_X fg\,d\mu \leq \{\int_X f^p\,d\mu\}^{1/p}\{\int_X g^q\,d\mu\}^{1/q} \tag{2.45}$$

$$\{\int_X (f+g)^p\,d\mu\}^{1/p} \leq \{\int_X f^p\,d\mu\}^{1/p} + \{\int_X g^p\,d\mu\}^{1/p}. \tag{2.46}$$

Nejednakost (2.45) naziva se Holder-ova; a (2.46) nejednakost Minkowski. Ako je $p = q = 2$, (2.45) je poznato kao Schwarz-ova nejednakost.
$\triangleright$ Neka su A i B dva faktora na desnoj strani nejednakosti (2.45) i $F = \frac{f}{A}$, $G = \frac{g}{B}$. Ovo daje $\int_X F^p \, d\mu = \int_X G^q \, d\mu = 1$.

Integracija nejednakosti $F(x)G(x) \leq p^{-1}F(x)^p + q^{-1}G(x)^q$, $(x \in X)$, daje

$$\int_X FG \, d\mu \leq p^{-1} + q^{-1} = 1$$

Za dokaz nejednakosti (2.46), primeniti Holder-ovu nejednakost na proizvod $f(f+g)^{p-1}$ i $g(f+g)^{p-1}$.

$$\int_X f(f+g)^{p-1} \, d\mu \leq \{\int_X f^p \, d\mu\}^{1/p} \cdot \{\int_X (f+g)^{(p-1)q} \, d\mu\}^{1/q}. \tag{2.47}$$

Neka je $D = \int_X (f+g)^p \, d\mu$ i $C = D^{1/p}$. Kako je $(p-1)q = p$,

$$\int_X f(f+g)^{p-1} \, d\mu \leq A \cdot D^{1/q}. \tag{2.48}$$

Neka je (2.48') nejednakost (2.48) sa g umesto f. Sabiranjem (2.48) i (2.48'), sledi

$$D \leq (A+B) \cdot D^{1/q},$$

i otuda $C \leq A + B$.

Vežba 2.3 (Jang-Helderova nejednakost, geometrijska interpretacija)**.** Neka su p i q konjugovani eksponenti, $1 < p < \infty$, i $a, b \geq 0$. Tada je

$$ab \leq p^{-1} \, a^p + q^{-1} \, b^q. \tag{2.49}$$

Neka je $y = f(x) = x^{p-1}$ i $x = g(y) = y^{q-1}$. Kako je $(p-1)(q-1) = 1$, $g = f^{-1}$ inverzna funkcija funkcije f i

$$\int_0^a f \, dx = \frac{a^p}{p}, \quad \int_0^b g \, dy = \frac{b^q}{q},$$

suma površina na sl. XX koje odgovaraju ovim integralima nije manja od površine ab pravougaonika XX.
Za uobičajen dokaz videti [Ka-Ad]: Neka je $u(x) = \alpha x - x^\alpha + \beta$, $x \geq 0$, gde je $0 < \alpha < 1$ i $\beta = 1 - \alpha$. Funkcija u ima strogi minimum $x = 1$, pa je $x^\alpha \leq \alpha x + \beta$. Zameniti $x = a/b$ ili $x = A/B$, gde je $A = a^p$ i $B = b^q$ u prethodnu nejednakost.

Teorema 2.18 (*)**.** *Neka je μ pozitivna mera i $1 \leq p < \infty$. Prostor $L_p(\mu)$ je kompletan.*

Neka je $\{f_n\}$ Cauchy-jev niz u $L_p(\mu)$. Tada postoji podniz $\{f_{n_k}\}$ tako da je

$$||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|| < 2^{-k}. \tag{2.50}$$

Definišimo

$$s_n^+ = \sum_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|, \;\; S^+ = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|. \tag{2.51}$$

Iz (2.50), primenom nejednakosti Minkowsk-og, sledi $||s_n^+||_p \leq 1$. Otuda, primenom Fatou-ove leme na niz $\{(s_n^+)^p\}$, nalazimo $||S^+||_p \leq 1$. Specijalno, $S^+(x) < \infty$ s.s., tako da red

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \tag{2.52}$$

konvergira za skoro svako $x \in X$.
*Otuda, dokazati da $f_{n_k}(x)$ konvergira s.s. ka $f(x)$; i stoga, primenom Fatuove leme na integral

$$\int_X |f_{n_k} - f_m|^p d\mu$$

pokazati da je f L_p- limit niza $\{f_n\}$.
Slučaj $L^\infty(\mu)$ je jednostavniji.
Prethodni dokaz sadrži sledeći rezultat.

Teorema 2.19. *Ako je $1 \le p \le \infty$ i niz $\{f_n\}$ konvergira ka f u $L^p(\mu)$ (tj. konvergira u srednjem), tada $\{f_n\}$ ima podniz koji konvergira s.s. ka $f(x)$.*

3. Hilbertovi prostori

3.1. Osnovne osobine Hilbertovih prostora.

Definicija 3.1. Kompleksan vektorski prostor H je prostor sa skalarnim proizvodom (ili unitarni prostor) ako je svakom uredjenom paru vektora x i $y \in H$ pridružen kompleksan broj (x, y) (koristi se i oznaka $< x, y >$), koji nazivamo skalarni proizvod vektora x i y tako da važe sledeće osobine:
(a) $(y, x) = \overline{(x, y)}$.
(b) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ ako x, y i $z \in H$.
(c) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ ako x i $y \in H$ i $\alpha \in \mathbb{C}$ je kompleksan skalar.
(d) $(x, x) \ge 0$ za sve $x \in H$.
(e) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Sa (d) definišemo $||x||$, normu vektora x kao nenegativni koren od (x, x). Dakle

$$||x||^2 = (x, x).$$

Kompleksan vektorski prostor sa skalarnim proizvodom u ovom tekstu obično označavamo sa H a skalarni proizvod sa (x, y) ili sa $< x, y >$. Specijalno u kontekstu, gde (x, y) označava uredjen par, za skalarni proizvod koristi se oznaka $< x, y >$.

O osnovnim svojstvima vektorskih prostora sa skalarnim proizvodom videti npr. u [Ka-Ad] [Zo],[Alj].
Primer 1. $E^n = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{R}_2([a, b], \mathbb{C})$, $\mathrm{C}_2([a, b], \mathbb{R})$.
Skup $\mathbb{C}^n$ n-torki $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$, gde su $\zeta_1, \cdots, \zeta_n$ kompleksni brojevi, je Hilbertov prostor ako sabiranje i množenje skalarom definišemo po kordinatama, i skalrni proizvod definišemo

$$(\zeta, \eta) = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \, \overline{\eta_j}.$$

U vektorski prostor $\mathcal{R}_2([a, b], \mathbb{C})$ lokalno integrabilnih funkcija na $[a, b]$ koje imaju integrabilan kvadrat (u svojstvenom ili nesvojstvenom smislu), skalarni proizvod se definiše sa

$$(f,g) = \int_a^b f\,\overline{g}\,dt. \tag{1}$$

Ako razmatramo realne funkcije, u odgovarajućem prostoru $\mathcal{R}_2([a,b],\mathbb{R})$, relacija (1) se svodi na

$$(f,g) = \int_a^b f\,g\,dt. \tag{2}$$

Specijalno je interesantan $\mathcal{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$.
Sa $\mathrm{C}_2[a,b]$ označavamo potprostor $\mathcal{R}_2([a,b])$, koji se sastoji od neprekidnih funkcija na $[a,b]$ sa skalarnim proizvodom

$$(f,g) = \int_a^b f\,\overline{g}\,dt.$$

U daljem smatramo da je skalarni proizvod funkcija definisan u smislu jednakosti (1) i (2).

Vežba 3.1. Proveriti

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \|\mathrm{y}\|^2, \tag{3.1}$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)\,. \tag{3.2}$$

(3.1) nazivamo kosinusna teorema u Hilbertovim prostorima. (3.2) je poznato kao pravilo paralelograma: ako interpretiramo $||x||$ kao dužinu vektora, (3.2) tvrdi suma kvadrata dijagonala parlelograma jednaka je sumi kvadrata stranica.
Kako je $(x,x+y)=(x,x)+(x,y)$ i $(y,x+y)=(y,x)+(y,y)$, dobija se ? $||x+y||^2 = (x+y,x+y) = (x,x+y)+(y,x+y) = (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)$ i otuda, kako je na osnovu svojstvo (a) (iz definicije skalarnog proizvoda) $(y,x) = \overline{(x,y)}$, sledi (3.1). Primetimo da (3.1), mozemo pisati i u obliku

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \|\mathrm{y}\|^2\,. \tag{3.3}$$

Sabiranjem ove verzije sa (3.1), dobija se (3.2).

Vežba 3.2. Dokazati

$$4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+i\,y\|^2 - i\,\|x-i\,y\|^2\,.$$

Vežba 3.3. Za proizvoljne vektore $x=\sum_1^n \alpha_k\,x_k$ i $y=\sum_1^n \beta_k\,y_k$, važi

$$(x,y) = \sum_{k,j=1}^{n} \alpha_k\,\overline{\beta_j}\,(x_k,y_j).$$

Schwarz-ova nejednakost
Za svako x i $y \in H$, važi

$$|(x,y)| \le \|x\|\,\|y\|.$$

$\lhd$ Neka je $\omega=(x,y)$. Pretpostavimo da je $\|x\|=\|y\|=1$. Tada je

$$A = A(\zeta) = \|x-\zeta y\|^2 = 1 - 2\ \mathrm{Re}\ \overline{\zeta}\,\omega + |\zeta|^2.$$

Za $\zeta=\omega$, dobija se $A(\omega) = 1-|\omega|^2 \ge 0$ i otuda $|\omega| = |(x,y)| \le 1$. Ako su x i $y \in H$ proizvoljni vektori primeniti dokazanu nejednakost na vektore $a = x/||x||$ i $b = y/||y||$.

alternativni postupak $\triangleright$. Neka je $\zeta = re^{i\varphi}$, $\omega = |\omega|\, e^{i\alpha}$. Tada je

$$\|x - re^{i\varphi}y\|^2 = 1\, - 2r\ \mathrm{Re}\ \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\, \omega + \mathrm{r}^2.$$

? Nejednakost trougla. Za $x \in H$ i $y \in H$,

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

Na osnovu Schwarz nejednakosti,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2\, + 2\,\mathrm{Re}\ (\mathrm{x},\mathrm{y}) + \|\mathrm{y}\|^2 \leq \|\mathrm{x}\|^2\, + 2||\mathrm{x}||||\mathrm{y}|| + \|\mathrm{y}\|^2 = (||\mathrm{x}|| + ||\mathrm{y}||)^2.$$

□

Ako je $(x, y) = 0$ kažemo x je ortogonalan na y, i ponekad pišemo $x \perp y$. Kako $(x, y) = 0$ povlači $(y, x) = 0$, relacija $\perp$ je simetrična.

