1. APSOLUTNA GEOMETRIJA

Euklidska geometrija izvedena sintetičkim metodom zasniva se na aksiomama koje su podeljene u pet grupa i to: aksiome rasporeda, aksiome incidencije, aksiome podudarnosti, aksiome neprekidnosti i aksiomu paralelnosti. Deo te teorije koji se izvodi iz prve četiri grupe aksioma, dakle bez aksiome paralelnosti, naziva se *apsolutnom geometrijom.* Zadaci iz ovog člana su iz te apsolutne geometrije, pa se njihovo rešavanje zasniva isključivo na primeni poznatih stavova iz tog dela geometrije.

1.1. Konveksni i konkavni likovi

Definicija 1.1. Lik ω nazivamo *konveksnim* ako sve tačke duži koja je određena bilo kojim dvema tačkama toga lika pripadaju tome liku; ako taj uslov nije zadovoljen, lik ω nazivamo *konkavnim.* Tako su likovi predstavljeni na slikama 1 i 3 konveksni, a na slikama 2 i 4 konkavni.

sl.1. sl.2. sl.3. sl.4.

Definicija 1.2. Lik ω nazivamo *ograničenim* ako postoji kružna površ koja sadrži sve tačke lika ω; ako takva kružna površ ne postoji, lik ω nazivamo *neograničenim.* Tako su likovi predstavljeni na slikama 1 i 2 ograničeni, a na slikama 3 i 4 neograničeni.
Definicija 1.3. Najveću od duži koju spajaju po dve tačke ograničenog lika ω nazivamo *prečnikom* ili *dijametrom* lika ω.
Definicija 1.4. Pravu s koja se nalazi u ravni lika ω i koja s tim likom ima jednu ili više zajedničkih tačaka, pri čemu se sve ostale tačke lika ω nalaze s iste strane od prave s nazivamo *pravom oslonca* lika ω.
Definicija 1.5. U odnosu na svaku ravnu površ ω sve tačke ravni dele se na unutrašnje, spoljašnje i granične. Tačku A nazivamo *unutrašnjom tačkom* površi ω ako postoji kružna površ sa središtem A čije sve tačke pripadaju površi ω. Tačku B nazivamo *spoljašnjom* u odnosu na ravnu površ ω ako u ravni te površi postoji kružna površ sa središtem B koja ne sadrži ni jednu tačku površi ω. Tačku C ravne površi ω nazivamo *graničnom* ako u ravni površi ω svaka kružna površ sa središtem C sadrži i tačaka koje pripadaju i tačaka koje ne pripadaju površi ω. Skup svih graničnih tačaka površi ω predstavlja izvesnu liniju koju nazivamo *granicom* ili *rubom* površi ω.
Definicija 1.6. Za ravnu liniju kažemo da je *konveksna* ako ona predstavlja granicu neke konveksne površi.

ZADACI

1. Dokazati da je svaka
(a) trougaona površ,

(b) kružna površ,

konveksna.

2. Ako sva temena neke poligonske površi $(A_1 \dots A_n)$ pripadaju nekoj konveksnoj površi ω, dokazati da sve tačke poligonske površi $(A_1 \dots A_n)$ pripadaju površi ω.

3. Dokazati da je presek konačnog broja od n konveksnih likova takođe konveksan lik.

4. Ako je $a_1, \dots, a_n$ konačan skup od n duži koje pripadaju jednoj pravoj i od kojih svake dve imaju najmanje jednu zajedničku tačku, dokazati da svih n duži toga skupa imaju najmanje jednu zajedničku tačku.

5. Ako konačan skup od n polupravih neke prave p pokriva celu tu pravu, dokazati da u tom skupu polupravih postoje takve dve poluprave koje takođe pokrivaju celu tu pravu.

6. Ako je $\omega_1, \dots, \omega_n$ konačan skup od n $(n \geq 4)$ konveksnih površi jedne ravni od kojih svake tri imaju najmanje jednu zajedničku tačku, dokazati da svih n površi ima takođe bar jednu zajedničku tačku (*Helijeva teorema u ravni*).

7. Ako je $A_1, \dots, A_n$ konačan skup od n tačaka jedne ravni, pri čemu svake tri od tih n tačaka pripadaju nekoj kružnoj površini poluprečnika r, dokazati da postoji kružna površ poluprečnika r koja sadrži svih n tačaka.

8. Ako konačan skup $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ od n poluravni neke ravni pokriva celu tu ravan, dokazati da u tom skupu poluravni postoje takve tri poluravni koje pokrivaju celu tu ravan.

9. Ako je $\{l_1, \dots, l_n\}$ konačan skup od n kružnih lukova sadržanih na istom krugu l pri čemu je svaki od tih lukova manji od poluobima kruga l, a svaka tri od tih lukova imaju najmanje jednu zajedničku tačku, dokazati da svi likovi tog kruga imaju najmanje jednu zajedničku tačku.

10. Ako za svake tri tačke P, Q, R prostog ravnog poligona $A_1, \dots, A_n$ postoji u tom poligonu tačka S takva da sve unutrašnje tačke duži PS, QS, RS se takođe nalaze u tom poligonu, dokazati da u tom poligonu postoji tačka O takva da se unutrašnje tačke svih duži koje spajaju tačku O s tačkama tog poligona takođe nalaze u tom poligonu (*Teorema M.A. Krasnoseljskog*).

11. Ako su A_1 i A_2 bilo koje dve unutrašnje tačke konveksne površi ω, dokazati da su sve ostale tačke duži A_1A_2 unutrašnje tačke površi ω.

12. Ako je A_1 unutrašnja i A_2 granična tačka konveksne površi ω, dokazati da su sve ostale tačke duži A_1A_2 unutrašnje tačke površi ω.

13. Ako su A_1 i A_2 dve granične tačke konveksne površi ω, dokazati da su unutrašnje tačke duži A_1A_2 ili sve unutrašnje ili sve granične tačke površi ω.

14. Dokazati da svaka prava s kroz bilo koju unutrašnju tačku P konveksne površi ω može da ima s rubom te površi najviše dve zajedničke tačke.

15. Dokazati da svaka prava s kroz bilo koju unutrašnju tačku P ograničene konveksne površi seče granicu te površi u dvema tačkama.

16. Ako svaka prava kroz bilo koju unutrašnju tačku ograničene površi ω seče rub te površi u dvema tačkama, dokazati da je površ ω konveksna.

17. Ako se kroz svaku tačku ruba ograničene površi ω može konstruisati najmanje jedna prava oslonca te površi, dokazati da je površ ω konveksna.

18. Ako je P zajednička tačka površi ω i prave l oslonca površi ω, dokazati da je P granična tačka površi ω.

19. Ako je duž MN dijametar konveksne površi ω, dokazati da su prave m i n, koje su u tačkama M i N upravne na pravoj MN, prave oslonca površi ω.

1.2. Kombinatorni zadaci iz apsolutne geometrije

20. Dokazati da skup koji se sastoji iz konačnog broja od n pravih neke ravni Π, pri čemu se svake dve od tih pravih seku, a nikoje tri i više ne seku u jednoj tački, razlaže ravan Π na $\alpha_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ konveksnih oblasti od kojih je $\beta_n = 2n$ neograničenih i $\gamma_n = \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)$ ograničenih.

21. Dokazati da skup koji se sastoji iz konačnog broja od n krugova neke ravni Π, pri čemu se svaka dva kruga iz tog skupa seku, a nikoja tri i više ne seku u jednoj tački, razlaže ravan Π na $n^2 - n + 2$ oblasti.

22. Ako je l broj presečnih tačaka svih dijagonala konveksnog poligona $A_1, \dots, A_n$, kod kojeg se nikoje tri i više dijagonala ne seku u jednoj tački, dokazati da je

$$l = \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3).$$

23. Ako je f_n broj poligonskih površi koje se dobijaju razlaganjem konveksne poligonske površi $A_1, \dots, A_n$ njenim dijagonalama, pri čemu se nikoje tri i više dijagonala ne seku u jednoj tački, dokazati da je

$$f_n = \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n^2 - 3n + 12).$$

24. Dokazati da se oblasti dobijene razlaganjem ravni proizvoljnim pravama $a_1, \dots, a_n$ mogu podeliti na dva skupa tako da svaka oblast pripada samo jednom od tih skupova i da nikoje dve susedne oblasti ne pripadaju istom skupu.

1.3 Ostali zadaci iz apsolutne geometrije

25. Dokazati da ne postoji poligon $A_1 \dots A_{2n+1}$ sa neparnim brojem temena kome bi sve stranice sekle izvesnu pravu p.

26. Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke, dokazati da
(a) postoji prava koja seče produženja polupravih AB, BC, AC;
(b) ne postoji prava koja seče produženja polupravih AB, BC, CA.

27. Ako je četvorougao $ABCD$ konveksan, dokazati da se njegove dijagonale seku, i obratno, ako se dijagonale četvorougla $ABCD$ seku, dokazati da je on konveksan.

28. Ako je četvorougao $ABCD$ konkavan, dokazati da se njegove dijagonale ne seku, i obratno, ako se dijagonale četvorougla $ABCD$ ne seku, dokazati da je on konkavan.

29. Ako duž koja spaja dve unutrašnje tačke naspramnih stranica AB i BC seče dijagonale AC i BD četvorougla $ABCD$, dokazati da se dijagonale tog četvorougla seku, tj. da je taj četvorougao konveksan.

30. Dokazati da je kod svakog konveksnog četvorougla zbir dijagonala veći od zbira bilo kojih dveju naspramnih stranica.

31. Ako je S presek dijagonala konveksnog četvorougla $ABCD$ i P proizvoljna tačka njegove ravni, dokazati da je

$$SA + SB + SC + SD \leq PA + PB + PC + PD.$$

32. Dokazati da je zbir dijagonala konveksnog četvorougla veći od poluobima, a manji od obima tog četvorougla.

33. Dokazati da je zbir svih dijagonala konveksnog petougla veći od obima tog petougla.

34. Ako je P proizvoljna tačka u ravni konveksnog poligona $A_1 \dots A_n$, dokazati da je

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n > \frac{1}{2}(A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1).$$

35. Ako je P proizvoljna tačka u konveksnom poligonu $A_1 \dots A_n$, dokazati da je

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n < \frac{n-1}{2}(A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1).$$

36. Tačka D je središte stranice BC trougla $\triangle ABC$. Ako je $AC > AB$, dokazati da je $\angle BAD > \angle CAD$, i obrnuto, ako je $\angle BAD > \angle CAD$, dokazati da je $AC > AB$.

37. Ako je D bilo koja unutrašnja tačka stranice BC trougla $\triangle ABC$, dokazati da je

$$AB + AC - BC < 2AD.$$

38. Ako su a, b, c stranice trougla i m_a težišna linija koja odgovara stranici a, dokazati da je

$$b + c - a < 2m_a < b + c.$$

39. Ako su m_a, m_b, m_c težišne linije trougla i p njegov poluobim, dokazati da je

$$p < m_a + m_b + m_c < 2p.$$

40. Ako je P proizvoljna tačka simetrale unutrašnjeg ugla $\angle A$, a O proizvoljna tačka simetrale spoljašnjeg ugla $\angle A$ trougla $\triangle ABC$, dokazati da je

$$|PB - PC| \leq |AB - AC| \quad \text{i} \quad QB + QC \geq AB + AC.$$

41. Ako je kod trougla $\triangle ABC$ stranica AB manja od stranice AC, tačka D središte stranice BC, tačka E presek raspolovnice ugla $\angle A$ sa stranicom BC i N podnožje visine iz temena A, dokazati da je $\angle AEB < \angle AEC$, $BE < CE$, a tačka E između tačaka N i D.

42. Ako su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ dva trougla kod kojih je $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ i $\angle A > \angle A'$, dokazati da je $BC > B'C'$.

43. Ako su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ dva trougla kod kojih je $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ i $BC > B'C'$, dokazati da je $\angle A > \angle A'$.

44. Dokazati da su kod trougla ABC stranice AB i AC među sobom jednake ako su mu jednake:

(a) težišne linije BB_1 i CC_1;

(b) simetrale BB_2 i CC_2 unutrašnjih uglova B i C;

(v) visine BB_3 i CC_3.

45. Neka su AA_1, BB_1, CC_1 težišne linije i AA_2, BB_2, CC_2 visine trougla $\triangle ABC$, a $A'A'_1, B'B'_1, C'C'_1$ težišne linije i $A'A'_2, B'B'_2, C'C'_2$ visine trougla $\triangle A'B'C'$. Dokazati da su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ podudarni ako je:

(a)
$$KEYWORDAB = A'B', AC = A'C', AA_1 = A'A'_1$$

(b)
$$AB = A'B', AC = A'C', BB_1 = B'B'_1$$

(v)
$$AB = A'B', A = A', CC_2 = C'C'_2$$

(g)
$$BC = B'C', BB_2 = B'B'_2, CC_2 = C'C'_2$$

(d)
$$BC = B'C', AA_1 = A'A'_1, AA_2 = A'A'_2$$

46. Ako su težišne linije AD i uglovi BAD, CAD trougla ABC jednaki težišnoj liniji $A'D'$ i uglovima $B'A'D$, $C'A'D'$ trougla $A'B'C'$, dokazati da je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

47. Ako je kod trouglova ABC i $A'B'C'$ razlika stranica AB i AC jednaka razlici stranica $A'B'$ i $A'C'$ stranica BC jednaka stranici $B'C'$ i težišna linija AD jednaka težišnoj liniji $A'D'$, dokazati da je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

48. Ako je kod prostog četvorougla $ABCD$ $\angle A = \angle B$ i $AD = BC$, dokazati da je $\angle C = \angle D$, a tačka određena središtima stranica AB i CD osa simetrije četvorougla $ABCD$.

49. Ako je kod prostog konveksnog četvorougla $ABCD$ $\angle A = \angle B$ i $\angle C = \angle D$, dokazati da je $AD = BC$ i $AC = BD$.

50. Ako je kod prostog četvorougla $ABCD$ $\angle A = \angle B$ i $\angle D > \angle C$, dokazati da je $BC > AD$.

51. Ako je kod prostog četvorougla $ABCD$ $\angle A = \angle B$ i $BC > AD$, dokazati da je $\angle D > \angle C$.

52. Ako je kod prostog četvorougla $ABCD$ $AD = BC$ i $\angle A > \angle B$, dokazati da je $\angle C > \angle D$.

53. Ako su naspramni uglovi prostog četvorougla među sobom jednaki, dokazati da su njegove naspramne stranice među sobom takođe jednake.

54. Ako je kod prostog četvorougla $ABCD$ $\angle B = \angle D$ i ako je središte O dijagonale AC na dijagonali BD, dokazati da su kod tog četvorougla naspramne stranice među sobom jednake.

55. Ako je kod prostog četvorougla $ABCD$ zbir stranica AB i BC jednak zbiru stranica CD i DA, i ako je središte O dijagonale AC tačka dijagonale BD, dokazati da su kod tog četvorougla $ABCD$ naspramne stranice među sobom jednake.

56. Ako prave određene stranicama prostog četvorougla dodiruju neki krug koji se nalazi u tom četvorouglu, dokazati da je kod tog četvorougla zbir dveju naspramnih stranica jednak zbiru drugih dveju naspramnih stranica.

57. Ako su stranice prostog četvorougla $ABCD$ na tangentnom krugu k koji se nalazi izvan tog četvorougla, dokazati da je razlika dveju naspramnih stranica jednaka razlici drugih dveju stranica tog četvorougla.

58. Ako su stranice složenog četvorougla $ABCD$ na tangentama kruga k, dokazati da je razlika dveju naspramnih stranica jednaka razlici drugih dveju stranica tog četvorougla.

59. Ako je $ABCD$ konveksan četvorougao kod koga krugovi upisani u trouglove ABC i CDA dodiruju dijagonalu AC u istoj tački, dokazati da se u četvorougao $ABCD$ može upisati krug.

60. Ako je $ABCD$ konveksan četvorougao takav da krugovi upisani u trouglove ABC i CDA dodiruju dijagonalu AC u istoj tački, dokazati da i krugovi upisani u trouglove ABD i BCD dodiruju stranicu u istoj tački.

61. Ako su A i B dodirne tačke dveju tangenata a i b nekog kruga k sa središtem O, a M_1 i M_2 dodirne tačke drugih dveju tangenata m_1 i m_2, od kojih prva seče prave a i b u tačkama A_1 i B_1, a druga seče prave a i b u tačkama A_2 i B_2, dokazati da su uglovi A_1OB_1 i A_2OB_2 jednaki ili suplementni zavisno od toga da li su tačke M_1 i M_2 na istom ili na raznim lucima AB kruga k.

62. Dokazati da je poligon $A_1 \dots A_n$ pravilan ako su sve njegove stranice među sobom jednake i $n-2$ uzastopnih unutrašnjih uglova među sobom jednaki.

63. Ako je $A_1 \dots A_n$ prost poligon s parnim brojem temena čije stranice dodiruju neki krug k sa središtem S, dokazati da je

(a) $A_1A_2 + A_3A_4 + \ldots + A_{n-1}A_n = A_2A_3 + A_4A_5 + \ldots + A_nA_1$;

(b) $\angle A_1SA_2 + \angle A_3SA_4 + \ldots + \angle A_{n-1}SA_n = \angle A_2SA_3 + \angle A_4SA_5 + \ldots + \angle A_nSA_1$.

64. Dva konveksna n-tougla $A_1 \dots A_n$ i $A'_1 \dots A'_n$ imaju sve odgovarajuće stranice jednake izuzev stranica A_1A_2 i $A'_1A'_2$. Ako su za $\nu = 3, 4, \dots, n$ svi ili samo neki od uglova A_ν veći od odgovarajućih uglova A'_ν, a ostali među sobom jednaki, dokazati da je $A_1A_2 > A'_1A'_2$.

65. Dva ravna konveksna n-tougla $A_1 \dots A_n$ i $A'_1 \dots A'_n$ imaju sve odgovarajuće stranice jednake izuzev stranica A_1A_2 i $A'_1A'_2$, a za $\nu = 3, 4, \dots, n$ uglovi A_ν nisu manji od odgovarajućih uglova A'_ν. Ako je $A_1A_2 > A'_1A'_2$, dokazati da je bar jedan od uglova A_ν veći od njemu odgovarajućeg ugla A'_ν.

66. Dva konveksna n-tougla $A_1 \dots A_n$ i $A'_1 \dots A'_n$ sa jednakim odgovarajućim stranicama nemaju sve jednake odgovarajuće unutrašnje uglove. Ako temenima n-tougla $A_1 \dots A_n$ dodelimo znake plus ili minus zavisno da li su uglovi kod tih temena veći ili manji od odgovarajućih uglova n-tougla $A'_1 \dots A'_n$, dokazati da broj promena ovih znakova uzetih redom kod temena $A_1, \dots, A_n$ nije manje od četiri.

67. Ako od pet komplanarnih tačaka A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 nikoje tri ne pripadaju jednoj pravoj, dokazati da među njima postoje četiri tačke koje predstavljaju temena konveksnog četvorougla.

68. Ako svake četiri od n komplanarnih tačaka $A_1 \dots A_n$ predstavljaju temena konveksnog četvorougla, dokazati da za datih n tačaka predstavljaju temena nekog konveksnog n-tougla.

69. Dokazati da je zbir dvaju unutrašnjih uglova trougla manja od zbira dvaju pravih uglova.

70. Ako je $\triangle$ bilo koji trougao, dokazati da postoji trougao $\triangle_1$ takav da je zbir S_1 unutrašnjih uglova trougla $\triangle_1$ jednak zbiru S unutrašnjih uglova trougla $\triangle$, a jedan od uglova trougla $\triangle_1$ bar dvaput manji od naznačenog ugla trougla $\triangle$.

71. Dokazati da zbir unutrašnjih uglova trougla ne može biti veći od zbira dvaju pravih uglova.

72. Dokazati da zbir unutrašnjih uglova prostog ravnog n-tougla ne može biti veći od zbira $(2n-4)$ pravih uglova.

73. Ako su M i N dve razne tačke jednog kraka oštrog ugla XOY, a M' i N' upravne projekcije tih tačaka na drugom kraku i ako je tačka M između tačaka O i N, dokazati da je

(a) $\angle OMM' \geq \angle ONN'$;

(b) $MM' < NN'$.

74. Ako je C' podnožje visine iz temena C pravog ugla trougla ABC, dokazati da je $\angle ACC' \geq \angle ABC$.

75. Dokazati da manjoj visini trougla odgovara veća stranica, i obrnuto, da manjoj stranici trougla odgovara veća visina.

76. Ako neka prava s kroz središte P osnovice BC jednakokrakog trougla ABC seče prave AC i AB u tačkama Q i R takvim da je tačka P između tačaka Q i R, dokazati da je $QR \geq BC$.

77. Dokazati da je simetrala jedne stranice trougla upravna na pravoj koja je određena središtima drugih dveju stranica tog trougla.

78. Ako su A, B, C tri razne tačke neke prave l i A', B', C' istim redom tačke neke druge prave l' takve da je $AB = A'B'$ i $BC = B'C'$, dokazati da središta P, Q, R duži AA', BB', CC' pripadaju jednoj pravoj ili se poklapaju (*Teorema Hjelmsleva*).

79. Ako sve tačke konačnog skupa tačaka ne pripadaju jednoj pravoj, dokazati da postoji prava koja sadrži samo dve tačke tog skupa tačaka.

80. Ako svaka prava određena dvema tačkama nekog konačnog skupa od n tačaka sadrži najmanje još jednu tačku tog skupa, dokazati da svih n tačaka tog skupa pripadaju jednoj pravoj.

81. Ako je u ravni dat konačan skup od n pravih pri čemu se svake dve od tih pravih seku u tački koja pripada bar još jednoj pravoj iz tog skupa, dokazati da se svih n datih pravih seku u jednoj tački.

2. PARALELNOST

2.1 Paralelnost pravih

U ovom članu svrstani su zadaci za čije je rešavanje neophodno pretpostaviti da je uvedena aksioma paralelnosti euklidske geometrije i da su izvedene osnovne teoreme koje iz nje proizilaze. To je pre svega stav o zbiru unutrašnjih uglova poligona, stav prema kome je u svakom krugu središnji ugao dva puta veći od periferijskog nad istim lukom, stav prema kome se prave određene visinama trougla seku u jednoj tački koju nazivamo *ortocentrom tog trougla*, stav prema kome se težišne linije trougla seku u jednoj tački koju nazivamo *težištem tog trougla*, itd.

82. Ako je $\triangle ABC$ trougao kome ugao $\angle A$ nije prav. D tačka iza A u odnosu na B takva da je $AD = AC$, a E podnožje upravne iz B na pravoj koja sadrži D i uporedna je sa stranicom AC, dokazati da je duž BE jednaka zbiru visina BB_1 i CC_1 trougla $\triangle ABC$.

83. Ako je $\triangle ABC$ trougao kome ugao $\angle A$ nije prav. D tačka poluprave AB takva da je $AD = AC$, a E podnožje upravne iz B na pravoj koja sadrži D i uporedna je sa stranicom AC, dokazati da je duž BE jednaka razlici visina BB_1 i CC_1 trougla $\triangle ABC$.

84. Ako ugao $\angle A$ trougla $\triangle ABC$ nije prav iako su M i N tačke polupravih BC i CB takve da je $\angle BAM = \angle C$ i $\angle CAN = \angle B$, dokazati da je $\triangle AMN$ jednakokrak trougao.

85. Ako je D tačka u kojoj simetrala ugla $\angle A$ seče stranicu BC trougla $\triangle ABC$, S središte upisanog kruga i P tačka u kojoj taj krug dodiruje stranicu BC, dokazati da je $\angle BSP = \angle CSD$.

86. Ako su A', B', C' središta stranica BC, CA, AB trougla $\triangle ABC$ i ako je D podnožje visine iz temena A, dokazati da je pri $AC > AB$

$$\angle A'B'D = \angle A'C'D = \angle B - \angle C.$$

87. Ako su A_1, B_1, C_1 tačke u kojima upisani krug trougla $\triangle ABC$ dodiruje stranice BC, CA, AB; A_2, B_2, C_2 tačke u kojima upisani krug trougla $\triangle A_1B_1C_1$ dodiruje stranice B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1; itd, zatim R prav ugao, dokazati da je

$$\angle B_nA_nC_n = \frac{2}{3}R + \frac{1}{(-2)^n}(A - \frac{2}{3}R).$$

88. Ako obeležimo sa E i F tačke u kojima simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla $\angle A$ trougla $\triangle ABC$ seku pravu BC, sa D podnožje visine iz temena A, sa G tačku poluprave AC takvu da je $AB = AG$, sa O središte kruga l opisanog oko trougla $\triangle ABC$ i sa L tačku u kojoj tangenta kruga l u tački A seče pravu BC, dokazati da je

(a)

$$\angle DAE = \angle AFE = \angle GBC = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$$

(b) poluprava AE bisektrisa ugla $\angle OAD$;

(c) tačka L središte duži EF.

89. Ako je D proizvoljna tačka prave koja sadrži stranicu BC trougla $\triangle ABC$, a O_1 i O_2 središta krugova opisanih oko trouglova $\triangle ABD$ i $\triangle ACD$. Dokazati da su konveksni uglovi $\angle O_1AO_2$ i $\angle BAC$ jednaki i istosmerni.

90. Ako su S, S_a, S_b, S_c središta upisanih krugova trougla ABC i R prav ugao, dokazati da je

(a)
$$\angle BSC = R + \frac{1}{2}A$$

(b)
$$\angle BS_aC = R - \frac{1}{2}A$$

(c)
$$\angle BS_bC = \angle CS_cB = \frac{1}{2}A$$

91. Ako su l i k opisani krug i upisani krug trougla $\triangle ABC$ i k_a, k_b, k_c spolja upisani krugovi koji odgovaraju respektivno stranicama BC, CA, AB, dokazati da su zajednička unutrašnja tangenta krugova k i k_a koja je različita od prave BC i zajednička spoljašnja tangenta krugova k_b i k_c koja je različita od prave BC paralelne s pravom t koja u temenu A dodiruje krug l, zatim da su odstojanja pomenutih tangenata od prave t jednaka visini iz temena A trougla ABC.

92. Dokazati da kod prostog četvorougla

(a) simetrale dvaju uzastopnih unutrašnjih uglova zahvataju ugao jednak poluzbiru drugih dvaju unutrašnjih uglova;

(b) simetrale dvaju naspramnih uglova zahvataju ugao jednak polurazlici drugih dvaju unutrašnjih uglova;

(c) simetrale uglova koji su određeni naspramnim stranicama zahvataju ugao jednak poluzbiru dvaju naspramnih uglova.

93. Ako su P, Q, R, S podnožja upravnih kroz presek O dijagonala, na stranicama AB, BC, CD, DA četvorougla $ABCD$, dokazati da je $\angle SOQ = 2T \pm \frac{1}{2}(\angle R - \angle P)$ gde je T prav ugao.

94. Ako je $ABCD$ pravougaonik kome je $AB = 3BC$, zatim E, F par tačaka stranice AB takvih da je $AE = EF = FB$ i R prav ugao, dokazati da je

$$\angle AED + \angle AFD + \angle ABD = R.$$

95. Ako su $ABCD$ i A', B', C', D' dva konveksna četvorougla s odgovarajućim jednakim stranicama i ako je $\angle A > \angle A'$, dokazati da je

$$\angle B < \angle B', \quad \angle C > \angle C', \quad \angle D < \angle D'.$$

96. Dokazati da su središta stranica svakog četvorougla $ABCD$ s neparalelnim dijagonalama temena paralelograma čije su stranice paralelne s dijagonalama AC i BD i jednake polovinama tih dijagonala. Ako su dijagonale AC i BD četvorougla $ABCD$ paralelne, dokazati da središta njegovih stranica pripadaju jednoj pravoj.

97. Ako su dijagonale četvorougla među sobom upravne, dokazati da su duži koje spajaju središta naspramnih stranica tog četvorougla među sobom jednake.

98. Ako su duži koje spajaju središta naspramnih stranica četvorougla među sobom jednake, dokazati da su dijagonale tog četvorougla među sobom upravne.

99. Ako su P, Q, R, S središta stranica AB, BC, CD, DA i M, N središta dijagonala AC i BD četvorougla $ABCD$, dokazati da se duži PR, QS, MN seku u jednoj tački koja je središte svake od njih.

100. Dokazati da tačke simetrične nekoj tački O u odnosu na središte stranica četvorougla $ABCD$ i neparalelnim dijagonalama predstavljaju temena paralelograma čije su stranice uporedne i jednake dijagonalama tog četvorougla.

101. Dokazati da središta krakova i središta dijagonala bilo kojeg trapeza pripadaju jednoj pravoj.

102. Dokazati da je srednja linija konveksnog trapeza jednaka poluzbiru, a duž određena središtima dijagonala jednaka polurazlici uporednih stranica tog trapeza.

103. Ako je duž koja spaja središta dveju naspramnih stranica AD i BC četvorougla $ABCD$ jednaka poluzbiru ili polurazlici drugih dveju stranica, dokazati da su stranice AB i CD tog četvorougla među sobom uporedne.

104. Ako duž određena središtima M i N naspramnih stranica AD i BC bilo kojeg četvorougla $ABCD$ seče dijagonale AC i BD u tačkama P i Q,i ako je duž MP jednaka duži NQ, dokazati da su druge dve naspramne stranice AB i CD među sobom uporedne.

105. Ako su naspramne stranice AB i CD četvorougla $ABCD$ među sobom jednake, dokazati da je prava određena središtima drugih dveju stranica upravne na pravoj koja je određena središtima dijagonala tog četvorougla.

106. Ako su naspramne stranice AB i CD četvorougla $ABCD$ među sobom jednake, dokazati da prava određena središtima drugih dveju stranica zahvata sa pravama AB i CD jednake uglove.

107. Ako zbir duži koje spajaju središta naspramnih stranica četvorougla jednak poluobimu tog četvorougla, dokazati da je taj četvorougao paralelogram.

108. Neka se kod četvorougla $ABCD$ prave određene naspramnim stranicama AB i CD seku u tački P, a prave određene naspramnim stranicama AD i BC seku u tački P'. Ako su M, N, M', N' tačke polupravih $PA, PC, P'A, P'C$ takve da je $PM = AB, PN = CD, P'N' = AD, P'N' = BC$, dokazati da su duži MN i $M'N'$ jednake i istosmerne.

109. Ako je duž koja spaja središta osnova AB i CD trapeza $ABCD$ jednaka polurazlici tih osnova i ako je $AB > CD$, dokazati da je zbir unutrašnjih uglova A i B tog trapeza prav ugao.

110. Dokazati da upravne projekcije jednog temena trougla na simetralama unutrašnjih i spoljašnjih uglova kod druga dva temena pripadaju jednoj pravoj.

111. Ako je k krug opisan oko jednakostraničnog trougla ABC i P proizvoljna tačka kruga k, dokazati da je duž AP jednaka zbiru ili razlici duži BP i CP, prema tome da li je tačka P na luku BC kruga k na kome nije teme A ili je pak na kružnom luku BAC.

112. Ako su a, b, c tri prave jedne ravni koje se seku u istoj tački O i koje razlažu ravan u kojoj se nalaze na šest jednakih uglova, dokazati da su podnožja A, B, C upravnih iz proizvoljne tačke P različite od O na pravama a, b, c temena jednakostraničnog trougla.

113. Ako su a, b, c tri prave koje se seku u istoj tački O i koje razlažu ravan u kojoj se nalaze na šest jednakih uglova, dokazati da je odstojanje proizvoljne tačke P te ravni od prave a jednako zbiru ili razlici odstojanja te tačke od drugih dveju pravih b i c.

114. Ako je O središte, AB prečnik i P proizvoljna tačka nekog kruga k, zatim M podnožje upravne iz tačke P na pravoj AB, O tačka poluprave PO takva da je $PO = 2AM$ i R druga presečna tačka prave AO s krugom k, dokazati da je $\angle AOR = 3\angle AOP$.

115. Ako su O_1 i O_2 središta krugova k_1 i k_2, P_1 i P_2 tačke u kojima proizvoljna prava koja sadrži zajedničku tačku M tih krugova seče k_1 i k_2, a N tačka simetrična s tačkom M u odnosu na središte O duži O_1O_2, dokazati da je tačka N na simetrali s duži P_1P_2.

116. Ako su B' i C' tačke u kojima proizvoljan krug kroz temena B i C seče stranice AB i AC trougla ABC, dokazati da je prava $B'C'$ uporedna s pravom koja u temenu A dodiruje krug opisan oko trougla ABC.

117. Ako su B' i C' tačke u kojima neka prava uporedna s pravom koja u temenu A dodiruje opisani krug trougla ABC seče stranice AB i AC, dokazati da tačke B, C, B', C' pripadaju jednom krugu.

118. Ako je dijagonala AC prečnik kruga opisanog oko tetivnog četvorougla $ABCD$, dokazati da su upravne projekcije bilo kojih dveju naspramnih stranica tog četvorougla na drugoj dijagonali među sobom jednake.

119. Ako je P proizvoljna tačka kruga l opisanog oko trougla ABC, a P_1, P_2, P_3 tačke simetrične s tačkom P u odnosu na simetrale uglova A, B, C, dokazati da su prave AP_1, BP_2, CP_3 među sobom uporedne.

120. Ako su AB i CD paralelne tetive dvaju krugova koji se seku u tačkama M i N, dokazati da su uglovi AMC i BND jednaki ili suplementni.

121. Ako su A, B i C, D tačke u kojima neka prava p seče dva kruga k i l koji se seku u tačkama M i N, dokazati da su uglovi AMC i BND jednaki ili suplementni zavisno od toga imaju li tetive AB i CD zajedničkih tačaka ili ne.

122. Ako su M i N tačke u kojima se seku dva kruga k i l, A i B tačke u kojima proizvoljna tačka kruga k seče krug l, a C dodirna tačka, dokazati da su uglovi AMC i BNC jednaki ili suplementni, zavisno od toga da li je C unutrašnja tačka tetive AB ili je na njenom produženju.

123. Ako su A i B dodirne tačke bilo koje zajedničke tangente dvaju krugova k i l koji se seku u tačkama M i N, dokazati da su uglovi AMB i ANB suplementni.

124. Ako su AB i CD dve paralelne tetive dvaju krugova k i l koji se dodiruju u nekoj tački M, dokazati da su uglovi AMC i BND jednaki ili suplementni.

125. Ako je M dodirna tačka dvaju krugova k i l, a A, B i C, D tačke u kojima neka prava seče krugove k i l, dokazati da su uglovi AMC i BMD jednaki ili suplementni, zavisno od toga da li se krugovi k i l dodiruju iznutra ili spolja.

126. Ako je M dodirna tačka dvaju krugova k i l, p proizvoljna prava koja seče krug k u tačkama A, B i dodiruje krug l u tački C, dokazati da su uglovi AMC i BND jednaki ili suplementni, zavisno od toga da li se krugovi k i l dodiruju iznutra ili spolja.

127. Ako su M i N presečne tačke dvaju krugova k i l, p i q dve prave kroz tačku N od kojih prva seče krugove k i l u tačkama A i B, a druga seče krugove k i l u tačkama C i D, dokazati da su uglovi AMB i CMD jednaki.

128. Ako su O_1 i O_2 središta dvaju krugova k_1 i k_2 koji se seku u tačkama M i N, a P_1 i P_2 tačke u kojima proizvoljna prava kroz N seče k_1 i k_2, dokazati da je $\angle P_1MP_2 = \angle O_1MO_2$.

