Odredjeni integral

citat iz knjige *Analiza I profesora Zorana Kadelburga i Dušana Adnadjevića*

1 *Pojam odredjenog integrala*

Uočimo segment [a,b] $\in$ R. Konačan skup tacaka $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$,takav da je $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$,nazivamo podelom segmenta $[a, b]$. Skup $P[a, b]$ svih podela segmenta $[a, b]$ uredićemo relacijom $\subseteq$. Ako je $P' \subseteq P$,kazacemo da je podela P finija od podele P',odnosno da je podela P' grublja od podele P.Sa Δx_i označićemo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, 3, .., n$. Pod parametrom podele podrazumevamo max$\Delta x_i = \lambda(P)$.

Na svakom segmentu $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, 3, ..., n$,izaberimo po tačku ξ_i. Skup svih tačaka označavamo sa $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$.Na ovaj način dobija se podela sa istaknutim tačkama (P, ξ) segmenta [a,b].
Definicija 8.1.1 Neka je $f : [a, b] \to R$ i neka je (P, ξ) podela sa istaknutim tačkama segmenta [a,b].Zbir

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

naziva se integralnom sumom fje f za datu podelu.

Zbir *pravougaonika s osnovama* $[x_{i-1}, x_i]$ *i visinama* $f(x_i)$ *jednak je datoj intrgralnoj sumi. Uočimo delove ravni koji sadrže tačke koje se nalaze u pravougaonicima,a ne nalaze se u krivolinijskom trapezu, kao i tačke koje se nalaze u krivolinijskom trapezu ali se ne nalaze u pravougaonicima.Ne ulazeči u ovom trenutku u definiciju površine krivolinijskog trapeza,a imajući u vidu intuitivni pojam površine, možemo zaključiti da ukupne površine pomenutih delova mogu biti proizvoljno male,a da je površina krivolinijskog trapeza približno jednaka integralnoj sumi.*

Definicija 8.1.2 Za broj I kažemo da je limes (granična vrednost)integralnih suma $\sigma(f, P, \xi)$, funkcije $f[a, b] \to R$ kad parametar podele teži nuli i pisemo

$$\lim_{\xi(P) \to 0} \sigma(f, P, \xi) = I$$

ako za svako $\epsilon > 0$ postoji δ, tako da za svaku podelu s istaknutim tačkama $(P, \xi) \in P[a, b]$ važi nejednakost

$$|\sigma(f, P, \xi)| < \epsilon$$

kadgod je parametar podele δ manji od δ.

Ako limes postoji i konacan je ,onda se kaže da je fja f integrabilna u Rimanovom smislu na segmentu $[a, b]$.Broj

$$I = lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma(f, P, \xi)$$

naziva se Rimanovim integralom fje f na segmentu $[a, b]$ i pise se

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Pri tom se a i b nazivaju donjom i gornjom granicom itegrala,respektivno; fja f naziva se podintegralnom funkcijom (integrandom),a izraz f(x)dx jeste podintegralni izraz. Promenjljiva x je integraciona promenjljiva.Ona se moze zameniti bilo kojim drugim odgovarajučim simbolom.
Skup svih funkcija,integrabilnih na segmentu $[a, b]$,označavamo sa $R[a, b]$ i nadalje takve funkcije ćemo nazivati integrabilnim funkcijama.
Rimanov integral kratko čemo nazivati integralom.

Primetimo da se integral I često naziva i odredjenim integralom, za razliku od skupa primitivnih funkcija neke funkcije,koji smo nazvali neodredjenim integralom.

2 Svojstva odredjenog integrala

Teorema 8.2.1 Neka su f,g $\in R[a,b]$ *i* $\alpha \in R$*.Tada f+g,f-g jesu takodje integrabilne i* αf *jeste takodje R integrabilna i pri tome važi nesto ovako:*

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x) - \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \alpha(f(x))dx = \alpha * \int_a^b f(x)$$

Posledica 8.2.1

Ako $f, g \in R[a,b]$ i ako su $\alpha i \beta$ realni brojevi, onda su i $\alpha * f + \beta * g$ takodje R-integrabilne i pri tome vazi jednakost

$$\int_a^b (\alpha * f(x) + \beta * g(x))dx = \alpha * \int_a^b f(x)dx + \beta * \int_a^b g(x)dx$$

Teorema 8.2.2 Neka $f, g \in R[a,b]$. *Tada:*
fg jeste R -integrabila
$|f|$ *jeste R-integrabilna*
1/f jeste R-integrabilna ukoliko $|f(x)| \geq \alpha > 0$
f jeste R-integrabilna na svakom podsegmentu segmenta [a,b].