Lema 3.1. (Pitagor-ina teorema). *Ako su vektori* x *i* y *ortogonalni i* $z = x + y$, *tada je*

$$\|z\|^2 = \|x + y\|^2 = \|x\|^2\, +\, \|y\|^2$$

$\triangleright$ dokaz sledi iz

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2\, + 2\,\mathrm{Re}\,(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \|\mathrm{y}\|^2.$$

Neka $x^\perp$ označava skup svih $y \in H$ koji su ortogonalni na x; i ako je je M podskup H, neka je $M^\perp$ skup svih $y \in H$ koji su ortogonalni na svako $x \in M$.
Proveriti
a) $x^\perp$ je zatvoren
b) $M^\perp$ je zatvoren

Furi-jeovi koeficijenti
Skup vektora $\{e_k\}$ naziva se ortonormiran ako je $(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$;
Neka je $\{e_k\}$ ortonormiran sistem vektora.
Brojevi $\hat{x}_k = (x, e_k)$ nazivaju se *Fourier-ovi koeficijenti* vektora x u ortonormiranom sistemu $\{e_k\}$.
Sa geometrijske tačke gledišta *Furi-jeov koeficijent* $\hat{x}_k$ vektora x je projekcija vektora na pravac jediničnog vektora e_k.
U slučaju prostora E^3 sa zadanim u njemu ortonormiranim reperom e_1, e_2, e_3 *Furi* -jeovi koeficijenti $x^k = \hat{x}_k$ su koordinate x u bazisu e_1, e_2, e_3 u razlaganju $x = x^1\, e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$.
Ako umesto tri vektora e_1, e_2, e_3 razmatramo dva e_1, e_2 to razlaganje $x = x^1\, e_1 + x^2 e_2$ ne važi za sve $x \in E^3$. Koeficijenti *Furi* $x^k = \hat{x}_k$, $k = 1, 2$, definisani su i u ovom slučaju i vektor $x_e = Px = x^1\, e_1 + x^2 e_2$ je ortogonalna projekcija vektora x na ravan L vektora e_1, e_2. Medju svim vektorima ravni L vektor x_e je najbliži vektoru x u smislu da je $\|x - y\| \geq \|x - x_e\|$ za sve $y \in L$.
Analogno svojstvo za koeficijente *Furi* važi i u opštem slučaju.

3.2. **Projekcija na potprostor i dalja svojstva.** *

3.2.1. *Projekcija na potprostor.* Kažemo da je skup E u vektorskom prostoru konveksan ako ima sledeće svojstvo: kadgod $x \in E$, $y \in E$ i $0 < t < 1$, tačka $(1 - t)x + ty$ pripada E.
Ako svaki *Koši-jev niz* konvergira u H kažemo da je H *Hilbert-ov prostor.*
Dakle *Hilbert-ov prostor* je kompletan.

Teorema 3.1. *Svaki neprazan, zatvoren, konveksan skup* E *u Hilbertovom prostoru sadrži jedinstven element najmanje norme.*

Drugim rečima, postoji jedno i samo jedno $x_0 \in \mathrm{E}$ tako da je $\|x_0\| \leq \|x\|$ za svako $x \in \mathrm{E}$.
$\triangleright$ Na osnovu relacije paralelograma , za svako $x, y \in \mathrm{H}$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

i otuda

$$\text{(1)} \qquad \|\frac{x+y}{2}\|^2 + \frac{1}{4}\,\|x-y\|^2 = \frac{1}{2}\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Neka je $\delta = inf\,\{\|x\| : x \in E\}$.
Specijalno ako $x, y \in \mathrm{E}$, s obzirom da je E konveksan, $\frac{x+y}{2} \in \mathrm{E}$, i na osnovu (1) i definicije δ, sledi

$$\delta^2 + \frac{1}{4}\,\|x-y\|^2 \leq \frac{1}{2}\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

i otuda

$$\text{(2)} \qquad \|x-y\|^2 \leq 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 - 4\,\delta^2.$$

Ako je $\|x\| = \|y\| = \delta$ iz (2) sledi $x = y$; što dokazuje jedinstvenost elementa najmanje norme.
Iz definicije δ sledi da postoji $\{x_n\}$ u E tako da $\|x_n\| \to \delta$ kada $n \to \infty$. Primenom nejednakosti (2) za $x = x_n$ i $y = x_m$ pokazuje se da je niz $\{x_n\}$ Košijev i otuda konvergira ka $x_0 \in \mathrm{H}$. Kako $x_n \in \mathrm{E}$ i E je zatvoren, $x_0 \in \mathrm{E}$. Kako je norma neprekidna funkcija na H, sledi

$$\|x_0\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \delta.$$

$\square$

U konačno dimenzionom Hilbertovom prostoru važi sledeća verzija prethodne teoreme (bez pretpostavke da je skup E konveksan).

Vežba 3.4. Svaki neprazan, zatvoren skup E u konačno dimenzionom Hilbertovom prostoru sadrži element najmanje norme (nije jedinstven u opštem slučaju).

Da element najmanje norme nije jedinstven u opštem slučaju pokazuje primer: sfera $S = \{||x|| = 1\}$ u prostoru $\mathbb{R}^m$.
Sledeći primer pokazuje da u svakom beskonačno dimenzionom Hilbertovom prostoru, postoje zatvoreni skupovi koji ne sadrži element najmanje norme.

Primer 3.1. Neka je $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ prebrojiv orto-normiran sistem vektora u Hilbertovom prostoru H, $\lambda_k = 1 + \frac{1}{k}$ i $E = \{\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, ..., \lambda_n e_n, ...\}$. Proveriti da je E zatvoren skup, ali da nema element najmanje norme.
Konkretno neka je $H = L^2(\mathrm{T})$ i $e_k = e^{ikt}$.

Skup A je *gust* (svuda gust) u B ako je $B \subset \overline{A}$.

Primer 3.2. Skup polinoma P je potprostor prostora $C_2[a,b]$.
Na osnovu Vajerštrasovog stava skup polinoma P je je gust u prostoru neprekidnih funkcija $C[a,b]$ (sa max normom).
Kako je $||f||_2 \leq \max|f|$, skup polinoma P nije zatvoren u $C_2[a,b]$.

Za dalje rezulte u vezi ovog primera videti, u daljem tekstu, Teorema 4.1: Jednostavne funkcije (respektivno neprekidne) su guste u L^p, $1 \leq p < \infty$.
Ovde napomenimo samo da je konačni dimenzioni potprostor nekog prostora uvek zatvoren; tako da se pretpostavka da je potpotprostor zatvoren u teoremi koja sledi, suštinski odnosi na beskonačno dimenzioni slučaj.

Teorema 3.2. ** Neka je M zatvoren potprostor Hilbert-ovog prostora H. Tada postoji jedinstven par preslikavanja P i Q tako da P preslikava H u M, Q preslikava H u $M^{\perp}$, i*

(1) $$x = Px + Qx$$

za sve $x \in H$. Ova preslikavanja imaju sledeća svojstva :
(2) *ako $x \in M$, tada $Px = x$, $Qx = 0$; ako $x \in M^{\perp}$, tada $Px = 0$, $Qx = x$*

(3) $$\|x - Px\|^2 = inf\{\|x - y\| \,:\, y \in M\}$$

ako je $x \in H$.

(4) $$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$$

(5) $$P\, i\, Q\, su\, linearna\, preslikavanja.$$

Posledica 3.1. Neka je M zatvoren potprostor *Hilbert-ovog prostora* H. Tada postoji vektor $z \in H$, $z \neq 0$, tako da je $z \perp M$.

Posle kratkog razmatranja dajemo skicu dokaza ove teoreme (za kompletan dokaz Teoreme 3.2 v. Rudin [Ru]).
U ovom tekstu razmatramo separabilne vektorske prostore (sa skalarnim proizvodom), tj. prostore koji imaju najviše prebrojiv gust skup vektora (što je dovoljno za primene). Pomoću Lema 3.1-3.6 sistematski razvijamo geometrijski pristup. Teorema 3.5- [Projekcija na prebrojiv ortonorminan sistem] (v. takodje Lema 3.3 (ekstremalno svojstvo) Lema 3.6 zamenjuje Teoremu 3.2; a Posledica 3.3 Teoremu 3.1.

Projekcija na vektor

Iz pedagoških razloga, razmotrimo prvo specijalne slučajeve Teorema 3.1 i 3.2 (odnosno Leme 3.6).
Neka su $x, a \in H$. Odredimo skalar λ tako da je $x - \lambda\, a$ ortogonalan na vektor a. Dobijamo :
$(x - \lambda\, a, a) = (x, a) - \lambda(a, a) = (x, a) - \lambda||a||^2 = 0$ i otuda $\lambda = \lambda_0 = \dfrac{(x, a)}{\|a\|^2}$;
definišimo $Px = P_a x = \lambda_0 a$ i neka je $Qx = x - Px$. Kako je $Qx = x - Px$ ortogonalno na a, na osnovu Pitagorine teoreme,

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2.$$

Otuda je
(1) $\|Px\| \leq \|x\|$.