129. Ako su O_1 i O_2 središta dvaju krugova k_1 i k_2 koji se seku, P jedna njihova presečna tačka, a M_1, M_2 i N_1, N_2 dodirne tačke zajedničkih dirki tih krugova pri čemu su M_1 i M_2 s one strane prave O_1O_2 s koje nije P, dokazati da je $\angle M_1PM_2 = \frac{1}{2}\angle O_1PO_2$ i $\angle N_1ON_2 = \frac{1}{2}\angle 2R\frac{1}{2}\angle O_1PO_2$.

130. Ako su M i N presečne tačke dvaju krugova k_1 i k_2, p i q poluprave kojima je zajednički kraj M i koje s polupravom MN zahvataju jednake uglove. Ako su P_1 i P_2 preseci poluprave p s krugovima k_1 i k_2, a O_1 i O_2 preseci poluprave q s krugovima k_1 i k_2, dokazati da su duži P_1P_2 i Q_1Q_2 među sobom jednake.

131. Ako su P i Q središta lukova AB i AC kruga opisanog oko trougla ABC, dokazati da je tetiva PQ upravna na simetrali ugla A tog trougla.

132. Ako su P, Q, R, S središta lukova AB, BC, CD, DA kruga opisanog oko konveksnog tetivnog četvorougla $ABCD$, pri čemu navedeni luci ne sadrže ostala temena tog četvorougla, dokazati da se tetive PR i OS seku pod pravim uglom.

133. Ako su S i T tačke u kojima se seku dva kruga k_1 i k_2, P i Q tačke u kojima proizvoljna prava kroz tačku T seče krugove k_1 i k_2, a R tačka u kojoj se seku dirke krugova k_1 i k_2 konstruisane u tačkama P i Q, dokazati da tačke P, Q, R, S pripadaju jednom krugu.

134. Ako su P i Q tačke u kojima proizvoljan krug kroz temena B i C trougla ABC seče stranice AB i AC, a P' i Q' tačke u kojima prave kroz P i Q uporedne sa stranicama AC i AB seku stranicu BC, dokazati da tačke P, P', Q, Q' pripadaju jednom krugu.

135. Ako su O_1 i O_2 središta dvaju krugova k_1 i k_2 koji se seku u tačkama A i B, a C i D tačke u kojima prave AO_1 i AO_2 seku krugove k_2 i k_1, dokazati da tačke B, C, D, O_1, O_2 pripadaju jednom krugu.

136. Ako su P i Q tačke u kojima simetrale stranica AC i AB seku prave određene stranicama AB i AC trougla ABC, a O središte kruga opisanog oko trougla ABC, dokazati da tačke B, C, P, Q, O pripadaju jednom krugu, ili pak jednoj pravoj.

137. Ako su AD, BE, CF visine trougla ABC, a M i N tačke simetrične s tačkom D u odnosu na prave AB i AC, dokazati da tačke E, F, M, N pripadaju jednoj pravoj.

138. Dokazati da podnožja upravnih kroz bilo koju tačku kruga opisanog oko nekog trougla na pravama koje su određene stranicama tog trougla, pripadaju jednoj pravoj (*Simsonova teorema*).

139. Ako je ABC jednakostraničan trougao i P proizvoljna tačka njegove ravni koja nije na opisanom krugu oko tog trougla, dokazati da postoji trougao čije su stranice jednake dužima PA, PB, PC (*Teorema Pompejca*).

140. Krug k seče stranice BC, CA, AB trougla ABC u tačkama P i P', Q i Q', R i R'. Ako se normale u tačkama P, Q, R na pravama BC, CA, AB seku u jednoj tački dokazati da se normale u tačkama P', Q', R' na pravama BC, CA, AB takođe seku u jednoj tački.

141. Ako su AA', BB', CC' visine oštrouglog trougla ABC, dokazati da je ortocentar H tog trougla središte upisanog kruga trougla $A'B'C'$.

142. Ako su AA', BB', CC' visine trougla ABC kome je ugao A tup, dokazati da je ortocentar H tog trougla središte spolja upisanog kruga trougla $A'B'C'$ koji dodiruje stranicu $B'C'$.

143. Dokazati da tačke simetrične s ortocentrom u odnosu na prave određene stranicama trougla pripadaju krugu koji je opisan oko tog trougla.

144. Ako je H ortocentar trougla ABC, dokazati da su poluprečnici krugova opisanih oko trouglova ABC, HBC, HCA, HAB među sobom jednaki.

145. Ako je H ortocentar, T središte, O središte kruga opisanog oko trougla ABC i A_1 središte stranice BC, dokazati

(a) da je duž OA_1 istosmerna s duži AH i jednaka njenoj polovini

(b) da tačke O, T, H pripadaju jednoj pravoj, pri čemu je $HT = 2TO$.

146. Ako je $ABCD$ tetivan četvorougao, E ortocentar trougla ABD i F ortocentar trougla ABC, dokazati da je četvorougao $CDEF$ paralelogram.

147. Dokazati da tačke simetrične s ortocentrom u odnosu na središta stranica trougla pripadaju krugu koji je opisan oko tog trougla.

148. Ako su H i O ortocentar i središte opisanog kruga trougla ABC, a M i N središte duži AH i težišne linije AD iz temena A, dokazati da tačke O, M, N pripadaju jednoj pravoj,štaviše da je tačka N središte duži OM.

149. Ako je H ortocentar, O središte opisanog kruga, i D podnožje visine iz temena A trougla ABC, zatim M tačka u kojoj se seku prave AO i BC, E središte duži OH i F središte duži AM, dokazati da tačke D, E, F pripadaju jednoj pravoj.

150. Ako su H i D ortocentar i središte stranice BC trougla ABC, a E i F podnožja upravnih iz tačke H na simetrali unutrašnjeg i simetrali spoljašnjeg ugla A, dokazati da tačke D, E, F pripadaju jednoj pravoj.

151. Ako je O središte opisanog kruga trougla ABC, M tačka simetrična s ortocentrom H tog trougla u odnosu na teme A i N tačka simetrična s temenom A u odnosu na središte D stranice BC, dokazati da tačke O, M, N pripadaju jednoj pravoj.

152. Dokazati da središta stranica, podnožja visina i središta duži koje spajaju ortocentar s temenima trougla pripadaju jednom krugu (Ojlerov krug).

153. Dokazati da se središte Ojlerovog kruga bilo kojeg trougla poklapa sa središtem duži koja spaja ortocentar sa središtem opisanog kruga tog trougla, zatim da je poluprečnik toga kruga jednak polovini poluprečnika opisanog kruga.

154. Ako obeležimo sa A_1, B_1, C_1 središta stranica $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ trougla ABC, sa p poluobim tog trougla, sa $l(O, r)$ opisani krug tog trougla, sa P, Q, R tačke u kojima upisani krug $k(S_1, \varrho)$ dodiruje stranice BC, CA, AB, sa P_i, Q_i, R_i za $i = a, b, c$ tačke u kojima spolja upisani krug $k_i(S_i, \varrho_i)$ dodiruje prave BC, CA, AB, sa M i N tačke u kojima simetrala stranice BC seče krug l pri čemu je tačka M na luku BAC, a sa M' i N' podnožja upravnih iz tačaka M i N na pravoj AB, dokazati da je

(a)
$$AQ_a = AR_a = p$$

(b)
$$QQ_a = RR_a = a$$

(v)
$$Q_bQ_c = R_bR_c = a$$
(g)
$$AQ = AR = BR_c = PP_c = CP_b = CQ_b = p - a$$
(d)
$$PP_a = b - c$$
$$P_bP_c = b + c$$
(đ)
$$PA_1 = A_1P_a, P_cA_1 = A_1P_b$$
(e)
$$A_1M = \frac{1}{2}(\varrho_b + \varrho_c), A_1N = \frac{1}{2}(\varrho_a - \varrho)$$
(ž)
$$MM' = \frac{1}{2}(\varrho_b - \varrho_c), NN' = \frac{1}{2}(\varrho_a + \varrho)$$
(z)
$$AM' = \frac{1}{2}(b - c), AN' = \frac{1}{2}(b + c)$$
(i)
$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = 4r + \varrho$$

155. Ako su A_1, B_1, C_1 središta stranica BC, CA, AB oštrouglog ili pravouglog trougla ABC, O i r središte i poluprečnik opisanog kruga, a ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je
$$OA_1 + OB_1 + OC_1 = r + \varrho.$$

156. Ako su A_1, B_1, C_1 središta stranica BC, CA, AB trougla ABC kome je ugao A tup, O i r središte i poluprečnik kruga l opisanog oko trougla ABC i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je
$$OA_1 + OB_1 + OC_1 = r + \varrho.$$

157. Ako obeležimo sa $ABCD$ konveksan četvorougao upisan u krugu k i sa $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ poluprečnici krugova upisanih u trouglove BCD, CDA, DAB, ABC, dokazati da je
$$\varrho_1 + \varrho_3 = \varrho_2 + \varrho_4.$$

158. Ako je H ortocentar oštrouglog trougla ABC, r poluprečnik opisanog kruga, ϱ poluprečnik upisanog kruga i ϱ_a poluprečnik spolja upisanog kruga koji dodiruje stranicu BC, dokazati da je
(a) $AH = 2r + \varrho - \varrho_a$;
(b) $AH - BH + CH = 2(r + \varrho)$.

159. Ako su M i N tačke u kojima krug određen temenima B, C i središtem S upisanog kruga trougla ABC seče prave AB i AC, dokazati da je prava MN zajednička dirka upisanih krugova trougla ABC koji dodiruju stranicu BC.

160. Ako su S_b i S_c središta spolja upisanih krugova k_b i k_c trougla ABC, a M i N tačke u kojima krug opisan oko tetivnog četvorougla BCS_bS_c seče prave AB i AC, dokazati da je prava MN zajednička spoljašnja dirka krugova k_b i k_c.

161. Ako se dijagonale AC i BD tetivnog četvorougla $ABCD$ seku u tački O pod pravim uglom, dokazati da su podnožja, P, Q, R, S upravnih iz tačke O na pravama AB, BC, CD, DA temena tangentnog i tetivnog četvorougla.

162. Ako je $ABCD$ tetivan i tangentan četvorougao čije stranice AB, BC, CD, DA dodiruju upisani krug u tačkama P, Q, R, S, dokazati da se duži PR i QS seku pod pravim uglom.

163. Ako je $ABCD$ tetivan četvorougao, dokazati da su središta S_A, S_B, S_C, S_D krugova upisanih u trouglove BCD, CDA, DAB, ABC temena pravouglog paralelograma.

164. Ako je D podnožje visine koje odgovara hipotenuzi BC pravouglog trougla ABC, dokazati da je prava određena središtima S_1 i S_2 krugova k_1 i k_2 upisanih u trouglove ABD i ACD upravna na simetrali ugla A trougla ABC.

165. Ako su p_b i p_c, q_c i q_a, r_a i r_b trisektori unutrašnjih uglova A, B, C proizvoljnog trougla ABC pri čemu se poluprave p_b i p_c nalaze do polupravih AC i AB koje sadrže stranice naspram temena B i C, itd, dokazati da su tačke P, Q, R u kojima se seku poluprave q_a i r_a, r_b i p_b, p_c i q_c temena jednakostranog trougla (*Morlejeva teorema*).

3. PROPORCIONALNOST DUŽI I SLIČNOST LIKOVA

166. Ako su C i C' tačke dveju uporednih duži AB i $A'B'$ takve da je $AB : CB = A'C' : C'B'$, dokazati da se prave AA', BB', CC' seku u jednoj tački ili su među sobom uporedne.

167. Ako su A, B, C tri tačke neke prave p, a A', B', C' tačke neke druge prave p' takve da je $AB' \parallel BA'$ i $AC' \parallel CA'$, dokazati da je i $BC' \parallel CB'$ (*Paposova teorema*).

168. Ako su A, B, C tri tačke jedne prave, a A', B', C' tačke izvan te prave takve da je $AB' \parallel BA'$, $AC' \parallel CA'$ i $BC' \parallel CB'$, dokazati da tačke A', B', C' takođe pripadaju jednoj pravoj (*Obratna Paposova teorema*).

169. Ako su A_1, B_1, C_1 središta stranica BC, CA, AB trougla ABC, a M i N tačke u kojima proizvoljna prava kroz teme A seče prave A_1B_1 i A_1C_1, dokazati da je $BM \parallel CN$.

170. Kroz naspramna temena A i C paralelograma $ABCD$ konstruisane su dve paralelne prave od kojih prva seče prave određene stranicama BC i CD u tačkama P i Q, a druga seče prave određene stranicama AB i AD u tačkama R i S, dokazati da je $PR \parallel QS$.

171. Ako su H i D ortocentar i podnožje visine iz temena A trougla ABC, a M i N tačke u kojima upravne iz tačke D na pravama AB i AC seku prave koje su u tačkama B i C upravne na stranici BC, dokazati da tačke H, M, N pripadaju jednoj pravoj.

172. Ako su A', B', C' tačke u kojima proizvoljna prava s seče prave određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC, dokazati da ortocentri trouglova $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ pripadaju jednoj pravoj.

173. Dokazati da su ortocentri četriju trouglova koji su određeni sa četiri prave od kojih nikoje dve nisu paralelne i nikoje tri nisu konkurentne pripadaju jednoj pravoj.

174. Ako su E i F tačke u kojima simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla A trougla ABC seku pravu BC, dokazati da je

(a)
$$BE : CE = AB : AC;$$

(b)
$$BF : CF = AB : AC.$$

175. Ako obeležimo sa S središte upisanog kruga trougla ABC, sa S_a, S_b, S_c središta spolja upisanih krugova koji odgovaraju redom stranicama BC, CA, AB a sa E i F tačke u kojima simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla A seku pravu BC, dokazati da je

(a)
$$AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC;$$

(b)
$$AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = |AB - AC| : BC.$$

176. Ako su S, S_a, S_b, S_c središta upisanih krugova trougla ABC, zatim P, P_a, P_b, P_c tačke u kojima ti krugovi dodiruju pravu BC i A_1 središte stranice BC, dokazati da je

(a)
$$SA_1 \parallel AP_a;$$
(b)
$$S_aA_1 \parallel AP;$$
(v)
$$S_bA_1 \parallel AP_c;$$
(g)
$$S_cA_1 \parallel AP_b.$$

177. Ako su D i A_1 podnožje visine iz temena A i središte stranice BC trougla ABC, zatim $k(S,\varrho)$, $k_a(S_a,\varrho_a)$, $k_b(S_b,\varrho_b)$, $k_c(S_c,\varrho_c)$ upisani krugovi trougla ABC i X, X_a, X_b, X_c tačke u kojima prave SA_1, S_aA_1, S_bA_1, S_cA_1 seku pravu AD, dokazati da je
(a)
$$AX = \varrho$$
(b)
$$AX_a = \varrho_a$$
(v)
$$AX_b = \varrho_b$$
(g)
$$AX_c = \varrho_c$$

178. Ako su X i Y tačke u kojima simetrale uglova B i C trougla ABC seku duž koja spaja teme A s tačkom P_a u kojoj spolja upisani krug k_a dodiruje stranicu BC, dokazati da je
$$AX : AY = AB : AC.$$

179. Dokazati da se duži koje spajaju temena A_i četvorougla $A_1A_2A_3A_4$ sa težištima T_i trouglova koji su određeni ostalim temenima, seku u jednoj tački, težištu tog četvorougla, pri čemu je
$$A_iT : TT_i = 3 : 1.$$

180. Ako je AA_1 prečnik kruga k, B proizvoljna tačka kruga k različita od tačaka A i A', a C tačka duži AA' takva da je $AB = CA'$, dokazati da se simetrala ugla A, težišna linija iz temena B i visina iz temena C trougla ABC seku u jednoj tački.

181. Ako je D središte stranice BC trougla ABC, P tačka u kojoj simetrala ugla ADB seče stranicu AB i Q tačka u kojoj simetrala ugla ADC seče stranicu AC, dokazati da je
$$\triangle ABC \sim \triangle APQ.$$

182. Ako je ugao $\angle A$ trougla $\triangle ABC$ oštar i ako su B' i C' podnožja visina iz temena B i C, dokazati da je
$$\triangle ABC \sim \triangle AB'C'.$$

183. Ako je ugao $\angle A$ trougla $\triangle ABC$ oštar i ako su B' i C' podnožja visina iz temena B i C, a O središte kruga k opisanog oko tog trougla, dokazati da je $OA \perp B'C'$.

184. Neka je tačka S izvan kruga k. Ako su P i Q tačke u kojima tangente kroz S dodiruju k, a A i B tačke u kojima proizvoljna prava kroz S seče k, dokazati da je

$$AP : BP = AQ : BQ.$$

185. Ako su A' i C' tačke u kojima krug kroz temena A, B, C paralelograma $ABCD$ seče prave AD i CD, dokazati da je

$$A'B : A'C = A'C' : A'D.$$

186. Ako obeležimo sa D proizvoljnu tačku prave koja je određena stranicom BC trougla $\triangle ABC$, a sa O_1 i O_2 središta krugova opisanih oko trouglova $\triangle ABD$ i $\triangle ACD$, dokazati da je

$$\triangle ABC \sim \triangle AO_1O_2.$$

187. Ako su p i p' dve prave koje se seku u tački O, zatim A, B, C tačke prave p i A', B', C' tačke prave p' takve da je $O(A, B, C)$, $O(A', B', C')$ i $AB : BC = A'B' : B'C'$, dokazati da se krugovi opisani oko trouglova OAA', OBB', OCC' seku u istim tačkama ili se među sobom dodiruju u tački O.

188. Ako su A', B', C' podnožja visina iz temena A, B, C trougla $\triangle ABC$, dokazati da je

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \sim \triangle A'BC' \sim \triangle A'B'C.$$

189. Ako je $\angle PAQ$ prav, A proizvoljna tačka poluprave OQ, a B, C, D tačke poluprave OP, takve da je $[OBCD]$ i $OA = OB = BC = CD$, dokazati da je

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA.$$

190. Ako su P i Q tačke stranica AB i AC trougla $\triangle ABC$ takve da je $AB = nAP$ i $AC = (n + 1)AQ$, dokazati da su za sve vrednosti broja n prave PQ konkurentne.

191. Ako su P, Q, R tačke stranica BC, CA, AB trougla $\triangle ABC$ takve da je $BP : PC = CQ : QA = AR : RB$, dokazati da se težišta trouglova $\triangle ABC$ i $\triangle PQR$ poklapaju.

192. Ako su P, Q, R tačke stranica BC, CA, AB trougla $\triangle ABC$ takve da je $BP : PC = CQ : QA = AR : RB = k$, dokazati da postoji trougao kome su stranice jednake dužima AP, BQ i CR.

193. Ako je D središte osnove BC jednakokrakog trougla $\triangle ABC$, E podnožje upravne iz D na stranici AC, F središte duži DE, dokazati da je duž BE upravna na duži AF.

194. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ dva homotetična trougla u odnosu na neku tačku O, a p, q, r prave kroz tačku O uporedne sa pravama BC, CA, AB. Ako trougao $\triangle PQR$, koji je upisan u trougao $\triangle ABC$, određuje na stranicama trougla $\triangle A'B'C'$ jednake odsečke, dokazati da trougao $\triangle PQR$ određuje i na pravama p, q, r jednake odsečke.

195. Ako su B i C tačke u kojima prave AB i AC dodiruju krug k, a P, Q, R podnožja upravnih iz proizvoljne tačke S toga kruga na pravama BC, CA, AB, dokazati da je

$$SP^2 = SQ \cdot SR.$$

196. Ako je k krug opisan oko trougla $\triangle ABC$, t dirka kruga k u tački A i D tačka u kojoj prava kroz B uporedna sa t seče AC, dokazati da je

$$AB^2 = AC \cdot AD.$$

197. Ako je D tačka u kojoj simetrala ugla $\angle A$ seče stranicu BC trougla $\triangle ABC$, E tačka u kojoj upravna kroz D na simetrali unutrašnjeg ugla $\angle B$ seče pravu AB i F tačka u kojoj upravna kroz D na simetrali spoljašnjeg ugla C seče pravu AC, dokazati da je

$$AD^2 = AE \cdot AF.$$

198. Ako upravna kroz proizvoljnu tačku P hipotenuze BC pravouglog trougla $\triangle ABC$ seče prave AC i AB u tačkama Q i R, a opisani krug oko trougla $\triangle ABC$ u tački S, dokazati da je

$$PS^2 = PQ \cdot PR.$$

199. Ako je $PQRS$ kvadrat upisan u pravougli trougao $\triangle ABC$ pri čemu su temena P i Q hipotenuze BC, a temena R i S na stranicama AC i AB, dokazati da je

$$PQ^2 = BP \cdot CQ.$$

200. Ako su P, Q, R tačke u kojima proizvoljna prava kroz teme A paralelograma $ABCD$ seče prave BC, CD, BD, dokazati da je

$$AR^2 = PR \cdot QR.$$

201. Prava kroz presek S dijagonala AC i BD uporedna sa stranicom AB četvorougla $ABCD$ seče prave CD, BC, AD u tačkama P, Q, R. Dokazati da je

$$PS^2 = PQ \cdot PR.$$

202. Ako su A, B, C tri razne tačke kruga k, A' i B' upravne projekcije tačaka A i B na pravoj c koja u tački C dodiruje krug k i C' upravna projekcija tačke C na pravoj AB, dokazati da je

$$AA' \cdot BB' = CC'^2.$$

203. Ako su AB i CD osnovice jednakokrakog trapeza $ABCD$ opisanog oko kruga poluprečnika r, dokazati da je

$$AB \cdot CD = 4 \cdot r^2.$$

204. Ako su a, b, c, d duži jednake stranicama AB, BC, CD, DA a x i y duži jednake dijagonalama AC i BD konveksnog i tetivnog četvorougla $ABCD$, dokazati da je

$$\frac{x}{y} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{a \cdot b + c \cdot d}.$$

205. Ako su kod trougla ABC stranice BC, CA, AB jednake dužima a, b, c i ako je $\angle A = 2\angle B$, dokazati da je

$$a^2 = b \cdot (b + c).$$

206. Ako su kod trougla ABC stranice BC, CA, AB jednake dužima a, b, c i ako je $\angle A = 2\angle B$, dokazati da je

$$a^2 = b \cdot (b + c).$$

207. Ako su kod trougla ABC stranice BC, CA, AB jednake dužima a, b, c i ako je $a^2 = b \cdot (b + c)$, dokazati da je

$$\angle A = 2\angle B.$$

208. Ako su P, Q, R tačke u kojima proizvoljna prava kroz teme A paralelograma $ABCD$ seče prave BC, CD, BD, dokazati da je

$$\frac{1}{AR} = \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}.$$

209. Ako su P, Q, R tačke u kojima proizvoljna prava s kroz težište T trougla ABC seče prave BC, CA, AB pri čemu su tačke Q i R s iste strane od T, dokazati da je

$$\frac{1}{TP} = \frac{1}{TQ} + \frac{1}{TR}.$$

210. Ako su dijagonale AC i BD četvorougla $ABCD$ seku u tački O i ako prava kroz tačku O uporedna sa stranicom AB seče stranice AD i BC u tačkama A_1 i B_2, prava kroz tačku O uporedna sa stranicom BC seče stranice AB i CD u tačkama B_1 i C_2, prava kroz tačku O uporedna sa stranicom CD seče stranice BC i AD u tačkama C_1 i D_2, a prava kroz tačku O uporedna sa stranicom DA seče stranice CD i AB u tačkama D_1 i A_2, dokazati da je

$$\frac{A_1B_2}{AB} + \frac{B_1C_2}{BC} + \frac{C_1D_2}{CD} + \frac{D_1A_2}{DA} = 4.$$

211. Ako je D proizvoljna tačka stranice BC trougla ABC, a E i F tačke stranica AC i AB takve da je $AB \parallel DE$ i $AC \parallel DF$, dokazati da je

$$\frac{ED}{AB} + \frac{ED}{AC} = 1.$$

212. Ako su A', B', C' tačke u kojima uporedne prave kroz temena A, B, C trougla ABC seku prave BC, CA, AB, dokazati da je

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = 0.$$

213. Ako su A', B', C' središta stranica BC, CA, AB trougla ABC; P, Q, R tačke u kojima proizvoljna prava s seče prave BC, CA, AB i P', Q', R' tačke u kojima ta ista prava seče prave $B'C', C'A', A'B'$, dokazati da je

$$\frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'} + \frac{1}{RR'} = 0.$$

214. Ako krug upisan u trougao ABC seče težišnu liniju AA_1 u tačkama M i N takvim da je $AM = MN = NA_1$, dokazati da je pri $AC > AB$,

$$AB : BC : CA = 5 : 10 : 13.$$

215. Ako je prava koja sadrži visinu AD trougla ABC dirka kruga opisanog oko trougla, dokazati da je razlika unutrašnjih uglova B i C prav ugao.

216. Ako je razlika unutrašnjih uglova B i C trougla ABC prav ugao, dokazati da je prava koja sadrži visinu AD dirka kruga opisanog oko trougla ABC.

217. Ako je prava koja sadrži visinu AD trougla ABC dirka kruga opisanog oko tog trougla, dokazati da je

$$AD^2 = BD \cdot CD.$$

218. Ako je podnožje D visine iz temena A na produženju stranice BC trougla ABC i pri tome $AD^2 = BD \cdot CD$, dokazati da je prava AD dirka kruga opisanog oko trougla ABC.

219. Neka simetrala ugla A seče stranicu BC trougla ABC u tački E, dokazati da je ugao A tog trougla prav ako i samo ako je

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \sqrt{\frac{1}{BE^2} + \frac{1}{CE^2}}.$$

220. Ako je kod trougla ABC zbir ili razlika unutrašnjih uglova B i C prav ugao i D podnožje visine iz temena A, dokazati da je

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AD^2}.$$

221. Ako je D podnožje visine iz temena A trougla ABC i pri tome

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AD^2},$$

dokazati da je zbir ili razlika unutrašnjih uglova B i C tog trougla prav ugao.

222. Ako je kod trougla ABC zbir ili razlika unutrašnjih uglova B i C prav ugao i ako je D podnožje visine iz temena A, dokazati da je

(a)

$$AD^2 = BD \cdot CD$$

(b)

$$AB^2 : AC^2 = BD : CD$$

223. Ako je kod trougla ABC zbir ili razlika unutrašnjih uglova B i C prav ugao i ako je r poluprečnik kruga opisanog oko trougla ABC, dokazati da je

$$AB^2 + AC^2 = 4 \cdot r^2.$$

224. Ako je ugao A trougla ABC prav i T težište tog trougla, dokazati da je

$$BT^2 + CT^2 = AT^2.$$

225. Ako su E i F tačke u kojima simetrale unutrašnjih uglova B i C seku naspramne stranice trougla ABC, a P, Q, R podnožja upravnih iz proizvoljne tačke M duži EF na stranicama BC, CA, AB, dokazati da je

$$MP = MQ + MR.$$

226. Ako su M i N tačke u kojima prava kroz presek O dijagonala AC i BD trapeza $ABCD$ uporedna s osnovicama AB i CD seče prave AD i BC, dokazati da je tačka O središte duži MN.

227. Ako je $ABCD$ trapez sa nejednakim kracima AD i BC, dokazati da je

$$\frac{AC^2 - BD^2}{AD^2 - BC^2} = \frac{AB + CD}{AB - CD}.$$

228. Ako su P i Q tačke na kracima AD i BC trapeza $ABCD$ takve da je $AP : PD = BQ : QC = m : n$, dokazati da je

$$PQ = \frac{n \cdot AB + m \cdot DC}{m + n}.$$

229. Ako je T težište trougla ABC i s proizvoljna prava u ravni tog trougla, a T', A', B', C' uporedne projekcije tačaka T, A, B, C na pravoj s, dokazati da je

$$TT' = \frac{1}{3} \cdot (AA' + BB' + CC').$$

230. Dva kruga k_1 i k_2 s poluprečnicima r_1 i r_2 dodiruju se spolja u tački P. Ako je Q podnožje upravne iz tačke P na bilo kojoj spoljašnjoj dirki tih krugova, dokazati da je

$$PQ = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}.$$

231. Ako su M i N tačke stranica AB i CD, a P i Q tačke stranica AD i BC četvorougla $ABCD$ takve da je $AM : MB = DN : NC = m : n$ i $AP : PD = BQ : QC = p : q$, dokazati da se duži MN i PQ seku u tački O takvoj da je $MO : OM = p : q$ i $PO : OQ = m : n$.

232. Ako je kod trougla ABC stranica BC jednaka poluzbiru drugih dveju stranica, dokazati,

(a) da teme A, središta M i N stranica AB i AC, središte O opisanog kruga i središte S upisanog kruga pripadaju jednom krugu k;

(b) da je simetrala AS ugla A upravna na pravoj OS;

(v) da dirka kruga k u tački S sadrži težište T trougla ABC.

233. Ako je kod trougla ABC stranica BC jednaka poluzbiru drugih dveju stranica, dokazati da je

(a)

$$h_a = 3\varrho = \varrho_a$$

(b)

$$a^2 = 4(2r - \varrho)\varrho$$

234. Neka je AD visina koja odgovara hipotenuzi BC pravouglog trougla ABC, DE visina trougla ABD i DF visina trougla ACD. Ako je $BC = a, AD = h_a, BE = m, CF = n$ dokazati da je

(a)
$$h_a^3 = amn;$$

(b)
$$a^2 = m^2 + n^2 + 3h_a^2;$$

(v)
$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2}.$$

235. Ako je O središte duži AB, a C i D tačke prave AB takve da je $OC : OD = k$, dokazati da je
$$AC^2 - BC^2 = k(AD^2 - BD^2).$$

236. Ako su AB i CD dve tetive kruga k koje se seku u tački S pod pravim uglom i ako su O i r središte i poluprečnik kruga k, dokazati da je
$$AB^2 + CD^2 = 4(2r^2 - OS^2).$$

237. Ako su AB i CD dve tetive kruga $k(O,r)$ koje se seku u nekoj tački S pod pravim uglom, dokazati da je
$$AS^2 + BS^2 + CS^2 + DS^2 = 4r^2.$$

238. Neka je ugao A trougla ABC prav i D podnožje visine iz temena A. Ako su r, r_1, r_2 poluprečnici opisanih i ϱ, ϱ_1, ϱ_2 poluprečnici upisanih krugova trouglova ABC, ABD, ACD dokazati da je

(a)
$$r^2 = r_1^2 + r_2^2;$$

(b)
$$\varrho^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2.$$

239. Ako se krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ dodiruju spolja u tački S, a prave p_1 i p_2 seku u tački S pod pravim uglom, pri čemu prava p_1 seče k_1 i k_2 u tačkama A i B, a prava p_2 seče k_1 i k_2 u tačkama C i D, dokazati da je
$$AB^2 + CD^2 = 4(r_1 + r_2)^2.$$

240. Ako su r_1 i r_2 poluprečnici dvaju krugova k_1 i k_2 koji se spolja dodiruju u tački P i ako je d odstojanje tačke P od jedne njihove spoljašnje zajedničke dirke, dokazati da je
$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{d}.$$

241. Ako su r_1 i r_2 poluprečnici dvaju krugova k_1 i k_2 koji se među sobom spolja dodiruju i ako su T_1 i T_2 dodirne tačke jedne njihove spoljašnje dirke, dokazati da je
$$T_1T_2 = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

242. Neka su k, k_1, k_2 tri kruga upisana u ugao ω, pri čemu krugovi k_1 i k_2 dodiruju krug k, zatim l_1 i l_2 krugovi koji dodiruju jedan krug ugla ω a pri tome krug l_1 dodiruje krugove k i k_1, a krug l_2 dodiruje krugove k i k_2. Ako su r, ϱ_1, ϱ_2 poluprečnici krugova k, l_1, l_2 dokazati da je

$$\sqrt{\varrho_1} + \sqrt{\varrho_2} = \sqrt{r}.$$

243. Ako su BB' i CC' visine iz temena B i C trougla ABC, a r poluprečnik opisanog kruga i d odstojanje njegovog središta od stranice BC, dokazati da je

$$BC : B'C' = r : d.$$

244. Ako je H ortocentar trougla ABC i O središte kruga opisanog oko tog trougla, dokazati da je

$$BC^2 + AH^2 = 4OA^2.$$

245. Ako je H ortocentar trougla ABC, r poluprečnik kruga opisanog oko tog trougla i a, b, c duži jednake stranicama BC, CA, AB, dokazati da je

$$AH^2 + BH^2 + CH^2 = 12r^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

246. Ako su AA', BB', CC' visine i H ortocentar trougla ABC, dokazati da je

(a)

$$AH \cdot AA' = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$$

(b)

$$AH \cdot AA' + BH \cdot BB' + CC' = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

247. Ako je M središte kvadrata nad hipotenuzom BC trougla ABC koji se nalazi s one strane od prave BC s koje nije teme A, sa N središte kvadrata nad hipotenuzom BC koji se nalazi s one strane od prave BC sa koje je teme A, dokazati da je

(a)

$$AM = \frac{\sqrt{2}}{2}(AB + AC)$$

(b)

$$AN = \frac{\sqrt{2}}{2}(AB - AC)$$

248. Ako su P, Q, R tačke u kojima upisani krug dodiruje stranice BC, CA, AB trougla ABC, a A', B', C' podnožja upravnih iz proizvoljne tačke M kruga k na pravama BC, CA, AB i P', Q', R' podnožja upravnih iz tačke M na pravama QR, RP, PQ, dokazati da je

$$MA' \cdot MB' \cdot MC' = MP' \cdot MQ' \cdot MR'.$$

249. Ako su ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c poluprečnici upisanih krugova k, k_a, k_b, k_c zatim P, P_a, P_b, P_c tačke u kojima ti krugovi dodiruju pravu BC i P', P'_a, P'_b, P'_c tačke u kojima prave AP, AP_a, AP_b, AP_c seku krugove k, k_a, k_b, k_c, dokazati da je

(a)

$$AP \cdot PP' = 2\varrho h_a$$

(b)
$$AP_a \cdot P_aP'_a = 2\varrho_a h_a$$
(c)
$$AP_b \cdot P_bP'_b = 2\varrho_b h_a$$
(d)
$$AP_c \cdot P_cP'_c = 2\varrho_c h_a$$

250. Ako su S, S_a, S_b, S_c središta i ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c poluprečnici upisanih krugova trougla ABC, M i N tačke u kojima simetrale spoljašnjeg i unutrašnjeg ugla A seku opisani krug trougla ABC, kome je poluprečnik r, dokazati da je
(a)
$$SA \cdot SN = 2r\varrho$$
(b)
$$S_aA \cdot S_aN = 2r\varrho_a$$
(c)
$$S_bA \cdot S_bM = 2r\varrho_b$$
(d)
$$S_cA \cdot S_cM = 2r\varrho_c$$

251. Ako su a, b, c stranice trougla, r poluprečnik opisanog kruga i h_a visina koja odgovara stranici a, dokazati da je
$$b_c = 2rh_a.$$

252. Ako su r i h_a poluprečnik opisanog kruga i visina iz temena A trougla ABC, l_a i $\bar{l}_a$ simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla A, a N i M tačke u kojima te simetrale seku opisani krug, dokazati da je
(a)
$$AN = \frac{2rh_a}{l_a}$$
(b)
$$AM = \frac{2rh_a}{\bar{l}_a}$$

253. Ako su b i c duži jednake stranicama AC i AB trougla ABC, l_a i $\bar{l}_a$ simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla A, a N i M tačke u kojima te simetrale seku opisani krug, dokazati da je
(a) $AN = \dfrac{bc}{l_a}$;
(b) $AM = \dfrac{bc}{\bar{l}_a}$.