2.1 Aditivnost integrala

Ako $f \in R[a,c]$ *i* $a < b < c$,*onda* $f \in R[a,b], f \in R[b,c]$ *i pri tome vazi jednakost:*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

2.2 Monotonost i procena integrala

Stav 8.2.3 Ako je $f \in R[a,b]$, $a < b$ i naravno $f(x) > 0$ za $x \in [a,b]$,onda je $\int_a^b f(x)dx > 0$

Posledica 8.2.2 Ako je $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a,b]$,$a < b$ i f,$g \in R[a,b]$ onda je ispunjeno

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

Stav 8.2.4 Neka je $f : [a,b] \to R$ neprekidna i nenegativna funkcija, $a < b$. Ako postoji tacka $c \in [a,b]$ tako da je $f(c) > 0$, onda je:

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

. *Stav 8.2.5*
Ako je $f \in R[a,b]$, $a < b$,onda važi:
$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)dx| \leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$

2.3 Prva teorema o srednjoj vrednosti

Teorema 8.2.3
Neka su $f, g \in R[a,b], m = inf_{x\in[a,b]}f(x), M = sup_{x\in[a,b]}f(x)$ i $g(x) > 0$, za $x \in [a,b]$.Tada postoji $\mu \in [m,M]$,tako da je:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu * \int_a^b g(x)dx.$$

i takodje važi:
Ako je još pored toga $f \in C[a,b]$, onda postoji c $\in (a,b)$,tako da je:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) * \int_a^b g(x)dx$$

3 Veza izmedju odredjenog i neodredjenog integrala

Posmatrajmo funkciju f,integrabilnu na segmentu $[a, b]$.Kada x uzima vrednosti iz segmenta $[a, b]$,onda je

$$\varphi(x) = \int_b^x f(x)dx$$

Ova funkcija često se naziva integral sa promenjljivom gornjom granicom.
Stav 8.3.1
Neka je $f \in R[a, b]$ i $\varphi(x) = \int_a^b f(t)dt, x \in [a, b]$. Tada:
1.funkcija φ je neprekidna na segmentu $[a, b]$ 2.ako je fja f neprekidna u tacki $x \in [a, b]$, tada je funkcija φ diferencijabilna u toj taččki. Pri tome važi:

$$\varphi'(x) = f(x)$$

Teorema 8.3.1
Ako je $f : [a, b] \to R$,neprekidna fja, onda je:

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

njena primitivna funkcija.

3.1 Njutn-Lajbnicova formula

Teorema 8.3.2
Neka je $f : [a, b] \to R$ neprekidna funkcija, neka je ψ proizvoljna njena primitivna. Tada važi jednakost:

$$\int_a^b f(x)dx = \psi(b) - \psi(a)$$

Definicija
Funkcija $f : [a, b] -> R$ je glatka na $[a, b]$, ukoliko ima neprekidan izvod na $[a, b]$, podrazumeva se da u tački a ima desni,a u tački b levi izvod.
Stav 8.3.2
Za neprekidnu, deo po deo glatku funkciju φ na segmentu $[a, b]$ važi jednakost:

$$\int_a^b \varphi'(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

4 Parcijalna integracija. Smena promenjljive

4.1 Parcijalna integracija

Teorema 8.4.1 Neka funkcije u(x) i v(x) imaju neprekidne izvode na segmentu $[a, b]$, tada važi sledeča jednakost:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x) * v(x)|_a^b - \int_a^b v(x) * du(x).$$

4.2 Druga teorema o srednjoj vrednodti

Teorema 8.4.1
Neka je f neprekidna, a g nenegativna, rastuća i glatka funkcija na segmentu [a,b]. Tada postoj $\xi \in [a, b]$,tako da je:

$$\int_a^b f(x) * g(x)dx = g(b) * \int_\xi^b f(x)dx.$$

teorema8.4.2

Neka je f neprekidna, a g monotona i glatka funkcija na segmentu $[a, b]$. Tada postoji $\xi \in [a, b]$, tako da važi:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) * \int_a^{\xi} f(x)dx + g(b) * \int_{\xi}^b f(x)$$

4.3 Smena promenjljive kod odredjenog integrala

Teorema 8.4.3 Neka je funkcija $f[a, b] \to R$ neprekidna,a funkcija $\varphi : [\alpha, \beta]- >$ $[a, b]$ ima neprekidan izvod i pri tom je $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$.Tada važi jednakost

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

5 Primene integrala

Odredjeni integral ima veoma mnogo primena u nizu naučnih oblasti:fizici,hemiji,biologiji kao i u društvenim oblastima. Posebno odredjeni integral se koristi u matematičkim disciplinama. Ovde ćemo videti neke od tih primena u geometriji i fizici.