Vežba 3.5. (geometrijski dokaz Schwarz-ove nejednakosti)
(a) Proveriti da

$$||Px|| = ||P_y x|| = \frac{|(x, y)|}{||y||}.$$

(b) Proveriti da iz (1) i (a) sledi *Schwarz* -ova nejednakost.

? Iz (1) i (a), sledi $\frac{|(x,y)|}{||y||} \leq ||x||$ i otuda *Schwarz* -ova nejednakost: $|(x,y)| \leq ||x||||y||$.

Skicirajmo,sada, dokaz Teoreme 2.

Skica dokaza Teoreme 2

$\triangleright$ Za svako $x \in H$, skup $x + M = \{x + y : y \in M\}$ je zatvoren i konveksan; definišimo $z = Qx$ kao element najmanje norme u $x + M$. Neka je $P_1 z = P_y z$ i $h = z - P_1 z$. Kako $h = z - P_1 z = (x - Px - P_y z) \in x + M$, s obzirom na definiciju z, $\|z\| \leq \|h\|$ i Pitagor-inu teoremu $\|z\|^2 = \|P_y z\|^2 + \|h\|^2$, sledi $P_y z = 0$. $\diamondsuit$

3.2.2. **Linearna funkcionela na Hilbertovom prostoru.** * Linearna funkcionela je linearni operator sa vrednostima u $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$.
Linearna funkcionela Λ definisana na normiranom vektorskom prostoru V je ograničena ako postoji nenegativna konstanta M tako da je $|\Lambda(x)| \leq M||x||$ za svako $x \in V$.
Dokazati da je linearna funkcionela ograničena na v.p. V ako i samo ako je neprekidna V.

Vežba 3.6. Dokazati da je svaka linearna funkcionela na konačno dimenzionom normiranom vektorskom prostoru ograničena.

Primer 3.3. Vektorski prostor $\mathrm{C}_2[-1,1]$ neprekidnih funkcija na $[-1,1]$ sa skalarnim proizvodom

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f\,\overline{g}\,dt$$

jeste prostor sa skalarnim proizvodom (ili unitarni prostor); ali nije *Hilbert-ov prostor.*
Linearna funkcionela Λ definisana na $\mathrm{C}_2[-1,1]$, sa $\Lambda(f) = f(0)$, nije ograničena.

Vežba 3.7. Opisati linearne funkcionele na $\mathbb{R}^3$.

Neka je Λ linearna funkcionela na $\mathbb{R}^3$ i $a_k = \Lambda(e_k)$. Tada je $\Lambda(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ i otuda $\Lambda(x) = (x,n)$, gde je $n = (a_1,a_2,a_3)$. Definišimo ravan $M = \{x : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}$; tada je n ortogonalno na M. Ovo razmatranje daje motivaciju za dokaz sledeće teoreme.

Teorema 3.3 (Reprezentacija linearne funkc. na Hilbert-ovom prost)**.** *Ako je* Λ *ograničena linearna funkcionela na Hilbert-ovom prostoru* H*, tada postoji jedinstven* $y \in H$ *tako da*

(1) $$\Lambda x = (x,y) \ \ (x \in H).$$

$\triangleright$ Ako je $\Lambda x = 0$ za sve x, stavimo $y = 0$.
Neka je $M = \{x : \Lambda x = 0\}$.
Na osnovu linearnosti Λ, sledi M je potprostor, a koristeći neprekidnost Λ pokazuje se da je M zatvoren.
Otuda, na osnovu Posledice 1, postoji $z_0 \in M^\perp$, $\|z_0\| = 1$.
Za $x \in H$ odredimo $\alpha = \alpha_x$ tako da $(x - \alpha z_0) \in M$; $\Lambda(x - \alpha z_0) = 0$

$\Lambda x = \alpha \Lambda z_0$; $\alpha = \frac{\Lambda x}{\Lambda z_0}$.
Otuda, kako je $z_0 \perp M$, dobija se $(x - \alpha z_0,\, z_0) = 0$, tj. $(x, z_0) = \alpha = \alpha_x$.
Kako je $\Lambda x = \alpha \Lambda z_0 = \Lambda z_0\,(x, z_0)$, sledi da (1) važi za $y = \overline{\Lambda z_0}\, z_0$.
Jedinost se jednostavno dokazuje.

3.2.3. **Ekstremalno svojstvo i Beselova nejednakost.** Skup vektora e_k naziva se ortonormiran ako je $(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$.
Definišimo *Fourier koeficijent* vektora x sa $\hat{x}_k = (x, e_k)$.
Podvucimo da pretpostavka:
Neka je skup vektora $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormiran u H
u opštem slučaju ne znači da je skup vektora $e_1, e_2, ..., e_n$ kompletan u H.

Lema 3.2. *Neka je skup vektora $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormiran u H, $x \in H$ i $x_e = \sum_1^n \hat{x}_k\, e_k$. Tada je*
a) vektor $h = x - x_e$ ortogonalan na ravni vektora $e_1, e_2, ..., e_n$.
b) $\|x_e\| \leq \|x\|$.

?? *b*) je Beselova nejednakost i ima geometrijsku interpretaciju "dužina katete nije veća od dužine hipotenuze".

$\lhd$ Dovoljno je dokazati da je $(h, e_j) = 0$ za proizvoljni vektor e_j datog sistema. Na osnovu definicije skalarnog proizvoda, sledi $(h, e_j) = (x - x_e, e_j) = (x, e_j) - (x_e, e_j) = \hat{x}_j - (x_e, e_j)$ i $(x_e, e_j) = \sum_{k=1}^n \hat{x}_k\,(e_k, e_j) = \hat{x}_j$ i otuda $(h, e_j) = 0$. Kako je $h = x - x_e$ ortogonalan na x_e, na osnovu Pitagorine teoreme, sledi $\|x\|^2 = \|x - x_e\|^2 + \|x_e\|^2$ i otuda $\|x_e\| \leq \|x\|$.

Lema 3.3. (ekstremalno svojstvo)
Neka je skup vektora $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormiran u H. Za proizvoljan vektor $y = \sum_1^n \alpha_k\, e_k$, tada je

$$\|x - \sum_1^n \hat{x}_k\, e_k\| \leq \|x - y\|. \tag{3.4}$$

Dakle, ako je M podprostor razapet nad vektorima $e_1, e_2, ..., e_n$, nejednakost (3.4) važi za svako $y \in M$.
$\lhd$ Kako je $x - y = (x_e - y) + h$, gde je h ortogonalan na vektor $x_e - y$, koji pripada ravni vektora $e_1, e_2, ..., e_n$, na osnovu Pitagorine teoreme,

$$\|x - y\|^2 = \|x_e - y\|^2 + \|h\|^2 = \|x_e - y\|^2 + \|x - x_e\|^2 \geq \|x - x_e\|^2.$$

$\square$

Lema 3.4. *a) ako su vektori $x_1, x_2, ..., x_n$ uzajamno ortogonalni i $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$, tada je*

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + ... + \|x_n\|^2\,.$$

b)ako je sistem vektora $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormiran i $x = \sum_1^n \alpha_k\, e_k$, tada je

$$\|x\|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + ... + |\alpha_n|^2\,.$$

c) ako je sistem vektora $e_1, e_2, ..., e_n$ *ortonormiran, tada je*

$$\|x - \sum_1^n \hat{x}_k\, e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_1^n |\hat{x}_k|^2\,.$$

$\lhd$ Prvo tvrdjenje uopštava *Pitagor* -inu teoremu i sledi iz V 3.

Drugo tvrdjenje sledi iz Vežbe 3.3, ili iz prvog jer je $\|\alpha_k\, e_k\|^2 = (\alpha_k\, e_k, \alpha_k\, e_k) = \alpha_k\, \overline{\alpha_k}(e_k, e_k) = |\alpha_k|^2$
Kao u dokazu Leme 2 dobija se $\|x\|^2 = \|x - x_e\|^2 + \|x_e\|^2$. Otuda, kako je, na osnovu b) (drugo tvrdjenje), $\|x_e\|^2 = \sum_1^n |\hat{x}_k|^2$, sledi c).

Iz c) sledi *Besel*-ova nejednakost.

Besel-ova nejednakost
Neka je skup vektora $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormiran u H. Tada, za svaki $x \in \mathbf{H}$,

$$\sum_1^n |\hat{x}_k|^2 \leq \|x\|^2.$$

Vežba 3.8. Izvesti formulu za rastojanje tačke od ravni u *euklidskom prostoru* E^n.

$\rhd$ Neka je data tačka X_0; i neka je jednačina hiper-ravni L data sa $(X, n_0) = s$, gde je n_0 jedinčni vektor normale. Odrediti presek prave $X = X_0 + t\, n_0, t \in \mathbb{R}$ sa ravni L : $(X, n_0) = (X_0, n_0) + t\,(n_0, n_0) = s$. Otuda je $t = t_0 = s - (X_0, n_0)$. Dakle, rastojanje tačke X_0 od ravni L je : $|t_0| = |s - (X_0, n_0)|$.
alt Tačka $s\, n_0$ pripada ravni $L. \lambda = (X_0, n_0)$ je projekcija vektora X_0 na vektor n_0. Dakle, rastojanje tačke X_0 od ravni L je : $d = |sn_0 - (X_0, n_0)n_0| = |(s - \lambda)\, n_0| = |t_0|$.

Vežba 3.9. Neka data tačka A i glatka površ S u $\mathbb{R}$.
a) Ako postoji tačka B na površi S najbliža tački A. Dokazati da je AB ortogonalna na S.
b) Ako je površ S kompaktna, dokazati da postoji tačka B na površ S najbliža tački A.

U praksi često se pojavljuju ortogonalni sistemi, koji nisu ortonormirani, $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_n$. Brojevi $\frac{(x, \ell_k)}{(\ell_k, \ell_k)}$ nazivaju se *Fourier koeficijenti* vektora x u odnosu na sistem $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_n$.