254. Ako je h_a visina iz temena A, l_a simetrala ugla A i r poluprečnik opisanog kruga trougla ABC, dokazati da je
$$r = \frac{l_a^2}{2h_a} \cdot \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}}.$$

255. Ako obeležimo sa b i c stranice naspram temena B i C trougla ABC, sa $k(S, \varrho)$ upisani krug, sa $k_a(S_a, \varrho_a)$ $k_b(S_b, \varrho_b)$, $k_c(S_c, \varrho_c)$ spolja upisane krugove koji odgovaraju, respektivno, temenima A, B, C a sa d, d_a, d_b, d_c odstojanja tačaka S, S_a, S_b, S_c od prave koja sadrži težišnu liniju $AA_1 = m_a$, dokazati da je

(a)
$$d = \frac{(b-c)\cdot\varrho}{2m_a}$$

(b)
$$d_b = \frac{(b+c)\cdot\varrho_b}{2m_a}$$

(c)
$$d_a = \frac{(b-c)\cdot\varrho_a}{2m_a}$$

(d)
$$d_c = \frac{(b+c)\cdot\varrho_c}{2m_a}$$

256. Ako su a, b, c stranice i h_a, h_b, h_c njima odgovarajuće visine nekog trougla, zatim p poluobim, r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je

(a)
$$h_a + h_b + h_c = \frac{a\cdot b + b\cdot c + c\cdot a}{2\cdot r}$$

(b)
$$h_a + h_b + h_c = 2\cdot p\cdot\varrho\cdot(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$$

257. Ako su ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c poluprečnici upisanih krugova trougla ABC i h_a visina iz temena A, dokazati da je

(a)
$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_a} = \frac{2}{h_a}$$

(b)
$$\frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{2}{h_a}$$

258. Ako su h_a, h_b, h_c visine trougla ABC, a ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c poluprečnici njegovih upisanih krugova, dokazati da je

(a)
$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho}$$

(b)
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho}$$

(c)
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho_c}$$

259. Ako su a, b, c stranice i p poluobim trougla ABC, a ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c poluprečnici upisanih krugova tog trougla, dokazati da je

(a)

$$\varrho \cdot \varrho_a = (p-b) \cdot (p-c)$$

(b)

$$\varrho_b \cdot \varrho_c = p \cdot (p-a)$$

260. Ako su a, b, c stranice i p poluobim trougla ABC, a ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c poluprečnici upisanih krugova, dokazati da je

(a)

$$\varrho_a \cdot (\varrho_b + \varrho_c) = a_p$$

(b)

$$\varrho \cdot \varrho_a + \varrho_b \cdot \varrho_c = b_c$$

(c)

$$\varrho_b \cdot \varrho_c - \varrho \cdot \varrho_a = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

(d)

$$\varrho_a \cdot \varrho_b + \varrho_b \cdot \varrho_c + \varrho_c \cdot \varrho_a = p^2$$

261. Ako su $\varrho, \varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ poluprečnici upisanih krugova trougla ABC i p poluobim tog trougla, dokazati da je

(a)

$$\varrho_a \varrho_b \varrho_c = p^2 \varrho$$

(b)

$$\varrho \varrho_b \varrho_c = (p-a)^2 \varrho_a$$

262. Ako su a, b, c stranice trougla ABC, a $\varrho, \varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ poluprečnici upisanih krugova i r poluprečnik opisanog kruga, dokazati da je

$$\varrho^2 + \varrho_a^2 + \varrho_b^2 + \varrho_c^2 = 16r^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

263. Ako su a, b, c stranice i p poluobim trougla ABC, a ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c poluprečnici upisanih krugova i r poluprečnik opisanog kruga, dokazati da je

(a)

$$a^2 = (\varrho_a - \varrho)(\varrho_b + \varrho_c)$$

(b)

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2\varrho^2 - 8r\varrho$$

(v)

$$ab + bc + ca = p^2 + \varrho^2 + 4r\varrho$$

264. Ako su a, b, s, stranice i p poluobim trougla ABC, r i ϱ poluprečnici opisanog i upisanog kruga, a ϱ_a poluprečnik spolja upisanog kruga koji se nalazi u uglu A, dokazati da je

(a)

$$abc = 4r\varrho p$$

(b)

$$abc = 4r\varrho_a(p-a)$$

265. Ako su P i Q tačke u kojima simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla A trougla ABC seku pravu BC, dokazati da je

(a)

$$AP^2 = AB \cdot AC - BP \cdot PC$$

(b)

$$AQ^2 = BQ \cdot CQ - AB \cdot AC$$

266. Ako su l_A i $\bar{l}_a$ simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla A trougla ABC, a, b, c, duži jednake stranicama BC, CA, AB i p poluobim tog trougla, dokazati da je

(a)

$$l_A^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$$

(b)

$$\bar{l}_a^2 = \frac{4bc(p-b)(p-c)}{(b-c)^2}$$

267. Ako su a, b, c, stranice i p poluobim trougla ABC, a S, S_a, S_b, S_c središta upisanih krugova tog trougla, dokazati da je

(a)

$$AS^2 = \frac{bc(p-a)}{p}$$

(b)

$$AS_a^2 = \frac{bcp}{p-a}$$

(v)

$$AS_b^2 = \frac{bc(p-c)}{p-b}$$

(g)

$$AS_c^2 = \frac{bc(p-b)}{p-c}$$

268. Ako su S, S_a, S_b, S_c središta i $\varrho, \varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ poluprečnici upisanih krugova trougla ABC, a r i p poluprečnik opisanog kruga i poluobim, dokazati da je

(a)

$$AS^2 + BS^2 + CS^2 = p^2 + \varrho^2 - 8r\varrho$$

(b)

$$AS_a^2 + BS_a^2 + CS_a^2 = p^2 - \varrho^2 + 2\varrho a^2 - 4r\varrho + 4r\varrho_a$$

(v)

$$AS_a^2 + BS_b^2 + CS_c^2 = p^2 + \varrho^2 + 8r\varrho + 16r^2$$

269. Ako su S, S_a, S_b, S_c središta upisanih krugova trougla ABC i a, b, c duži jednake stranicama BC, CA, AB, dokazati da je

(a)

$$\frac{AS^2}{bc} + \frac{BS^2}{ca} + \frac{CS^2}{ab} = 1$$

(b)

$$\frac{bc}{AS_a^2} + \frac{ca}{BS_b^2} + \frac{ab}{CS_c^2} = 1$$

270. Ako su S, S_a, S_b, S_c središta upisanih krugova trougla ABC, a h_a, h_b, h_c njegove visine i r poluprečnik opisanog kruga, dokazati da je

(a)
$$\frac{AS^2}{h_a} + \frac{BS^2}{h_b} + \frac{CS^2}{h_c} = 2r$$

(b)
$$\frac{h_a}{AS_a^2} + \frac{h_b}{BS_b^2} + \frac{h_c}{CS_c^2} = \frac{1}{2r}.$$

271. Ako su S, S_a, S_b, S_c središta i $\varrho, \varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ poluprečnici upisanih krugova trougla ABC, a O i r središte i poluprečnik opisanog kruga, dokazati da je

(a)
$$OS^2 = r(r - 2\varrho)$$

(b)
$$OS_a^2 = r(r + 2\varrho_a)$$

(v)
$$OS^2 + OS_a^2 + OS_b^2 + OS_c^2 = 12r^2$$

272. Ako su a, b, c stranice i p poluobim trougla ABC, a S, S_a, S_b, S_c središta upisanih krugova, dokazati da je

(a)
$$SS_a^2 = \frac{a^2bc}{p(p-a)}$$

(b)
$$S_bS_c^2 = \frac{a^2bc}{(p-b)(p-c)}$$

273. Ako su S, S_a, S_b, S_c središta i $\varrho, \varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ poluprečnici upisanih krugova trougla ABC, a r poluprečnik kruga opisanog oko tog trougla, dokazati da je

(a)
$$SS_a^2 = 4r(\varrho_a - \varrho)$$

(b)
$$S_bS_c^2 = 4r(\varrho_b + \varrho_c)$$

(v)
$$SS_a^2 + SS_b^2 + SS_c^2 = 8r(2r - \varrho)$$

(g)
$$S_bS_c^2 + S_cS_a^2 + S_aS_b^2 = 8r(4r + \varrho)$$

274. Ako su S, S_a, S_b, S_c središta upisanih krugova trougla ABC i ako je ϱ poluprečnik upisanog kruga, r poluprečnik opisanog kruga i p poluobim tog trougla, dokazati da je

(a)
$$AS \cdot BS \cdot CS = 4r\varrho^2$$

(b)
$$AS_a \cdot BS_b \cdot CS_c = 4rp^2$$

(v)
$$SS_a \cdot SS_b \cdot SS_c = 16r^2\varrho$$

(g)
$$S_aS_b \cdot S_bS_c \cdot S_cS_a = 16r^2p$$

275. Ako su S, S_a, S_b, S_c središta upisanih krugova trouglova dokazati da je

(a)
$$AS \cdot AS_a = AB \cdot AC$$

(b)
$$AS_b \cdot AS_c = AB \cdot AC$$

.

276. Ako je r poluprečnik opisanog kruga, ϱ poluprečnik upisanog kruga, S središte upisanog kruga i S_a središte spolja upisanog kruga koji odgovara stranici BC, dokazati da je
$$AS \cdot SS_a = 4\varrho.$$

277. Ako su duži b i c jednake stranicama AC i AB trougla ABC, S i ϱ središte i poluprečnik upisanog kruga r poluprečnik opisanog kruga tog trougla, dokazati da je
$$AS^2 = bc - 4r\varrho.$$

278. Ako obeležimo sa h_a, h_b, h_c visine iz temena A, B, C trougla ABC, sa S središte upisanog kruga i sa r poluprečnik opisanog kruga, dokazati da je
$$\frac{SA^2}{h_a} + \frac{SB^2}{h_b} + \frac{SC^2}{h_c} = 2r.$$

279. Ako su n_a, n_b, n_c odsečci koje trougao ABC određuje na pravama koje sadrže središte upisanog kruga, a paralelne su respektivno sa stranicama $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, dokazati da je
$$\frac{n_a}{a} + \frac{n_b}{b} + \frac{n_c}{c} = 2.$$

4. KARAKTERISTIČNE TEOREME I NJIHOVE PRIMENE

4.1. Apolonijeva teorema

280. (Apolonije) Ako je X tačka stranice BC trougla ABC takva da je $BX : XC = m : n$, dokazati da je

$$nAB^2 + mAC^2 + nBX^2 + mCX^2 + (m+n)AX^2.$$

281. Ako je X proizvoljna tačka ravni pravougaonika $ABCD$, dokazati da je $AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2$.

282. Dokazati da je kod paralelograma zbir kvadrata stranica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

283. Ako je kod četvorougla $ABCD$ zbir kvadrata stranica jednak zbiru kvadrata dijagonala, dokazati da je taj četvorougao paralelogram.

284. Ako je X tačka stranice BC trougla ABC takva da je $BX : XC = m : n$, Y tačka u kojoj prava AX seče krug upisan oko trougla ABC, dokazati da je

$$nAB^2 + mAC^2 = (m+n)AX \cdot AY.$$

285. Ako je D podnožje visine iz temena A i A_1 stranice BC trougla ABC, dokazati da je

$$AC^2 - AB^2 = 2BC \cdot DA_1.$$

286. Ako je D tačka stranice BC trougla ABC takva da je $BD = 2DC$, dokazati da je

$$AB^2 - 2AC^2 = 3AD^2 + 6AD^2.$$

287. Ako su X i Y tačke stranice BC trougla ABC takve da je $BX = XY = YC$, dokazati da je

$$AB^2 + AC^2 = AX^2 + AY^2 + 4XY^2.$$

288. Ako su AA_1, BB_1, CC_1 težišne linije trougla ABC i T njegovo težište, dokazati da je

(a)

$$AA_1^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2)$$

(b)

$$AA_1^2 + BB_1^1 + CC_1^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

;

(v)

$$AT^2 + BT^2 + CT^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

289. Ako su P i Q središta dijagonala AC i BD četvorugla $ABCD$, dokazati da je

$$PQ^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2).$$

290. Ako su l_1 i l_a simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla A trougla ABC, zatim a, b, c stranice naspram temena A, B, C i p poluobim tog trougla, dokazati da je

(a)

$$l_a^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$$

(b)

$$l_a^2 = \frac{4abc(p-b)(p-c)}{(b-c)^2}.$$

291. Ako je tačka M središte tetive AB kruga k kome je središte O. N proizvoljna tačka kruga l kome je duž OM prečnik i C, dokazati da je

$$AC^2 + BC^2 = 4NC^2.$$

292. Ako su H, T, O, S ortocentar, težište, središte opisanog kruga i središte upisanog kruga bilo kojeg trougla, a r i ϱ poluprečnik opisanog i upisanog kruga, dokazati da je

(a)

$$SH^2 + 2SO^2 = 3(ST^2 + 2OT^2)$$

(a)

$$3(ST^2 + 2OT^2) - SH^2 = 2r(r - 2\varrho)$$

293. Dokazati da je poluprečnik kruga koji dodiruje katete i opisani krug pravouglog trougla jednak prečniku upisanog kruga.

294. Ako su stranice BC, CA, AB trougla $\triangle ABC$ jednake dužima a, b, c i ako je O središte i r poluprečnik kruga opisanog oko trougla $\triangle ABC$, a O' tačka simetrična sa O u odnosu na pravu BC, dokazati da je

$$AO'^2 = r^2 + b^2 + c^2 - a^2.$$

295. Ako je kod trougla $\triangle ABC$ $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$, dokazati da su težišne linije iz temena B i C među sobom upravne.

296. Ako je S središte kruga upisanog u trougao $\triangle ABC$ i P proizvoljna tačka ravni tog trougla, dokazati da je

$$BC{\cdot}BA^2{+}CA{\cdot}PB^2{+}AB{\cdot}PC^2 = BC{\cdot}SA^2{+}CA{\cdot}SB^2{+}AB{\cdot}SC^2{+}(BC{+}CA{+}AB){\cdot}PS^2.$$

297. (M. Stewart) Ako je X tačka stranice BC trougla $\triangle ABC$, dokazati da je

$$BC \cdot AX^2 = XC^2 \cdot AB^2 + BX \cdot AC^2 - BX \cdot XC \cdot bc.$$

298. Ako su r i ϱ poluprečnik opisanog kruga i poluprečnik upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ kome je stranica BC najmanja, a M i N tačke stranica AB i AC takve da je $MB = NC = BC = a$, dokazati da je

$$MN^2 = \frac{a^2}{r} \cdot (r - 2\varrho).$$

299. Ako su r i ϱ_a poluprečnik opisanog kruga i poluprečnik upisanog kruga koji odgovara stranici BC trougla ABC, a M i N tačke pravih AB i AC takve da je $A-B-M$ i $MB=NC=BC=a$, dokazati da je

$$MN^2=\frac{a^2}{r}\cdot(r+2\cdot\varrho_a).$$

300. Ako su B' i C' podnožja upravnih iz temena B i C na simetrali unutrašnjeg ugla A trougla ABC, dokazati da je

$$BB'=\sqrt{\frac{c}{b}\cdot(p-b)\cdot(p-c)}\quad \text{i}\quad CC'=\sqrt{\frac{b}{c}\cdot(p-b)\cdot(p-c)}.$$

301. Ako su a i c osnovice, b i d kraci, e i f dijagonale trapeza, dokazati da je

$$e^2=ac+\frac{ad^2-cb^2}{a-c}\quad \text{i}\quad f^2=ac+\frac{ab^2-cd^2}{a-c}.$$

302. Odrediti skup svih tačaka P za koje je $m\cdot AP^2+n\cdot BP^2=l^2$ gde su A i B date tačke, m i n dati brojevi i l data duž.

303. Neka je O središte i r poluprečnik kruga k, a A tačka u njegovoj ravni i d duž jednaka duži OA. Ako su M i N promenljive tačke kruga k takve da je ugao $\angle MAN$ prav:

(a) dokazati da je skup svih središta svih tetiva MN kruga k takođe krug l kome se središte poklapa sa središtem duži OA, a poluprečnik je jednak duži $\frac{1}{2}\sqrt{2r^2-d^2}$;

(b) dokazati da je skup svih presečnih tačaka dirki kruga k u tačkama M i N takođe izvestan krug l_1 koji je homotetičan s krugom l u odnosu na tačku O.

304. Ako je $ABCD$ tangentan i tetivan četvorougao, r poluprečnik opisanog kruga, ϱ poluprečnik upisanog kruga i d duž koja spaja središta tih krugova, dokazati da je

$$\frac{1}{(r+d)^2}+\frac{1}{(r-d)^2}=\frac{1}{\varrho^2}.$$

4.2. Lajbnicova teorema i njena primena

305. (G.W. Leibnitz) Ako je T težište trougla $\triangle ABC$ i P proizvoljna tačka, dokazati da je

$$PA^2+PB^2+PC^2=TA^2+TB^2+TC^2+3PT^2.$$

306. Ako je T težište četvorougla $ABCD$ i P proizvoljna tačka, dokazati da je

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=TA^2+TB^2+TC^2+TD^2+4PT^2.$$

307. Ako je $ABCD$ tetivan četvorougao sa upravnim dijagonalama, a r poluprečnik opisanog kruga dokazati da je

$$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2=4r^2.$$

308. Ako su a, b, c stranice trougla ABC, O i r središte i poluprečnik opisanog kruga, a T i H težište i ortocentar tog trougla, dokazati da je

(a)
$$OT^2 = r^2\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2);$$

(b)
$$OH^2 = 9r^2 - (a^2+b^2+c^2);$$

(v)
$$TH^2 = 4r^2 - \frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2);$$

(g)
$$AH^2+BH^2+CH^2 = 12r^2 - (a^2+b^2+c^2).$$

309. Ako obeležimo sa O, H, T središte opisanog kruga, ortocentar i težište trougla ABC, sa p njegov poluobim sa r poluprečnik opisanog kruga i sa ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je

(a)
$$OT^2 = \frac{1}{9}(9r^2 - 2p^2 + 2\varrho^2 + 8r\varrho)$$
;

(b)
$$OH^2 = 9r^2 - 2p^2 + 2\varrho^2 + 8r\varrho$$
;

(v)
$$HT^2 = \frac{4}{9}(9r^2 - 2p^2 + 2\varrho^2 + 8r\varrho)$$
;

(g)
$$AH^2+BH^2+CH^2 = 12r^2 - 2p^2 + 2\varrho^2 + 8r\varrho$$
.

310. Ako su S, S_a, S_b, S_c središta i ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c poluprečnici upisanih krugova trougla ABC, a a, b, c stranice, p poluobim, r poluprečnik opisanog kruga i T težište tog trougla, dokazati da je

(a)
$$9TS^2 = p^2 + 5\varrho^2 - 16r\varrho$$
;

(b)
$$9TS_a^2 = p^2 - \varrho^2 + 6\varrho_a^2 - 4r\varrho + 12r\varrho_a$$
;

(v)
$$TS^2 + TS_a^2 + TS_b^2 + TS_c^2 = 16r^2 - \frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2)$$
.

311. Ako su S, S_a, S_b, S_c središta i ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c poluprečnici upisanih krugova trougla ABC, a a, b, c stranice, p poluobim, r poluprečnik opisanog kruga, T težište i H ortocentar tog trougla, dokazati da je

(a)
$$HS^2 = 4r^2 + 4r\varrho + 3\varrho^2 - p^2$$
;
(b)
$$HS_a^2 = 4r^2 + 4r\varrho + \varrho^2 + 2\varrho_a^2 - p^2$$
;
(v)
$$HS^2 + HS_a^2 + HS_b^2 + HS_c^2 = 48r^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2)$$
.

312. Ako je O_1 središte Ojlerovog kruga, H ortocentar i r poluprečnik opisanog kruga trougla ABC, dokazati da je
(a)
$$O_1A^2 + O_1B^2 + O_1C^2 = \frac{1}{4}(3r^2 + a^2 + b^2 + c^2)$$
;
(b)
$$O_1A^2 + O_1B^2 + O_1C^2 + O_1H^3 = 3r^2$$
.

4.3. Karnoova teorema i njena primena

313. (L. Carnot) Ako su P, Q, R, tačke pravih koje su određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC, dokazati da se prave upravne u tačkama P, Q, R na pravama BC, CA, AB seku u jednoj tački ako i samo ako je
$$BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR^2 - RB^2 = 0.$$

314. Ako obeležimo sa O proizvoljnu tačku koja se nalazi u ravni poligona $A_1, \ldots, A_n$ i sa $P_1, \ldots, P_n$ podnožja upravnih iz tačke O na pravama $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$, dokazati da je
$$A_1P_1^2 + A_2P_2^2 + \ldots + A_nP_n^2 = P_1A_2^2 + P_2A_3^2 + \ldots + P_nA_1^2.$$

315. Primenom Karnoove teoreme dokazati da se simetrale stranica trougla seku u jednoj tački.

316. Primenom Karnoove teoreme dokazati da se prave određene visinama trougla seku u jednoj tački, ortocentru tog trougla.

317. Dokazati da se normale kroz središta spolja upisanih krugova trougla na odgovarajućim stranicama seku u jednoj tački.

318. Od tri kruga kojima središta nisu na jednoj pravoj svaka dva kruga se seku. Dokazati da se prave određene zajedničkim tetivama tih krugova seku u jednoj tački, radikalnom središtu tih krugova.

319. Ako su A', B', C' ponožja visina iz temena A, B, C trougla ABC, dokazati da se normale kroz temena A, B, C na pravama $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ seku u jednoj tački,središtu O kruga opisanog oko trougla ABC.

320. Ako je O proizvoljna tačka ravni trougla ABC a A', B', C' podnožja upravnih kroz O na pravama BC, CA, AB, dokazati da se normale kroz temena A, B, C na pravama $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ seku u jednoj tački.

321. Ako su A', B', C' upravne projekcije temena A, B, C trougla ABC na nekoj pravoj p, dokazati da se prave kroz tačke A', B', C' upravne na pravama BC, CA, AB seku u izvesnoj tački P, ortopolu prave p u odnosu na trougao ABC.

322. Dva trougla ABC i $A'B'C'$ pripadaju istoj ravni. Ako se upravne kroz tačke A, B, C na pravama $B'C', C'A', A'B'$ seku u jednoj tački, dokazati da se i upravne tačke A', B', C' na pravama BC, CA, AB takođe seku u jednoj tački.

4.4. Čevijeva teorema i njena primena

323. (Giovanni Ceva) Ako su P, Q, R tačke pravih koje su određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC, dokazati da se prave AP, BQ, CR seku u jednoj tački ako i samo ako je

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1.$$

324. Primenom Čevijeve teoreme dokazati da se

(a) težišne linije trougla seku u jednoj tački;

(b) prave određene visinama trougla seku u jednoj tački;

(v)simetrale unutrašnjih uglova trougla seku u jednoj tački;

(g) simetrale jednog unutrašnjeg ugla i simetrale dva spoljašnja ugla kod druga dva temena trougla seku u jednoj tački.

325. Ako su P, Q, R tačke u kojima krug upisan u trougao $\triangle ABC$ dodiruje stranice BC, CA, CB, dokazati da se prave AP, BQ, CR seku u jednoj tački (*Žergonova teorema*).

326. Ako su P_a, Q_a, R_a tačke u kojima krug upisan u trougao $\triangle ABC$ dodiruje stranicu BC i produženja stranica CA i AB, dokazati da se prave AP_a, BQ_a, CR_a seku u jednoj tački.

327. Ako su P_a, Q_b, R_c tačke u kojima spolja upisani krugovi trougla $\triangle ABC$ dodiruju stranice BC, CA, AB dokazati da se prave AP_a, BQ_b, CR_c seku u jednoj tački.

328. Neka je $\triangle ABC$ proizvoljan trougao i k krug koji seče prave BC, CA, AB u tačkama P i P', Q i Q', R i R'. Ako se pri tome prave AP, BQ, CR seku u jednoj tački, dokazati da se i prave AP', BQ', CR' takođe seku u jednoj tački.

329. Dokazati da se prave od kojih svaka sadrži po jedno teme trougla i razlaže obim tog trougla na dva jednaka dela, seku u jednoj tački.

330. Ako je P središte stranice BC trougla ABC i ako su Q i R tačke u kojima neka prava uporedna sa stranicom BC seče prave AC i AB, dokazati da se prave AP, BQ, CR seku u jednoj tački.

331. Neka je $\triangle ABC$ proizvoljan trougao i neka su P, Q, R tačke pravih BC, CA, AB takve da se prave AP, BQ, CR seku u jednoj tački. Ako su A', B', C' središta duži AP, BQ, CR, dokazati da se prave $A'P'$, $B'Q'$, $C'R'$ seku u jednoj tački.

332. Neka su A', B', C' središta stranica BC, CA, AB trougla ABC. P, Q, R tačke pravih BC, CA, AB i P', Q', R' tačke simetrične sa P, Q, R u odnosu na na A', B', C'. Ako se pri tome prave AP, BQ, CR seku u jednoj tački, dokazati da se i prave AP', BQ', CR' takođe seku u jednoj tački.

333. Neka su AA', BB', CC' simetrale unutrašnjih uglova trougla ABC, a P i P', Q i Q', R i R' tačke pravih BC, CA, AB takve da su prave AP', BQ', CR' simetrične sa pravama AP, BQ, CR u odnosu na prave AA', BB', CC'. Ako se pri tome prave AP, BQ, CR seku u jednoj tački S, dokazati da se i prave AP', BQ', CR' takođe seku u jednoj tački S'. Dokazati zatim da upravne projekcije tačaka S i S' na pravama BC, CA, AB pripadaju jednom krugu.

334. Neka je $A_1 \ldots A_{2n-1}$ ravan mnogougao s neparnim brojem stranica i S proizvoljna tačka njegove ravni. Ako prave $SA_1, \ldots, SA_{2n-1}$ određene tačkom S i temenima mnogougla seku prave određene naspramnim stranicama u tačkama $P_n, P_{n+1}, \ldots, P_{2n-1}, \ldots, P_{n-1}$, dokazati da je

$$\frac{A_1P_1}{P_1A_2} \cdot \frac{A_2P_2}{P_2A_3} \cdot \frac{A_{2n-1}P_{2n-1}}{P_{2n-1}A_1} = 1.$$

4.5. Menelajeva teorema i njena primena

335. (*Menelaus*) Dokazati da tačke P, Q, R pravih koje su određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC pripadaju jednoj pravoj ako i samo ako je

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1.$$

336. Dokazati da tačke P, Q, R u kojima simetrale spoljašnjeg ugla A i unutrašnjih uglova B i C seku prave određene naspramnim stranicama trougla ABC, pripadaju jednoj pravoj.

337. Dokazati da tačke P, Q, R u kojima simetrale spoljašnjih uglova A, B, C seku prave određene naspramnim stranicama trougla ABC, pripadaju jednoj pravoj.

338. Dokazati da tačke P, Q, R u kojima dirke kruga opisanog oko trougla ABC u njegovim temenima seku prave određene naspramnim stranicama, pripadaju jednoj pravoj, *Menelajevoj pravoj* trougla ABC.

339. Dokazati da su kod trougla središte jedne visine, dodirna tačka odgovarajuće stranice sa spolja upisanim krugom i središte upisanog kruga tri kolinearne tačke.

340. Dokazati da su kod trougla središte jedne visine, dodirna tačka odgovarajuće stranice sa upisanim krugom i središte spolja upisanog kruga koji odgovara toj stranici tri kolinearne tačke.

341. Dokazati da su kod trougla središte visine iz jednog temena, središte spolja upisanog kruga koji odgovara drugom temenu i dodirna tačka spolja upisanog kruga koji odgovara trećem temenu, sa pravom koja sadrži stranicu odgovarajuću s pomenutom visinom, tri kolinearne tačke.

342. Ako je O središte opisanog kruga trougla ABC, M tačka simetrična s ortocentrom H tog trougla u odnosu na teme A i N tačka simetrična s temenom

A u odnosu na središte D stranice BC, dokazati da tačke O, M, N pripadaju jednoj pravoj.

343. Ako su P, Q, R tačke stranica BC, CA, AB trougla ABC takve da je $BP : PC = CQ : QA = AR : RB$ i P' tačka u kojoj se seku prave BC i PQ, dokazati da je

$$BP' : CP' = CP^2 : BP^2.$$

344. Ako su A', B', C' središta stranica BC, CA, CB, M presek duži AA' i BC', a N presek pravih AB i CM, dokazati da je

$$AB = 3 \cdot AN.$$

345. Ako su M i N tačke na stranicama AB i AC trougla ABC takve da je $AM = AN$ a D' tačka u kojoj težišna linija AD trougla seče duž MN, dokazati da je

$$MD' : D'N = AC : AB.$$

346. Ako su P, Q, R tačke u kojima neka prava seče prave određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC, dokazati da njima simetrične tačke P', Q', R' u odnosu na središta stranica BC, CA, AB pripadaju jednoj pravoj.

347. Ako dve prave s i s' seku prave određene stranicama BC, CA, CB trougla ABC u tačkama P, Q, R i P', Q', R', dokazati da presečne tačke X, Y, Z pravih BC i QR', CA i RP', AB i PQ' pripadaju jednoj pravoj.

348. Ako je O proizvoljna tačka ravni trougla ABC, dokazati da tačke P, Q, R u kojima upravne u tački O na dužima OA, OB, OC seku respektivno prave BC, CA, AB pripadaju jednoj pravoj.

349. Ako su AD i AE težišna linija i simetrala ugla A trougla ABC, a P, Q, R upravne projekcije proizvoljne tačke M prave AE na pravama BC, CA, AB, dokazati da se prave AD, MP, QR seku u jednoj tački.

350. Ako je $ABCD$ proizvoljan četvorougao, E tačka u kojoj se seku prave AB i CD, F tačka u kojoj se seku prave BC i DA, dokazati da središta P, Q, R duži AC, BD, EF pripadaju jednoj pravoj.

351. Ako je $ABCD$ ravan četvorougao, E presečna tačka pravih AB i CD, F presečna tačka pravih BC i AD, A', B', C', D' tačke u kojima četiri uporedne prave kroz temena A, B, C, D seku pravu EF, dokazati da je

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{CC'} = \frac{1}{BB'} + \frac{1}{DD'}.$$

352. Ako obeležimo sa A, B, C, D četiri razne tačke neke prave p takve da je $AB = BC = CD$, sa O proizvoljnu tačku izvan prave p i sa A', B', C', D' tačke u kojima neka prava p' koja ne sadrži tačku O seče prave OA, OB, OC, OD, dokazati da je

$$\frac{AA'}{A'O} + \frac{DD'}{D'O} = \frac{BB'}{B'O} + \frac{CC'}{C'O}.$$

353. Ako su $P_1, \ldots, P_n$ tačke u kojima neka prava p seče prave određene stranicama $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$ n-tougla $A_1 \ldots A_n$, dokazati da je

$$\frac{A_1P_1}{P_1A_2} \cdot \frac{A_2P_2}{P_2A_3} \cdots \frac{A_nP_n}{P_nA_1} = (-1)^n.$$

4.6. Dezargova teorema i njena primena

354. (G. Dezargues) Neka su ABC i $A'B'C'$ dva trougla koji pripadaju jednoj ravni i kojima se prave određene odgovarajućim stranicama BC i $B'C'$, CA i $C'A'$, AB i $A'B'$ seku u tačkama P, Q, R. Ako se pri tome prave AA', BB', CC' seku u jednoj tački, dokazati da tačke P, Q, R pripadaju jednoj pravoj, i obratno, ako tačke P, Q, R pripadaju jednoj pravoj, dokazati da se prave AA', BB', CC' seku u jednoj tački.

355. Ako su tačke P, Q, R na pravama određenim stranicama BC, CA, AB trougla ABC takve da se prave AP, BQ, CR seku u jednoj tački O, dokazati da presečne tačke P', Q', R' pravih BC i QR, CA i RP, AB i PK pripadaju jednoj pravoj.

356. Ako su AA', BB', CC' visine trougla ABC, dokazati da tačke P, Q, R u kojima se seku prave BC i $B'C'$, CA i $C'A'$, AB i $A'B'$ pripadaju jednoj pravoj.

357. Ako su P, Q, R tačke u kojima upisani krug dodiruje stranice BC, CA, AB trougla ABC, dokazati da se tačke X, Y, Z u kojima se seku prave QR i BC, RP i CA, PQ i AB nalaze na jednoj pravoj

358. Ako su P_a, Q_b, R_c tačke u kojima spolja upisani krugovi dodiruju stranice BC, CA, AB trougla ABC, dokazati da se tačke X, Y, Z u kojima se seku Q_bR_c i BC, R_cP_a i CA, P_aQ_b i AB nalaze na jednoj pravoj.

359. Dokazati da se ose perspektiva triju trouglova, perspektivnih u odnosu na istu tačku, seku u jednoj tački.

4.7. Paskalova teorema i njena primena

360. (B. Pascal) Ako je $A_1, \ldots, A_6$ tetivan šestougao, dokazati da tačke P, Q, R u kojima se seku prave određene naspramnim stranicama A_1A_2 i A_4A_5, A_2A_3 i A_5A_6, A_3A_4 i A_6A_1 pripadaju jednoj pravoj.

361. Neka se tri tetive AA', BB', CC' istog kruga k seku u jednoj tački S. Ako obeležimo sa X proizvoljnu tačku kruga k i sa P, Q, R tačke u kojima prave XA', XB', XC' seku respektivno prave BC, CA, AB, dokazati da tačke P, Q, R, S pripadaju jednoj pravoj.

362. Ako obeležimo sa D proizvoljnu tačku trougla ABC, sa P i Q podnožja upravnih iz tačke D na pravama AB i AC, a sa R i S podnožja upravnih iz tačke A na pravama DB i DC, dokazati da su prave BC, PS, QR konkurentne.

363. Ako su P, Q, R podnožja upravnih iz proizvoljne tačke O na pravama koje su određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC, a P', Q', R' tačke u kojima krug l određen tačkama P, Q, R seče prave BC, CA, AB, dokazati da presečne tačke X, Y, Z pravih QR' i $Q'R$, RP' i $R'P$, PQ' i $P'Q$ pripadaju pravoj koja je određena tačkom O i središtem S kruga l.

364. Ako su P, Q, R tačke u kojima neka prava s kroz izvesnu tačku O seče prave određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC, a P', Q', R' tačke u kojima prave OA, OB, OC seku opisni krug oko tog trougla, dokazati da se prave PP', QQ', RR' seku u jednoj tački koja se nalazi na opisanom krugu oko tog trougla.

4.8. Brijanšonova teorema i njena primena

365. (M. Brianchon) Dokazati da se prave određene naspramnim temenima tangentnog šestougla seku u jednoj tački, *Brijanšonovoj tački* tog šestougla.

366. Ako su P, Q, R tačke u kojima stranice BC, CA, AB dodiruju upisani krug trougla ABC, dokazati da se prave AP, BQ, CR seku u jednoj tački.