5.1 Površine ravnih likova

Neka je D deo ravni ograničen zatvorenom prostom krivom L. Definisaćemo povrsinu ravne geometrijske figure D.
Najpre definišimo upisani mnogougao u figuru D kao mnogougao čije se sve tačke nalaze unutar figure D. Mnogougao koji sadrži sve tačke figure D naziva se opisani mnogougao oko figure D.
Označimo sa W_i skup površina upisanih,a sa W_e skup površina opisanih mnogouglova figure D. Očito je skup W_i ograničen odozgo,dok je skup W_e ograničen odozdo pa postoje supremum i infimum.

$$sup(W_i) = \underline{P}$$

$$inf(W_e) = \overline{P}$$

Gotovo je očigledno da je $\underline{P} \leq \overline{P}$. *Definicija 8.5.1*
Kažemo da je figura D merljiva ako je $\underline{P} = \overline{P}$. Tu zajedničku vrednost označavamo sa P(D).
Stav 8.5.1 Ravna figura D je merljiva ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoje opisan i upisan mnogougao figure D,takvi da je $W_e - W_i$, njihova površina manja od ε.

5.2 Kriva linija i dužina luka

Neka je $I = [a, b]$, zatvoreni interval i neka su $\varphi, \psi : I \to R$, neprekidne funkcije. Skup tačaka u ravni Oxy s kordinatama:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), a \leq t \leq b$$

nazivaćemo prostom krivom u ravni ako različitim vrednostima parametra odgovaraju različite tačke u ravni. Preslikavanje:

$$t \to (\varphi(t), \psi(t))$$

naziva se prostom putanjom u prostoru R^2. Tačke a i b nazivaju se početkom i krajem putanje.Ako je za svako $t1, t2 \in (a, b)$ ispunjen uslov:

$$t1 \neq t2 \Longrightarrow (\varphi(t1), \psi(t1)) \neq (\varphi(t2), \psi(t2)),$$

i pri tome važi da je $(\varphi(a), \psi(a)) = (\varphi(b), \psi(b))$,kazaćemo da se radi o prostoj zartvorenoj krivoj. Pretpostavimo da postoji najviše prebrojiv sistem segmenata $[t_i, t_{i+1}]$ i da važi $[t_i, t_{i+1}] \bigcap [t_j, t_{j+1}] = \emptyset$ za $i \notin \{j-1, j, j+1\}, \bigcup_i [t_i, t_{i+1}] = \Delta$. Neka pri tome jednačine $x = \varphi(t), y = \psi(t)(3)$ definišu prostu krivu za t iz proizvoljnog $[t_i, t_{i+1}]$, tada kažemo da jednačine (3) parametarski definišu krivu. Na samoj krivoj uvešćemo uredjenje takvo da je ispunjeno $t1 < t2 \Longrightarrow M1 < M2$. Pri tom po dogovoru različitim vrednostima parametra odgovaraju različite tačke (mada one mogu eventualno imati jednake odgovarajuće kordinate). Primetimo da je krivu moguće parametrizovati na razlivćite načine. Naime ako je parametar $t \in \Delta$, predstavljen kao neprekidna i strogo rastuča funkcija $t = t(\tau)$, nekog drugog prarametra τ, tada možemo smatrati da je kriva parametrizovana i pomoću

$$x = \varphi(t(\tau)), y = \psi(t(\tau)), \tau \in \Delta'$$

.
Neka je:

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|$$

Definicija 8.5.2 Ako je zbir s(P) ograničen za sve podele P, onda se kaže da se kriva može rektificirati. Supremum tog skupa naziva se u tom slučaju dužinom date krive.
Teorema 8.5.1 Neka su $\varphi(t), \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta$, neprekidne funkcije koje imaju i neprekidne izvode. Tada se kriva Γ, odredjena ovim formulama može rektificirati. Pri tom njena dužina iznosi:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$$

Stav 8.5.2 Ako se kriva zadaje neprekidno diferencijabilnom parametrizacijom, tada njena dužina ne zavisi od parametrizacije.

5.3 Zapremina obrnih tela

Neka je $f : [a, b] \to R$ neprekidna i pozitivna funkcija. Ako se krivolinijski trapez,čije stranice su segment $[a, b], x = a, x = b$ obrće oko x ose dobija se obrtno telo. Definišimo zapreminu obrtnog tela. Neka je $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, *proizvoljna podela segmenta* $[a, b], m_i = inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), M_i = sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$. *Izvršimo označavanja*

$$v(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \pi \Delta x$$

$$V(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i^2 \pi \Delta x$$

Zapremine $v(P), V(P)$,*definišu donju odnosno gornju Darbuovu sumu funkcije* $\pi f^2(x), a \leq x \leq b$. *Definišimo zapreminu* V *datog obrtnog tela kao zajednički limes ovih Darbuovih suma kad parametar podele teži nuli:*

$$V = \lim_{\lambda(P) \to 0} v(P) = \lim_{\lambda(P) \to 0} V(P) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

5.4 Površina obrtnih tela

Ako je kriva zadata parametrizacijom gore opisanom:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), a \leq t \leq b$$

tada se povrsina tela dobijenog rotacijom ove krive oko x *ose može izračunati prema formuli:*

$$S = 2\pi \int_a^b \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

Sadržaj