Primer 3.4. U $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ razmotriti sistem $\{\, e^{i\,kx};\, k \in \mathbb{Z}\}$

Fourier koeficijenti funkcije f u odnosu na $\{\, e^{i\,kx}\,\}$ izražava se formulom

$$c_k = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{i\,kx}\, dx.$$

Iz *Besel* -ove nejednakosti, dobija se

$$\sum_{-n}^{n} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x)\, dx.$$

3.3. **Kompletni sistemi.**

Lema 3.5. Lema 5 (o neprekidnosti skalarnog proizvoda)
a) $(x,y) \to < x,y >$ *(preslikavanje koje uredjen par* (x,y) *preslikava u skalarni proizvod* $< x,y >$*) je neprekidno*
b) ako je $x = \sum_1^\infty x_k$*, to je* $< x,y >= \sum_1^\infty < x_k, y >$
c) ako je $e_1, e_2, ...$*- ortonormiran sistem u* H *i* $x = \sum_1^\infty x^k e_k$, $y = \sum_1^\infty y^k e_k$, *to je* $< x,y >= \sum_1^\infty x^k \overline{y^k}$

$\triangleright$ a) Kako je $< x,y > - < x_0, y_0 >=< x - x_0, y > + < x_0, y - y_0 >$, na osnovu *Schwarz-ove nejednakosti*, sledi

$$| < x,y > - < x_0, y_0 > | \leq \|x - x_0\| \, \|y\| + \|x_0\| \, \|y - y_0\|.$$

alternativni postupak: a) sledi iz *Schwarz-ove nejednakost*

$$|(x - x_0, y - y_0)| \leq \|x - x_0\| \, \|y - y_0\|.$$

b) Kako je $< x,y >= \sum_1^n < x_k, y > + < \sum_n^\infty x_k, y >$, a suma $\sum_n^\infty x_k \to 0$ kada $n \to \infty$, iz a) sledi b).
c) sledi uzastopnom primenom b) s obzirom na $< x,y >= \overline{< y,x >}$. □

Kompletni sistemi
Skup vektora $\{x_\alpha\}$ je kompletan u odnosu na skup $E \subset H$ ako se svaki vektor $x \in E$ može proizvoljno dobro aproksimirati konačnom linearnom kombinacijom elemenata datog sistema.

Primer 3.5. Ako je $H = E^3$, a e_1, e_2, e_3 - baza u E^3, to je sistem $\{e_1, e_2, e_3\}$ kompletan u H, a sistem $\{e_1, e_2\}$ nije kompletan u H.

Na osnovu *Vajerštras* -ove teoreme 1, sledi

Primer 3.6. Niz funkcija $1, x, x^2, ...$ je kompletan u $\mathrm{C}_2[a,b]$.

Primer 3.7. Neka je $T_n(x) = \sum_1^n (a_k coskx + b_k sinkx)$
a) $\|1 - T_n\| \geq \sqrt{2\,\pi}$
b) sistem $\{\, coskx,\ sinkx; k \in \mathbb{N}\}$ nije kompletan u $\mathcal{R}_2([-\pi,\pi], \mathbb{C})$

Teorema 3.4 (kompletnost ortonormiranog sistema)**.** *Neka je* $e_1, e_2, ..., e_n, ...$*- konačan ili prebrojiv ortonormiran sistem u* H*. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni :*
a) sistem $\{e_k\}$ *je kompletan u odnosu na skup* E
b) za svako $x \in E$ *važi razlaganje (Fourier red)*

$$x = \sum_1^\infty \hat{x}_k \, e_k$$

c) za svako $x \in E$ *važi Parsevalova formula*

$$\|x\|^2 = \sum_1^\infty |\hat{x}_k|^2$$

$\triangleright$ *a)* $\Rightarrow$ *b)*
Ako važi a) za dato $x \in E$ i $\varepsilon > 0$ postoji $y = \sum_1^n \alpha_k \, e_k$ tako da je $\|x - y\| < \varepsilon$, gde su $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormirani vektori u E. Na osnovu ekstremalnog svojstva *Fourier-ovih koeficijenata* (Lema 3),

$$\|x - \sum_1^n \hat{x}_k \, e_k\| \leq \|x - y\| < \varepsilon,$$

što znači da red $\sum_1^\infty \hat{x}_k\, e_k$ konvergira i ima sumu x.
b) $\Rightarrow c)$
Sledi iz Leme 5 c).
c) $\Rightarrow a)$
Kako je,

$$\|x - \sum_1^n \hat{x}_k\, e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_1^n |\hat{x}_k|^2 \;\to\; 0,$$

kada $n \to \infty$, iz c) sledi a).
Podvucimo da se, u Teoremi 3.4, ne pretpostavlja da je $\mathbf{H}$ *Hilbert-ov prostor.*

Sistem linearno nezavisnih vektora $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ linearnog normiranog prostora X naziva se *bazis* prostora X ako se svaki vektor $x \in X$ može predstaviti u obliku $x = \sum_1^\infty \alpha_k\, x_k$, gde su α_k - koeficijenti iz polja skalara prostora X.

Primer 6. a) $\mathrm{C}_2[a, b]$ nije kompletan
b) Niz funkcija $1, x, x^2, ...$ je kompletan u $\mathrm{C}_2[a, b]$ (videti Primer 4) ali nije njegov bazis.
c) Sistem $1, x, x^2, ...$ nije ortogonalan i ne važi razlaganje iz Teoreme 4 b).

Lema 3.6 (Lema o projekcija na prebrojiv ortonormiran sistem)**.** *Neka je* $e_1, e_2, ..., e_n, ...$*- konačan ili prebrojiv ortonormiran sistem u Hilbert-ovom prostoru* H. *Tada*
a) Za svako $x \in \mathbf{H}$, *red Furi vektora* $x \sim \sum_1^\infty \hat{x}_k\, e_k$ *konvergira ka nekom vektoru* $x_e = Px \in H$
b) Za svako $x \in \mathbf{H}$ $x = x_e + h,$ *gde je* h *ortogonalan na linearni omotač vektora sistema.*

$\lhd$ a) Za red *Furi* $x \sim \sum_1^\infty \hat{x}_k\, e_k$ ispunjeni su uslovi Koši-jevog kriterijuma :
Kako je

$$\|\sum_m^n \hat{x}_k\, e_k\|^2 = \sum_m^n |\hat{x}_k|^2,$$

a na osnovu *Besel-ove* nejednakosti, red

$$\|x\|^2 = \sum_1^\infty |\hat{x}_k|^2$$

konvergira. Otuda, s obzirom da je H kompletan, sledi da red $\sum_1^\infty \hat{x}_k\, e_k$ konvergira.
Na osnovu osobina skalarnog proizvoda (Lema 3.5 b)), za proizvoljni vektor e_k datog sistema dobija se $(h, e_k) = (x, e_k) - (x_e, e_k) = \hat{x}_k - \hat{x}_k = 0.$ $\square$
Iz dokaza dela a) Leme 3.6, sledi :

Posledica 3.2. Neka je $e_1, e_2, ..., e_n, ...$- konačan ili prebrojiv ortonormiran sistem u H.
Za svako $x \in \mathbf{H}$, niz parcijalnih suma $\sum_1^n \hat{x}_k\, e_k$ je *Koši-jev niz* .

Teorema 3.5 (Projekcija prebrojiv ortonormiran sistem)**.** *Neka je* $e_1, e_2, ..., e_n, ...$*- konačan ili prebrojiv ortonormiran sistem u Hilbert-ovom prostoru* H *i* $M = \overline{L}$, *gde je* $L(\{e_k\})$ *potprostor razapet nad* $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ *Tada, za svako* $x \in \mathbf{H}$,
a) red Furi vektora $x \sim \sum_1^\infty \hat{x}_k\, e_k$ *konvergira ka nekom vektoru* $x_e = Px \in M$
b) $x = x_e + h,$ *gde je* h *ortogonalan na* $M = \overline{L}$ *i specijalno na linearni omotač*

vektora sistema.
c) vektor $x_e = Px = \sum_1^\infty \hat{x}_k\, e_k$ *je najbliži vektor* $u M$, *vektoru* x.

$\lhd$ *a)* Kako $s_n = \sum_1^n \hat{x}_k\, e_k \in \mathrm{L}$ i s_n, na osnovu Leme 6 a), konvergira ka nekom elementu x_e, sledi da $x_e \in \mathrm{M}$.
b) Neka $y \in \mathrm{M}$; jasno je da postoji niz $y_n \in \mathrm{L}$ tako da $y_n \to y$.
Kako je $h \perp y_n$, a na osnovu Leme 5 $(h, y_n) \to (h, y)$, sledi $(h, y) = 0$, tj. $h \perp \mathrm{M}$.
c) Neka je ponovo $y \in \mathrm{M}$ proizvoljan vektor. Kako je $x - x_e = (x - y) + (y - x_e)$ i, s obzirom na b, $(x - x_e) \perp (y - x_e)$, na osnovu Pitagorine teoreme,

$$\|x - x_e\| \leq \|x - y\|. \tag{1}$$

Posledica 3.3 (najmanja norma-prebojiv sistem). Neka su ispunjeni uslovi Posledice 3.2 i neka je $M_x = M + x$. Tada u M_x postoji vektor $h = Qx = x - Px$ najmanje norme.

$\lhd$ Kako je M potprostor, iz nejednakosti (1), sledi $\|x - x_e\| \leq \|x + y\|$ za svako $y \in \mathrm{M}$.
Teorema 5 i Posledica 2 su dovoljna zamena za Teoreme 1 i 2.

Primer 3.8. [$\mathcal{R}_2$ nije kompletan; $\mathcal{L}_2$ je kompletan.] Proveriti
a) vektorski prostor $\mathrm{C}_2[a, b]$ neprekidnih funkcija na $[a, b]$ sa skalarnim proizvodom

$$(f, g) = \int_a^b f\,\overline{g}\, dt$$

nije *Hilbert-ov prostor.*
b) $\mathrm{C}_2[a, b]$ nije zatvoren potprostor u $\mathcal{R}_2[a, b]$.
c) vektorski prostor $\mathrm{C}[a, b]$ neprekidnih funkcija na $[a, b]$ je kompletan u odnosu na *max* normu.
d) $\mathcal{R}_2[a, b]$ nije kompletan.
e) $\mathcal{L}_2[a, b]$ je kompletan.