367. Ako su P, Q, R, S tačke u kojima prave određene stranicama AB, BC, CD, DA tangentnog četvorougla $ABCD$ dodiruju upisani krug k, dokazati da se prave AC, BD, PR, QS seku u jednoj tački.

368. Ako su P, Q, R tačke u kojima upisani krug k dodiruje stranice BC, CA, AB trougla ABC, zatim A', B', C' tačke pravih BC, CA, AB takve da se prave AA', BB', CC' seku u jednoj tački O, a P', Q', R' tačke u kojima se seku druge dirke kruga k iz tačaka B' i C', C' i A', A' i B', dokazati da se prave PP', QQ', RR' seku u tački O.

4.9. Van Obelova teorema i njena primena

369. (Van Aubel) Ako su A', B', C' tačke pravih koje su određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC takve da se prave AA', BB', CC' seku u jednoj tački O, dokazati da je

$$\frac{AO}{OA} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C}.$$

370. Ako je T presek težišnih linija AA', BB', CC' trougla ABC, dokazati da je

$$AT : TA' = 2 : 1.$$

371. Ako je S središte upisanog kruga trougla ABC, a E tačka u kojoj prava AS seče stranicu BC, dokazati da je

$$AS : SE = (b + c) : a.$$

372. Ako je G Žergonova tačka trougla ABC, a P tačka u kojoj upisani krug dodiruje stranicu BC, dokazati da je

$$\frac{AG}{GP} = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}.$$

373. Ako je S_c središte spolja upisanog kruga trougla ABC kome je $AC > AB$ i F tačka u kojoj prava AS_c seče pravu BC, dokazati da je

$$AS_c : S_cF = (b - c) : a.$$

374. Ako je r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga trougla ABC, zatim P, Q, R tačke u kojima upisani krug dodiruje stranice BC, CA, AB i G Žergonova tačka trougla ABC, dokazati da je

$$\frac{AG}{GP} \cdot \frac{BG}{GQ} \cdot \frac{CQ}{GR} = \frac{4r}{\varrho}.$$

375. Ako je N Nagelova tačka trougla ABC i P_a u kojoj spolja upisani krug dodiruje stranicu BC. Dokazati da je

$$\frac{AN}{NP_a} = \frac{a}{p-a}.$$

376. Ako je r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga trougla ABC, zatim P_a, Q_b, R_c tačke u kojima spolja upisani krugovi dodiruju stranice BC, CA, AB i N Nagelova tačka tog trougla, dokazati da je

$$\frac{AN}{NP_a} \cdot \frac{BN}{NQ_b} \cdot \frac{CN}{NR_c} = \frac{4 \cdot r}{\varrho}.$$

377. Ako su M_1 i N_1 tačke stranica AB i AC takve da je $BM_1 : M_1A = AN_1 : N_1C = k_1$, a M_2 i N_2 tačke tih istih stranica takve da je $BM_2 : M_2A = AN_2 : N_2C = k_2$, dokazati da se prave M_1N_1 i M_2N_2 seku u nekoj tački S pri čemu je $M_1S : SN_1 = k_2$ i $M_2S : SN_2 = k_1$.

4.10. Ptolemejeva teorema

378. (K. Ptolemej) Ako je $ABCD$ konveksan i tetivan četvorougao, dokazati da je proizvod njegovih dijagonala jednak zbiru proizvoda njegovih naspramnih stranica, tj. da je

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

379. Primenom Ptolemejeve teoreme dokazati Pitagorin stav.

380. Ako je k krug opisan oko kvadrata $ABCD$, a M proizvoljna tačka luka CD kruga k na kome nisu temena A i B, dokazati da je

$$MA + MC = MB \cdot \sqrt{2} \quad \text{i} \quad MA - MC = MD \cdot \sqrt{2}.$$

381. Ako je a stranica i d dijagonala pravilnog petougla $A_1 \dots A_5$, dokazati da je

$$d = \frac{a}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}).$$

382. Ako je $A_1 \dots A_7$ pravilan sedmougao, dokazati da je

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}.$$

383. Ako je ABC jednakostraničan trougao i P tačka kruga k opisanog oko tog trougla, dokazati da je duž AP jednaka zbiru ili razlici duži BP i CP, prema tome da li tačka P pripada luku BC krugu k na kome nije A ili je na kružnom luku BAC.

384. Ako je $ABCD$ konveksan i tetivan četvorougao, a E tačka u kojoj prava kroz C uporedna sa dijagonalom BD seče opisani krug, dokazati da je

$$AE \cdot BD = AB \cdot BC + CD \cdot DA.$$

385. Ako je $ABCD$ paralelogram i E tačka u kojoj krug opisan oko trougla ABC seče polupravu AD, dokazati da je

$$AD \cdot AE = AC^2 - AB^2.$$

386. Ako su A', B', C', D' tačke u kojima proizvoljan krug kroz teme A paralelograma $ABCD$ seče poluprave AB, AC, AD, dokazati da je

$$AC \cdot AC' = AB \cdot AB' + AD \cdot AD'.$$

387. Ako su a, b, c, d duži jednake stranicama AB, BC, CD, DA a x i y duži jednake dijagonalama AC i BD konveksnog i tetivnog četvorougla $ABCD$, dokazati da je

$$\frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

388. Ako su a, b, c, d duži jednake stranicama AB, BC, CD, DA a x i y duži jednake dijagonalama AC i BD konveksnog i tetivnog četvorougla $ABCD$, dokazati da je

$$x^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}, \quad \text{i} \quad y^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

389. Ako je AB prečnik i r poluprečnik kruga k, a C i D tačke na raznim lucima AB tog trougla, dokazati da je

$$CD = \frac{1}{2r}(AC\sqrt{4r^2 - AD^2} + AD\sqrt{4r^2 - AC^2}).$$

390. Ako je AB prečnik kruga k, a C i D tačke na istom luku AB toga kruga takve da je četvorougao $ABCD$ konveksan, dokazati da je

$$CD = \frac{1}{2r}(AC\sqrt{4r^2 - AD^2} + AD\sqrt{4r^2 - AC^2}).$$

391. Ako obeležimo sa S presečnu tačku dijagonala četvorougla $ABCD$ upisanog u krugu poluprečnika r, a sa r_1, r_2, r_3, r_4 poluprečnike krugova opisanih oko trouglova SAB, SBC, SCD, SDA, dokazati da je

$$r^2 = \frac{(r_1r_2 + r_3r_4)(r_1r_4 + r_2r_3)}{r_1r_3 + r_2r_4}.$$

392. Ako je $A_1 \dots A_6$ konveksan šestougao upisan u krug k i ako njegove uzastopne stranice $A_1A_2, \dots, A_6, A_1$ obeležimo sa $a_1, \dots, a_6$ dijagonale A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 sa d_1, d_2, d_3, dokazati da je

$$d_1d_2d_3 = a_1a_3a_5 + a_2a_4a_6 + a_1a_4d_3 + a_2a_5d_1 + a_3a_6d_2.$$

393. Ako su $d_1, \dots, d_{2n+1}$ rastojanja temena pravilnog poligona $A_1 \dots A_{2n+1}$ s neparnim brojem stranica od proizvoljne tačke P koja se nalazi na manjem luku A_1A_{2n+1} kruga opisanog oko tog poligona, dokazati da je

$$d_1 + d_3 + d_5 + \ldots + d_{2n+1} = d_2 + d_4 + d_6 + \ldots + d_{2n}.$$

4.11. Ojlerova teorema iz geometrije četvorougla i njena primena

394. (L. Euler) Ako su P i Q središta dijagonala AC i BD četvorougla $ABCD$, dokazati da je

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2.$$

395. Dokazati da je zbir kvadrata stranica paralelograma $ABCD$ jednak zbiru kvadrata njegovih dijagonala, tj. da je

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

396. Ako su kod četvorougla $ABCD$ tačke K i L središta naspramnih stranica AB i CD, a tačke M i N središta naspramnih stranica BC i DA, dokazati da je

$$AC^2 + BD^2 = 2(KL^2 + MN^2).$$

397. Ako su kod četvorougla $ABCD$ dijagonale AC i BD među sobom upravne, dokazati da su zbirovi kvadrata naspramnih stranica tog četvorougla među sobom jednaki, tj. da je

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

398. Ako su kod četvorougla $ABCD$ zbirovi kvadrata naspramnih stranica jednaki, dokazati da su prave određene dijagonalama AC i BD među sobom upravne.

5. HARMONIJSKI SPREGNUTI ELEMENTI. DVORAZMERA

5.1. Harmonijske tačke i harmonijske prave

Definicija 5.1. Ako su A, B, C, D četiri razne kolinearne tačke takve da je $AC : CB = AD : DB$, tada kažemo da su tačke C i D *harmonijski spregnute* sa tačkama A i B ili da su tačke A, B, C, D *harmonijski spregnute*.

Činjenicu da su A, B, C, D četiri harmonijske tačke simbolički obeležavamo sa $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

Definicija 5.2. Za četiri konkurentne ili paralelne prave a, b, c, d kažemo da su *harmonijski spregnute* ako postoji prava s koja ih seče redom u harmonijskim tačkama A, B, C, D.

Činjenicu da su a, b, c, d četiri harmonijske prave simbolički obeležavamo sa $\mathcal{H}(a, b; c, d)$.

399. Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke, dokazati da postoji jedna i samo jedna tačka D takva da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

400. Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$, dokazati da je $\mathcal{H}(C, D; A, B)$.

401. Ako su A, B, C, D četiri razne tačke neke prave p, O tačka izvan prave p a E i F tačke u kojima prava kroz B uporedna sa OA seče OC i OD, dokazati da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ ako i samo ako je tačka B središte duži EF.

402. Ako su A, B, C, D četiri razne kolinearne tačke i ako je tačka O središte duži AB, dokazati da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ ako i samo ako je

$$OB^2 = OC \cdot OD.$$

403. Dokazati da su četiri razne kolinearne tačke A, B, C, D harmonijski spregnute ako i samo ako je

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}.$$

404. Ako su A, B, C, D razne kolinearne tačke, dokazati da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ ako i samo ako je

$$\frac{OC}{AC} + \frac{OD}{AD} = \frac{2}{AB}.$$

405. Ako su A, B, C, D razne kolinearne tačke, dokazati da je

$$(OA + OB)(OC + OD) = 2(OA \cdot OB + OC \cdot OD).$$

406. Ako su A, B, C, D kolinearne tačke takve da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$, dokazati da je

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{AD} + \frac{1}{BD} = 0.$$

407. Ako su A, B, C, D kolinearne tačke takve da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ i ako je O središne duži AB, dokazati da je

$$\frac{1}{AC \cdot BC} + \frac{1}{AD \cdot BD} = \frac{1}{AO \cdot BO}.$$

408. Ako su A, B, C, D kolinearne tačke takve da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ i ako je tačka O središte duži AB, dokazati da je

$$AD \cdot BD = CD \cdot OD.$$

409. Ako su A, B, C, D kolinearne tačke takve da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ i ako je tačka O središte duži AB, dokazati da je

$$OC^2 + OD^2 = CD^2 + 2OB^2.$$

410. Ako su A, B, C, D kolinearne tačke takve da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ a tačke O i O' središta duži AB i CD, dokazati da je

$$OB^2 + OD^2 = OO'^2.$$

411. Ako su A, B, C, A', B', C' tačke jedne prave takve da je $\mathcal{H}(A,A';B,C)$, $\mathcal{H}(A,A';C,A)$, $\mathcal{H}(C,C';A,B)$, dokazati da je

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = 0.$$

412. Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ i ako je pri tome $AC : CB = m : n$, dakle i $AD : DB = m : n$, dokazati da je

$$\frac{DB}{BC} = \frac{m+n}{m-n} \quad \text{i} \quad \frac{DA}{AC} = \frac{m+n}{m-n}.$$

413. Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ i $AC : CB = m : n$, i ako je tačka N središte duži CD, dokazati da je

$$AN : NB = m^2 : n^2.$$

414. Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ i $AC : CB = m : n$, a tačke M i N središta duži AB i CD, dokazati da je

$$\frac{MN}{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}.$$

415. Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$, a M i N središta duži AB i CD, dokazati da je

$$AB^2 + CD^2 = 4MN^2.$$

416. Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ i pri tome $AC : CB = m : n$, dokazati da je

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m^2-n^2}{2mn}.$$

417. Ako obeležimo sa E i F tačke u kojima simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla A trougla ABC seku pravu BC, i sa S, S_a, S_b, S_c središta upisanih krugova tog trougla, dokazati da je

(a)

$$\mathcal{H}(B, C; E, F)$$

;

(b)

$$\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$$

;

(v)

$$\mathcal{H}(A, P; S_b, S_c)$$

.

418. Ako je A_1 središte stranice BC, D podnožje visine iz temena A, a E i F tačke u kojima simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla A trougla ABC seku pravu BC, dokazati da je

(a)

$$4A_1D \cdot A_1E = (b-c)^2$$

;

(b)

$$4A_1D \cdot A_1F = (b+c)^2$$

;

(v)

$$A_1D \cdot EF = bc$$

.

419. Ako su P, Q, R tačke u kojima upisani krug dodiruje stranice BC, CA, AB trougla ABC, a S tačka u kojoj prava QR seče pravu BC, dokazati da je $\mathcal{H}(B, C; P, S)$.

420. Ako su P_a, Q_a, R_a tačke u kojima spolja upisani krug koji odgovara temenu A trougla ABC dodiruje prave BC, CA, AB i S tačka u kojoj prava Q_aR_a seče pravu BC, dokazati da je $\mathcal{H}(B, C; P_a, S)$.

421. Ako su P_a, Q_b, R_c tačke u kojima spolja upisani krugovi trougla ABC dodiruju stranice BC, CA, AB i ako je S tačka u kojoj prava Q_bR_c seče pravu BC, dokazati da je $\mathcal{H}(B, C; P_a, S)$.

422. Ako su Q_a i R_a tačke u kojima spolja upisani krug koji odgovara stranici BC trougla ABC dodiruje prave AC i AB, a Q_b i R_c tačke u kojima spolja upisani krugovi tog trougla dodiruju stranice AC i AB, dokazati da su prave BC, Q_aR_a, Q_bR_c konkurentne.

423. Ako su P, Q, R tačke u kojima konkurentne prave AO, BO, CO seku prave određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC i S tačka u kojoj se seku prave BC i QR, dokazati da je $\mathcal{H}(B, C; P, S)$.

424. Neka su P i P', Q i Q', R i R' tačke pravih koje su određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC, takve da je $\mathcal{H}(B, C; P, P')$, $\mathcal{H}(C, A; Q, Q')$, $\mathcal{H}(A, B; R, R')$. Ako su pri tome prave AP, BQ, CR konkurentne, dokazati da su tačke P', Q', R' kolinearne; i obrnuto, ako su tačke P', Q', R' kolinearne, dokazati da su prave AP, BQ, CR konkurentne.

425. Ako je $ABCD$ proizvoljan četvorougao, P tačka u kojoj se seku prave AB i CD, Q tačka u kojoj se seku prave BC i AD, a R i S tačke u kojima prave AC i BD seku pravu PQ, dokazati da je $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.

426. Ako neka prava p' seče četiri harmonijske prave a, b, c, d u raznim tačkama A', B', C', D', dokazati da je $\mathcal{H}(A', B'; C', D')$.

427. Ako su prave c i d simetrale uglova koje određuju prave a i b, dokazati da je $\mathcal{H}(a, b; c, d)$.

428. Ako obeležimo sa D podnožje visine iz temena A trougla ABC, sa E i F tačke u kojima simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla A seku pravu BC i O središte kruga opisanog oko tog trougla, dokazati da je $\mathcal{H}(AO, AD; AE, AF)$.

429. Ako su A', B', C' tačke u kojima simetrale unutrašnjih uglova A, B, C seku naspramne stranice trougla ABC, a B'', C'' tačke u kojima se seku prave $A'C'$ i BB', $A'B'$ i CC', dokazati da je prava AA' simetrala ugla $B''AC''$.

430. Ako je H tačka u kojoj se seku prave određene visinama AA', BB', CC' trougla ABC, D središte stranice BC i E tačka u kojoj se seku prave BB' i CC', dokazati da je $AD \perp HE$.

431. Ako je D središte stranice BC, E podnožje visine iz temena A i F tačka u kojoj krug opisan oko trougla ABC seče krug u kome je dijametar AD, dokazati da je $\mathcal{H}(AB, AC; AE, AF)$.

432. Ako su M i N tačke u kojima prava kroz presek O dijagonala AC i BD uporedna sa osnovicom AB seče krake AD i BC trapeza $ABCD$, dokazati da je

$$\frac{1}{MN} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}\right).$$

433. Ako je $ABCD$ pravougaonik i ako su P, Q tačke prave AC takve da je $\mathcal{H}(A, C; P, Q)$, a R, S tačke prave BD takve da je $\mathcal{H}(B, D; R, S)$, dokazati da tačke P, Q, R, S pripadaju jednom krugu.

434. Ako obeležimo sa P i Q središta lukova AB istog kruga k, sa R tačku prave koja dodiruje krug k u tački Q, sa D bilo koju od tačaka u kojima krug l opisan oko trougla PQR seče pravu AB i sa C tačku u kojoj prava kroz tačku Q paralelna sa pravom RD seče pravu AB, dokazati da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

435. Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke, k_1 i k_2 krugovi od kojih prvi sadrži tačke A i B, a drugi tačke C i D, zatim P i R presečne tačke tih krugova, S presečna tačka pravih PR i AB, T dodirna tačka jedne od dirki kroz S na k_1 ili k_2, a X i Y tačke u kojima krug $l(S, ST)$ seče pravu AB, dokazati da je

$$\mathcal{H}(A, B; X, Y) \quad \text{i} \quad \mathcal{H}(C, D; X, Y).$$

5.2. Dvorazmera četiri tačke i dvorazmera četiri prave

Definicija 5.3. *Dvorazmerom četiri kolinearne tačke A, B, C, D* nazivamo količnik dveju razmera $AC : DB$ i $AD : DB$. Ako tu dvorazmeru simbolički obeležimo sa $\mathcal{R}(A, B; C, D)$, biće

$$\mathcal{R}(A, B; C, D) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

Definicija 5.3. *Dvorazmerom četiri konkurentne ili paralelne prave* nazivamo dvorazmeru tačaka A, B, C, D u kojima neka prava s seče prave a, b, c, d. Ako dvorazmeru četiri prave a, b, c, d obeležimo sa $\mathcal{R}(a,b;c,d)$, biće

$$\mathcal{R}(a,b;c,d) = \mathcal{R}(A,B;C,D).$$

436. Ako su A, B, C tri tačke orijentisane prave p i k realan broj, dokazati da je tačka M na pravoj p za koju je $\mathcal{R}(A,B;C,M) = k$ jednoznačno određena.

437. Ako su A, B, C tri tačke neke prave p, A' i B' tačke neke druge prave kroz C takve da je $A'C : B'C = k$, S presečna tačka pravih AA' i BB' i D tačka u kojoj prava kroz S uporedna sa $A'B'$ seče p, dokazati da je $\mathcal{R}(A,B;C,D) = k$.

438. Ako su A, B, C, D četiri tačke jedne prave, dokazati da je

$$\mathcal{R}(A,B;C,D) = (\frac{1}{AB} - \frac{1}{AD}) : (\frac{1}{AB} - \frac{1}{AD}).$$

439. Ako su O, A, B, C, D tačke orijentisane prave p, dokazati da je

$$\mathcal{R}(A,B;C,D) = \frac{OA - OC}{OB - OC} : \frac{OA - OD}{OB - OD}.$$

440. Ako su $A, A', B, B', C, C', D, D'$ i O tačke neke prave takve da je $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = OD \cdot OD' = k$, dokazati da je

$$\mathcal{R}(A,B;C,D) = \mathcal{R}(A',B';C',D').$$

441. Ako su $A, B, C, D, A', B', C', D', O$ kolinearne tačke takve da je $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC'$ dokazati da je

$$\mathcal{R}(A,B;C,C') = \mathcal{R}(A',B';C',C).$$

442. Ako su $A, B, C, D, A', B', C', D', M, N$ kolinearne tačke takve da je

$$\mathcal{R}(A,A';M,N) = \mathcal{R}(B,B';M,N) = \mathcal{R}(C,C';M,N) = \mathcal{R}(D,D';M',N'),$$

dokazati da je

$$\mathcal{R}(A,B;C,D) = \mathcal{R}(A',B';C',D').$$

443. Ako su A, B, C, D, C', D' kolinearne tačke takve da je

$$\mathcal{R}(A,B;C,D) = \mathcal{R}(A,B;C',D'),$$

dokazati da je

$$\mathcal{R}(A,B;C,C') = \mathcal{R}(A,B;D,D').$$

444. Ako su A, B, X, Y, Z tačke jedne prave, dokazati da je

$$\mathcal{R}(A,B;X,Y) \cdot \mathcal{R}(A,B;Y,Z) \cdot \mathcal{R}(A,B;Z,Y) = 1.$$

445. Ako su A, B, C, D četiri razne kolinearne tačke, dokazati da je

$$\mathcal{R}(D,A;B,C) \cdot \mathcal{R}(D,B;C,A) \cdot \mathcal{R}(D,C;A,B) = -1.$$

446. Ako su A, B, C, D, E, F razne kolinearne tačke takve da je

$$\mathcal{R}(A,B;C,F) = \mathcal{R}(C,D;B,F) = \mathcal{R}(E,B;D,F) = -1,$$

dokazati da je

$$\mathcal{R}(A,E;B,F) = -1.$$

447. Ako su A, B, C, D četiri razne kolinearne tačke dokazati da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ ako i samo ako je

$$\mathcal{R}(A,B;C,D) = \mathcal{R}(A,B;D,C).$$

448. Ako su A, B, C, D, E proizvoljne tačke jedne prave, dokazati da je

$$\mathcal{R}(A,B;C,D) \cdot \mathcal{R}(A,B;D,E) = \mathcal{R}(A,B;C,E).$$

449. Ako su A, B, C, D četiri tačke orijentisane prave, dokazati da je

(a)

$$\mathcal{R}(A,B;C,D) \cdot \mathcal{R}(A,B;D,C) = 1;$$

(b)

$$\mathcal{R}(A,B;C,D) + \mathcal{R}(A,C;B,D) = 1.$$

450. Ako su A, B, C, D četiri tačke orijentisane prave, dokazati da je

$$\mathcal{R}(A,B;C,D) = \mathcal{R}(B,A;D,C) = \mathcal{R}(C,D;A,B) = \mathcal{R}(D,C;B,A).$$

451. Ako su A, B, C, D četiri tačke na orijentisanoj pravoj takve da je $\mathcal{R}(A,B;C,D) = k$, dokazati da je

(a)

$$\mathcal{R}(A,B;D,C) = \frac{1}{k}$$

(b)

$$\mathcal{R}(A,C;B,D) = 1-k$$

(c)

$$\mathcal{R}(A,C;D,B) = \frac{1}{1-k}$$

(d)

$$\mathcal{R}(A,D;C,B) = \frac{k}{k-1}$$

(e)

$$\mathcal{R}(A,D;B,C) = \frac{k-1}{k}$$

452. Ako su A, B, C, D, E tačke jedne prave takve da je $\mathcal{R}(A,B;C,D) = m$ i $\mathcal{R}(A,B;C,E) = n$ dokazati da je

(a)

$$\mathcal{R}(A,B;E,D) = \frac{m}{n}$$

(b)

$$\mathcal{R}(A,C;E,D) = \frac{m-1}{n-1}$$

(c)

$$\mathcal{R}(B,C;E,D) = \frac{n(m-1)}{m(n-1)}$$

(d)

$$\mathcal{R}(C,D;B,E) = \frac{m-n}{m(1-n)}$$

453. Ako dve prave p i p' seku četiri konkurentne prave a, b, c, d, prva u tačkama A, B, C, D a druga u tačkama A', B', C', D', dokazati da je

$$\mathcal{R}(A,B;C,D) = \mathcal{R}(A',B';C',D').$$

454. Neka su A, B, C, D tačke neke prave p i A', B', C', D' tačke neke druge prave p' takve da je $\mathcal{R}(A,B;C,D) = \mathcal{R}(A',B';C',D')$. Ako se pri tome prave AA', BB', CC' seku u nekoj tački S, dokazati da i prava DD' sadrži tačku S.

455. Ako su A, B, C tri tačke jedne prave s i A', B', C' tri tačke neke druge prave s', dokazati da tačke P, Q, R u kojima se seku prave BC' i $B'C$, CA' i $C'A$, AB' i $B'A$ pripadaju jednoj pravoj.

456. Ako su E i F proizvoljne tačke naspramnih stranica AB i CD četvorougla $ABCD$, dokazati da tačke P, Q, R u kojima se seku dijagonale četvorougla $ABCD$, $AEFD$, $EBCF$ pripadaju jednoj pravoj.

457. Ako prave određene dvema tetivama AB i CD nekog kruga k sadrže središte S tetive MN tog istog kruga, dokazati da su tačke X i Y u kojima prava MN seče prave AD i BC simetrične među sobom u odnosu na tačku S.

458. Ako su O i O' bilo koje dve tačke ravni trougla ABC, a P, Q, R tačke u kojima prave $O'A$, $O'B$, $O'C$ seku prave BC, CA, AB, dokazati da je

$$\mathcal{R}(B,C;P,P') \cdot \mathcal{R}(C,A;Q,Q') \cdot \mathcal{R}(A,B;R,R') = 1.$$

459. Neka su P, P'; Q, Q'; R, R' tačke pravih koje su određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC takve da je

$$\mathcal{R}(B,C;P,P') \cdot \mathcal{R}(C,A;Q,Q') \cdot \mathcal{R}(A,B;R,R') = 1.$$

460. Ako dve prave s i s' seku prave određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC u tačkama P, Q, R i P', Q', R', dokazati da je

$$\mathcal{R}(B,C;P,P') \cdot \mathcal{R}(C,A;Q,Q') \cdot \mathcal{R}(A,B;R,R') = 1.$$

461. Neka su P, P'; Q, Q'; R, R' tačke pravih koje su određene stranicama BC, CA, AB, trougla ABC takve da je

$$\mathcal{R}(B,C;P,P') \cdot \mathcal{R}(C,A;Q,Q') \cdot \mathcal{R}(A,B;R,R') = 1.$$

Ako pri tome tačke P, Q, R pripadaju nekoj pravoj s, dokazati da i tačke P', Q', R' takođe pripadaju nekoj pravoj s'.

462. Ako je S proizvoljna tačka u ravni trougla ABC i ako su P, Q, R tačke u kojima prave SA, SB, SC seku respektivno prave BC, CA, AB, a P', Q', R' tačke u kojima neka prava s seče prave BC, CA, AB, dokazati da je

$$\mathcal{R}(B,C;P,P') \cdot \mathcal{R}(C,A;Q,Q') \cdot \mathcal{R}(A,B;R,R') = -1.$$

463. Ako obeležimo sa S proizvoljnu tačku ravni trougla ABC, sa P, Q, R tačke u kojima prave SA, SB, SC seku respektivno prave BC, CA, AB i sa P', Q', R' tačke pravih BC, CA, AB takve da je

$$\mathcal{R}(B,C;P,P')\cdot\mathcal{R}(C,A;Q,Q')\cdot\mathcal{R}(A,B;R,R') = -1,$$

dokazati da tačke P', Q', R' pripadaju jednoj pravoj.

464. Ako su P, Q, R tačke u kojima neka prava s seče prave određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC, a P', Q', R' tačke pravih BC, CA, AB takve da je

$$\mathcal{R}(B,C;P,P')\cdot\mathcal{R}(C,A;Q,Q')\cdot\mathcal{R}(A,B;R,R') = -1.$$

465. Ako su uglovi koje određuju četiri prave a, b, c, d jednog pramena jednaki odgovarajućim uglovima koje određuju četiri prave a', b', c', d' drugog pramena, dokazati da je

$$\mathcal{R}(a,b;c,d) = \mathcal{R}(a',b';c',d').$$

466. Ako su A, B, C, D, S, S' proizvoljne tačke nekog kruga k, dokazati da je

$$\mathcal{R}(SA,SB;SC,SD) = \mathcal{R}(S'A,S'B;S'C,S'D).$$

467. Ako su S, S', A, B, C proizvoljne tačke nekog kruga k, a D tačka u ravni toga kruga takva da je

$$\mathcal{R}(SA,SB;SC,SD) = \mathcal{R}(S'A,S'B;S'C,S'D),$$

dokazati da i tačka D pripada krugu k.

6. GEOMETRIJA KRUGOVA

6.1. Ortogonalni krugovi

Definicija 6.1. *Uglom dveju krivih linija* l_1 i l_2 u njihovoj presečnoj tački P nazivamo oštar ili prav ugao određen tangentama u toj tački na tim linijama. Specijalno, ako je taj ugao prav kaže se da su linije l_1 i l_2 u tački P među sobom *upravne* ili *ortogonalne.*

468. Dokazati da su uglovi u presečnim tačkama dvaju krugova među sobom jednaki.

469. Ako su dva kruga k_1 i k_2 ortogonalna, dokazati da dirke u presečnim tačkama na bilo kojem od tih krugova sadrže središte drugog kruga.

470. Ako su O_1 i O_2 središta i r_1 i r_2 poluprečnici dvaju ortigonalnih krugova k_1 i k_2, dokazati da je $O_1O_2^2 = r_1^2 + r_2^2$.

471. Ako su O_1 i O_2 središta i r_1 i r_2 poluprečnici dvaju krugova k_1 i k_2 pri čemu je $O_1O_2 = r_1^2 + r_2^2$, dokazati da se krugovi k_1 i k_2 seku pod pravim uglom.

472. Dokazati da je proizvod poluprečnika r_1 i r_2 dvaju ortogonalnih krugova k_1 i k_2 jednak polovini proizvoda zajedničke tetive tih krugova i duži koja spaja središta O_1 i O_2 krugova k_1 i k_2.

473. Dva kruga k_1 i k_2 čiji su poluprečnici jednaki duži r seku se pod pravim uglovima. Ako je A jedna od presečnih tačka i s prava kroz A koja seče k_1 i k_2 u tačkama B i C, dokazati da je

$$AB^2 + AC^2 = 4r^2.$$

474. Ako su data dva ortogonalna ugla, dokazati da su svake dve dijametralno suprotne tačke C i D jednog od tih krugova harmonijski spregnute s tačkama A i B u kojima prava CD seče drugi krug.

475. Ako je par tačaka C, D harmonijski spregnut s parom tačaka A, B, dokazati da je krug kome je duž CD prečnik ortogonalan na svakom krugu koji sadrži tačke A, B.

476. Ako je središte O kruga l na krugu k i ako proizvoljna prava kroz tačku O seče krug k u tački A, pravu koja sdrži zajedničku tetivu krugova l i k u tački B i krug l u tačkama C i D, dokazati da su tačke C i D harmonijski spregnute s tačkama A i B.

477. Dokazati da je opisani krug oko trougla određenog sa pravama koje sadrže dijagonale potpunog četvorougla, ortogonalna na krugovima kojima su prečnici dijagonale tog četvorougla.

478. Ako je H ortocentar trougla ABC, dokazati da su krugovi k_1 i k_2 s prečnicima AH i BC ortogonalni.

479. Ako su S, S_a, S_b, S_c središta upisanih krugova trougla ABC, dokazati da su krugovi l_1 i l_2 s prečnicima SS_a i S_bS_c među sobom ortogonalni.

480. Ako je AB prečnik i O središte nekog kruga k, a P proizvoljna tačka tog kruga, dokazati da su krugovi OPA i OPB ortogonalni.

6.2. Pol i polara u odnosu na krug

481. Ako je P proizvoljna tačka koja se nalazi u krugu k ili izvan njega, dokazati da skup svih tačaka, od kojih svaka s tačkom P obrazuje par harmonijski spregnutih s parom koji se nalazi na krugu k i kolinearan je s tačkom P, pripada jednoj pravoj, polari tačke P u odnosu na krug k.

482. Ako polara tačke P u odnosu na krug k sadrži tačku Q, dokazati da i polara tačke Q u odnosu na krug k sadrži tačku P.

483. Ako se pol prave p nalazi na pravoj q, dokazati da se i pol prave q nalazi na pravoj p.

484. Dokazati da se polare svih tačaka jedne prave p u odnosu na neki krug k seku u jednoj tački P, polu prave p u odnosu na krug k.

485. Dokazati da se polovi svih pravih jednog pramena S definisanih u odnosu na neki krug k, nalaze na jednoj pravoj, polari s tačke S u odnosu na krug k.

486. Ako su a i b polare dveju tačaka A i B u odnosu na neki krug k, dokazati da je presečna tačka P pravih a i b pol prave AB u odnosu na krug k.

487. Dve prave kroz tačke S dodiruju neki krug k u tačkama A i B. Ako je P tačka u kojoj dirka kruga k u nekoj tački C seče pravu AB, dokazati da je prava SC polara tačke P u odnosu na krug k.

488. Dve prave kroz tačku P seku krug k, jedna seče u tačkama A i B, a druga u tačkama C i D. Dokazati da se presečne tačke Q i R pravih BC i AD, odnosno AC i BD nalaze na polari tačke P u odnosu na krug k.

489. Ako su A i A', B i B', C i C', D i D' tačke u kojima neki krug k seče četiri prave jednog pramena i ako su S i S' proizvoljne tačke kruga k, dokazati da je

$$\mathcal{R}(SA, SB; SC, SD) = \mathcal{R}(S'A', S'B'; S'C', S'D').$$

490. Dokazati da ortocentri svih trouglova, koji imaju jedno zajedničko teme A, a druga dva temena svakog od tih trouglova su dijametralno suprotne tačke nekog kruga k, pripadaju jednoj pravoj, polari tačke A u odnosu na krug k.

491. Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$, dokazati da su polare a, b, c, d tih tačaka u odnosu na neki krug k harmonijski spregnute prave, tj. da je $\mathcal{H}(a, b; c, d)$.

492. Ako su a, b, c, d četiri prave takve da je $\mathcal{H}(a, b; c, d)$, dokazati da su polovi A, B, C, D tih pravih u odnosu na neki krug k četiri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

493. Ako su P, Q, R tačke u kojima upisani krug k dodiruje stranice BC, CA, AB trougla ABC i S presečna tačka pravih BC i QR, dokazati da je $\mathcal{H}(B, C; P, S)$.

494. Ako su P_a, Q_a, R_a tačke u kojima spolja upisani krug k_a dodiruje stranicu BC i produženja stranica CA i AB trougla ABC, a S_a presečna tačka pravih BC i Q_aR_a, dokazati da je $\mathcal{H}(B, C; P_a, S_a)$.

495. Ako su P, Q, R tačke u kojima krug k upisan u trougao ABC dodiruje stranice BC, CA, AB, dokazati da tačke X, Y, Z u kojima prave kroz središte S kruga k uporedne s pravama QR, RP, PQ seku prave BC, CA, AB pripadaju jednoj pravoj.

496. (*Salmonova teorema*) Ako su a i b polare dveju tačaka A i B u odnosu na krug $k(O, r)$ a C i D podnožja upravnih iz tačaka A i B na pravama b i a, dokazati da je

$$OA : AC = OB : BD.$$

497. Ako su P i Q središta dveju tetiva AB i CD nekog kruga k i ako je prava AB simetrala ugla CPD, dokazati da je i prava CD simetrala ugla AQB.