$\rhd$ a)Primer : $f_n(x) = -1,\ za\ -1 \leq x \leq -\frac{1}{n}$, $f_n(x) = n\,x, za\ -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ i $f_n(x) = 1, za\,\frac{1}{n}\ \leq x \leq 1$; pokazuje da $\mathrm{C}_2[a, b]$ nije *Hilbert-ov prostor.*
d) Neka je $0 < s < \frac{1}{3}$ i neka je $G_1 = (\frac{1}{2} - \frac{s}{2}, \frac{1}{2} + \frac{s}{2})$ interval dužine s, tj. srednji deo segmenta $\mathrm{I} = [0, 1]$ i $F_1 = [0, 1] \backslash G_1$. Skup F_1 sastoji se od dva segmenta;iz svakog od njih odstranimo srednji deo dužine $s\,\frac{1}{3}$ i tako dobijeni skup označimo sa F_1. Itd. u n-tom koraku odstranimo 2^{n-1} intervala dužine $s\,\frac{1}{3^{n-1}}$ i neka je G_n skup tačaka odstranjenih posle prvih n koraka i F_n skup preostalih tačaka, tj. $F_n = [0, 1] \setminus G_n$. Skup $\mathbb{K} = \mathbb{K}_s = \bigcap_1^\infty F_k$ naziva se $\widehat{\mathrm{K}}$antor-ov skup . Kako je dužina odstranjenih intervala jednaka

$$s + s\,\frac{2}{3} + s\,\frac{4}{3^2} + \cdots + s\,(\frac{2}{3})^n + \cdots = 3\,s$$

i $0 < s < \frac{1}{3}$, to $\widehat{\mathrm{K}}$antor-ov skup $\mathbb{K} = \mathbb{K}_s$ ima pozitivne mere $1 - 3\,s > 0$. Neka je f_n karakteristična funkcija skupa F_n; niz f_n je *Koši-jev niz* u $\mathcal{R}_2[a, b]$. Pretpostavimo da f_n konvergira nekom $f \in \mathcal{R}_2[0, 1]$. Tada je f s.s. jednako karakterističnoj funkciji skupa $\mathbb{K}$ i otuda f je prekidna s.s. na $\mathbb{K}$; tako da, na osnovu *Lebeg-ovog kriterijuma* , sledi $f \notin \mathcal{R}_2[0,1]$. Dakle , $\mathcal{R}_2[a,b]$ nije kompletan. $\diamondsuit$

Primer 3.9. U $C_2[-\pi,\pi]$ i $\mathcal{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ razmotriti sistem $\{\, e_k(x) = e^{i\,k\,x};\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ako $f \in \mathcal{R}_2 \setminus C_2$ tada u C_2 ne postoji najbliža funkcija funkciji f.
Napomena Ovaj primer pokazuje da je pretpostavka da je prostor *Hilbert* -ov bitna u Lemi 3.6 i Teoremi 3.5 ???; ako je $f \in \mathcal{R}_2([-\pi,\pi])$ prekidna funkcija, tada red *Furi* vektora $f \sim \sum_1^\infty \hat{f}_k\, e_k$ konvergira u $\mathcal{R}_2([-\pi,\pi])$, ali ne konvergira u $C_2[-\pi,\pi]$.

Propozicija 3.1. Neka je $\{x_k\}$ sistem linearno nezavisnih vektora u H.
Da bi sistem $\{x_k\}$ bio kompletan u H :
a) neophodno je, da u H ne postoji različit od nule vektor h ortogonalan na svim vektorima sistema $\{x_k\}$
b)u slučaju da je H *Hilbertov prostor* , dovoljno je, da u H ne postoji različit od nule vektor h ortogonalan na svim vektorima sistema $\{x_k\}$

$\lhd$ a) Ako je vektor $h \neq 0$ ortogonalan na vektorima sistema $\{x_k\}$, tada je za proizvoljnu linearnu kombinaciju $y = \sum_1^n \alpha_k\, x_k$, na osnovu Pitagorine teoreme,

$$\|h - y\|^2 = \|h\|^2 + \|y\|^2 \;\geq\; \|h\|^2 > 0$$

i, znači, vektoru h ne može se približiti više od veličine $\|h\| > 0$ linearnom kombinacijom vektora sistema.
b) ortogonalizacijom sistema $\{x_k\}$ dobija se ortonormiran sistem $\{e_k\}$
Neka je $x \in H$. S obzirom na b) Lema 7, razvijajući vektor x u *Furi red* po sistemu $\{e_k\}$, dobija se $x = x_e + h$ gde je $x = \sum_1^\infty \hat{x}_k\, e_k$, a vektor h ortogonalan na $L\{e_k\}$. Iz $L\{e_k\} = L\{x_k\}$, sledi $h = 0$.

Vežba 3.10. Da li b) Propozicija 3.1 važi za *pred-Hilbert-ove prostore* ?

$\rhd$ Svaki *pred-Hilbert-ov prostor* se može " kompletirati". Npr. " kompletiranjem " prostora $C_2[a,b]$, $\mathcal{R}_2[a,b]$ dobija se $\mathcal{L}_2[a,b]$.$\diamondsuit$

4. Trigonometrijski redovi i Integral Furi*

4.1. **Trigonometrijski redovi.** U ovoj pod-sekciji razmatramo prirodna proširenja rezultata sa $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$.
U realnoj analizi razmatraju se *Fourier-ovi koeficijenti* u odnosu na *trigonometrijski sistem* . Analogno, možemo definisati *Fourier-ove koeficijente* u odnosu na sistem $\{\, e_k(x) = e^{i\,kx}\,\}$.
Fourier-ovi koeficijenti funkcije $f \in \mathcal{R}([-\pi,\pi]\,)$ u odnosu na sistem $\{\, e_k(x) = e^{i\,kx};\, k \in \mathbb{Z}\}$ izražavaju se formulom

$$c_k = \hat{f}_k = (f, e_k) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-i\,kx}\, dx. \tag{1}$$

Fourier-ov red funkcije f je

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{i\,kx}, \tag{2}$$

i njegove *parcijalne sume* su

(3) $$S_n(x) = \sum_{-n}^{n} \hat{f}(k)\, e^{i\,kx} \quad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Definišimo *Dirihle*-ovo jezgro, preciznije, n -to *Dirihle*-ovo jezgro D_n :

$$D_n(t) = \sum_{-n}^{n} e^{i\,kt} = \frac{sin(n+\frac{1}{2})t}{sin\frac{1}{2}t}.$$

Jednostavno se proverava (u kursevima analize) da je

$$S_n(x) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x-t)\, dt.$$

Ponovimo da sa T označavamo jeiničnu kružnicu $\mathrm{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
Ako je F funkcija definisana na T i f definisana na $\mathbb{R}$ sa

(4) $$f(t) = F(e^{i\,t}),$$

tada je f periodična funkcija sa periodom $2\,\pi$. Ovo znači da je $f(t) = f(t + 2\,\pi)$. Suprotno, ako je f periodična funkcija sa periodom $2\,\pi$, tada postoji F tako da važi (4). Dakle, možemo identifikovati funkcije na T sa $2\,\pi$ -periodičnim funkcijama na $\mathbb{R}$; i, ponekad,da uprostimo notaciju, pišemo $f(t)$ umesto $f(e^{i\,t})$, čak ako je f definisana na T.
$L^p(\mathrm{T})$ je klasa kompleksnih, Lebeg merljivih, $2\,\pi$ - periodičnih funkcija na $\mathbb{R}$

$$\|f\|_p = \{\frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\, dt\}^{\frac{1}{p}}.$$

Umesto $L^p(\mathrm{T})$, ponekad, pišemo i kratko L^p.
Ponovimo, za $f \in L^1(\mathrm{T})$, *Fourier-ovi koeficijenti* funkcije f u odnosu na $\{\, e^{i\,kx}, k \in \mathbb{Z}\}$ definišu se formulama

(1) $$c_k = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-i\,kx}\, dx \ \ (\, k \in \mathbb{Z}\,).$$

Iz *Besel* -ove nejednakosti dobija se : ako $f \in L^2(\mathrm{T})$, tada

$$\sum_{-n}^{n} |c_k|^2 \le \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x)\, dx.$$

Trigonometrijski polinom je konačna suma oblika

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{1}^{n} (a_k coskx + b_k sinkx).$$

Na osnovu *Ojler-ove formule* , može se pokazati da je

$$T_n(x) = \sum_{-n}^{n} c_k\, e^{i\,kx}$$

Definišimo

$$e_k(t) = e^{i\,kt}.$$

Skalarni proizvod u $L^2(\mathrm{T})$ se definiše sa :

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt.$$

Proveriti da $\{ e_k ;\, k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormiran skup u $L^2(\mathrm{T})$; obično se naziva *trigonometrijski sistem* .

Kompletnost trigonometrijskog sistema *

Skup A je *gust* (svuda gust) u B ako je $B \subset \overline{A}$.

Teorema 4.1. *Jednostavne funkcije (respektivno neprekidne) na* T *su guste u* L^p*,* $1 \le p < \infty$.

Uputstvo: ? Pretpostavimo da je $f \ge 0$. Postoji niz $\{s_n\}$ kao u Bepo-Levijevom stavu (aproksimacija jednostavnim funkcijama). Kako je $0 \le s_n \le f$ i otuda $|f - s_n|^p \le |f|^p$, na osnovu teoreme o dominantnoj konvergenciji, sledi $\|f - s_n\|_p \to 0$ kada $n \to \infty$. *Pokazati da se merljivi skupovi aproksimiraju elementarnim i otuda da se jednostavne funkcije funkcije aproksimiraju (u L^p-metrici) jednostavnim funkcijama definisanim pomoću intervala. U realnoj analizi pokazuje se da se jednostavne funkcije definisane pomoću intervala dobro aproksimiraju neprekidnim funkcijama. Opšti slučaj (f kompleksna) sledi iz ovog.

Teorema 4.2. *Sistem*

$$\{e_k(t) = e^{i\,kt},\, k \in \mathbb{Z}\}$$

je kompletan u L^p*,* $1 \le p < \infty$.

$\triangleright$ S obzirom na drugi Vajerštras-ov stav (videti [Ka-Ad], Teorema 8.3.1), *trigonometrijski polinomi* su gusti u C(T). Otuda teorema sledi iz Teoreme 4.1.
? Ponovimo, za $f \in L^1(\mathrm{T})$, *Fourier-ovi koeficijenti* funkcije f u odnosu na $\{ e^{i\,kx} \}$ izražavaju se formulama

(1) $$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-i\,kx}\, dx \quad (\, k \in \mathbb{Z}\,).$$

Dakle, svakom $f \in L^1(\mathrm{T})$ pridružuje se funkcija $\hat{f}$ na $\mathbb{Z}$.
Fourier-ov red funkcije f je

(2) $$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{i\,kx},$$

i njegove *parcijalne sume* su

(3) $$S_n(x) = \sum_{-n}^{n} \hat{f}(k)\, e^{i\,kx} \quad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Kako $L^2(\mathrm{T}) \subset L^1(\mathrm{T})$, (1) je definisano za svako $f \in L^1(\mathrm{T})$.
Na osnovu *Parseval-ove formule*,

(4) $$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, \overline{\hat{g}(k)}$$

za svako $f, g \in L^2(\mathrm{T})$; red na desnoj strani formule (4) konvergira apsolutno; i ako je S_n definisano kao u (3), tada

(5) $$\lim_{n \to \infty} \|f - S_n\|_2 = 0$$

jer, na osnovu specijalnog slučaja formule (4), nalazimo

$$\|f - S_n\|_2^2 = \sum_{|k|>n} |\hat{f}_k|^2. \tag{6}$$

Podvucimo da, na osnovu formule (5), sledi : svako $f \in L^2(\mathrm{T})$ je L^2-granica parcijalnih suma svog *Furi* reda; tj. *Furi* red funkcije f konvergira u L^2 -smislu. Konvergencija tačka po tačka je teži problem (v. [Ru], [Zo]).
Primer 9. Ako je $A \subset [0, 2\pi]$ i A merljiv, tada $\int_A cosnx\, dx$ teži nuli kada n teži ∞.
Lema Rimana*. Neka je $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ apsolutno integrabilna (bar u nesvojstvenom smislu) i $I(\lambda) = \int_a^b f(x)\, e^{i\,\lambda\, x}\, dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada $I(\lambda)$ teži nuli kada λ teži ∞, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Upustvo*. Pomoću parcijalne integracije dokazati lemu ako je f glatka funkcija. Integrabilne funkcije aproksimirati neprekidnim, a neprekidne polinomima. Za kompletan dokaz v. Zoric [Zo].
Ako je poznato da $f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi])$ tada, na osnovu *Beselove*-ove nejednakosti, sledi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{i\,n\,x}\, dx \to 0$$

kada $n \to \infty$, $n \in \mathbb{Z}$. Ova diskretna varijanta *Leme Rimana* je u osnovi početnih ispitivanja klasičnih $\widehat{\text{F}}$uri-jeovi redova.

Vežba 4.1. Da li *Lema Rimana* važi ako $f \in L^1(a, b)$?

Teorema Fejera *

Ponovimo parcijalna suma *Furi*-jeovog reda funkcije f sa *Furi*-jevim koeficijentima c_k definiše se sa :

$$S_n(x) = \sum_{-n}^{n} c_k\, e^{ikx}.$$

Razmotrimo niz aritmetičkih sredina parcijalnih suma :

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + ... + S_n(x)}{n+1}.$$

Proveriti

$$\mathcal{F}_n(t) = \frac{D_0(t) + ... + D_n(t)}{n+1} = \frac{sin^2(n+\frac{1}{2})t}{(n+1)sin^2\frac{1}{2}t}$$

i

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, \mathcal{F}_n(t)\, dt.$$

Funkcije $\mathcal{F}_n$ nazivaju se *Fejer* -ovo jezgro. Otuda se dobija

Teorema 4.3. *(Teorema Fejera). Ako je $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ - 2π - periodična funkcija, tada $\sigma_n(x)$ ravnomerno konvergira ka f.*

Za dokaz *Fejer* -ove teoreme videti Zoric [Zo].
Posledica *Fejer*-ove teoreme je *Vajerštrasova teorema* (o aproksimaciji trigonometrijskim polinomima)
Interesantano je da se *Vajerštras*-ova teorema može dokazati, pomoću rešenja *Dirihleovog zadataka* na krugu (videti dodatnu sekciju koja sledi).

4.2. **Integral Furi*.** Funkcija

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda) = v.p. \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\,\lambda\,x}\, dx, \;\; (\lambda \in \mathbb{R})$$

naziva se *Furi-jeva transformacija* funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
Pogodno je uvesti oznaku

$$\tilde{c}(x) = F[c](x) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} c(t)\, e^{i\,t\,x}\, dt \tag{4.1}$$

Integral Furi se definiše na sledeći način :
Ako je $c(t) = \hat{f}(t)$ - *Furi-jeva transformacija* funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Integral dodeljen funkciji f

$$f(x) \sim \tilde{c}(x) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} c(t)\, e^{i\,t\,x}\, dt,$$

naziva se *Furi-jeov integral* funkcije f.
$C_0(\mathbb{R})$ je potklasa klase $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ za koju $f(x) \to 0$ kada $|x| \to \infty$.
Ako za neko $\varepsilon > 0$ apsolutno konvrgiraju integrali

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{f(x-u) - f(x_-)}{u}\, du \quad \int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+u) - f(x_+)}{u}\, du,$$

kažemo da f zadovoljava Dinijev uslov u tački x.

Teorema 4.4. (Inverzna Teorema, o predstavljanju funkcije integralom Furi)
a) Ako $f \in L^1$ *i* $\hat{f} \in L^1$*, i ako je*

$$f_*(x) = F[\hat{f}](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\, e^{i\,x\,t}\, dm(t) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

tada $f_* \in C_0$ *i* $f_* = f$ *s.s.*
b) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *lokalno deo po deo neprekidna i apsolutno integrabilna na* $\mathbb{R}$*. Ako* f *zadovoljava Dini -jev uslov u tački* x *tada integral Furi konvergira u toj tački ka vrednosti* $\frac{1}{2}[f(x_-) + f(x_+)]$.

Za dokaz dela a) ove teoreme videti npr. Rudin [Ru]; a za dokaz dela b) Zoric [Zo].
Dakle, deo *a*) Teoerme o inverziji tvrdi: ako $f \in L^1$ i $\hat{f} \in L^1$, tada

$$F[\mathcal{F}[f]] = \mathcal{F}[F[f]] = f \;\; s.s. \tag{4.2}$$

Imajući u vidu ovu vezu, transformacija definisana sa (4.1) se često naziva inverzna transformacija Furi i umesto F piše se $\mathcal{F}^{-1}$, a jednakost (4.2) formula o predstavljanju funkcije integralom Furi.

Posledica 4.1. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ neprekidna, u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ ima levi idesni izvod i apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$. Tada je f predstavljiva svojim integralom *Furi* na $\mathbb{R}$.

Vežba 4.2. Ako je $f_-(x) = f(-x)$ tada je $\mathcal{F}[f_-] = (\hat{f})_-$.

Vežba 4.3. Neka je $f(x) = e^{-a\,x}$ za $x > 0$ i $f(x) = 0$ za $x \leq 0$; tada je

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{1}{a + i\,t}.$$

Vežba 4.4. a) Neka je f kao u Vežbi 4.3 i $\varphi(x) = e^{-a\,|x|} = f(x) + f(-x)$. Tada je

$$\mathcal{F}[\varphi](t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{a}{a^2 + t^2}.$$

b) Neka je $\psi(x) = f(x) - f(-x)$ neparno proširenje funkcije f, $x > 0$, na $\mathbb{R}$. Na osnovu teoreme o predstavljanju funkcije integralom Furi (Teorema 20), dokazati da je

$$f(x) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\,x\,t}}{a + i\,t}\,dt = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{ako}\, x > 0,\\ \frac{1}{2}, & \text{ako}\, x = 0,\\ 0, & \text{ako}\, x < 0,\end{cases}$$

$$\varphi(x) = e^{-a\,|x|} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a\,e^{i\,x\,t}}{a^2 + t^2}\,dt,$$

$$\psi(x) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\,e^{i\,x\,t}}{a^2 + t^2}\,dt = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{ako}\, x > 0,\\ 0, & \text{ako}\, x = 0,\\ -e^{ax}, & \text{ako}\, x < 0.\end{cases}$$

gde je $f(0) = \frac{1}{2}$ i $\psi(0) = 0$.
c) Proveriti dobijene rezultate pomoću teoreme o sumi *reziduma* .

Vežba 4.5. Izdvajajući u dva poslednja integrala realni i imaginarni deo, izračunati *Laplas-ove integrale* :

$$L_1(x) = \int_0^{\infty}\frac{\cos x\,t}{a^2 + t^2}\,dt = \frac{\pi}{2\,a}\,e^{-a\,|x|}$$

i

$$L_2(x) = \int_0^{\infty}\frac{t\,\sin x\,t}{a^2 + t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\,sgn\,x\,e^{-a\,|x|}.$$

Vežba 4.6. a) Razviti $\cos\alpha\,x$ u *Furi* red.
b) Zamenjujući $x = \pi$ u dobijenom razvoju, otuda izvesti :

$$ctg\pi\alpha - \frac{1}{\pi\,\alpha} = \frac{2\,\alpha}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2 - n^2} \;\; ; \;\; i$$

$$\frac{\sin\pi\,x}{\pi\,x} = \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

za $|x| < 1$.