6.3. Spregnute tačke i spregnute prave u odnosu na krug

Definicija 6.2. Za dve tačke P i Q kažemo da su *spregnute* ili *konjugovane u odnosu na neki krug* ako polara svake od tih tačaka sadrži drugu tačku.
Definicija 6.3. Za dve prave p i q kažemo da su *spregnute* ili *konjugovane u odnosu na neki krug* ako svaka od tih pravih sadrži pol druge prave.

498. Ako su A i B dve spregnute tačke u odnosu na krug k, dokazati da je krug l, kome je duž AB prečnik, ortogonalan na krugu k.

499. Ako su k i l dva ortogonalna kruga, dokazati da je svaki par dijametralno suprotnih tačaka jednog od tih krugova spregnut u odnosu na drugi krug.

500. Ako su tačke C i D spregnute u odnosu na krug k i ako prava CD seče krug k u tačkama A i B, dokazati da su tačke C i D harmonijski spregnute s tačkama A i B.

501. Ako su a i b dve dirke kruga k koje se seku u tački P, a c i d dve prave kroz P koje su spregnute u odnosu na krug k, dokazati da su prave c i d harmonijski spregnute s pravama a i b.

502. Ako je jedan par suprotnih temena pravougaonika spregnut u odnosu na neki krug, dokazati da je i drugi par spregnutih temena pravougaonika spregnut u odnosu na taj krug.

503. Ako je A, B par spregnutih tačaka u odnosu na krug k, nekolinearnih sa središtem O kruga k, dokazati da je pol P prave AB u odnosu na krug k ortocentar trougla OAB

504. Ako je A, B par spregnutih tačaka u odnosu na krug k, nekolinearnih sa središtem O toga kruga, dokazati da je jedan od uglova koje određuju polazne tačke A i B u odnosu na krug k jednak uglu AOB.

505. Ako su O i r središte i poluprečnik kruga k, a A i B dve spregnute tačke u odnosu na taj krug, dokazati da je

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2r^2.$$

506. Ako su A i B dve spregnute tačke u odnosu na krug k, obe izvan njega, dokazati da je zbir kvadrata tangenata iz tačaka A i B na krugu k jednak kvadratu duži AB.

507. Ako je P tačka u kojoj se seku polare tačaka A i B u odnosu na krug k sa središtem O, dokazati da je

$$AP^2 - BP^2 = OA^2 - OB^2.$$

508. Ako su k_1, k_2, k_3 tri kruga čija središta ne pripadaju jednoj pravoj, dokazati da je skup svih tačaka, čije se polare u odnosu na krugove k_1, k_2, k_3 seku u jednoj tački, krug ortogonalan na krugovima k_1, k_2, k_3.

6.4. Polarni i ortogonalni krugovi. Polarni krug trougla

Definicija 6.4. Neka su u ravni k data dva trougla ABC i $A'B'C'$. Ako su prave BC, CA, AB polare tačaka A', B', C' u odnosu na krug k, a prave $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ polare tačaka A, B, C u odnosu na isti krug k, tada kažemo da su trouglovi ABC i $A'B'C'$ *spregnuti*, ili *konjugovani*, ili *polarni u odnosu na krug* k, a za krug k kažemo da je *polaran u odnosu na spregnute trouglove* ABC i $A'B'C'$. Ako se trouglovi ABC i $A'B'C'$ poklapaju, tj. ako su prave BC, CA, AB polare tačaka A, B, C u odnosu na krug k, tada kažemo da je trougao ABC *spregnut sa samim sobom* ili da je *autopolaran u odnosu na krug* k. U tom slučaju krug k nazivamo *polarnim krugom trougla* ABC.

509. Ako su ABC i $A'B'C'$ dva trougla u ravni kruga k takva da su prave BC, CA, AB polare tačaka A', B', C' u odnosu na krug k, dokazati da su i prave $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ polare tačaka A, B, C u odnosu na krug k, tj. da su trouglovi ABC i $A'B'C'$ polarni u odnosu na krug k.

510. Ako su prave određene stranicama AB i AC trougla ABC polare tačaka C i B u odnosu na neki krug k, dokazati da je i prava BC polara tačke A, tj. da je trougao ABC ortogonalan u odnosu na krug k.

511. Dokazati da se ortocentar svakog autopolarnog trougla u odnosu na neki krug poklapa sa središtem tog kruga.

512. Dokazati da je svaki autopolaran trougao u odnosu na neki krug tupougli i da svaki tupougli trougao ima svoj polarni krug.

513. Dokazati da su krugovi, čiji su prečnici stranice trougla autopolarnog u odnosu na krug k, ortogonalni na krugu k.

514. Dokazati da je dijagonalni trougao svakog četvorotemenika upisanog u neki krug autopolaran u odnosu na taj krug.

515. Dokazati da je dijagonalni trougao svakog četvorostranika opisanog oko nekog kruga autopolaran u odnosu na taj krug.

516. Ako je PQR dijagonalni trougao četvorotemenika $ABCD$ upisanog u krug k sa središtem O, dokazati da je $OP \perp OR$, $OQ \perp PR$, $OR \perp PQ$.

517. Ako je XYZ dijagonalni trougao četvorostranika $abcd$ opisanog oko kruga k sa središtem O, dokazati da je $OX \perp YZ$, $OY \perp ZX$, $OZ \perp XY$.

518. Dokazati da su krugovi, čiji su dijametri stranice dijagonalnog trougla četvorotemenika upisanog u neki krug k, ortogonalni na krug k.

519. Dokazati da su krugovi, čiji su dijametri stranice dijagonalnog trougla četvorostranika opisanog oko nekog kruga k, ortogonalni na krug k.

520. Ako je M promenljiva tačka kruga k opisanog oko nekog trougla ABC i ako su P, Q, R tačke u kojima prave AM, BM, CM seku pravu BC, CA, AC, dokazati da prave određene odgovarajućim stranicama svih trouglova PQR obrazuju pramenove pravih.

521. Ako polarni krug trougla seče pravu određenu sa dva njegova temena, dokazati da su presečne tačke harmonijski spregnute s tim temenima.

6.5. Sličnost krugova

Definicija 6.5. Za dve tačke P i P' krugova k i k' koji su kolinearni sa spoljašnjim ili unutrašnjim središtem sličnosti tih dvaju krugova kažemo da su *homologne* ili *antihomologne u odnosu na to središte sličnosti* zavisno od toga da li su poluprečnici koji odgovaraju tim tačkama istosmerni ili ne.
Definicija 6.6. Za dve tetive PQ i $P'Q'$ krugova k i k' kažemo da su *homologne* ili *antihomologne u odnosu na središte S sličnosti tih dvaju krugova* zavisno od toga da li su tačke P' i Q' homologne ili antihomologne sa tačkama p i Q u odnosu na isto središte sličnosti S tih krugova.

522. Dve prave kroz središte S sličnosti krugova k i k' seku te krugove; jedna seče krug k u tačkama A i B, a krug k' u tačkama A' i B', druga seče krug k u tačkama C i D, a krug k' u tačkama C' i D'. Ako su pri tome A i A', B i B', D i D' homologne tačke krugova k i k', dokazati da je

$$AA' \cdot BB' = CC' \cdot DD'.$$

523. Ako su A, B' i C, D' dva para antihomolognih tačaka dvaju krugova k i k' definisani u odnosu na isto središte S sličnosti tih krugova, dokazati da je

$$SA \cdot SB' = SC \cdot SD'.$$

524. Ako su A, B' i C, D' dva para antihomolognih tačaka krugova k i K' određenih u odnosu na isto središte S sličnosti tih krugova, dokazati da tačke A, B', C, D' pripadaju jednom krugu ili jednoj pravoj.

525. Ako neki krug l dodiruje dva kruga k i k' u tačkama A i B, dokazati da su A i B antihomologne tačke krugova k i k'.

526. Dokazati da je skup svih tačaka kojima su rastojanja od središta O_1 i O_2 krugova k_1 i k_2 srazmerna poluprečnicima r_1 i r_2 tih krugova takođe krug kome je prečnik duž određena središtima S_1 i S_2 sličnosti tih krugova.

527. Ako je l krug sličnosti dvaju krugova k_1 i k_2, dokazati da je skup svih tačaka iz kojih parovi dirki na krugovima k_1 i k_2 zahvataju jednake uglove, onaj deo kruga l koji se nalazi izvan krugova k_1 i k_2.

528. Ako su k_1, k_2, k_3 tri kruga s nejednakim poluprečnicima i kolinearnim središtima, dokazati da se od šest središta sličnosti tih krugova uzetih u parovima po tri nalaze na četiri prave.

529. Dokazati da su ortocentar H i težište T trougla ABC središta sličnosti opisanog kruga l i Ojlerovog kruga l' trougla ABC.

530. Ako su S, S_a, S_b, S_c središta upisanih krugova trougla ABC, dokazati da je tačka S spoljašnje središte sličnosti krugova l' i l opisanih oko trouglova $S_aS_bS_c$ i ABC.

531. Ako je k upisani krug trougla ABC i k' krug kome je visina AA' prečnik, dokazati da je tačka u kojoj spolja upisani krug k_a dodiruje stranicu BC spoljašnje središte sličnosti krugova k i k'.

532. Ako je k_a spolja upisani krug trougla ABC, i k' krug kome je visina AA' prečnik, dokazati da je tačka u kojoj upisani krug k trougla ABC dodiruje stranicu BC unutrašnje središte sličnosti krugova k_a i k'.

533. Dokazati da je svaki krug koji sadrži središta O_1 i O_2 dvaju krugova k_1 i k_2 ortogonalan na krugu sličnosti krugova k_1 i k_2.

534. Dokazati da je bilo koje središte sličnosti dvaju krugova k_1 i k_2 jednako udaljeno od dirki na tim krugovima koje su konstruisane na njihovim presečnim tačkama.

535. Ako su O_1, O_2, O_3 središta triju krugova l_1, l_2, l_3 od kojih svaki dodiruje ostala dva, P_1, P_2, P_3 dodirne tačke krugova l_1 i l_2, l_3 i l_1, l_1 i l_2, a X i Y tačke u kojima prave P_1P_2 i P_1P_3 seku krug l_1, dokazati da tačke O_1, X, Y pripadaju jednoj pravoj koja je uporedna sa pravom O_2O_3.

6.6. Potencija tačke u odnosu na krug

Definicija 6.7. Neka je M proizvoljna tačka ravni nekog kruga k. Ako su P i Q promenljive tačke kruga k kolinearne sa tačkom M, tada je proizvod duži MP i MQ konstantan. Tu konstantu nazivamo *stepenom* ili *potencijom tačke M u odnosu na krug k*. Potencija tačke M u odnosu na krug k ima pozitivan znak ako je tačka M izvan kruga k, a negativan ako je tačka M u krugu k.

536. Ako je M tačka ravni kruga k, a A i B par tačaka kruga k kolinearnih sa M, dokazati da je proizvod duži MA i MB konstantan.

537. Ako je M tačka izvan kruga k, a T dodirna tačka jedne od dirki kruga k kroz tačku M, dokazati da je potencija tačke M u odnosu na krug k jednaka kvadratu duži MT.

538. Ako je O središte i r poluprečnik kruga k, a d duž koja spaja neku tačku M sa tačkom O i $p(M)$ potencija tačke M u odnosu na krug k, dokazati da je $p(M) = \pm(d^2 - r^2)$, prema tome da li je tačka M izvan ili u krugu k.

539. Dokazati da je potencija ortocentra H trougla $\triangle ABC$ u odnosu na krug l opisan oko tog trougla jednak četvorostrukoj potenciji iste tačke H u odnosu na Ojlerov krug k tog trougla.

540. Dokazati da je zbir potencija temena trougla ABC u odnosu na Ojlerov krug k tog trougla jednak četvrtini zbira kvadrata stranica tog trougla.

541. Ako su A_1, B_1, C_1 tačke simetrične sa ortocentrom H u odnosu na temena A, B, C trougla ABC, dokazati da je zbir potencija tačaka A_1, B_1, C_1 u odnosu na krug l trougla ABC jednak zbiru kvadrata stranica tog trougla.

542. Ako su a, b, c stranice trougla ABC, r poluprečnik opisanog kruga i p potencija ortocentra H u odnosu na opisani krug, dokazati da je

$$p = a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2.$$

543. Ako je T težište trougla ABC, dokazati da su potencije tačaka A, B, C u odnosu na krugove TBC, TCA, TAB među sobom jednake.

544. Dokazati da je kvadrat poluprečnika polarnog kruga trougla jednak polovini potencije ortocentra u odnosu na opisani krug tog trougla.

545. Dokazati da je potencija središta bilo kojeg upisanog kruga u odnosu na opisani krug trougla jednak dvostrukom proizvodu poluprečnika tih dvaju krugova.

546. Dokazati da je zbir potencija odredišta svih upisanih krugova u odnosu na opisani krug jednak $8r^2$, gde je r poluprečnik opisanog kruga.

547. Ako su a, b, c stranice i p poluobim trougla ABC, a d^2 i d_a^2 potencija središta S i S_a upisanih krugova u odnosu na opisani krug tog trougla, dokazati da je

$$d^2 = \frac{abc}{2p}, \quad d_a^2 = \frac{abc}{2(p-a)}.$$

548. Ako je X jedna od tačaka u kojima spolja upisani krug sa središtem S_a seče opisani krug l trougla ABC, a Y tačka u kojoj prava S_aX seče krug l, dokazati da je duž S_aY jednaka prečniku kruga l.

549. Ako su O i r središte i poluprečnik kruga k, a A i B tačke kolinearne s tačkom O, takve da je $OA \cdot OB = r^2$, dokazati da je zbir potencija tačaka A i B u odnosu na krug k jednak kvadratu duži AB.

6.7. Radikalna osa dvaju krugova. Radikalno središte triju krugova

Definicija 6.8. Skup svih tačaka kojima su potencije u odnosu na dva data kruga među sobom jednake je prava koju nazivamo *radikalnom osom tih dvaju krugova.*

550. Dokazati da je skup svih tačaka kojima su potencije u odnosu na dva data kruga među sobom jednake prava upravna na pravoj koja spaja središta tih dvaju krugova.

551. Dokazati da se radikalne ose triju krugova seku u jednoj tački, ili su među sobom uporedne, ili su pak istovetne.

552. Dokazati da skup središta svih krugova koji su ortogonalni na datim krugovima k_1 i k_2 predstavljaju tačke radikalne ose tih krugova koje se nalaze izvan krugova k_1 i k_2.

553. Ako je središte kruga k tačka radikalne ose krugova k_1 i k_2, a krug k ortogonalan na krugu k_1, dokazati da je krug k ortogonalan na krugu k_2.

554. Ako je P tačka radikalne ose s krugova k_1 i k_2, dokazati da se polare p_1 i p_2 tačke P u odnosu na krugove k_1 i k_2 seku u tački koja se takođe nalazi na pravoj s, ili su paralelne s pravom s.

555. Ako se sečice AB i CD dvaju krugova k_1 i k_2 seku na radikalnoj osi s tih krugova, dokazati da tačke A, B, C, D pripadaju jednom krugu.

556. Ako neki krug k seče dva kruga k_1 i k_2, prvi u tačkama A i B, a drugi u tačkama C i D, dokazati da se prave AB i CD seku na radikalnoj osi s dvaju krugova k_1 i k_2 ili su uporedni s pravom s.

557. Dokazati da se prave određena dvema antihomolognim tetivama A_1B_1 i A_2B_2 krugova k_1 i k_2 seku na radikalnoj osi s tih krugova.

558. Dokazati da se dirke dvaju krugova u antihomolognim tačkama seku na radikalnoj osi tih krugova, ili su uporedne sa radikalnom osom tih krugova.

559. Ako se dirke dvaju krugova k_1 i k_2 seku na radikalnoj osi tih krugova, dokazati da su dodirne tačke tih dirki antihomologne.

560. Ako su AA', BB', CC' visine trougla ABC, dokazati da se presečne tačke P, Q, R pravih BC i $B'C'$, CA i $C'A'$, AB i $A'B'$ nalaze na radikalnoj osi krugova l i l' opisanih oko trouglova ABC i $A'B'C'$.

561. Ako su S_a, S_b, S_c središta spolja upisanih krugova trougla ABC, dokazati da se presečne tačke P, Q, R pravih BC i S_bS_c, CA i S_cS_a, AB i S_aS_b, nalaze na radikalnoj osi krugova l i l' opisanih oko trouglova ABC i $S_aS_bS_c$.

562. Ako su S, S_b, S_c središte upisanog kruga i središte spolja upisanih krugova trougla ABC, dokazati da se presečne tačke P, Q, R pravih BC i S_bS_c, CA i SS_c, AB i SS_b nalaze na radikalnoj osi krugova l i l' opisanih oko trouglova ABC i SS_bS_c.

563. Dokazati da je prava određena visinom AA' trougla ABC radikalna osa krugova čiji su prečnici težišne linije BB_1 i CC_1 tog trougla.

564. Ako su A_1, B_1, C_1 središta stranica BC, CA, AB trougla ABC, dokazati da su simetrale unutrašnjih uglova trougla $A_1B_1C_1$ radikalne ose upisanih krugova k, k_a, k_b, k_c trougla ABC.

565. Dokazati da je ortocentar trougla radikalno središte triju krugova čiji su prečnici stranice tog trougla.

566. Ako je M tačka u ravni trougla ABC takva da prave MA, MB, MC seku prave BC, CA, AB u tačkama P, Q, R, dokazati da je ortocentar H trougla ABC radikalno središte krugova sa dijametrima AP, BQ, CR.

567. Dokazati da je razlika potencije neke tačke P u odnosu na dva kruga k_1 i k_2 jednaka dvostrukom proizvodu duži koja spaja središta tih krugova i odstojanja tačke P od radikalne ose tih krugova.

568. Dokazati da je skup svih tačaka kojima je razlika potencija u odnosu na dva kruga k_1 i k_2 stalna, prava uporedna ili istovetna s radikalnom osom s krugova k_1 i k_2.

569. Ako su O_1 i O_2 središta, a r_1 i r_2 poluprečnici dvaju krugova k_1 i k_2 i O središte duži O_1O_2, dokazati da je

$$2O_1O_2 \cdot OS = r_1^2 - r_2^2.$$

570. Ako su O i r središte i poluprečnik opisanog kruga trougla ABC, H ortocentar tog trougla i X podnožje normale iz tačke O na ortičkoj pravoj tog trougla, dokazati da je

$$OX = \frac{3r^2 + OH^2}{4OH}.$$

571. Ako je $l(O,r)$ opisani i k(S,ϱ) upisani krug trougla ABC, a X tačka u kojoj prava OS seče pravu s na kojoj se nalaze preseci simetrala spoljašnjih uglova sa produženjima naspramnih stranica tog trougla, dokazati da je

$$OX^2 = (r+q)^2 \cdot \frac{r}{r-2q}.$$

572. Ako je $l(O,r)$ opisani i $k_a(S_a, \varrho_a)$ spolja upisani krug trougla ABC a X_a tačka u kojoj prava OS_a seče pravu s_a na kojoj se nalaze preseci simetrale spoljašnjeg ugla A i simetrala unutrašnjih uglova B i C sa pravama određenim naspramnim stranicama trougla ABC, dokazati da je

$$OX_a^2 = (r - \varrho_a)^2 \cdot \frac{r}{r+2\varrho_a}.$$

573. Neka su s_1, s_2, s_3 radikalne ose krugova k_2 i k_3, k_3 i k_1, k_1 i k_2. Ako prave s_1 i s_2 sadrže središta O_1 i O_2 krugova k_1 i k_2, dokazati da i prava s_3 sadrži središte O_3 kruga k_3.

574. Dokazati da je skup središta svih krugova koje seku dati krugovi k_1 i k_2 u dijametralno suprotnim tačkama, odsečak na radikalnoj osi krugova k_1 i k_2 koji se nalazi u krugovima k_1 i k_2.

6.8. Pseudoradikalna osa dvaju krugova. Pseudoradikalno središte triju krugova

Definicija 6.9. Pravu simetričnu s radikalnom osom dvaju krugova u odnosu na središte duži koja spaja centre tih krugova nazivamo *pseudoradikalnom* ili *antiradikalnom osom tih dvaju krugova.*

S obzirom da za svaku tačku P radikalne ose s dvaju krugova $k_1(O_1r_1)$ i $k_2(O_2r_2)$ imamo da je $O_1P^2-O_2P^2 = r_1^2-r_2^2$, za svaku tačku P' pseudoradikalne ose s' tih dvaju krugova biće $O_1P^2 - O_2P^2 = r_2^2 - r_1^2$.
Definicija 6.10. Tačku S' simetričnu s radikalnim središtem S triju krugova k_1, k_2, k_3 u odnosu na središte O kruga koji je određen središtima tih triju krugova nazivamo *pseudoradikalnim* ili *antiradikalnim središtem* tih krugova k_1, k_2, k_3.

575. Dokazati da je skup središta svih krugova koji seku dva data kruga k_1 i k_2 u dijametralno suprotnim tačkama pseudoradikalna osa krugova k_1 i k_2.

576. Dokazati da se pseudoradikalne ose triju krugova seku u jednoj tački, ili su među sobom uporedne, ili su pak istovetne.

6.9. Eliptički, parabolički i hiperbolički pramenovi krugova

Definicija 6.11. Skup svih krugova jedne ravni od kojih svaka dva imaju za radikalnu osu istu pravu s nazivamo *sistemom koaksijalnih krugova* ili *pramenom krugova*, a pravu *s radikalnom osom tog pramena krugova.*

Iz ove definicije neposredno sleduju ove osobine. Ako se u jednom pramenu krugova dva kruga seku u istim tačkama, npr. A i B, tada se svaka dva kruga tog pramena seku u tačkama A i B; ako se u jednom pramenu krugova dva kruga dodiruju u nekoj tački S, tada se svaka dva kruga tog pramena dodiruju u tački S; ako u jednom pramenu krugova dva kruga nemaju zajedničkih tačaka, tada nikoja dva kruga tog pramena nemaju zajedničkih tačaka. S obzirom na takav uzajamni položaj krugova jednog pramena, razlikujemo sledeće tri vrste pramenova krugova:

(1) *Eliptički pramen krugova* kod kojeg se svi krugovi seku u dvema istim tačkama, osnovnim tačkama tog pramena krugova (sl.2);

(2) *Parabolički pramen krugova* kod kojeg se svi krugovi među sobom dodiruju u istoj tački, osnovnoj tački tog pramena krugova (sl.3);

(3) *Hiperbolički pramen krugova* kod kojeg nikoja dva kruga nemaju zajedničkih tačaka (sl.4);

Pored navedene tri vrste pramenova krugova, koje smatramo nedegenerisanim, postoje još dve vrste degenerisanih pramenova krugova. To je *pramen koncentričnih krugova* koji za radikalnu osu imaju beskrajno daleku pravu i *pramen pravih*, tj. krugova beskrajno velikih poluprečnika (pravih koje se seku u jednoj tački ili su među sobom uporedne). U ovom poglavlju proučavaćemo samo osobine nedegenerisanih pramenova krugova.

Slika !

Nedegenerisani pramen krugova potpuno je određen ako su data dva njegova kruga, ili pak ako su dati njegova radikalna osa i jedan njegov krug. Nije teško dokazati da skup središta svih krugova bilo kojeg nedegenerisanog pramena krugova nalazimo na jednoj pravoj. Zaista, ako su O_1, $O_2, O_3, \ldots$ središta krugova k_1, $k_2, k_3, \ldots$ nekog pramena, sve prave $O_1O_2, O_1O_3, \ldots$ sadrže tačku O_1 a upravne su na radikalnoj osi s tog pramena krugova, prema tome, one su istovetne. Prava koja sadrži središta krugova nekog pramena naziva se *središnja* ili *centralna prava* tog pramena krugova, a tačka u kojoj ta prava seče radikalnu osu naziva se *središte* ili *centar tog pramena krugova*. Prirodno se nameće i pitanje da li je svaka tačka središnje prave nekog pramena krugova, središte izvesnog kruga koji pripada tom pramenu krugova. Odgovor na ovo pitanje dajemo pojedinačno za pojedine vrste pramenova krugova. Ako je pramen krugova eliptički, tačke A i B u kojima se seku svi njegovi krugovi, simetrične su među sobom u odnosu na središnju pravu o tog pramena, pa je svaka tačka prave o središte izvesnog kruga koji sadrži tačke A i B, i prema tome pripada tom pramenu. Ako je pramen krugova parabolički, tačka C u kojoj se dodiruju svi njegovi krugovi je na središnjoj pravoj o tog pramena. Stoga je svaka tačka prave o, izuzev tačke C, središte izvesnog kruga koji u tački C dodiruje sve krugove tog pramena, i prema tome pripada tom pramenu. Ako je pramen krugova hiperbolički, njegovo središte C kao tačka radikalne ose jednake potencije u odnosu na sve krugove tog pramena, i to pozitivne jer se tačka C nalazi izvan svih tih krugova. Stoga je za svaki krug $k(O,r)$ tog pramena $CO^2 - r^2 = c^2$, i prema tome $CO > C$. Otuda sleduje da samo one tačke O' središne prave za koje je $CO' > c$ predstavljaju središta krugova koji pripadaju tom pramenu. Stoga tačke C_1 i C_2 središnje prave koje se nalaze s raznih strana od tačke C takve da je $CC_1 = CC_2 = C$ nazivamo *graničnim tačkama tog hiperboličkog pramena krugova.*

577. Dokazati da su potencije proizvoljne tačke radikalne ose nekog pramena krugova u odnosu na sve krugove tog pramena među sobom jednake.

578. Dokazati da se tačka s jednakim potencijama u odnosu na sve krugove nekog pramena krugova nalazi na radikalnoj osi tog pramena krugova.

579. Ako je središte kruga l na radikalnoj osi nekog pramena krugova i ako je krug l ortogonalan na jednom krugu k tog pramena, dokazati da je krug l ortogonalan na svim krugovima tog pramena krugova.

580. Ako je krug l ortogonalan na dvama krugovima k_1 i k_2 nekog pramena krugova, dokazati da je krug l ortogonalan na svim krugovima tog pramena krugova.

581. Dokazati da je svaka tačka radikalne ose nekog pramena krugova koja se nalazi izvan tih krugova središte jednog kruga koji je ortogonalan na svim krugovima tog pramena krugova.

582. Dokazati da krugovi ortogonalni na svim krugovima nekog pramena krugova takođe obrazuju pramen krugova.

583. Dokazati da krugovi ortogonalni na svim krugovima eliptičkog pramena obrazuju hiperbolički pramen.

584. Dokazati da krugovi ortogonalni na svim krugovima hiperboličkog pramena obrazuju eliptički pramen.

585. Dokazati da krugovi ortogonalni na krugovima paraboličkog pramena obrazuju parabolički pramen.

586. Dokazati da postoji jedan i samo jedan krug koji pripada datom pramenu krugova, a koji sadrži datu tačku izvan radikalne ose tog pramena krugova.

587. Dokazati da je svaki krug koji sadrži granične tačke hiperboličkog pramena krugova ortogonalan na svim krugovima tog pramena krugova.

588. Dokazati da su tačke u kojima središnja prava hiperboličkog pramena krugova seče bilo koji krug tog pramena krugova harmonijski spregnute sa graničnim tačkama tog pramena krugova.

589. Ako je C jedna od graničnih tačaka hiperboličkog pramena krugova i D tačka u kojoj prava kroz C dodiruje neki krug tog pramena krugova, dokazati da su tačke C i D harmonijski spregnute sa tačkama A i B u kojima ta dirka seče bilo koji drugi krug tog pramena krugova.

590. Ako su k_1, k_2, k_3 krugovi jednog pramena, A i B tačke u kojima jedna prava dodiruje krugove k_1 i k_2, a C i D tačka u kojima ta ista prava seče krug k_3, dokazati da su tačke C i D harmonijski spregnute s tačkama A i B.

591. Ako su središta svih krugova $k_1, k_2, \ldots$ na jednoj pravoj i ako postoji tačka P koja ima jednake potencije u odnosu na sve te krugove, dokazati da ti krugovi pripadaju izvesnom pramenu krugova.

592. Ako postoje dve tačke P i Q od kojih svaka ima jednake potencije u odnosu na krugove $k_1, k_2, \ldots$, dokazati da pomenuti krugovi pripadaju izvesnom pramenu krugova.

593. Dokazati da su krugovi koji su ortogonalni na istom krugu i kojima se središta poklapaju nalaze na jednoj pravoj obrazuju pramen krugova.

594. Dokazati da se polare jedne tačke u odnosu na krugove bilo kojeg pramena seku u jednoj tački ili su među sobom uporedne.

595. Ako se polare neke tačke P u odnosu na krugove $k_1, k_2, \ldots$ kojima su središta na jednoj pravoj, seku u jednoj tački Q, dokazati da pomenuti krugovi pripadaju izvesnom pramenu krugova.

596. Ako su tačke A i B spregnute u odnosu na neki krug k, dokazati da je kvadrat duži AB jednak zbiru potencija tačaka A i B u odnosu na krug k.

597. Ako je kvadrat duži AB jednak zbiru potencija tačaka A i B u odnosu na krug k, dokazati da su tačke A i B spregnute u odnosu na taj krug.

598. Ako su k_1, k_2, k_3 među sobom ortogonalni krugovi, dokazati da su središta bilo koja dva od tih krugova spregnuta u odnosu na treći krug.

599. Ako su A', B', C' tačke u kojima dirke kruga opisanog oko trougla ABC konstruisane u temenima A, B, C seku prave BC, CA, AB, dokazati da krugovi $k_1(A', A'A)$, $k_2(B', B'B)$, $k_3(C', C'C)$ pripadaju eliptičkom pramenu krugova.

600. Ako su A', B', C' tačke u kojima dirke kruga opisanog oko trougla ABC konstruisane u temenima A, B, C seku prave BC, CA, AB, dokazati da krugovi k_1, k_2, k_3 kojima su duži AA', BB', CC' prečnici pripadaju izvesnom pramenu krugova kome je radikalna osa Ojlerova prava trougla ABC. Dokazati zatim da je dobijeni pramen krugova eliptički, parabolički ili hiperbolički zavisno od toga da li je trougao ABC oštrougli, pravougli ili tupougli.

601. Ako je l krug koji pripada pramenu $\{k\}$, dokazati da se radikalna osa svih parova krugova, koji su obrazovani od krugova l i krugova pramena $\{k\}$, seku u jednoj tački na radikalnoj osi s pramena $\{k\}$, ili su uporedne sa radikalnom osom tog pramena.

602. Ako su O, O_1, O_2 središta triju krugova k, k_1, k_2 bilo kojeg pramena krugova, dokazati da su potencije svake tačke kruga k u odnosu na krugove k_1 i k_2 srazmerne dužima O_1O i O_2O.

603. Dokazati da je skup svih tačaka, čije su potencije u odnosu na dva data kruga k_1 i k_2 srazmerne datim dužima m i n, krug pramena kojeg određuju krugovi k_1 i k_2.

604. Dokazati da krug k sličnosti dvaju krugova k_1 i k_2 pripada pramenu kojeg određuju krugovi k_1 i k_2.

605. Dokazati da krugovi kojima su dijametri dijagonale bilo kojeg četvorostranika, pripadaju izvesnom pramenu krugova (*Teorema K.F. Gausa i Bodenmilera*).

606. Dokazati da središta dijagonala četvorostranika pripadaju jednoj pravoj, *Gausovoj pravoj* četvorostranika.

607. Dokazati da ortocentri četiri trougla, koji su određeni stranicama nekog četvorostranika, pripadaju jednoj pravoj *Oberovoj pravoj* tog četvorostranika.

608. Dokazati da su Gausova prava i Oberova prava istog četvorostranika upravne među sobom.

609. Dokazati da se središte kruga opisanog oko dijagonalnog trougla bilo kojeg četvorostranika nalazi na Oberovoj pravoj tog četvorostranika.

610. Ako su P, Q, R tačke u kojima neka prava seče prave određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC, dokazati da krugovi k_1, k_2, k_3 kojima su duži AP, BQ, CR prečnici, pripadaju izvesnom pramenu krugova.

611. Ako su dva para suprotnih temena četvorostranika spregnuta u odnosu na neki krug, dokazati da je i treći par suprotnih temena spregnut u odnosu na taj krug.

612. Ako je $ABCD$ tetivan četvorougao kome su produžene naspramne stranice AB i CD seku u tački E, a produžene naspramne stranice BC i AD seku u tački F, dokazati da je krug k_3 kome je prečnik EF krug sličnosti krugova k_1 i k_2 kojima su prečnici AC i BD.

613. Dokazati da krugovi sličnosti triju datih krugova k_1, k_2, k_3 pripadaju izvesnom pramenu krugova.

614. Ako je l krug ortogonalan na krugovima k_1, k_2, k_3 i k krug određen središtima krugova k_1, k_2, k_3, dokazati da se središta krugova sličnosti datih krugova k_1, k_2, k_3 nalaze na radikalnoj osi krugova k i l.

615. Ako su T i H težište i ortocentar trougla ABC, dokazati da opisani krug l tog trougla, Ojlerov krug l_1 tog trougla i krug l_2 kome je duž TH prečnik, pripadaju hiperboličkom, paraboličkom ili eliptičkom pramenu krugova, prema tome da li je trougao ABC oštrougli, pravougli ili tupougli.

616. Ako proizvoljna prava seče dva kruga k_1 i k_2 u tačkama A, B i C, D a ne sadrži nijedno središte sličnosti tih krugova, i ako su a, b i c, d tangente u tačkama A, B i C, D na krugovima k_1 i k_2, dokazati da tačke u kojima prave a i b seku prave c i d pripadaju jednom krugu, a zatim da taj krug pripada pramenu koji je određen krugovima k_1 i k_2.

617. Ako su AA', BB', CC' visine trougla ABC, a P proizvoljna tačka njegove ravni, dokazati da krugovi k_1, k_2, k_3 opisani oko trouglova $\triangle PAA'$, $\triangle PBB'$, $\triangle PCC'$ pripadaju izvesnom pramen krugova.

618. Dve prave l i l' kroz zajedničku tačku P svih krugova eliptičkog pramena seku tri kruga tog pramena u tačkama A, B, C i A', B', C'. Dokazati da je:

$$AB : BC = A'B' : B'C'.$$

619. Ako su O_1, O_2, O_3 središta i r_1, r_2, r_3 poluprečnici triju krugova istog pramena, dokazati da je:

$$r_1^2 \cdot O_2O_3 + r_2^2 \cdot O_3O_1 + r_3^2 \cdot O_1O_2 + O_1O_2 \cdot O_2O_3 \cdot O_3O_1 = 0.$$

620. Ako su O_1, O_2, O_3 središta krugova k_1, k_2, k_3 nekog pramena, a d_1, d_2, d_3 odsečci na dirkama krugova k_1, k_2, k_3 kroz proizvoljnu tačku P koja se nalazi izvan njih, dokazati da je:

$$d_1^2 \cdot O_2O_3 + d_2^2 \cdot O_3O_1 + d_3^2 \cdot O_1O_2 = 0.$$

7. INVERZIJA

7.1. Inverzne tačke

Definicija 7.1. Ako je P proizvoljna tačka ravni nekog kruga $k(O, r)$ i P' tačka poluprave OP takva da je $OP \cdot OP' = r^2$, tada kažemo da je tačka P' *inverzna* sa tačkom P u odnosu na krug k. Iz definicije neposredno sledi da je i tačka P inverzna sa tačkom P' u odnosu na isti krug k. Stoga se takođe kaže da su tačke P i P' međusobno *inverzne u odnosu na krug* k. Krug k nazivom *krugom inverzije*, tačku O *središtem inverzije*, a duž r *poluprečnikom inverzije*.