Vežba 4.7. Dokazati da je

$$\pi\,ctg\pi z = \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty}\frac{2\,z}{z^2 - n^2}$$

za $z \notin \mathbb{Z}$.

Vežba 4.8. Dokazati da je

$$sin\pi\, z = \pi\, z \prod_{1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{k^2})$$

i da proizvod uniformno konvergira na kompaktnim podskupovima $\mathbb{C}$.

Za Vežbe 4.7- 4.8 v. npr. Conway [Co].

O primenama *Furi i Laplas-ove transformacije* na rešavanje parcijalnih jednačina (v. npr. Šabat - Lavrentijev [Ša-La])

5. **Primena apstraktne mere u verovatnoći***

U ovoj sekciji samo skiciramo osnovne pojmove i dokaze osnovnih tvrdjenja teorije verovatnoće (za detalje v. Kolmogorov, Fomin [Ko-Fo]; Ivković, Uvod u teoriju verovatnoće, Beograd ??).
Ponovimo definiciju *Apstraktne mere* i *verovatnoće.*

5.1. **Osnovna svojstva.**

Definicija 5.1. Neka je X proizvoljan skup i $\mathfrak{M}$ σ-algebra u X.
Par $(X, \mathfrak{M})$ naziva se merljiv prostor.

Elementi skupa $\mathfrak{M}$ nazivaju se merljivi skupovi.
Nenegativna funkcija skupa μ koja je definisana na $\mathfrak{M}$, uzima vrednosti u $[0, \infty]$ i koja je σ-aditivna naziva se *mera* na $\mathfrak{M}$.

Ova definicija mere se razlikuje od Definicije 2.4 XX, u tome što je ovde definiciono područje σ-algebra. Dalje ćemo krititi Definiciju 5.1.

Definicija 5.2. Neka je $(X, \mathfrak{M})$ merljiv prostor i neka f preslikava X u $\mathbb{R}^*$. Ako je skup $\{f < c\}$ merljiv za svako realno c, kažemo da je f *merljiva funkcija* na X.

Definicija 5.3. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ naziva se prostor sa merom.

Zamenjući Lebeg-ovu meru m *merom* μ uvesti odgovarajuće definicije i dokazati odgovarajuće stavove.
Ako je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor sa merom i μ normalizovana mera, tj. $\mu(X) = 1$, trojka $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ naziva se prostor verovatnoća.
U teoriji verovatnoće obično se koriste oznaka $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}))$ za prostor verovatnoća.

Ponovimo, ako je $\mathbf{P}(X) = \mu(X) = 1$ odgovarajuća uredjena trojka (obično se koriste oznake $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}))$ naziva se prostor verovatnoća.
Napomenimo da je u aksiomatskom zasnivanju teorije verovatnoće osnovni pojam koji se ne definiše pojam *elementarnog dogadjaja.* Elementarne dogadjaje označavamo sa ω, a skup svih elementarnih dogadjaja sa Ω.

Dakle u teoriji verovatnoće obično se koristi oznaka Ω za okvirni prostor (skup elementarnih dogadjaja). [0]U kontekstu kursa kompleksne analize Ω obično označava otvorene skupove!
Slučajna promenljiva ξ je merljiva ($\mathfrak{F}$-merljiva) finitna (uzima samo konačne vrednosti) funkcija koja Ω preslikava u realnu pravu $\mathbb{R}$. Odavde sledi da je, na primer, inverzna slika poluotvorenog intervala $[a, b)$ takodje u $\mathfrak{F}$. dalje, s obzirom da je $\mathfrak{F}$ σ-polje, inverzna slika svakog Borel-ovog skupa je element iz $\mathfrak{F}$. ??

Za verovatnoću P zadatu na skupu dogadjaja $\mathfrak{L}$ postoji proširenje na minimalno σ-prsten koji sadrži $\mathfrak{L}$.

Ako je ξ slučajna promenljiva definiše se funkcija raspodele F_ξ na realnoj osi sa $F_\xi(x) = \mathbf{P}(\xi < x)$ i mera $\mathbf{P}_\xi$ na realnoj pravoj sa $\mathbf{P}_\xi([x,y)) = F_\xi(y) - F_\xi(x)$.
Ako je ξ slučajna promenljiva, tada funkcija raspodele $F = F_\xi \in NBV_l$.
Funkcija F je funkcija raspodele slučajne promenljive ξ akko je neopadajuća, neprekidna sa leve strane i $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.
Slučajna promenljiva ξ je apsulutno neprekidnog tipa ako postoji nenegativna funkcija φ tako da je $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$; funkcija φ naziva se gustina raspodele F.

Vežba 5.1. Definisati višedimenzionu slučajnu promenljivu i funkciju raspodele.

Matematičko očekivanje definišemo kao Lebeg-ov integral

$$E\xi = \int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega).$$

Dokazati

$$E\xi = \int x dF(x).$$

Karakteristična fukcija f slučajne promenljive ξ definiše se

$$f(t) = Ee^{i\,t\,\xi} = \int e^{i\,t\,x}\, dF(x) \;\; t \in \mathbb{R},$$

gde je F je funkcija raspodele slučajne promenljive ξ.

Niz funkcija raspodele $F_1, F_2, ...$, slabo konvergira ka neopadajućoj funkciji F, onaka $F_n \to^s F$ ako konvergira u svakoj tački x neprekidnosti funkcije F ka $F(x)$.
Ako dodatno $F_n(\pm\infty) \to F(\pm\infty)$ kažemo $F_1, F_2, ...$, kompletno konvergira ka neopadajućoj funkciji F, onaka $F_n \to^k F$. U slučaju kompletne konvergencije granična funkcija je funkcija raspodele.

Niz realnih funkcija $\{f_m\}$ je uniformno ograničen na $\mathbb{R}$ ako postoji $M > 0$ tako da je $f_m(\mathbb{R}) \subset (-M, M)$ za svako m.

Dijagonalni postupak: Neka je $\{f_m\}$ niz uniformno ograničenih funkcija na $\mathbb{R}$ i $E = \{x_1, x_2, ...\}$ svuda gust skup u $\mathbb{R}$.
Kako je $\{f_m(x)\}$ ograničen za svako $x \in \mathbb{R}$, $\{f_m\}$ ima podniz $\{f_{m,1}\}$ koji konvergira u x_1 ka $f(x_1)$. Iz $\{f_{m,1}\}$ može se izdvojiti jedan podniz $\{f_{m,2}\}$ koji konvergira u x_2 ka $f(x_2)$. Nastavljajući na ovaj način dobija se nizovi $\{f_{m,k}\}$ koji konvergira u x_k ka $f(x_k)$ takvi da je $\{f_{m,k}\}$ podniz $\{f_{m,k-1}\}$. "Dijagonalni niz" $\{f_{m,m}\}$ konvergira u svakoj tački skupa E.

Ponovimo za detalje o teoriji verovatnoće videti [Iv].

Teorema 5.1. *Svaki skup funkcija raspodele je slabo kompaktan, tj. svaki niz funkcija raspodele $F_1, F_2, ...$, sadrži podniz $F_{n_1}, F_{n_2}, ...$, koji slabo konvergira ka neopadajućoj funkciji F.*

Uputstvo :Neka je $D = \{x_1, x_2, ...\}$ svuda gust skup u $\mathbb{R}$, koristeći poznati dijagonalni postupak definisati podniz i graničnu funkciju F na D. Kako je F neopdajuća može se po neprekidnosti sa leve strane dodefinisati na $\mathbb{R}$; proveriti da je svako $x \in \mathbb{R}$

$$F(x-0) \le \liminf F_n(x) \le \limsup F_n(x) \le F(x+0).$$

Ako je F neprekidna u x, sledi $F(x-0) = F(x+0)$ i stoga $\liminf F_n(x) = \limsup F_n(x)$; otuda $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$. □

Iz slabe konvergencije niza funkcija raspodele sledi da je granična funkcija samo neopadjuća.

Primer 5.1.

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{ako} \quad x \le -n \\ 1/2 & \text{ako} \quad -n < x \le n \\ 1 & \text{ako} \quad x > n \end{cases}$$

$F_n(x) \to^s 1/2$ kada $n \to \infty$; dakle granična funkcija nije funkcija raspodele.

Teorema 5.2 (Lema Helly-Braya)**.** *Neka je g neprekidna na $[a,b]$. Neka niz funkcija raspodele F_k slabo konvergira ka neopadajućoj funkciji F i $a, b \in C(F)$. Tada*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x)\ dF_n(x) = \int_a^b g(x)\ dF(x).$$

karakteristične funkcije ??

5.2. **Vrste konvergencije u teorije verovatnoće.** U teoriji verovatnoće razmatraju se uglavnom četiri vrste konvergencije slučajnih promenljivih ξ_n ka slučajnoj promenljivoj ξ:
u verovatnoći (označavamo $\xi_n \to^v \xi$),
skoro izvesno (označavamo $\xi_n \to^{s.i.} \xi$),
u srednjem kvadratnom (označavamo $\xi_n \to^{s.k.} \xi$), i
u zakonu raspodele (označavamo $\xi_n \to^z \xi$).

A. Niz slučajnih promenljivih ξ_n konvergira u verovatnoći ka slučajnoj promenljivoj ξ ako za svako $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| \ge \varepsilon\} \to 0$, kada $n \to \infty$.

B. Niz slučajnih promenljivih ξ_n konvergira skoro izvesno (označavamo $\xi_n \to^{s.i.} \xi$) ka slučajnoj promenljivoj ξ ako je $\mathbf{P}\{\xi_n \to \xi, \text{kad n} \to \infty\} = 1$. Sa gledišta teorije mere skoro izvesna konvergencija ekvivalentna je skoro svuda konvergenciji u odnosu na $\mathbf{P}$ -meru.