621. Dokazati da je svaki krug koji sadrži par tačaka P, P' inverznih u odnosu na neki krug k, ortogonalan na krugu k.

622. Ako su l i k dva ortogonalna kruga, dokazati da su tačke u kojima proizvoljna prava kroz središte kruga k seče krug l, inverzne u odnosu na krug k.

623. Dokazati da je par tačaka P, P' inverznih u odnosu na krug k harmonijski spregnut s parom tačaka u kojima prava PP' seče krug k.

624. Ako su A i B dijametralno suprotne tačke kruga k, a P i P' tačke harmonijski spregnute sa tačkama A i B, dokazati da su tačke P i P' inverzne u odnosu na krug k.

625. Ako je A, A' par inverznih tačaka u odnosu na krug k kome je središte O, a M proizvoljna tačka kruga k, dokazati da je $\triangle AOM \sim \triangle MOA'$.

626. Ako P, P' i Q, Q' dva para nekolinearnih tačaka, inverznih u odnosu na isti krug k sa središtem O, dokazati da su trouglovi $\triangle OPQ$ i $\triangle OQ'P'$ inverzno slični.

627. Dokazati da svaka dva para nekolinearnih tačaka P, P' i Q, Q' inverznih u odnosu na isti krug k pripadaju jednom krugu l koji je ortogonalan na krugu k.

628. Ako su P i P' inverzne tačke u odnosu na krug $k(O, r)$, a Q proizvoljna tačka kruga k, dokazati da je

$$OP : OP' = PQ^2 : P'Q^2.$$

629. Ako je P, P' par inverznih tačaka u odnosu na krug k, dokazati da su duži koje spajaju proizvoljnu tačku M toga kruga s tačkama P i P' srazmerne odsečcima na koje krug k deli duž PP'.

630. Dokazati da simetrala stranice BC trougla ABC seče prave AB i AC u tačkama P i Q inverznim u odnosu na opisani krug tog trougla.

631. Ako je AB proizvoljna tetiva i M proizvoljna tačka kruga k, dokazati da prave MA i MB seku simetralu duži AB u dvema inverznim tačkama.

632. Ako su P, P' par inverznih tačaka u odnosu na krug k i M proizvoljna tačka tog kruga, dokazati da prave MP i MP' seku krug k u tačkama A i B takvim da je tetiva AB upravna na pravoj PP'.

7.2. Inverzni likovi

Definicija 7.2. Ako je ω proizvoljan lik koji se nalazi u ravni nekog kruga, ω' lik koji se sastoji iz tačaka inverznih s tačkama lika ω u odnosu na krug k, tada kažemo da je lik ω' *inverzan* s likom ω u odnosu na krug k.

Iz ove definicije neposredno sleduje da je i lik ω inverzan s likom ω' u odnosu na krug k, pa se kaže da su likovi ω i ω' inverzni među sobom u odnosu na krug k.

633. Ako su M i M' inverzne tačke u odnosu na krug k koji je opisan oko trougla ABC, a P, Q, R i P', Q', R' podnožja upravnih iz tačaka M i M' na pravama BC, CA, AB, dokazati da su trouglovi PQR i $P'Q'R'$ slični.

634. Ako su M i M' dve tačke u ravni trougla ABC, a P, Q, R i P', Q', R', podnožja upravnih iz tačaka M i M' na pravama BC, CA, AB pri čemu su trouglovi PQR i $P'Q'R'$ slični, dokazati da su tačke M i M' inverzne u odnosu na krug k koji je opisan oko trougla ABC.

635. Dokazati da su granične tačke hiperboličkog pramena krugova inverzne u odnosu na svaki krug tog pramena krugova.

636. Ako su dve tačke P i P' inverzne među sobom u odnosu na krugove $k_1, \ldots, k_n$, dokazati da pomenuti krugovi pripadaju jednom pramenu.

637. Ako su A i B dve proizvoljne tačke u ravni kruga $k(O,r)$, a A' i B' njima inverzne tačke u odnosu na krug k, dokazati da je

$$A'B' = AB \cdot \frac{r^2}{OA \cdot OB}.$$

638. Ako su A, B, C, D četiri tačke neke prave p i A', B' C', D' njima inverzne tačke u odnosu na neki krug kome se središte nalazi na pravoj p, dokazati da je

$$\mathcal{R}(A,B;C,D) = \mathcal{R}(A',B';C',D').$$

639. Ako su O, A, B, C tačke neke prave p, pri čemu je B središte duži AC, a A', B', C' tačke inverzne s tačkama A, B, C u odnosu na bilo koji krug sa središtem O, dokazati da su tačke $\mathcal{H}(O,A',B',C')$ harmonijske.

640. Neka su $k_1, \ldots, k_n$ krugovi nekog pramena krugova. Ako je A proizvoljna tačka van središnje prave tog pramena, A_1 tačka inverzna sa tačkom A u odnosu na krug k_1, A_2 tačka inverzna sa tačkom A_1 u odnosu na krug k_2, itd, dokazati da tačke $A, A_1, \ldots, A_n$ pripadaju jednom krugu koji je ortogonalan na svim krugovima pomenutog pramena krugova.

641. Dokazati da je inverzan lik prave l u odnosu na krug k takođe prava ili krug, prema tome da li prava l sadrži ili ne sadrži središte kruga k.

642. Dokazati da je inverzni lik kruga l u odnosu na neki krug k, prava ili krug, prema tome da li krug l sadrži ili ne sadrži središte kruga k.

643. Ako je krug l ortogonalan na krug k, dokazati da je krug l inverzan samom sebi u odnosu na krug k, i obrnuto, ako je krug l inverzan samom sebi u odnosu na krug k, dokazati da su krugovi l i k među sobom ortogonalni.

644. Ako su krug l i prava p inverzni likovi u odnosu na krug k, dokazati da je prava p radikalna osa krugova l i k.

645. Ako su l i l' inverzni krugovi u odnosu na krug k, dokazati da krugovi k, l, l' pripadaju jednom pramenu.

646. Dokazati da opisani krug l_1, Ojlerov krug l_2, polarni krug l_3 trougla ABC i krug l_4 opisan oko njegovog potencijalnog trougla $A_1B_1C_1$ pripadaju jednom pramenu.

647. Dokazati da se središte kruga opisanog oko potencijalnog trougla nalazi na Ojlerovoj pravoj datog trougla.

648. Ako krugovi k_1, k_2, k_3, k_4 imaju takav položaj u ravni da krug k_1 dodiruje krug k_2 u tački A, krug k_2 dodiruje krug k_3 u tački B, krug k_3 dodiruje krug k_4 u tački C, krug k_4 dodiruje krug k_1 u tački D. Dokazati da dodirne tačke A, B, C, D pripadaju jednom krugu ili jednoj pravoj.

649. Ako su w i w' dva lika inverzna među sobom u odnosu na neki krug l, a w_1 i w_1' njima inverzni likovi u odnosu na neki krug l_1, dokazati da su i likovi w_1 i w_1' inverzni među sobom u odnosu na neki krug l_2.

650. Ako krug određen bilo kojim trima tačkama nekog konačnog skupa tačaka sadrži najmanje još jednu tačku tog skupa, dokazati da sve tačke tog skupa pripadaju jednom krugu.

651. Dokazati da je ugao pod kojim se seku dve linije u nekoj tački jednak s uglom pod kojim se seku u odgovarajućoj tački njima inverzne linije u odnosu na neki krug k.

652. Ako se dve linije l i l' inverzne među sobom u odnosu na neki krug k seku u tački P, dokazati da krug k seče linije l i l' u tački P pod jednakim uglovima.

653. Ako su A, B, C, D tačke takve da je krug OAB ortogonalan na krugu OCD i krug OAC ortogonalan na krugu OBD, dokazati da je krug OBC ortogonalan na krugu OAD.

654. Ako su A, B, C, D proizvoljne tačke jedne ravni, dokazati da je ugao pod kojim se seku krugovi ABC i ABD jednak uglu pod kojim se seku krugovi ACD i BCD.

655. Ako je P jedna od presečnih tačaka dvaju krugova k_1 i k_2, koji dodiruju jednu pravu u tačkama A i B, a drugu pravu u tačkama C i D, dokazati da se krugovi l_1 i l_2 opisani oko trouglova PAB i PCD dodiruju u tački P.

656. Ako su l_1, l_2, l_3, tri među sobom ortogonalna kruga kojima su zajedničke tetive AB, CD, EF, dokazati da se krugovi ACE i ADF dodiruju u tački A.

657. Neka su l i l' inverzni krugovi, a P i P', Q i Q' inverzne tačke u odnosu na isti krug k. Ako su pri tome tačke P i O inverzne u odnosu na krug l, dokazati da su tačke P' i O' inverzne u odnosu na krug l'.

658. Ako su P, Q, R tačke u kojima upisani krug k dodiruje stranice BC, CA, AB trougla $\triangle ABC$, dokazati da je Ojlerov krug l' trougla PQR inverzan s opisanim krugom l trougla ABC u odnosu na krug k.

659. Dokazati da Ojlerov krug trougla dodiruje sva četiri upisana kruga tog trougla (*Fojerbahova teorema*).

660. (*Ptolemejeva teorema*) Ako je $ABCD$ tetivan četvorougao, dokazati da je

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD.$$

661. Ako su $d_1, \ldots, d_n$ rastojanja temena $A_1, \ldots, A_n$ pravilnog n-tougla $A_1 \ldots A_n$ od proizvoljne tačke P koja se nalazi na manjem luku A_1A_n kruga opisanog oko tog n-tougla, dokazati da je

$$\frac{1}{d_1d_2} + \frac{1}{d_2d_3} + \frac{1}{d_3d_4} + \ldots + \frac{1}{d_{n-1}d_n} = \frac{1}{d_1d_n}.$$

662. Ako su d_1,...,d_{2n+1} rastojanja temena pravilnog poligona $A_1 \ldots A_{2n+1}$ s neparnim brojem stranica od proizvoljne tačke P koja se nalazi na manjem luku A_1A_{2n+1} kruga opisanog oko poligona, dokazati da je

$$d_1 + d_3 + d_5 + \ldots + d_{2m+1} = d_2 + d_4 + d_6 + \ldots + d_{2n}.$$

663. Ako su $p_1, \ldots, p_{2n}$ odstojanja proizvoljne tačke P kruga od pravih koje sadrže stranice $A_1A_2, \ldots, A_{2n}A_1$ poligona $A_1 \ldots A_{2n}$ upisanog u krug, dokazati da je

$$p_1 \cdot p_3 \cdot p_5 \cdots p_{2n-1} = p_2 \cdot p_4 \cdots p_{2n}.$$

664. Ako su $p_1, \ldots, p_n$ odstojanja proizvoljne tačke P kruga l od pravih koje sadrže stranice $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$ n-tougla $A_1 \ldots A_n$ upisanog u krug l, a $q_1, \ldots, q_n$ odstojanja tačke P od dirki kruga l u tačkama $A_1, \ldots, A_n$, dokazati da je

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = q_1 \cdot q_2 \cdots q_n.$$

665. Ako su a_1,...,a_n duži jednake stranicama A_1A_2, ...,A_nA_1 n-tougla $A_1 \ldots A_n$ upisanih u krug l, a p_1,...,p_n odstojanja proizvoljne tačke P luka A_nA_1 kruga l od pravih koje sadrže stranice A_1A_2,...,A_nA_1 dokazati da je

$$\frac{a_1}{p_1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{p_{n-1}} = \frac{a_n}{p_n}.$$

666. Ako su $p_1, \ldots, p_n$ odstojanja proizvoljne tačke P manjeg luka A_nA_1 kruga l opisanog oko pravilnog poligona $A_1 \ldots A_n$ od pravih koje sadrže stranice $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$, dokazati da je

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_{n-1}} = \frac{1}{p_n}.$$

8. INVOLUCIJA

Definicija 8.1. Jednoznačno preslikavanje f tačaka $A, B, C \ldots$ neke prave p u tačke $A', B', C', \ldots$ te iste prave p nazivamo *involucionim* ili kratko *involucijom* ako na toj pravoj p postoji tačka O takva da je

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = \ldots = l.$$

Parove odgovarajućih tačaka involucionog preslikavanja nazivamo *spregnutim* ili *konjugovanim*, pravu p na kojoj se nalaze te tačke nazivamo *osnovom*, a tačku O *središtem involucionog preslikavanja.*

S obzirom na znak konstante l razlikujemo dve vrste involucionog preslikavanja i to *hiperboličko* i *eliptičko involuciono preslikavanje.* Involuciono preslikavanje nazivamo *hiperboličkim* ili *eliptičkim* prema tome da li je $l > 0$ ili $l < 0$.

Iz ove definicije neposredno sleduje da su u hiperboličkom involucionom preslikavanju odgovarajuće tačke sa iste strane od središta O a u eliptičkom involucionom preslikavanju s raznih strana od središta O tog involucionog preslikavanja. Stoga u hiperboličkom involucionom preslikavanju, postoje na osnovi p s raznih strana od središta O dve tačke X i Y takve da je $OX^2 = OY^2 = l$. To su tačke koje u pomenutom preslikavanju odgovaraju samima sebi, te ih nazivamo *dvojnim* ili *invarijantnim tačkama tog hiperboličkog involucionog preslikavanja.* Eliptičko involuciono preslikavanje nema dvojnih tačaka.

667. Dokazati da su presečne tačke jedne prave sa krugovima nekog pramena krugova od odgovarajuće tačke nekog involucionog preslikavanja.

668. Dokazati da krugovi određeni odgovarajućim tačkama nekog involucionog preslikavanja i jednom fiksiranom tačkom koja se nalazi izvan osnove tog preslikavanja obrazuju pramen krugova.

669. Dokazati da je involuciono preslikavanje jednoznačno određeno sa dva para odgovarajućih tačaka.

670. Dokazati da su odgovarajuće tačke hiperboličkog involucionog preslikavanja harmonijski spregnute s dvojnim tačkama tog preslikavanja.

671. Dokazati da su parovi kolinearnih tačaka spregnutih u odnosu na neki krug u involuciji kojoj se dvojne tačke nalaze na tom krugu.

672. Dokazati da su parovi pravih jednog pramena koje su spregnute u odnosu na neki krug u involuciji kojoj su dvojne prave dirke toga kruga.

673. Dokazati da su parovi tačaka u kojima neka prava seče prave odgovarajućih pravih neke involucije takođe u involuciji.

674. Dokazati da u eliptičkom involucionom preslikavanju prave na samu sebe postoje dve tačke P i Q simetrične među sobom u odnosu na tu pravu takve da su za svaki par odgovarajućih tačaka M i M' tog preslikavanja uglovi MPM' i MQM' pravi.

675. Dokazati da u svakoj involuciji pramena pravih postoji jedan par odgovarajućih pravih koje su među sobom upravne; ako takvih pravih ima više, dokazati da su svake dve odgovarajuće prave te involucije upravne među sobom.

676. Ako su A i A', B i B', C i C' tri proizvoljna para odgovarajućih tačaka jedne involucija, dokazati da je

$$\mathcal{R}(A, B; C, A') = \mathcal{R}(A', B'; C', A).$$

677. Ako su A, A', B, B', C, C' tačke jedne prave takve da je $\mathcal{R}(A, B; C, A') = \mathcal{R}(A', B'; C', A)$, dokazati da su A i A', B i B', C i C' parovi odgovarajućih tačaka izvesne involucije.

678. Ako su A i A', B i B', C i C' tri para odgovarajućih tačaka involucije dokazati da je

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' + A'B \cdot B'C \cdot C'A = 0.$$

679. Ako su A, A', B, B', C, C' tačke jedne prave takve da je $AB' \cdot BC' \cdot CA' + A'B \cdot B'C \cdot C'A = 0$, dokazati da su A i A', B i B', C i C' para odgovarajućih tačaka involucije.

680. Dokazati da su parovi tačaka P i P', Q i Q', R i R' u kojima neka prava s seče naspramne stranice AB i CD, BC i DA, AC i BD četvorotemenika $ABCD$ u involuciji.

681. Ako je S tačka ravni trougla ABC, a s prava koja seče prave BC, CA, AB u tačkama P, Q, R i prave SA, SB, SC u tačkama P', Q', R', dokazati da su P i P', Q i Q', R i R' odgovarajuće tačke involucionog preslikavanja.

682. Ako neka prava s seče stranice BC, CA, AB trotemenika ABC u tačkama P, Q, R i ako su P', Q', R' tačke prave s koje u nekoj involuciji odgovaraju tačkama P, Q, R, dokazati da se prave AP', BQ', CR' seku u jednoj tački.

683. Ako su P, P' i Q, Q' parovi tačaka u kojima neka prava s seče naspramne stranice AB, CD i BC, AD četvorotemenika $ABCD$ upisanog u krug k, dokazati da tačke X i X' u kojima prava s seče krug k odgovaraju jedna drugoj u involuciji koja je određena parovima tačaka P, P' i Q, Q'.

684. (*Karnoova teorema*) Ako neki krug k seče prave određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC u tačkama P i P', Q i Q', R i R', dokazati da je

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP'}{P'C} \cdot \frac{CQ'}{Q'A} \cdot \frac{AR'}{R'B} = 1.$$

685. Ako je O središte involucije određene s dva para odgovarajućih tačaka A, A' i B, B', dokazati da je

(a)

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AB'}{BA'}$$

;

(b)

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'}$$

686. Dokazati da su granične tačke hiperboličkog pramena krugova dvojne tačke involucije određene parovima tačaka kojima središnja prava seče krugove tog pramena krugova.

687. Ako su X i Y granične tačke hiperboličkog pramena krugova, a X_1 i Y_1 dvojne tačke involucije određene parovima tačaka u kojima neka prava seče krugove tog pramena krugova, dokazati da tačke X, Y, X_1, Y_1 pripadaju jednom krugu.

688. Ako su X i Y dvojne tačke involucije određene parovima odgovarajućih tačaka A, A' i B, B', dokazati da su tačke X i Y odgovarajuće u involuciji koja je određena parovima tačaka A, B i A', B'.

689. Ako su A i A', B i B', C i C' parovi odgovarajućih tačaka neke involucije a D i D' tačke takve da je $\mathcal{R}(A, B; C, D) = \mathcal{R}(A', B'; C', D')$, dokazati da su tačke D i D' odgovarajuće u toj involuciji.

690. Ako su A i A', B i B', C i C', D i D' parovi odgovarajućih tačaka neke involucije, dokazati da je $\mathcal{R}(A, B; C, D) = \mathcal{R}(A', B'; C', D')$.

691. Ako su P, Q, R projekcije temena A, B, C iz proizvoljne tačke S na naspramnim stranicama trotemenika ABC, a P', Q', R' tačke u kojima proizvoljna prava s seče stranice BC, CA, AB tog trotemenika, dokazati da je

$$\mathcal{R}(B, C; P, P') \cdot \mathcal{R}(Q, A; Q, Q') \cdot \mathcal{R}(A, B; R, R') = -1.$$

692. Ako su A i A', B i B', C i C' parovi naspramnih temena nekog četvorougaonika i O proizvoljna tačka u njegovoj ravni, dokazati da su parovi pravih OA i OA', OB i OB', OC i OC' u involuciji.

693. Ako su A i A', B i B', C i C' tačke u kojima tri prave kroz istu tačku seku neki krug k i ako je S proizvoljna tačka kruga k, dokazati da su parovi pravih SA i SA', SB i SB', SC i SC' u involuciji.

9. ZNAČAJNE TAČKE I LINIJE U GEOMETRIJI TROUGLA I ČETVOROUGLA

U geometriji trougla i četvorougla već smo upoznali niz značajnih tačaka i linija kao što su u geometriji trougla: težište, ortocentar, središte opisanog kruga, središta upisanih krugova, Žergonova tačka, Nagelova tačka, Fojerbahova tačka, upisani krugovi, opisani krug, polarni krug itd, a u geometriji četvorougla: težište, Gausova prava, Oberova prava itd. U ovom članu upoznaćemo još neke značajne tačke i linije u geometriji trougla i četvorougla.

9.1 Simsonova prava trougla i četvorougla

694. Dokazati da podnožja upravnih iz bilo koje tačke P kruga opisanog oko bilo kojeg trougla ABC na pravama koje su određene stranicama tog trougla, pripadaju jednoj pravoj koju nazivamo *Simsonovom pravom* tačke P u odnosu na trougao ABC.

695. Ako se podnožje upravnih iz neke tačke P na pravama koje su određene stranicama jednog trougla nalaze na jednoj pravoj, dokazati da je ta tačka P na krugu koji je opisan oko tog trougla.

696. Ako su AA', BB', CC' visine trougla ABC, dokazati da podnožja P, Q, R, S upravnih iz tačka A' na pravama AB, AC, BB', CC' pripadaju jednoj pravoj.

697. Ako tri razne tetive istog kruga imaju jedan zajednički kraj, dokazati da se krugovi kojima su te tetive prečnici seku u tačkama koje pripadaju jednoj pravoj (*Salmonova teorema*).

698. Ako se tri kruga s prečnicima PA, PB, PC seku u tačkama koje pripadaju jednoj pravoj, dokazati da je tačka P na krugu koji je opisan oko trougla ABC.

699. Ako upravne iz proizvoljne tačke P kruga opisanog oko trougla ABC na pravama BC, CA, AB seku krug još u tačkama A'', B'', C'', dokazati da su prave AA'', BB'', CC'' uporedne sa Simsonovom pravom tačke P u odnosu na trougao ABC.

700. Ako su A'', B'', C'' tačke kruga opisanog oko trougla ABC takve da je AA'', BB'', CC'', dokazati da se prave kroz tačke A'', B'', C'' upravne na pravama BC, CA, AB seku u izvesnoj tački P koja se nalazi na krugu, zatim da se podnožja A', B', C' tih normala nalaze na jednoj pravoj, Simsonovoj pravoj tačke P u odnosu na trougao ABC.

701. Dokazati da Simsonova prava tačke P u odnosu na trougao ABC sadrži središte duži koja spaja tu tačku P sa ortocentrom H trougla ABC.

702. Ako tri trougla ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ upisana u isto krugu k imaju zajedničko težište, dokazati da se Simsonove prave proizvoljne tačke M kruga k u odnosu na te trouglove seku u jednoj tački.

703. Ako je O središte kruga opisanog oko trougla ABC, dokazati da je jedan od uglova koje određuju Simsonove prave dveju tačaka P_1 i P_2 kruga u odnosu na trougao ABC jednak polovini ugla P_1OP_2.

704. Ako su p_1 i p_2 Simsonove prave dveju tačaka P_1 i P_2 u odnosu na trougao ABC, dokazati da se prave n_1 i n_2 kroz tačke P_1 i P_2 upravne na pravama p_1 i p_2 seku na krugu koji je opisan oko trougla ABC.

705. Dokazati da se Simsonove prave p_1 i p_2 dveju dijametralno suprotnih tačaka P_1 i P_2 u odnosu na isti trougao ABC seku pod pravim uglom u tački koja se nalazi na Ojlerovom krugu tog trougla.

706. Ako je $ABCD$ tetivan četvorougao, dokazati da se Simsonove prave temena A, B, C, D u odnosu na trouglove BCD, CDA, DAB, ABC seku u jednoj tački.

707. Ako je P proizvoljna tačka kruga opisanog oko tetivnog četvorougla $ABCD$, dokazati da podnožja upravnih iz tačke P na Simsonovim pravama te iste tačke u odnosu na trouglove BCD, CDA, DAB, ABC pripadaju jednoj pravoj, koju nazivamo *Simsonovom pravom* tačke P u odnosu na četvorougao $ABCD$.

9.2. Mikelova tačka trougla i četvorougla

Definicija 9.2. Ako su P, Q i R tačke stranica BC, CA i AB trougla ABC, tada se krugovi opisani oko trouglova AQR, BRP, CPQ seku u izvesnoj tački M. Krugove opisane oko trouglova AQR, BRP, CPQ nazivamo *Mikelovim krugovima*, a tačku M Mikelovom tačkom trougla ABC za trojku tačaka P, Q i R.

708. Ako su P, Q, R proizvoljne tačke stranica BC, CA i AB trougla ABC, dokazati da se krugovi opisani oko trouglova AQR, BRP, CPQ seku u jednoj tački.

709. Ako su P, Q, R tačke stranica BC, CA i AB, a M Mikelova tačka tog trougla za trojku P, Q, R, dokazati da duži MP, MQ, MR zahvataju s odgovarajućim stranicama tog trougla jednake uglove, zatim da je $\angle BMC = \angle BAC + \angle RPQ$.

710. Ako su P, Q, R proizvoljne tačke stranica BC, CA i AB trougla ABC, a A', B', C' središta krugova opisanih oko trouglova AQR, BRP, CPQ, dokazati da je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

711. Ako su P_1 i P_2, Q_1 i Q_2, R_1 i R_2 proizvoljne tačke stranica BC, CA i AB trougla ABC, zatim A_1, B_1, C_1 središta krugova opisanih oko trouglova AQ_1R_1, BR_1P_1, AQ_1R_1, CP_1Q_1, i A_2, B_2, C_2 središta krugova opisanih oko trouglova AQ_2R_2, BR_2P_2, AQ_2R_2, CP_2Q_2, dokazati da je $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

712. Dokazati da se krugovi opisani oko četiri trougla koji su određeni sa četiri prave koje se seku u jednoj tački, *Mikelovoj tački* tog četvorougla.

713. Dokazati da se središta krugova opisanih oko trouglova koji su određeni sa četiri prave i Mikelova tačka četvorougla koji je određen tim pravama nalaze na jednom krugu.

714. Dokazati da su ortocentri trouglova koji su određeni sa četiri prave kolinearni.

9.3. Ojlerova prava trougla i četvorougla

Definicija 9.2. Pravu koja je određena središtem opisanog kruga i ortocentrom trougla nazivamo *Ojlerovom pravom* tog trougla.

715. Dokazati da se težište T trougla ABC nalazi na Ojlerovoj pravoj tog trougla, tj. pravoj koja je određena ortocentrom H i središtem O opisanog kruga tog trougla, pri čemu $HT : TO = 2 : 1$.

716. Ako su A_1, B_1, C_1 središta stranica BC, CA, AB trougla ABC, dokazati da se Ojlerova prava trougla $A_1B_1C_1$ poklapa sa Ojlerovom pravom trougla ABC.

717. Ako je O središte i r poluprečnik opisanog kruga, a S središte i ϱ poluprečnik upisanog kruga trougla ABC, zatim P, Q, R tačke u kojima upisani krug dodiruje stranice BC, CA, AB i H' ortocentar trougla PQR, dokazati da tačke O, S, H' pripadaju jednoj pravoj, Ojlerovoj pravoj trougla PQR, pri čemu je tačka H' iza S u odnosu na O takva da je $OS : SH' = r : \varrho$.

718. Dokazati da se prave kroz središta stranica tetivnog četvorougla upravne na pravama koje su određene naspramnim stranicama seku u jednoj tački koja je simetrična sa središtem opisanog kruga u odnosu na težište tog četvorougla. Tu tačku nazivamo *Kantorovom tačkom* ili *ortotežištem tetivnog četvorougla.*

719. Neka je $A_1A_2A_3A_4$ četvorougao upisan u krug $l(O, r)$. Ako su H_{ij} tačke simetrične sa tačkom O u odnosu na prave A_kA_l za različite vrednosti indeksa $i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$, dokazati da se prave h_{ij} kroz tačke H_{ij} upravne na pravama A_iA_j seku u jednoj tački, ortocentru H tog četvorougla, pri čemu je tačka H na Ojlerovoj pravoj OT tog četvorougla takva da je $HT : TO = 3 : 1$.

720. Ako je H ortocentar četvorougla $A_1A_2A_3A_4$ upisanog u krug $l(O, r)$, dokazati da su ortocentri H_1, H_2, H_3, H_4 trouglova $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ simetrični sa temenima A_1, A_2, A_3, A_4 u odnosu na središte S duži OH, i prema tome da tačke H_1, H_2, H_3, H_4 pripadaju krugu $l'(H, r)$ koji je simetričan sa krugom l u odnosu na tačku S. Tačku S nazivamo *središtem* ili *centrom*, a pravu s koja je u tački S upravna na pravoj OH nazivamo *središnom* ili *centralnom pravom* tog četvorougla.

721. Dokazati da se središte S tetivnog četvorougla $A_1A_2A_3A_4$ sa upravnim dijagonalama A_1A_3 i A_2A_4 poklapa sa presekom dijagonala tog četvorougla.

9.4. Ojlerov krug trougla i četvorougla

722. Dokazati da se središta stranica, podnožja visina i središta duži koje spajaju ortocentar sa temenima bilo kojeg trougla pripadaju jednom krugu, *Ojlerovom krugu* tog trougla.

723. Dokazati da se središte Ojlerovog kruga bilo kojeg trougla poklapa sa središtem duži koja spaja ortocentar sa središtem opisanog kruga tog trougla, zatim da je poluprečnik tog kruga jednak polovini poluprečnika opisanog kruga.

724. Ako su S_a, S_b, S_c središta spolja upisanih krugova trougla ABC, dokazati da je opisani krug trougla ABC Ojlerov krug trougla $S_aS_bS_c$.

725. Ako je H ortocentar, T težište, O središte opisanog kruga i O' središte Ojlerovog kruga trougla ABC, dokazati da su tačke T i H harmonijski spregnute sa tačkama O i O'.

726. Ako je H ortocentar i T težište trougla ABC, a l opisani krug i l' Ojlerov krug tog trougla. Dokazati da je tačka T unutrašnje, a tačka H spoljašnje središte sličnosti krugova l i l'.

727. Ako su A', B', C' središta stranica BC, CA, AB i S, S_a, S_b, S_c središta upisanih krugova trougla ABC, dokazati da se središta Ojlerovih krugova trouglova SBC i S_aBC nalaze na simetrali unutrašnjeg ugla A', a središta Ojlerovih krugova trougla S_bBC i S_cBC na simetrali spoljašnjeg ugla A' trougla $A'B'C'$.

728. Ako je H ortocentar, O' središte Ojlerovog kruga i r poluprečnik opisanog kruga trougla ABC, dokazati da je

$$O'A^2 + O'B^2 + O'C^2 + O'H^2 = 3r^2.$$

729. Ako su a, b, c stranice trougla ABC, a $p(M)$ potencija tačke M u odnosu na Ojlerov krug tog trougla, dokazati da je

$$p(A) + p(B) + p(C) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}.$$

730. Ako su H i S ortocentar i središte četvorougla $A_1A_2A_3A_4$ upisanog u krug (O, r), dokazati da središta S_1, S_2, S_3, S_4 duži koje spajaju tačku O sa ortocentrima H_1, H_2, H_3, H_4 trouglova $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, podnožja B_1, B_2, B_3, B_4 upravnih iz temena A_1, A_2, A_3, A_4 središnjim pravama tih trouglova i središta C_1, C_2, C_3, C_4 duži HA_1, HA_2, HA_3, HA_4 pripadaju krugu $k(S, \frac{r}{2})$, Ojlerovom krugu tetivnog četvorougla $A_1A_2A_3A_4$.

9.5. Nagelova tačka trougla

Ako su P_a, Q_b, R_c tačke u kojima spolja upisani krugovi dodiruju stranice BC, CA, AB trougla ABC, tada se, prema zadatku ..., duži AP_a, BQ_b, CR_c seku u jednoj tački koju nazivamo *Nagelovom tačkom trougla.*

731. Ako su A', B', C' središta stranica BC, CA, AB trougla ABC, dokazati da je središte kruga upisanog u trougao ABC Nagelova tačka trougla $A'B'C'$.

732. Dokazati da Nagelova tačka N, težište T i središte S upisanog kruga trougla ABC pripadaju jednoj pravoj, pri čemu je tačka T između tačaka N i S takva da je $NT : TS = 2 : 1$.

733. Ako je O središte opisanog kruga, S središte upisanog kruga, H ortocentar i N Nagelova tačka trougla ABC, dokazati da je $HN \| OS$ i $HN = 2OS$.

9.6. Spikerov krug trougla

Definicija 9.6. Krug opisan u medijalni trougao $A_1B_1C_1$ trougla ABC nazivamo *Spikerovim krugom trougla ABC.*

734. Dokazati da se središte Spikerovog kruga trougla ABC poklapa sa središtem duži koja spaja središte S upisanog kruga s Nagelovom tačkom N tog trougla.

735. Ako je S središte upisanog kruga k, S_1 središte Spikerovog kruga k_1, T težište i N Nagelova tačka trougla ABC, dokazati da su tačke T i N harmonijski spregnute s tačkama S i S_1, zatim da su tačke T i N središta sličnosti krugova k i k_1.

9.7. Furmanov krug trougla

Definicija 9.7. Krug kome je prečnik duž određena ortocentrom H i Nagelovom tačkom N trougla ABC nazivamo *Furmanovim krugom trougla* ABC.

736. Ako su X, Y, Z tačke u kojima simetrale unutrašnjih uglova A, B, C seku opisani krug trougla ABC, dokazati da se tačke X', Y', Z' simetrične s tačkama X, Y, Z u odnosu na prave BC, CA, AB nalaze na Furmanovom krugu trougla ABC.

737. Ako su X, Y, Z tačke u kojima simetrale unutrašnjih uglova A, B, C seku opisani krug trougla ABC, a X', Y', Z' njima simetrične tačke u odnosu na prave BC, CA, AB, dokazati da su trouglovi XYZ i $X'Y'Z'$ inverzno slični.

738. Dokazati da Furmanov krug trougla ABC seče prave određene visinama AA', BB', CC' u tačkama A'', B'', C'' takvim da je $AA'' = BB'' = CC'' = 2\varrho$, gde je ϱ poluprečnik upisanog kruga tog trougla.

739. Ako su A'', B'', C'' tačke u kojima Furmanov krug seče prave određene visinama AA', BB', CC' trougla ABC, dokazati da su trouglovi ABC i $A''B''C''$ inverzno slični.

9.7. Izometričke tačke u odnosu na duž i na trougao

Definicija 9.7. Dve tačke P i P' prave koja sadrži neku duž AB, simetrične među sobom u odnosu na središte O te duži nazivamo *izotomički spregnutim* ili samo *izotomičkim tačkama* u odnosu na tu duž.

740. Ako su P, Q, R tačke pravih koje su određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC, a P', Q', R' njima izometrički spregnute tačke u odnosu na odgovarajuće stranice tog trougla, i ako se pri tome prave AP, BQ, CR seku u jednoj tački O, dokazati da se i prave AP', BQ', CR' takođe seku u nekoj tački O'. Tačke O i O' nazivamo *izotomički spregnutim*, ili samo *izotomičkim* u odnosu na trougao ABC.

741. Ako su P, Q, R tačke u kojima neka prava seče prave određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC, dokazati da i njima izotomički spregnute tačke u odnosu na odgovarajuće stranice takođe pripadaju jednoj pravoj.

742. Prave kroz temena trougla ABC uporedne s naspramnim stranicama određuju izvestan trougao $A'B'C'$. Ako je K' središte kruga upisanog u trougao $A'B'C'$, a K tačka izotomički spregnuta s tačkom K' u odnosu na trougao $A'B'C'$, dokazati da trougao ABC odseca na pravama, koje sadrže tačku K, a uporedne su sa stranicama tog trougla, jednake odsečke.