C. Niz slučajnih promenljivih ξ_n konvergira u srednjem kvadratnom ka slučajnoj promenljivoj ξ, ako

$$E\xi_n^2 < \infty, n = 1, 2, ..., \text{ i } E|\xi_n - \xi|^2 \to 0,\ \textit{kada}\, n \to \infty. \tag{5.1}$$

D. Niz slučajnih promenljivih ξ_n konvergira u zakonu raspodele ka slučajnoj promenljivoj ξ, ako niz odgovarajućih funkcija raspodele kompletno konvergira ka funkciji raspodele za ξ.

Motivaciju za ovu definiciju daje primer: neka je F_n definisano sa $F_n(x) = x^n$ na $[0,1]$, $F_n(x) = 1$ za $x > 1$ i $F_n(x) = 0$ za $x < 0$. Granična funkcija je karakteristična funkcija intervala $[1, \infty]$ i prekidna je sa leve strane u 1, dakle nije funkcija raspodele.

Neka je $\varepsilon_n^+ = \sup_{k\ge n} |\xi_\nu - \xi|$, $S(n,k) = \{\varepsilon_n^+ < \dfrac{1}{k}\}$, $S^c(n,k) = \{\varepsilon_n^+ \ge \dfrac{1}{k}\}$ i $A_k = \cup_{n=1}^\infty S(n,k)$.

Proveriti
a. Skup tačaka $\{\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\}$ može se predstaviti u obliku $A = \cap_{k=1}^{\infty} A_k$.
b. Ako $\xi_n \to^{s.i.} \xi$, onda (za fiksirano k) $\mathbf{P}(S(n,k)) \to 1$ i $\mathbf{P}(S^c(n,k)) \to 0$, kada n teži ∞.
Ponoviti
1. Ako $\xi_n \to^{s.i.} \xi$, onda $\xi_n \to^{v} \xi$.
Uputstvo. Neka je $\eta_n = \xi_n - \xi$. Uslov skoro izvesne konvergencije ekvivalentan je $\mathbf{P}\{\sup\limits_{k\geq n} |\eta_k| \geq \varepsilon\} \to 0$.
Dokaz se može bazirati i na Teoremi Egorova.
Za dato $\varepsilon > 0$, postoji podniz n_k tako da ξ_n konvergira ravnomerno na skupu $E = \cap S(n_k, k)$, i da je $\mathbf{P}(E) \leq \varepsilon$.$\diamondsuit$
2. Ako $\xi_n \to^{s.k.} \xi$, onda $\xi_n \to^{v} \xi$.
Dokaz sledi neposredno iz nejednakosti Čebiševa

$$\varepsilon^2 P\{|\eta_n| \geq \varepsilon\} \leq E|\eta_n|^2$$

3. Ako $\xi_n \to^{v} \xi$, onda $\xi_n \to^{z} \xi$.
Za svako $t \in \mathbb{R}$, $e^{it\xi_n} \to^{v} e^{it\xi}$ i na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji(Ivković, str. 52 ??) $E\, e^{it\xi_n} \to E\, e^{it\xi}$.
Neka je $\zeta_n = e^{it\xi_n} - e^{it\xi}$ i $A_n = \{|\zeta_n| \geq \varepsilon\}$. Kako je $|\zeta_n| \leq 1$, dobija se $|E\, e^{it\xi_n} - E\, e^{it\xi}| \leq \mathbf{P}(A_n) + \varepsilon$.
4. Ako $\xi_n \to^{s.i.} \xi$, onda $\xi_n \to^{z} \xi$.
5. Ako $\xi_n \to^{z} c$,$c = const$ skoro svuda, onda $\xi_n \to^{v} c$.
Neka je χ_n^k karakteristična funkcija intervala $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$. Ako se ove funkcije numerišu $\chi_1^1, \chi_1^2, \chi_2^2, \ldots$, onda ovaj niz konvergira po m-meri, ali ne konvergira s.s. na $[0,1)$.

6. Dodatak

Ograničen skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je merljiv u Žordanovom smislu ako je ∂E mere nula.

Neka je $E \subset \mathbb{R}^n$ ograničen skup. Funkcija K_E je R-integrabilna na E ako i samo ako je E merljiv u Žordanovom smislu.

Propozicija 6.1. Neka je ograničen skup M merljiv u Žordanovom smislu. Tada je M Lebeg merljiv.

Kako su ∂M i $\overline{M}$ zatvoreni i otuda Borelovi skupovi i skup $M_1 = \overline{M} \setminus \partial M$ je Borelov skup.

S obzirom da je ∂M mere nula u Žordanovom smislu, skup $M_2 = M \cap \partial M$ je mere nula.

Otuda skup $M = M_1 \cup M_2$ je Lebeg merljiv.

Primer 6.1. $Q_0 = Q \cap (0,1)$, Q_0^3 je prebrojiv, $\partial Q_0^3 = I^3$ nije merljiv u Žordanovom smislu.
U opštem slučaju, prebrojiva unija skupova merjivih u Žordanovom smislu nije merjiva u Žordanovom smislu.

Primer 6.2. Primer oblasti nemerjive u Žordanovom smislu. Neka je, $0 < \varepsilon < 1/2$, r_k, $k \geq 1$ niz racionalnih brojeva iz $(0,1)$ i

$J_k = (r_k - \varepsilon 2^{-k-1}, r_k + \varepsilon 2^{-k-1}) \cap (0,1)$, $R_k = J_k \times (0,1)$, $R_0 = (0,1) \times (0,\varepsilon)$ i $\Omega = \cup_{k=1}^{\infty} R_k$.

Proveriti da je

$\sum |J_k| \le \sum \varepsilon\, 2^{-k} = \varepsilon$

i otuda $m(\Omega) \le \varepsilon$,

$\overline{\Omega} = I^2$, $\partial\Omega = I^2 \setminus \Omega$

i otuda $\partial\Omega$ ima pozitivnu Lebegovu meru.

Teorema 6.1. *Neka je $E \subset \mathbb{R}^n$ ograničen skup merljiv u Žordanovom smislu i f R-inegrabilna na E, tada je f Lebeg integrabilna na E.*

Neka je E_0 skup tačaka prekida funkcije f. Na osnovu teoreme o R-inegrabilnosti, $m(E_0) = 0$.

Neka je $c \in \mathbb{R}$ i $E^c = \{f > c\} \cap (E \setminus E_0)$.

Ako $x \in E^c$, s obzirom da je f neprekidna u x, tada postoji otvren skup V_x, u odnosu na $E \setminus E_0$, tako da je $V_x \subset E^c$; i

postoji otvoren skup G_x u $\mathbb{R}^n$, tako da je $V_x = (E \setminus E_0) \cap G_x$.

Neka je $V = \cup_{x \in E^c} V_x$, $G = \cup_{x \in E^c} G_x$. Tada je $E^c = (E \setminus E_0) \cap G$. Kako je $E \setminus E_0$ Lebeg merljiv, E^c je Lebeg merljiv. Otuda je f merljiva i stoga f Lebeg integrabilna na E.

Möbius

Neka je $R = [0, 3/4) \times [0, 4\pi]$,

$r = r(\rho, \theta) = 1 + \rho \cos \frac{\theta}{2}$

i

$(\rho, \theta) \to \phi(\rho, \theta) = \big((r \cos\theta, r \sin\theta, \rho \sin \frac{\theta}{2})\big)$.

Za fiksirano θ, neka je $l^\theta(\rho) = \phi(\rho, \theta)$, $\rho \in [0, 3/4)$; putevi

l^θ su intervali. Opisati "kretanje" intervala l^θ kada $\theta \uparrow_0^{4\pi}$.

Opisati $\phi(R)$ i izračunati površinu površi $\phi(R)$.

*Koleginice Vujičić Staša, Jasna Milovanović, Nataša Djurdjevac i kolegae Bojan Živković i Ognjen Šobjajić pažljivo su pročitali rukopis i dali korisne sugestije.

References

[Ka-Ad] D. Adnadjević, Z. Kadelburg *Matematička analiza II* , Beograd, 1991.

[Ah] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co (1966)

[Alj] S. Aljančić *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu* , Gradjevinska knjiga, Beograd, 1968.

[Ar-Do-Jo] Arsenović, Dostanić, Jocić *Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora*, Beograd, 1998.

[Be-G] A. Barenstein, R. Gay, *Complex variables*, Springer-Verlag, 1991.

[Co] J. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag 1978.

[Ch-Br] R.Churchill, J.Brown *Complex variables and applications*, McGraw-Hill Book Co, 1984.

[Iv] Ivković, *Uvod u teoriju verovatnoće*, Beograd (??)

[Je-Ma] M. Jevtic, M. Mateljevic,*Analiticke funkcije*, Beograd, 1986.

[Ko-Fo] Kolmogorov, Fomin *Elementi teorije funkcija i funkcionalnog analiza*, Moskva, 1981

[Ma]

[Ma0] M. Mateljević, *Nejednakosti u H^p prostorima i njihova ekstremalna svojstva*, Magistarski rad, 1976.

[Ma 1] M. Mateljević, *Kompleksni brojevi i osnovni stav Algebre*, Nastava Matematike, Beograd, 2003.

[Ma 6] M. Mateljević, *Promena argumenta duž puta i Jordanove teoreme*, Nastava Matematike, Beograd, 2004.

[Ma 9] M. Mateljević,*Kompleksna analiza*, Banja Luka, 2004.

[Mi] D. Mitrinovic, *Kompleksna analiza* , Beograd, 1973.

[Ru] W.Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co, 1966.
[Zo] V. Zorič, *Analiza II* , Moskva, 1984.
[Ša] Šabat, *Uvod u Kompleksnu analizu*, Moskva, 1976.
[Ša-La] Šabat, Lavrentijev, *Metodi teorija funkcija kompleksne promenljive* , Fizmatgiz, Moskva, 1973.

Faculty of mathematics, University of Belgrade, Studentski Trg 16, Belgrade, Yugoslavia
E-mail address: miodrag@matf.bg.ac.yu