9.8. Izogonalne prave u odnosu na ugao. Izogonalne tačke u odnosu na trougao.

Definicija 9.8. Dve prave kroz teme nekog ugla simetrične među sobom u odnosu na simetralu tog ugla nazivamo *izogonalno spregnutim pravama*, ili samo *izogonalnim pravama* u odnosu na taj ugao. Tako je npr. prava koja sadrži visinu AA_1 trougla ABC izogonalna s pravom koja sadrži poluprečnik OA opisanog kruga tog trougla u odnosu na ugao $\angle A$. Simetrala jednog ugla izogonalna je samoj sebi u odnosu na taj ugao.

743. Ako su m i n dve izogonalne prave u odnosu na ugao $\angle POQ$, a A i B podnožja upravnih iz proizvoljne tačke M prave m na pravama OP i OQ, dokazati da je $n \perp AB$.

744. Ako su M i N proizvoljne tačke dveju pravih izogonalnih u odnosu na ugao $\angle POQ$, dokazati da su odstojanja tačke M od pravih OP i OQ obrnuto proporcionalna odstojanjima tačke N od pravih OP i OQ.

745. Ako su M i N tačke u ravni ugla POQ takve da su odstojanja tačke M od pravih OP i OQ obrnuto proporcionalna odstojanjima tačke N od pravih OP i OQ, dokazati da su prave OM i ON izogonalne u odnosu na ugao $\angle POQ$.

746. Ako su M i N proizvoljne tačke dveju pravih koje su izogonalne u odnosu na ugao $\angle POQ$, dokazati da podnožja upravnih iz tačaka M i N na pravama OP i OQ pripadaju jednom krugu, kome se središte poklapa sa središtem duži MN.

747. Ako je O proizvoljna tačka u ravni trougla ABC, dokazati da se prave izogonalne s pravama OA, OB, OC respektivno u odnosu na A, B, C, seku u jednoj tački O', ili su među sobom uporedne. Tačke O i O' nazivamo *izogonalno spregnutim* ili samo *izogonalnim* u odnosu na trougao ABC.

748. Ako su O i O' dve tačke izogonalne u odnosu na trougao ABC, dokazati da podnožja upravnih iz tačaka O i O' na pravama BC, CA, AB pripadaju jednom krugu, kome se središte poklapa sa središtem duzi OO'. Taj krug nazivamo *pedalnim krugom* dveju tačaka izogonalnih u odnosu na trougao ABC.

749. Ako neki krug k seče stranice BC, CA, AB trougla ABC u tačkama P i P', Q i Q', R i R', pri čemu se normale u tačkama P, Q, R na stranicama BC, CA, AB seku u jednoj tački O, dokazati da se i normale u tačkama P', Q', R' takođe seku u jednoj tački O', zatim da su tačke O i O' izogonalne u odnosu na trougao ABC.

750. Ako su O i O' dve tačke izogonalne u odnosu na trougao ABC, a A', B', C', tačke simetrične s tačkom O u odnosu na prave BC, CA, AB, dokazati da je tačka O' središte kruga opisanog oko trougla $A'B'C'$.

9.9. Lemoanova tačka i Lemoanova prava trougla

Definicija 9.9. Ako je duž AA' medijana iz temena A trougla ABC, a A'' tačka u kojoj prava simetrična s pravom AA' u odnosu na simetralu unutrašnjeg ugla $\angle A$ seče stranicu BC, kažemo da je duž AA'' unutrašnja simedijana ili samo simedijana iz temena A trougla ABC. Ako je T tačka u kojoj dirka kroz tačku A kruga opisanog oko trougla ABC seče pravu BC, kažemo da je duž AT spoljašnja simedijana iz temena A trougla ABC. Specijalno, ako je ugao $\angle A$ trougla ABC prav, simedijana iz temena A poklapa se s visinom iz tog istog temena.

751. Dokazati da prava određena simedijanom AA'' trougla ABC sadrži pol A_0 prave BC u odnosu na krug opisan oko trougla ABC.

752. Ako su AA'' i AT unutrašnja i spoljašnja simedijana trougla ABC, dokazati da su prave AA'' i AT harmonijski spregnute s pravama AB i AC.

753. Ako je AA'' simedijana iz temena A trougla ABC, dokazati da je

$$BA'' : A''C = AB^2 : AC^2.$$

754. Dokazati da se simedijane AA'', BB'', CC'' trougla ABC seku u jednoj tački simedijalnoj ili Lemoanovoj tački trougla ABC.

755. Ako je L Lemoanova tačka trougla ABC, tj. tačka u kojoj se seku simedijane AA'', BB'', CC'', dokazati da je

$$AL : LA'' = (AB^2 + AC^2) : BC^2$$

756. Dokazati da su odstojanja Lemoanove tačke trougla od pravih koje su određene stranicama tog trougla srazmerne njegovim odgovarajućim stranicama.

757. Ako su odstojanja tačke L od pravih koje su određene stranicama trougla ABC srazmerna odgovarajućim stranicama, dokazati da je L Lemoanova tačka tog trougla.

758. Ako su P, Q, R tačke u kojima upisani krug dodiruje stranice BC, CA, AB trougla ABC, dokazati da je Žergonova tačka G trougla ABC Lemoanova tačka trougla PQR.

759. Dokazati da se Lemoanova tačka pravouglog trougla poklapa sa središtem visine koja odgovara hipotenuzi tog trougla.

760. Ako su P, Q, R podnožja upravnih iz Lemoanove tačke L na stranicama BC, CA, AB trougla ABC, dokazati da je tačka L težište trougla PQR.

761. Dokazati da je Lemoanova tačka L trougla ABC pol Lemoanove prave $s(v.3...)$ u odnosu na opisani krug tog trougla.

762. Ako je L Lemoanova tačka i O središte opisanog kruga trougla ABC, dokazati da je prava OL upravna na Lemoanovoj pravoj s tog trougla.

763. Ako su AA' i AA'' medijana i simedijana iz temena A trougla ABC. Ako su Q i R podnožja upravnih iz proizvoljne tačke P medijane AA' na stranicama AB i AC, dokazati da je $QR \perp AA'$, i obrnuto, ako su Q' i R' podnožja upravnih iz proizvoljne tačke P' simedijane AA'' na stranicama AB i AC, dokazati da je $Q'R' \perp AA'$. Najzad, dokazati da je $PQR \sim P'R'Q'$.

764. Ako simedijana AA' koja odgovara temenu A trougla ABC sadrži središte duži MN kojoj su krajevi na stranicama AB i AC, dokazati da je četvorougao $BCMN$ tetivan.

765. Ako su M i N tačke stranica AB i AC trougla ABC takve da je četvorougao $BCNM$ tetivan, dokazati da se središte K duži MN nalazi na simedijani koja odgovara temenu A trougla ABC.

766. Neka su P i Q tačke stranica AB i BC, a R i S tačke stranica AC i BC takve da su četvorouglovi $APQC$ i $ARSB$ tetivni. Ako su pri tome duži PQ i RS jednake, dokazati da se prave PQ i RS seku na pravoj koja sadrži simedijanu iz temena A trougla ABC, ili su uporedne s tom pravom.

767. Ako su P i Q tačke stranica AB i BC, a R i S tačke stranica AC i BC takve da su četvorouglovi $APQC$ i $ARSB$ tetivni. Ako se pri tome prave PQ i RS seku na pravoj, koja sadrži simedijanu iz temena A trougla ABC. Dokazati da je $PQ = RS$.

9.10. Lemoanovi krugovi trougla

768. Dokazati da prave kroz Lemoanovu tačku trougla uporedne sa stranicama seku taj trougao u tačkama koje pripadaju jednom krugu, prvom Lemoanovom krugu tog trougla.

769. Dokazati da se središte prvog Lemoanovog kruga trougla poklapa sa središtem duži koja spaja Lemoanovu tačku sa središtem opisanog kruga tog trougla.

770. Dokazati da šest tačaka u kojima prvi Lemoanov krug seče trougao određuju dva među sobom podudarna trougla.

771. Ako su Q_3 i P_2 tačke u kojima prvi Lemoanov krug seče stranicu BC trougla ABC, dokazati da je

$$BQ_3 : Q_3P_2 : P_2C = AB^2 : BC^2 : CA^2.$$

772. Ako su Q_2P_1, Q_3P_2, Q_1P_3 duži koje prvi Lemoanov krug odseca od stranica AB, BC, CA trougla ABC. Dokazati da je

$$Q_2P_1 : Q_3P_2 : Q_1P_3 = AB^3 : BC^3 : CA^3.$$

773. Dokazati da prave kroz Lemoanovu tačku trougla, od kojih je svaka antiparalelna s jednom stranicom tog trougla u odnosu na ostale dve stranice, seku taj trougao u tačkama koje pripadaju jednom krugu, drugom Lemoanovom krugu tog trougla. Središte tog kruga je Leomanova tačka tog trougla.

774. Ako su r_1 i r_2 poluprečnici prvog i drugog Lemoanovog kruga i r poluprečnik opisanog kruga trougla ABC, dokazati da je

$$4r_1^2 - r_2^2 = r^2$$

775. Dokazati da kod trougla prvi Lemoanov krug seče drugi Lemoanov krug u dijametralno suprotnim tačkama.

9.11. Tikerovi krugovi trougla

776. Ako su A', B', C' tačke duži LA, LB, LC koje spajaju Lemoanovu tačku L s temenima trougla ABC takve da je $LA : LA' = LC : LC'$, zatim P_1 i Q_1 tačke u kojima prava $B'C'$ seče stranice AB i AC, P_2 i Q_2 tačke u kojima prava $C'A'$ seče stranice BC i AB, P_3 i Q_3 tačke u kojima prava $A'B'$ seče stranice AC i BC, dokazati da šest tačaka $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3$ pripadaju jednim krugu, Tikerovom krugu trougla ABC.

777. Dokazati da se središta Tikerovih krugova trougla nalaze na pravoj koja je određena Lemoanovom tačkom i središtem opisanog kruga tog trougla.

9.12. Tajlorov krug trougla

778. Dokazati da upravne projekcije podnožja svih visina trougla na pravama koje sadrže neodgovarajuće stranice tog trougla, pripadaju jednom krugu, Tajlorovom krugu tog trougla.

779. Dokazati da se središte Tajlorovog kruga trougla nalazi na pravoj koja je određena Lemoanovom tačkom i središtem opisanog kruga tog trougla.

9.13. Brokarove tačke trougla

Sledećim zadatkom biće dokazano da u ravni proizvoljnog trougla ABC postoji jedna i samo jedna tačka X takva da je $XAB = XCA$, zatim da postoji jedna i samo jedna tačka X' takva da je $X'AC = X'BA = X'CB$.Tačku X zvaćemo prvom, tačku X' drugom Brokarovom tačkom trougla ABC. Sem toga, poluprave AX, BX, CX zvaćemo prvim, a poluprave AX', BX', CX' drugim Brokarovim polupravama trougla ABC.

780. Dokazati da u ravni trougla ABC postoji jedna i samo jedna tačka X takva da je $XAB = XBC = XCA$, zatim da postoji jedna i samo jedna tačka X' takva da je $X'AC = X'BA = X'CB$.

781. Dokazati da su Brokarove tačke trougla izogonalno spregnute u odnosu na taj trougao.

782. Ako je ABC proizvoljan trougao, k krug koji sadrži teme B i dodiruje pravu AC u tački C, a D tačka u kojoj prava kroz teme C uporedna sa stranicom AB seče krug k, dokazati da je tačka X u kojoj prava AD seče krug k prva Brokarova tačka trougla ABC.

783. Ako su X i X' prva i druga Brokarova tačka trougla ABC, a X_a i X'_a tačke u kojima prave AX i AX' seku pravu BC, dokazati da je

(a) $\dfrac{BX_a}{X_aC} = \dfrac{c^2}{a^2}, \quad \dfrac{BX'_a}{X'_aC} = \dfrac{a^2}{b^2};$

(b) $\dfrac{AX}{XX_a} = \dfrac{a^2b^2 + b^2c^2}{a^2c^2}, \quad \dfrac{AX'}{X'X'_a} = \dfrac{b^2c^2 + a^2c^2}{a^2b^2}.$

784. Ako je X prva Brokarova tačka trougla ABC i ako su A', B', C' tačke u kojima prave CX, AX, BX seku opisani krug trougla ABC, dokazati da su trouglovi ABC i $A'B'C'$ podudarni, zatim da je tačka X druga Brokarova tačka trougla $A'B'C'$.

785. Ako su X i X' Brokarove tačke i središte opisanog kruga trougla ABC, dokazati da je $OX = OX'$.

786. Ako su P, Q, R podnožja upravnih iz bilo koje Brokarove tačke X na stranicama BC, CA, AB, dokazati da je $\triangle ABC \sim \triangle RPQ$.

787. Ako su P, Q, R podnožja upravnih iz prve Brokarove tačke, a P', R', Q' podnožja upravnih iz druge Brokarove tačke na stranicama BC, CA, AB trougla ABC, dokazati da je $\triangle PQR \sim \triangle R'P'Q'$.

9.14. Brokarov krug trougla

Definicija 9.14. Krug kome je prečnik duž određena središtem opisanog kruga i Lemoanovom tačkom trougla nazivamo *Brokarovim krugom* tog trougla. Iz ove definicije neposredno sleduje da su Brokarov krug i prvi Lemoanov krug koncentrični. Simetrale stranica BC, CA, AB seku Brokarov krug trougla ABC u tački O, središtu opisanog kruga, i u tačkama A_1, B_1, C_1 koje obrazuju prvi Brokarov trougao $A_1B_1C_1$ datog trougla ABC. Prave koje sadrže simedijane iz temena A, B, C seku Brokarov krug trougla ABC u Lemoanovoj tački L, i u tačkama A_2, B_2, C_2 koje određuju drugi Brokarov trougao $A_2B_2C_2$ datog trougla ABC.

788. Dokazati da se Brokarove tačke trougla nalaze na Brokarovom krugu tog trougla.

789. Dokazati da je Brokarov prvi trougao inverzno sličan s datim trouglom.

790. Dokazati da se prave kroz temena trougla uporedne s odgovarajućim stranicama prvog Brokarovog trougla seku u jednoj tački koja se nalazi na opisanom krugu datog trougla. Tu tačku nazivamo *Štajnerovom tačkom datog trougla*.

791. Dokazati da se prave kroz temena trougla upravne na odgovarajućim stranicama Brokarovog prvog trougla seku u jednoj tački, koja se nalazi na opisanom krugu datog trougla. Tu tačku nazivamo *Tarijevom tačkom tog trougla*.

792. Dokazati da su temena drugog Brokarovog trougla središta duži koje odseca opisani krug datog trougla na pravama određenim simedijanama tog trougla.

793. Ako je ABC proizvoljan trougao, dokazati da se krugovi k_1 i k_2 od kojih prvi sadrži teme B i dodiruje stranicu AC u tački A, a drugi sadrži teme C i dodiruje stranicu AC u tački A, seku sem u tački A u izvesnoj tački A_2, koja predstavlja teme drugog Brokarovog trougla datog trougla ABC.

9.15. Apolonijevi krugovi i izodinamičke tačke trougla

Definicija 9.15. Neka su E i F tačke u kojima simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla A trougla ABC seku pravu BC. Krug k_a kome je duž EF prečnik nazivamo *Apolonijevim krugom* koji odgovara temenu A ili stranici BC trougla ABC. Analogno se konstruišu i Apolonijevi krugovi k_b i k_c koji odgovaraju temenima B i C tog trougla. S obzirom da je ugao EAF prav, teme A je na krugu k_a. Isto tako je teme B na krugu k_b, a teme C na krugu k_c.

794. Dokazati da je opisani krug trougla ortogonalan na Apolonijevim krugovima tog trougla.

795. Dokazati da je Brokarov krug trougla ortogonalan na Apolonijevim krugovima tog istog trougla.

796. Dokazati da je Lemoanova prava trougla radikalna osa Brokarovog kruga i opisanog kruga istog trougla.

797. Dokazati da Apolonijevi krugovi trougla pripadaju eliptičkom pramenu krugova. Tačke u kojima se seku ti krugovi nazivamo *izodinamičkim tačkama* datog trougla.

798. Dokazati da se izodinamičke tačke trougla nalaze na pravoj koja je određena središtem opisanog kruga i Lemoanovom tačkom tog trougla.

799. Dokazati da je središte bilo kojeg Apolonijevog kruga trougla središte sličnosti druga dva Apolonijeva kruga tog trougla.

800. Dokazati da je prava određena presečnim tačkama opisanog kruga s Apolonijevim krugom koji odgovara jednom temenu trougla sadrži simedijanu iz istog temena tog trougla.

801. Dokazati da je prava koja sadrži simedijanu iz jednog temena trougla, polara središta opisanog kruga u odnosu na Apolonijev krug koji odgovara istom temenu tog trougla.

9.16. Droz-Farnijevi krugovi trougla

Definicija 9.16. Krugove kojima se središta poklapaju sa ortocentrom nekog trougla nazivamo *Droz-Farnijevim krugovima* tog trougla. Polarni krug trougla (v.3...) je specijalan Droz-Farnijev krug tog trougla.

802. Ako su A_1, B_1, C_1 središta stranica BC, CA, AB trougla ABC, a t_a, t_b, t_c krugovi jednakih poluprečnika kojima su središta A, B, C, dokazati da tačke P_1 i P_2, Q_1 i Q_2, R_1 i R_2 u kojima prave B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 seku respektivno krugove t_a, t_b, t_c pripadaju jednom krugu, kome se središte poklapa s ortocentrom H tog trougla.

803. Ako su poluprečnici krugova t_a, t_b, t_c navedenih u prethodnom zadatku jednaki duži ϱ_0, a poluprečnici njima odgovarajućeg Droz-Farnijevog kruga i opisanog kruga trougla ABC jednaki dužima r_0 i r, dokazati da je

$$r_0^2 = 4r^2 + \varrho_0^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

804. Ako su A', B', C' podnožja visina iz temena A, B, C i O središte opisanog kruga trougla ABC, dokazati da tačke P_1 i P_2, Q_1 i Q_2, R_1 i R_2 u kojima krugovi $(A', A'O)$, $(B', B'O)$, $(C', C'O)$ seku respektivno prave BC, CA, AB pripadaju jednom krugu kome se središte poklapa s ortocentrom H tog trougla.

805. Ako su A_1, B_1, C_1 središta stranica BC, CA, AB i H ortocentar trougla ABC, dokazati da tačke P_1 i P_2, Q_1 i Q_2, R_1 i R_2 u kojima krugovi (A_1, A_1H), (B_1, B_1H), (C_1, C_1H) seku respektivno prave BC, CA, AB pripadaju jednom krugu kome se središte poklapa sa središtem O opisanog kruga trougla ABC.

9.17. Adamsovi krugovi trougla

806. Dokazati da tačke u kojima prave kroz Žergonovu tačku trougla upravne na simetralama njegovih unutrašnjih uglova seku taj trougao, pripadaju jednom krugu, Adamsovom krugu tog trougla.

807. Dokazati da se središte Adamsovog kruga trougla poklapa sa središtem upisanog kruga tog trougla.

808. Ako je G_i Žargonova tačka koja odgovara spolja upisanom krugu $k_i (i = a, b, c)$ trougla ABC, a S_i središte kruga k_i, dokazati da tačke u kojima prave kroz tačku G_i upravne na pravama AS_i, BS_i, CS_i seku respektivno prave AB i BC, BC i BA, CA i CB, pripadaju jednom krugu, Adamsovom krugu koji odgovara spolja upisanom krugu k_i trougla ABC

809. Dokazati da se središte Adamsovog kruga koji odgovara spolja upisanom krugu k_i trougla ABC poklapa sa središtem S_i kruga k_i trougla ABC.

9.18. Ortopol prave u odnosu na trougao

810. Ako su A', B', C' upravne projekcije temena A, B, C trougla ABC na nekoj pravoj s, dokazati da se prave kroz tačke A', B', C', upravne na pravama BC, CA, AB seku u izvesnoj tački S, ortopolu prave s u odnosu na trougao ABC.

811. Dokazati da ortopolovi S_1 i S_2 dveju uporednih pravih s_1 i s_2 u odnosu na isti trougao ABC određuju duž koja je upravna na pravama s_1 i s_2 i jednaka međusobnom odstojanju pravih s_1 i s_2.

812. Dokazati da se ortopol prave koja sadrži središte opisanog kruga trougla u odnosu na taj trougao, nalazi na Ojlerovom krugu tog trougla.

813. Ako su P i Q tačke u kojima neka prava s seče opisani krug trougla ABC, dokazati da se Simsonove prave tačaka P i Q u odnosu na trougao ABC seku u ortopolu prave s u odnosu na trougao ABC.

10. GEOMETRIJA POLIGONA

10.1. Opšti poligoni

814. Ako je $\{A_1, \ldots, A_n\}$ konačan skup od n tačaka, dokazati da se težišne linije koje spajaju tačke A_i tog skupa sa težištima T_i podskupova koji se sastoje iz preostalih $n-1$ tačaka seku u jednoj tački T, težištu tog skupa tačaka, pri čemu je

$$A_iT : TT_i = (n-1) : 1.$$

815. Ako je konačan skup $\{A_1, \ldots, A_n\}$ od n tačaka razložen na dva podskupa S_1 i S_2, od kojih prvi sadrži p, a drugi preostalih $n-p$ tačaka, dokazati da se težište T datog skupa nalazi između težišta T_1 i T_2 podskupova S_1 i S_2, pri čemu je

$$TT_1 : TT_2 = (n-p) : p.$$

816. Ako su $P_1, \ldots, P_n$ tačke stranica $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$ n-tougla $A_1, \ldots A_n$ takve da je $A_1P_1 : P_1A_2 = \ldots = A_nP_n : P_nA1$, dokazati da se težišta poligona $A_1, \ldots A_n$ i $P_1, \ldots P_n$ poklapaju.

817. Ako je T težište proizvoljnog skupa $\{A_1, \ldots, A_n\}$ od n tačaka jedne ravni, i ako su $T', A_1', \ldots, A_n'\}$ uporedne projekcije tačaka $T, A_1, \ldots, A_n$ na nekoj pravoj s koja je takođe u toj ravni, dokazati da je

$$TT' = \frac{1}{n}(A_1A_1' + \ldots + A_nA_n').$$

818. (*Lajbnicova teorema*) Ako je T težište konačnog skupa od n tačaka $\{A_1, \ldots, A_n\}$ i P bilo koja tačka, dokazati da je:

$$\sum_{i=1}^{n} PA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} PA_i^2 + nPT^2.$$

819. Ako je $\{A_1, \ldots, A_n\}$ proizvoljan skup od n tačaka, T težište tog skupa i T_i težište podskupa $\{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n\}$, dokazati da je:

(a)

$$A_iT_i^2 = \frac{1}{(n-1)^2}[n\sum_{j=1}^{n} A_iA_j^2 - \sum_{j,k=1}^{n} A_jA_k^2]$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{n} A_iT^2 = \frac{n}{(n-1)^2}\sum_{i,j=1}^{n} A_iA_j^2$$

(v)

$$\sum_{i=1}^{n} TT_i^2 = \frac{1}{n(n-1)^2}\sum_{i,j=1}^{n} A_iA_j^2, i < j$$

(g)

$$\sum_{i=1}^{n} A_iT^2 = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} A_iA_j^2$$

820. Ako su P i Q težišta dvaju konačnih skupova tačaka $A_1, \ldots, A_m$ i $B_1, \ldots, B_n$, dokazati da je

$$PQ^2 = \frac{1}{mn}\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_iB_j^2 - \sum_{i,k=1}^{m} A_iA_k^2 - \frac{m}{n}\sum_{j,l=1}^{n} B_jB_l^2\Big).$$

821. Ako je T težište proizvoljnog skupa $A_1, \ldots, A_n$ od n tačaka i ako su P i Q dve bilo koje tačke, dokazati da je

$$(PA_1^2 + \ldots + PA_n^2) - (QA_1^2 + \ldots + QA_n^2) = n((PT^2 - QT^2).$$

822. Odrediti skup svih tačaka kojima je zbir kvadrata rastojanja od n datih tačaka $A_1, \ldots, A_n$ jednak kvadratu date duži l.

10.2.Tetivni i tangentni poligoni

823. Dokazati da je kod prostog tetivnog poligona $A_1, \ldots, A_{2n}$ s parnim brojem stranica zbir unutrašnjih uglova kod temena s neparnim indeksima jednak zbiru unutrašnjih uglova kod temena s parnim indeksima.

824. Ako dva poligona $A_1, \ldots, A_{2n}$ i $B_1, \ldots, B_{2n}$ upisani u isti krug k imaju $2n-1$ uporednih odgovarajućih stranica, dokazati da su i preostale dve odgovarajuće stranice tih poligona među sobom uporedne.

825. Ako dva poligona $A_1, \ldots, A_{2n+1}$ i $B_1, \ldots, B_{2n+1}$ upisani u isti krug k imaju $2n$ uporednih odgovarajućih stranica, dokazati da su preostale dve odgovarajuće stranice tih poligona među sobom jednake.

826. Ako su unutrašnji uglovi tetivnog poligona $A_1, \ldots, A_{2n+1}$ s neparnim brojem stranica među sobom jednaki, dokazati da je taj poligon pravilan.

827. Ako je P tačka kruga opisanog oko tetivnog n-tougla $A_1, \ldots, A_n$, dokazati da podnožja upravnih iz tačke P na Simsonovim pravama te iste tačke u odnosu na $(n-1)$-touglove $A_1 \ldots A_{i-1}A_{i+1} \ldots A_n$ za $i = 1, \ldots, n$ pripadaju jednoj pravoj koju nazivamo *Simsonovom pravom tačke P u odnosu na n-tougao* $A_1, \ldots, A_n$.

828. Ako je T težište proizvoljnog skupa $A_1, \ldots, A_n$ od n tačaka nekog kruga $l(O, r)$, dokazati da se prave kroz težišta podskupova $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_n$ upravne na pravama A_iA_j $(i, j = 1, \ldots, n; i \neq j)$ seku u jednoj tački, *ortotežištu K datog skupa tačaka.* Dokazati zatim da je tačka K na Ojlerovoj pravoj OT tog skupa tačaka, pri čemu je $OT : TK = (n-2) : 2$.

829. Ako je T težište proizvoljnog skupa $\{A_1, \ldots, A_n\}$ od n tačaka nekog kruga $l(O, r)$, metodom matematičke indukcije dokazati da se prave kroz ortocentre podskupova $\{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_n\}$ upravne na pravama A_iA_j seku u jednoj tački, *ortocentru H datog skupa tačaka.* Dokazati zatim da je tačka H na Ojlerovoj pravoj OT datog skupa tačaka, pri čemu je $HT : TO = (n-1) : 1$.

830. Ako je H ortocentar proizvoljnog skupa $\{A_1, \ldots, A_n\}$ od n tačaka nekog kruga $l(O, r)$, dokazati da su ortocentri H_i podskupova $\{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n\}$ simetrični sa tačkama A_i u odnosu na središte S duži OH. Tačku S nazivamo *središtem* ili *centrom*, a pravu s koja je u tački S upravna na Ojlerovoj pravoj, nazivamo *središnjom* ili *centralnom pravom datog skupa tačaka.*

831. Ako je skup $\{A_1, \ldots, A_n\}$ od n tačaka nekog kruga $l(O, r)$ razložen na proizvoljan način na dva podskupa S_1 i S_2 tačaka, dokazati da su ortocentri tih podskupova simetrični među sobom u odnosu na središte S datog skupa tačaka.

832. Ako je S središte, a H ortocentar proizvoljnog skupa $\{A_1, \ldots, A_n\}$ od n tačaka nekog kruga $l(O, r)$, dokazati da se H_i podskupova $\{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n\}$ nalaze na izvesnom krugu l' kome je središte H, a poluprečnik jednak duži r.

833. Ako je $\{A_1, \ldots, A_n\}$ proizvoljan skup od n tačaka nekog kruga $l(O, r)$, dokazati da se prave n_i kroz tačke A_i upravne na centralnim pravama s_i podskupova $\{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n\}$ seku u ortocentru H datog skupa tačaka.

834. Ako je S centar i H ortocentar proizvoljnog skupa $\{A_1, \ldots, A_n\}$ sa n tačaka nekog kruga $l(O, r)$, dokazati da ortocentri S_i podskupova $\{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n\}$, podnožje B_i upravnih iz tačaka A_i na centralnim pravama s_i podskupova $\{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n\}$ i središta C_i duži HA_i pripadaju jednom krugu k, kome je središte S, a poluprečnik jednak polovini duži r. Krug k nazivamo *Ojlerovim karakterističnim krugom* datog skupa tačaka.

835. Dokazati da se ortopolovi P_{ijk} centralnih pravih p_{ijk} podskupova

$$\{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_n\}$$

u odnosu na trouglove određene tačkama A_i, A_j, A_k datog skupa $\{A_1, \ldots, A_n\}$ od n tačaka nekog kruga $l(O, r)$, nalaze na Ojlerovom karakterističnom krugu datog skupa tačaka.

836. Ako je H ortocentar i K ortotežište proizvoljnog skupa $\{A_1, \ldots, A_n\}$ od n tačaka nekog kruga $l(O, r)$, dokazati da težišta $T_i (i = 1, \ldots, n)$ podskupova $\{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n\}$ i tačke E_i duži KA_i takve da je $A_iE_i : E_iK = (n-2) : 1$, pripadaju jednom krugu l_1, kome je središte O_1 tačka duži OH takva da je $HO_1 : O_1O = (n-2) : 1$, a poluprečnik r_1 duž takva da je $r : r_1 = (n-1) : 1$.Krug l_1 nazivamo *Ojlerovim centralnim krugom* datog skupa tačaka.

837. Ako su K, T i O_1 ortotežište, težište i središte Ojlerovog centralnog kruga l_1 proizvoljnog skupa $\{A_1, \ldots, A_n\}$ od n tačaka nekog kruga $l(O, r)$, dokazati da su tačke T i K harmonijski spregnute sa tačkama O i O_1, šta više da su tačke T i K središta sličnosti krugova l i l_1.

838. Ako je T težište i K ortotežište proizvoljnog skupa $\{A_1, \ldots, A_n\}$ od n tačaka nekog kruga $l(O, r)$, dokazati da je

(a)
$$OT^2 = r^2 - \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} A_iA_j$$

(b)
$$OK^2 = \frac{1}{(n-2)^2} \cdot [n^2r^2 - \sum_{i,j=1}^{n} A_iA_j{}^2]$$

(v)
$$KT^2 = \frac{4}{(n-2)^2} \cdot [r^2 - \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} A_iA_j{}^2], i < j$$

839. Ako je H ortocentar, K središte i S središte proizvoljnog skupa $\{A_1, \ldots, A_n\}$ od n tačaka nekog kruga $l(O, r)$, dokazati da je

(a)

$$\sum_{i=1}^{n} HA_i^2 = n \cdot (n-1)^2 \cdot r^2 - (n-2) \cdot \sum_{i=1}^{n} A_iA_j{}^2$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{n} KA_i^2 = \frac{4n}{(n-2)^2} \cdot r^2 + \frac{n-4}{(n-2)^2} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} A_iA_j^2, i < j$$

(v)

$$\sum_{i=1}^{n} SA_i^2 = \frac{n(n-2)^2}{4} \cdot r^2 - \frac{n-4}{4} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} A_iA_j^2, i < j$$

840. Ako je H ortocentar, T težište i K ortotežište proizvoljnog skupa $\{A_1, \ldots, A_n\}$ od n tačaka nekog kruga $l(O, r)$, dokazati da je

(a)

$$HO^2 = n^2r^2 - \sum_{i,j=1}^{n} A_iA_j^2, i < j$$

(b)

$$HT^2 = (n-1)^2r^2 - \frac{(n-1)^2}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} A_iA_j^2, i < j$$

(v)

$$HK^2 = \frac{n^2(n-3)^2}{(n-2)^2}(r^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} A_iA_j^2), i < j$$

841. Ako je S centar i H ortocentar proizvoljnog skupa $\{A_1, \ldots, A_n\}$ od n tačaka nekog kruga $l(O, r)$, dokazati da je

$$\sum_{i=1}^{n} SA_i^2 - (n-4)SH^2 = nr^2.$$

842. Ako je K ortotežište proizvoljnog skupa $\{A_1, \ldots, A_n\}$ od n tačaka nekog kruga $l(O, r)$, a T_i težište podskupa $\{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n\}$ dokazati da je

(a)

$$KA_i^2 = \frac{1}{(n-2)^2}[4r^2 + (n-2)\sum_{j=1}^{n} A_iA_j^2 - \sum_{j,k=1}^{n} A_jA_k^2], j < k$$

(b)

$$KT_i^2 = \frac{1}{(n-1)^2(n-2)^2}[4(n-1)^2r^2 - (n-2)\sum_{j=1}^{n} A_iA_j^2 - \sum_{j,k=1}^{n} A_jA_k^2], j < k$$

843. Ako je T težište poligona $A_1 \ldots A_n$ upisanog u krug k kome je središte O i poluprečnik r, i ako je d duž određena tačkama O i T, dokazati da je

$$TA^2 + \ldots + TA_n^2 = n(r^2 - d^2).$$

844. Ako je T težište poligona $A_1 \ldots A_n$ upisanog u krug k i ako su $B_1, \ldots, B_n$ tačke u kojima prave $A_1T, \ldots, A_nT$ seku krug k, dokazati da je

$$\frac{A_1T}{TB_1} + \ldots + \frac{A_nT}{TB_n} = n.$$

845. Ako su $p_1, \ldots, p_{2n}$ odstojanja proizvoljne tačke P kruga l od pravih koje sadrže stranice $A_1A_2, \ldots, A_{2n}A_1$ poligona $A_1 \ldots A_{2n}$ upisanog u krug l, dokazati da je

$$p_1 \cdot p_3 \cdot p_5 \cdot \ldots \cdot p_n = p_2 \cdot p_4 \cdot \ldots \cdot p_{2n}.$$

846. Ako su $p_1, \ldots, p_n$ odstojanja proizvoljne tačke P kruga l od pravih koje sadrže stranice n-tougla $A_1 \ldots A_n$ upisanog u krug l, a $q_1, \ldots, q_n$ odstojanja tačke P od dirki kruga l u tačkama $A_1, \ldots, A_n$, dokazati da je

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n.$$

847. Ako su $a_1, \ldots, a_n$ duži jednake stranicama $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$ n-tougla $A_1 \ldots A_n$ upisanog u krug l, a $p_1, \ldots, p_n$ odstojanja proizvoljne tačke P luka A_nA_1 kruga l od pravih koje sadrže stranice $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$, dokazati da je

$$\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{p_{n-1}} = \frac{a_n}{p_n}.$$

10.3. Pravilni poligoni

Definicija 10.1. Prost ravan poligon kome su jednake sve stranice i svi unutrašnji uglovi nazivamo *pravilnim.* Prost ravan poligon kome je zadovoljen samo jedan od pomenutih dvaju uslova nazivamo *polupravilnim.* Stoga razlikujemo dve vrste polupravilnih poligona i to polupravilne jednakostranične i polupravilne jednakougaone poligone.

U ovom članu proučavaće se pravilni poligoni.

848. Ako je r poluprečnik i P proizvoljna tačka kruga opisanog oko pravilnog poligona $A_1 \ldots A_n$, dokazati da je

$$PA_1^2 + \ldots + PA_n^2 = 2nr^2.$$

849. Ako su $M_1, \ldots, M_n$ središta stranica $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$ pravilnog poligona $A_1 \ldots A_n$, a P proizvoljna tačka kruga $k(O, r)$ opisanog oko tog poligona, i a stranica tog poligona, dokazati da je

$$PM_1^2 + \ldots + PM_n^2 = 2nr^2 - \frac{1}{4}na^2.$$

850. Ako je r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga pravilnog poligona $A_1 \ldots A_n$, zatim P proizvoljna tačka upisanog kruga, dokazati da je

$$PA_1^2 + \ldots + PA_n^2 = n(r^2 + \varrho^2).$$

851. Ako su $A_1, \ldots, A_n$ i $B_1, \ldots, B_n$ dva pravilna poligona s jednakim brojem stranica, upisana u isti krug k, i ako je P proizvoljna tačka u ravni tog kruga, dokazati da je

$$PA_1^2 + \ldots + PA_n^2 = PB_1^2 + \ldots + PB_n^2.$$

852. Ako je $A_1 \dots A_{2n}$ pravilan poligon s parnim brojem stranica i P bilo koja tačka njegove ravni, dokazati da je

$$PA_1^2 + PA_{n+1}^2 = PA_2^2 + PA_{n+2}^2 = \dots = PA_n^2 + PA_{2n}^2.$$

853. Ako su $d_1, \dots, d_{2n+1}$ rastojanja temena pravilnog poligona $A_1 \dots A_{2n+1}$ s neparnim brojem stranica od proizvoljne tačke P koja se nalazi na manjem luku A_1A_{2n+1} kruga opisanog oko tog poligona, dokazati da je

$$d_1 + d_3 + \dots + d_{2n+1} = d_2 + d_4 + \dots + d_{2n}.$$

853. Ako su $d_1, \dots, d_{2n+1}$ rastojanja temena $A_1, \dots, A_n$ pravilnog n-tougla $A_1 \dots A_n$ od proizvoljne tačke P koja se nalazi na manjem luku A_1A_n kruga opisanog oko tog n-tougla, dokazati da je

$$\frac{1}{d_1d_2} + \frac{1}{d_2d_3} + \frac{1}{d_3d_4} + \dots + \frac{1}{d_{n-1}d_n} = \frac{1}{d_1d_n}.$$

854. Ako su $d_1, \dots, d_n$ rastojanja temena $A_1, \dots, A_n$ pravilnog n-tougla $A_1 \dots A_n$ od proizvoljne tačke P koja se nalazi na manjem luku A_1A_n kruga opisanog oko tog n-tougla, dokazati da je

$$\frac{1}{d_1d_2} + \frac{1}{d_2d_3} + \frac{1}{d_3d_4} + \dots + \frac{1}{d_{n-1}d_n} = \frac{1}{d_1d_n}.$$

855. Ako su $p_1, \dots, p_n$ odstojanja proizvoljne tačke P manjeg luka A_nA_1 kruga l opisanog oko pravilnog poligona $A_1 \dots A_n$ od pravih koje sadrže stranice $A_1A_2, \dots, A_nA_1$, dokazati da je

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_{n-1}} = \frac{1}{p_n}.$$

856. Ako su a_n i b_n stranice dvaju pravilnih konveksnih n-touglova od kojih je prvi opisan a drugi upisan u krugu poluprečnika r, zatim d_{2n} stranica pravilnog konveksnog $2n$-tougla opisanog oko tog istog kruga, dokazati da je

(a) $\dfrac{1}{a_{2n}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}$;

(b) $a_{2n} = 4r^2\left(\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{a_n}\right)$.

857. Ako je a_n stranica pravilnog konveksnog n-tougla upisanog u krug poluprečnika r, a a'_n stranica pravilnog konveksnog n-tougla opisanog oko tog istog kruga, dokazati da je

$$a'_n = \frac{2ra_n}{4r^2 - a_n^2}.$$

858. Ako je a_n stranica pravilnog konveksnog n-tougla upisanog u krug poluprečnika r, a a_{2n} stranica pravilnog konveksnog $2n$-tougla upisanog u taj isti krug, dokazati da je

$$a_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a_n^2}}.$$

859. Ako je a_n stranica pravilnog konveksnog n-tougla upisanog u krug poluprečnika r, a a_{3n} stranica pravilnog $3n$-tougla upisanog u taj isti krug, dokazati da je

$$a_{3n}^3 - 3r^2a_{3n} + r^2a_n = 0.$$

860. Dva pravilna poligona $A_1 \dots A_n$ i $A'_1 \dots A'_{2n}$ imaju jednake obime. Ako je r poluprečnik opisanog i ϱ poluprečnik upisanog kruga poligona $A_1 \dots A_n$, a r' poluprečnik opisanog i ϱ' poluprečnik upisanog kruga poligona $A'_1 \dots A'_{2n}$, dokazati da je

$$\varrho' = \frac{1}{2}(r + \varrho), \qquad r' = \sqrt{r \cdot \varrho'}.$$

861. Ako je p_n obim pravilnog n-tougla opisanog oko kruga k, q_n obim pravilnog n-tougla upisanog u tom krugu, p_{2n} obim pravilnog $2n$-tougla oko kruga k i q_{2n} obim pravilnog $2n$-tougla upisanog u tom krugu, dokazati da je

$$\frac{1}{p_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n}\right), \qquad \frac{1}{q_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{p_{2n}} \cdot \frac{1}{q_{2n}}}.$$

862. Ako je $A_1 \dots A_7$ pravilan sedmougao, dokazati da je

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}.$$

863. Ako je O presečna tačka dijagonala AC i BD pravilnog konveksnog petougla $ABCDE$, dokazati da je $AO^2 = AC \cdot OC$.

864. Dokazati da je stranica pravilnog konveksnog desetougla upisanog u krug jednaka većem odsečku poluprečnika podeljenog zlatnim presekom.

865. Ako je a_{10} stranica pravilnog konveksnog desetougla, a b_{10} stranica pravilnog konveksnog desetougla, koji su upisani u isti krug poluprečnika r, dokazati da je

(a)
$$b_{10} - a_{10} = r$$

(b)
$$a_{10} \cdot b_{10} = r^2$$

866. Ako je a_{10} stranica pravilnog konveksnog desetougla upisanog u krug poluprečnika r, a b_{10} stranica pravilnog zvezdastog desetougla upisanog u taj isti krug, dokazati da je

(a)
$$a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

(b)
$$b_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

867. Ako je a_5 stranica pravilnog konveksnog petougla upisanog u krug k poluprečnika r, a b_5 stranica pravilnog zvezdastog petougla upisanog u taj isti krug, dokazati da je

(a)
$$a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

(b)
$$b_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

868. Ako je a_8 stranica pravilnog konveksnog osmougla upisanog u krug k poluprečnika r, a b_8 stranica pravilnog zvezdastog osmougla upisanog u taj isti krug, dokazati da je

(a)
$$a_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

(b)
$$b_8 = r\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

869. Ako je a_{12} stranica pravilnog konveksnog dvanaestougla, b_{12} stranica pravilnog zvezdastog dvanaestougla, i a_4 stranica kvadrata koji su svi upisani u isti krug, dokazati da je
$$b_{12} - a_{12} = a_4.$$

869/2. Ako je a_{12} stranica pravilnog konveksnog dvanaestougla $A_1 \dots A_{12}$, a_4 duž jednaka dijagonali A_1A_4 i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je

$$a_{12} + a_4 = 2\varrho.$$

870. Ako je a_{12} stranica pravilnog konveksnog dvanaestougla upisanog u krug k polupečnika r, a b_{12} stranica pravilnog zvezdastog dvanaestougla upisanog u taj isti krug, dokazati da je

(a)
$$a_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

(b)
$$b_{12} = r\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

871. Ako je a_{15} stranica pravilnog konveksnog petnaestougla upisanog u krug poluprečnika r, a $b_{15}^{(1)}, b_{15}^{(2)}, b_{15}^{(3)}$ stranice pravilnih zvezdastih petnaestouglova upisanih takođe u krug poluprečnika r, dokazati da je

(a)
$$a_{15} = \frac{r}{4}[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 3(\sqrt{5}-1)]$$

(b)
$$b_{15}^{(1)} = \frac{r}{4}[\sqrt{3}(\sqrt{5}+1) - \sqrt{10-2\sqrt{5}}]$$

(v)
$$b_{15}^{(2)} = \frac{r}{4}[\sqrt{3}(\sqrt{5}-1) + \sqrt{10-2\sqrt{5}}]$$

(g)
$$b_{15}^{(3)} = \frac{r}{4}[\sqrt{3}(\sqrt{5}+1) + \sqrt{10-2\sqrt{5}}]$$

872. Ako su a_5, a_6, a_{10} stranice pravilnog konveksnog petougla, šestougla, desetougla koji su upisani u isti krug k, dokazati da je

$$a_6^2 + a_{10}^2 = a_5^2.$$

873. Ako su a_6, b_5, b_{10} bilo stranice pravilnog šestougla, pravilnog zvezdastog petougla i pravilnog zvezdastog desetougla koji su upisani u isti krug k, dokazati da je

$$a_6^2 + b_{10}^2 = b_5^2.$$

874. Ako su a_3, a_{10}, b_{10} bilo stranice pravilnog trougla, pravilnog konveksnog desetougla i pravilnog zvezdastog desetougla koji su upisani u isti krug k, dokazati da je

$$a_{10}^2 + b_{10}^2 = a_3^2.$$

11. RAZLAGANJE POVRŠI I ODREĐIVANJE POVRŠINA

11.1. Razlaganje površi

875. Dokazati da se ravan može razložiti na pravilne, podudarne poligonske površi na pet različitih načina.

Slika

876. Dokazati da se ravan može razložiti

(a) na trougaone površi koje su podudarne s proizvoljnom trougaonom površi;

(b) na četvorougaone površi koje su podudarne s proizvoljnom četvorougaonom površi;

(v) na šestougaone površi koje su podudarne s proizvoljnom centralno simetričnom šestougaonom površi.

877. Dokazati da se ravan može razložiti na trougaone površi tako da se u svakom temenu sustiču

(a) po tri trougaone površi

(b) po četiri trougaone površi

(v) po pet trougaonih površi

pri čemu ni jedno teme tih površi nije unutrašnja tačka stranice susedne površi.

878. Dokazati da se konveksna poligonska površ s neparnim brojem stranica ne može razložiti na paralelogramske površi.

879. Dokazati da svaka konveksna centralno simetrična poligonska površ se može razložiti na paralelogramske površi.

880. Ako svakoj stranici konveksne poligonske površi odgovara njoj jednaka paralelna stranica te površi, dokazati da je ta poligonska površ centralno simetrična, i da se prema tome može razložiti na paralelogramske površi.

881. Ako se konveksna poligonska površ može razložiti na konačan broj centralno simetričnih poligonskih površi, dokazati da je i ta konveksna površ centralno simetrična.

882. Ako je f_n broj poligonskih površi koje se dobijaju razlaganjem konveksne poligonske površi $(A_1 \dots A_n$ njenim dijagonalama, pri čemu se nikoje tri i više dijagonala ne seku u jednoj tački, dokazati da je

$$f_n = \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n^2-3n+12).$$

11.2. Određivanje površina

883. Dokazati da razloživo jednake poligonske površi imaju jednake površine.

884. Dokazati da dopunski jednake poligonske površi imaju jednake površine.

885. Dokazati da su pravougaone površi sa jednakim površinama razloživo jednake.

886. Dokazati da su trougaone površi sa jednakim površinama razloživo jednake.

887. *Teorema F. Boljaja-Gervina.* Dokazati da su poligonske površi sa jednakim površinama razloživo jednake.

888. *Paposova teorema.* Ako su $ABKL$ i $ACMN$ dva paralelograma konstruisana nad stranicama AB i AC bilo kojeg trougla ABC, s onih strana pravih AB i AC s kojih nije taj trougao i ako je D presek pravih KL i MN, zatim $BCPQ$ paralelogram s bilo koje strane prave BC takav da je $BQ \| AD$ i $BQ = AD$, dokazati da je

$$S(BCPQ) = S(ABKL) + S(ACMN).$$

889. Ako neka prava paralelna sa stranicom AB paralelograma $ABCD$ seče stranicu BC u tački P i dijagonalu AC u tački Q, dokazati da je

$$S(ABP) = S(AQD).$$

890. Ako je P proizvoljna tačka u paralelogramu $ABCD$, dokazati da je

$$S(PAB) + S(PCD) = S(PBC) + S(PAD).$$

891. Ako je P proizvoljna tačka ravni paralelograma $ABCD$, dokazati da je

$$S(PAC) = S(PAB) = S(PAD).$$

892. Ako su M i N tačke stranice BC trougla ABC takve da je $BM = MN = NC$, P proizvoljna tačka duži MN, a R i Q tačke u kojima prave kroz M i N uporedne sa AP seku stranice AB i AC, dokazati da je

$$S(ARPQ) = S(BPR) = S(CPQ).$$

893. Ako su P, Q, R tačke u kojima tri uporedne prave kroz temena A, B, C seku prave određene naspramnim stranicama trougla ABC, dokazati da je

$$S(PQR) = 2S(ABS).$$

894. Neka je ABC proizvoljan trougao i P proizvoljna tačka. Ako su A', B', C' težišta trouglova PBC, PCA, PAB, dokazati da je

$$S(ABC) = 9S(A'B'C').$$

895. Ako su P', Q', R' upravne projekcije proizvoljne tačke O koja se nalazi u trouglu ABC na pravama BC, CA, AB a P, Q, R tačke polupravih OP', OQ', OR' takve da je $OP = BC$, $OQ = CA$, $OR = AB$, dokazati da je

$$S(PQR) = 3S(ABC).$$

896. Ako obeležimo sa O tačku koja se nalazi u konveksnom četvorouglu $ABCD$, sa K', L', M', N' podnožja upravnih iz tačke O na pravama AB, BC, CD, DA i sa K, L, M, N tačke polupravih OK', OL', OM', ON' takve da je $OK = AB$, $OL = BC$, $OM = CD$, $ON = DA$, dokazati da duži KL, LM, MN, NK obrazuju izvesnu površ ω takvu da je $S(\omega) = 2S(ABCD)$.

897. Kroz središte svake dijagonale konveksnog četvorougla $ABCD$ konstruisana je prava uporedna s drugom dijagonalom. Dokazati da duži koje spajaju presek O tih pravih sa središtima stranica razlažu četvorougaonu površ $(ABCD)$ na četiri ekvivalentne četvorougaone površi.

898. Ako je $ABCD$ konveksan četvorougao i ako su A', B', C', D' tačke simetrične s tačkama A, B, C, D respektivno u odnosu na tačke B, C, D, A, dokazati da je

$$S(A'B'C'D') = 5S(ABCD).$$

899. Ako je $ABCD$ proizvoljan konveksan četvorougao. Ako su K i L tačke stranice AB takve da je $AK = KL = LB$, a M i N tačke stranice CD takve da je $CM = MN = ND$, dokazati da je

$$S(KLMN) = \frac{1}{3}S(ABCD).$$

900. Ako su M i N središta stranica AB i CD konveksnog četvorougla $ABCD$, a P i Q tačke u kojima duži AN i BN seku duži DM i CM, dokazati da je

$$S(PMQN) = S(DAP) + S(BCQ).$$

901. Ako obeležimo sa P i Q središta dijagonala AC i BD prostog četvorougla $ABCD$ i sa R tačku u kojoj se seku prave određene naspramnim stranicama AB i CD, dokazati da je

$$S(PQR) = \frac{1}{4}S(ABCD).$$

902. Ako obeležimo sa P i Q središta dijagonala AC i BD prostog četvorougla $ABCD$ kome se prave određene naspramnim stranicama AB i CD seku u jednoj tački E, a prave određene naspramnim stranicama BC i AD seku u nekoj tački F, dokazati da je

$$S(PQE) = S(PQF).$$

903. Neka su $AB = a$ i $CD = b$ osnovice trapeza $ABCD$ kome se dijagonale seku u tački O. Ako je P proizvoljna tačka stranice AB, Q tačka u kojoj se seku duži PD i AC, dokazati da je

$$S(PQR) = \frac{a+b}{b}S(OQR).$$

904. Ako su E i F tačke u kojima simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla A seku pravu određenu stranicom BC trougla ABC i ako je $AB : AC = m : n$, dokazati da je

$$\frac{S(ABC)}{S(AEF)} = \frac{m^2 - n^2}{2mn}.$$

905. Ako su P i Q tačke paralelnih stranica AB i CD konveksnog trapeza $ABCD$ takve da je $AB = kPB$ i $DC = kQC$, dokazati da je

$$S(ABCD) = nS(PBCQ).$$

906. Ako su $P_1, \ldots, P_n$ paralelne projekcije temena $A_1, \ldots, A_n$ poligonske površi $(A_1 \ldots A_n)$ na nekoj pravoj p koja sa tom poligonskom površi nema zajedničkih tačaka, a $B_1, \ldots, B_n$, redom, tačke na dužima $A_1P_1, \ldots, A_nP_n$ takve da je $A_1P_1 = kB_1P_1, \ldots, A_nP_n = kB_nP_n$, dokazati da je

$$S(A_1 \ldots A_n) = kS(B_1 \ldots B_n).$$

907. Ako dve poligonske površi $(A_1 \dots A_{2n})$ i $(B_1 \dots B_{2n})$ imaju zajednička središta odgovarajućih stranica, dokazati da je

$$S(A_1 \dots A_{2n}) = S(B_1 \dots B_{2n}).$$

908. Odrediti potreban i dovoljan uslov pod kojim prava s uporedna sa stranicom BC trougla ABC seče stranice AB i AC u tačkama M i N takvim da je

$$S(BCNM) : S(AMN) = m : n.$$

909. Odrediti potreban i dovoljan uslov pod kojim prava s uporedna sa osnovicama seče krake AD i BC trapeza $ABCD$ u tačkama M i N takvim da je

$$S(ABNM) : S(MNCD) = m : n.$$

910. Odrediti potreban i dovoljan uslov pod kojim prava s uporedna sa datom pravom p razlaže datu trougaonu površ (ABC) na dve površi ω_1 i ω_2 takve da je

$$S(\omega_1) : S(\omega_2) = m : n.$$

911. Odrediti potreban i dovoljan uslov pod kojim prava s uporedna s datom pravom p razlaže datu konveksnu poligonsku površ na dve poligonske površi ω_1 i ω_2 takve da je

$$S(\omega_1) : S(\omega_2) = m : n.$$

912. Odrediti u ravni četvorougla $ABCD$ skup svih tačaka X takvih da je

$$S(AXB) + S(CXD) = S(BXC) + S(DXA).$$

913. Ako su P i Q središta dijagonala AC i BD tangentnog četvorougla $ABCD$, a O središte kruga upisanoga u tom četvorouglu, dokazati da tačke P, Q, O pripadaju jednoj pravoj. (*Njutnova teorema.*)

914. Ako je $ABCD$ proizvoljan četvorougao, E tačka u kojoj se seku prave AB i CD, F tačka u kojoj se seku BC i DA, dokazati da se središta P, Q, R duži AC, BD, EF nalaze na jednoj pravoj (*Gausova teorema*).

915. Ako su a, b, c stranice i h_a, h_b, h_c visine trougla ABC, r poluprečnik opisanog kruga i S površina trougaone površi (ABC), dokazati da je

a.
$$S = \frac{abc}{4r}$$

b.
$$S^2 = \frac{r}{2} h_a h_b h_c$$

916. Ako su ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c poluprečnici upisanih krugova trougla ABC, a p poluobim tog trougla, dokazati da je

a.
$$S(ABC) = p\varrho, \quad S(ABC) = (p-a)\varrho_a$$

b.
$$S^2(ABC) = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

c.

$$S^2 = \varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c$$

917. Ako su b i c katete, a hipotenuza, p poluobim i S površina površi (ABC) kojoj je ugao A prav, dokazati da je

$$S = p(p-a) \quad \text{i} \quad S = (p-b)(p-c).$$

918. Ako su A', B', C' podnožja visina oštrouglog trougla ABC, a r poluprečnik opisanog kruga i p' poluobim trougla $A'B'C'$, dokazati da je

$$S(ABC) = rp'.$$

919. Ako su S_a, S_b, S_c središta spolja upisanih krugova oštrouglog trougla ABC, a p poluobim tog trougla i r poluprečnik opisanog kruga, dokazati da je

$$S(S_aS_bS_c) = 2pr.$$

920. Ako su n_a, n_b, n_c odsečci koje određuje trougao ABC na pravama koje sadrže središte S upisanog kruga a paralelne su respektivno na stranicama BC, CA, AB, zatim h_a, h_b, h_c visine iz temena A, B, C tog trougla, dokazati da je

$$S = \frac{1}{4}(n_ah_a + n_bh_b + n_ch_c).$$

921. Ako su l_a i $\bar{l}_a$ simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla A trougla ABC kome su stranice AB i AC srazmerne datim dužima m i n, dokazati da je

$$S(ABC) = \frac{m^2 - n^2}{4mn} l_a\bar{l}_a.$$

922. Ako su m_a, m_b, m_c težišne linije trougla ABC, a m poluzbir tih težišnih linija, dokazati da je

$$S(ABC) = \frac{4}{3}m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c).$$

923. Ako su h_a, h_b, h_c visine trougla ABC, a h poluzbir tih visina, dokazati da je

$$\frac{1}{S(ABC)} = 4h(h-h_a)(h-h_b)(h-h_c).$$

924. Ako su duži a, b, c, d jednake stranicama AB, BC, CD, DA konveksnog četvorougla $ABCD$ upisanog u krug k, a p poluobim tog četvorougla, dokazati da je

$$S(ABCD) = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

925. Ako su a, b, c, d stranice tetivnog i tangentnog četvorougla $ABCD$, dokazati da je

$$S^2(ABCD) = abcd.$$

926. Ako je $ABCD$ konveksan četvorougao upisan u krug k poluprečnika r, E tačka u kojoj prava kroz C uporedna sa BD seče k i ako je $AC = e$, $BD = f$, $AE = g$; dokazati da je

$$S(ABCD) = \frac{efg}{4r}.$$

927. Ako je kod prostog četvorougla $ABCD$ zbir duži koje spajaju središta naspramnih stranica jednak duži l i ako je $AC = BD = d$, dokazati da je

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}(l^2 - d^2).$$

928. Ako su a i b stranice, d_1 i d_2 dijagonale i S površina paralelogramske površi, dokazati da je

$$S^2 = a^2b^2 - \frac{1}{16}(d_1^2 - d_2^2)^2.$$

929. Ako obeležimo sa $ABCD$ romb, a sa r_1 i r_2 poluprečnike krugova opisanih oko trouglova ABC i ABD, dokazati da je

$$S(ABCD) = \frac{8r_1^2r_2^2}{(r_1^2 + r_2^2)^2}.$$

930. Ako su a i b stranice i S površina paralelogramske površi $(ABCD)$, zatim n_a, n_b, n_c, n_d rastojanja proizvoljne tačke N od tačaka A, B, C, D, dokazati da je

$$S^2 = a^2b^2 - \frac{1}{4}(n_A^2 - n_B^2 + n_C^2 - n_D^2)^2.$$

931. Ako su a, b, c, d stranice, a e, f dijagonale i S površina bilo koje četvorougaone površi $(ABCD)$, dokazati da je

$$S^2 = \frac{1}{16}(4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2).$$

932. Ako je P proizvoljna tačka u ili na pravilnom n-touglu $A_1 \dots A_n$ i ϱ poluprečnik upisanog kruga tog poligona, zatim $d_1, \dots, d_n$ odstojanja tačke P od pravih $A_1A_2, \dots, A_nA_1$, dokazati da je

$$d_1 + \ldots + d_n = n\varrho.$$

933. Ako su $a_1, \dots, a_n$ odstojanja temena $A_1, \dots, A_n$ pravilnog n-tougla $A_1 \dots A_n$ proizvoljne dirke t kruga k opisanog oko tog n-tougla i ako je r poluprečnik kruga k, dokazati da je

$$a_1 + \ldots + a_n = nr.$$

934. Nad stranicama trougla ABC konstruisani su spolja jednakokraki trouglovi BCA', CAB', ABC' kod kojih su unutrašnji uglovi pri vrhovima A', B', C' među sobom jednaki. Dokazati da se prave AA', BB', CC' seku u jednoj tački.

935. Ako su h_a, h_b, h_c visine i ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c poluprečnici spolja upisanih krugova trougla ABC, dokazati da je

$$\frac{h_b + h_c}{\varrho_a} + \frac{h_c + h_a}{\varrho_b} + \frac{h_a + h_b}{\varrho_c} = 6.$$

936. Ako je O tačka u ravni trougla ABC i ako su A', B', C' tačke u kojima prave AO, BO, CO seku respektivno prave BC, CA, AB, dokazati da je

a.
$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1$$
b.
$$\frac{AO}{AA'}+\frac{BO}{BB'}+\frac{CO}{CC'}=1$$

937. Ako su AA', BB', CC' visine trougla ABC, a A'', B'', C'' tačke u kojima prave AA', BB', CC' seku krug opisan oko trougla ABC, dokazati da je
$$\frac{AA''}{AA'}+\frac{BB''}{BB'}+\frac{CC''}{CC'}=4.$$

938. Ako je O tačka u trouglu ABC i ako su A', B', C' tačke u kojima prave AO, BO, CO seku odgovarajuće stranice BC, CA, AB, dokazati da je
$$\frac{AO}{OA'}\cdot\frac{BO}{OB'}\cdot\frac{CO}{OC'}=\frac{AO}{OA'}+\frac{BO}{OB'}+\frac{CO}{OC'}+2.$$

939. Ako su AA', BB', CC' visine trougla ABC, a AA'', BB'', CC'' podnožja upravnih iz proizvoljne tačke O na pravama BC, CA, AB, dokazati da je
$$\frac{OA''}{AA'}+\frac{OB''}{BB'}+\frac{OC''}{CC'}=1.$$

940. Ako su a, b, c prave kroz proizvoljnu tačku O uporedne sa stranicama BC, CA, AB trougla ABC i ako prava AB i AC u tačkama B_1 i C_1, prava b seče prave BC i BA u tačkama C_2 i A_2, prava c seče prave CA i CB u tačkama A_3 i B_3, dokazati da je
$$\frac{B_1C_1}{BC}+\frac{C_2A_2}{CA}+\frac{A_3B_3}{AB}=2.$$

941. Ako su A', B', C' tačke u kojima prave određene prečnicima AA'', BB'', CC'' kruga opisanog oko trougla ABC seku prave BC, CA, AB, dokazati da je
$$\frac{A'A''}{AA'}+\frac{B'B''}{BB'}+\frac{C'C''}{CC'}=1.$$

942. Ako je O središte i r poluprečnik kruga opisanog oko trougla ABC, A', B', C' tačke u kojima prave AO, BO, CO seku prave BC, CA, AB, dokazati da je
$$\frac{1}{AA'}+\frac{1}{BB'}+\frac{1}{CC'}=\frac{2}{r}.$$

943. Ako su A', B', C' tačke na stranicama ili produženjima stranica BC, CA, AB trougla ABC takve da se prave AA', BB', CC' seku u jednoj tački O, dokazati da je
$$\frac{AO}{OA}=\frac{AC'}{C'B}+\frac{AB'}{B'C}.$$

944. Ako su P, Q, R tačke u kojima krug upisan u trougao ABC dodiruje stranice BC, CA, AB i ako je G Žergonova tačka trougla ABC, a r poluprečnik opisanog i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je
$$\frac{AG}{GP}\cdot\frac{BG}{GQ}\cdot\frac{CG}{GR}=\frac{4r}{\varrho}.$$

945. Ako su kod trouglova ABC i $A'B'C'$ uglovi A i A' jednaki ili suplementni, dokazati da je

$$\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot A'C'}.$$

946. Ako su na stranicama BC, CA, AB trougla ABC tačke P i P', Q i Q', R i R' simetrične među sobom u odnosu na središta tih stranica, dokazati da je

$$S(PQR) = S(P'Q'R').$$

947. Ako stranice BC, CA, AB trougla ABC dodiruju upisani krug u tačkama P, Q, R i spolja upisane krugove u tačkama P', Q', R', dokazati da je

$$S(PQR) = S(P'Q'R').$$

948. Ako su stranice trougla $A'B'C'$ jednake težišnim linijama trougla ABC, dokazati da je

$$S(A'B'C') : S(ABC) = 3 : 4.$$

949. Ako su ω_a, ω_b, ω_c bilo kakve slične poligonske površi konstruisane na stranicama pravouglog trougla ABC, pri čemu su hipotenuza BC i katete CA i AB odgovarajuće duži u tom preslikavanju, dokazati da je

$$S(\omega_a) = S(\omega_b) + S(\omega_c).$$

950. Ako su tačke A_1, B_1, C_1 središta stranica BC, CA, AB proizvoljnog trougla ABC i M bilo koja tačka njegove ravni, dokazati da je

$$S(MAA_1) = S(MBB_1) = S(MCC_1).$$

951. Ako su A_1, B_1, C_1 tačke stranica BC, CA, AB trougla ABC takve da je $BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = AC_1 : C_1B = m : n$, a A_2, B_2, C_2 tačke u kojima se seku prave BB_1 i CC_1, CC_1 i AA_1, AA_1 i BB_1, dokazati da je za $m < n$

$$\frac{S(ABC)}{S(A_2B_2C_2)} = \frac{m^2 + mn + n^2}{(m-n)^2}.$$

952. Ako su A_1, B_1, C_1, D_1 tačke stranica AB, BC, CD, DA paralelograma $ABCD$ takve da je $AA_1 : A_1B = BB_1 : B_1C = CC_1 : C_1D = DD_1 : D_1A = m : n$ a A_2, B_2, C_2, D_2 tačke u kojima se seku prave DA_1 i A_1B, AB_1 i BC_1, BC_1 i CD_1, CD_1 i DA_1, dokazati da je

$$\frac{S(ABCD)}{S(A_2B_2C_2D_2)} = \frac{(m+n)^2 + m^2}{m^2}.$$

953. Ako su P, Q, R tačke stranica BC, CA, AB trougla ABC takve da je $BP : PC = CQ : QA = AR : RB = m : n$, dokazati da je

(a)
$$S(ARQ) = S(BPR) = S(CQR) = \frac{mn}{(m+n)^2} S(ABC)$$

(b)
$$S(PQR) = \frac{m^2 - mn + n^2}{(m+n)^2} S(ABC)$$

954. Ako su P, Q, R tačke stranice BC, CA, AB trougla ABC takve da je $BP : PC = p_1 : p_2$, $CQ : QA = q_1 : q_2$, $AR : RC = r_1 : r_2$, dokazati da je

(a)
$$\frac{S(AQR)}{S(ABC)} = \frac{r_1 q_1}{(r_1 + r_2) \cdot (q_1 + q_2)}$$

(b)
$$\frac{S(PQR)}{S(ABC)} = \frac{p_1 q_1 r_1 + p_2 q_2 r_2}{(p_1 + p_2) \cdot (q_1 + q_2) \cdot (r_1 + r_2)}$$

955. Ako su M i N tačke stranica AB i AC trougla ABC takve da je $??AMN????ABC$, dokazati da je
$$S^2(ABN) = S(AMN) \cdot S(ABC).$$

956. Ako je O presek dijagonala AC i BD trpeza $ABCD$ kome je $AB > CD$, dokazati da je
$$S(ABCD) = S(ABO) + S(CDO).$$

957. Ako su P i Q tačke stranica AB i AC trougla ABC i R tačka prave PQ takve da je $BP : PA = AQ : QC = PR : RQ$, dokazati da je
$$S(RBC) = 2S(APQ).$$

958. Ako su P i Q tačke stranica AB i AC trougla ABC i R tačka duži PQ takve da je $BP : PA = AQ : QC = PR : RQ$, dokazati da je
$$S(ABC) =??^3S(BPR) +^3 S(CQR).$$

959. Ako je O presek dijagonala konveksnog trapeza $ABCD$, dokazati da je
$$S^2(BOC) = S(AOB) \cdot S(COD).$$

960. Ako se dijagonale AC i BD četvorougla $ABCD$ seku u tački O pod pravim uglom, dokazati da je
$$S(AOB) \cdot S(COD) = S(BOC) \cdot S(AOD).$$

961. Ako je ABC trougao, P proizvoljna tačka stranice BC, a Q i R tačke stranica AC i AB takve da je $PQ???AB$ i $PR???AC$, dokazati da je
$$S^2(AQR) = S(BPR) \cdot S(CPQ).$$

962. Ako su OA i OB dva upravna poluprečnika kruga k, P i Q tačke u kojima proizvoljna dirka kruga k seče prave OA i OB, M dodirna tačka i N podnožje upravne kroz M na pravoj OA, dokazati da je
$$S^2(OAB) = S(OMN) \cdot S(OPQ).$$

963. Ako su P, Q, R podnožja upravnih iz neke tačke M na pravama koje su određene stranicama BC, CA, AB trougla ABC i ako je O središte i r pluprečnik kruga l opisanog oko trougla ABC, a duž koja spaja tačke O i M, dokazati da je

$$\frac{S(PQR)}{S(ABC)} = \pm\frac{1}{4}(1 - \frac{d^2}{r^2}),$$

pri čemu se uzima znak + ili − prema tome da li je tačka M u ili izvan kruga l.

964. Ako su r i ϱ poluprečnici opisanog i upisanog kruga trougla ABC, a P, Q, R tačke u kojima upisani krug dodiruje stranice BC, CA, AB dokazati da je

$$\frac{S(PQR)}{S(ABC)} = \frac{\varrho}{2r}.$$

965. Ako su r i ϱ_a poluprečnici opisanog kruga i spolja upisanog kruga k_a trougla ABC, a P_a, Q_a, R_a tačke u kojima krug k_a dodiruje prave BC, CA, AB dokazati da je

$$\frac{S(P_aQ_aR_a)}{S(ABC)} = \frac{\varrho_a}{2r}.$$

966. Ako su r i ϱ poluprečnici opisanog i upisanog kruga trougla ABC; P, Q, R tačke u kojima upisani krug dodiruje stranice BC, CA, AB, a P', Q', R' podnožja visina trougla PQR, dokazati da je

$$\frac{S(P'Q'R')}{S(ABC)} = \frac{\varrho}{4r^2}.$$

967. Ako su r i ϱ_a poluprečnici opisanog kruga i spolja upisanog kruga k_a trougla ABC, a P_a, Q_a, R_a tačke u kojima krug k_a dodiruje prave BC, CA, AB a P'_a, Q'_a, R'_a podnožja visina trougla $P_aQ_aR_a$, dokazati da je

$$\frac{S(P'_aQ'_aR'_a)}{S(ABC)} = \frac{a}{4r^2}.$$

968. Ako su P, Q, R podnožja upravnih iz težišta T trougla ABC na pravama BC, CA, AB, a a, b, c dužine stranica BC, CA, AB, dokazati da je

$$\frac{S(PQR}{S(ABC)^3} = \frac{4}{9}\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}.$$

969. Ako obeležimo sa P, Q, R tačke u kojima upisani krug k trougla ABC dodiruje stranice BC, CA, AB i sa P_i, Q_i, R_i tačke u kojima spolja upisani krug k_i za $i = a, b, c$ dodiruje prave BC, CA, AB, dokazati da je

(a)

$$S(P_aQ_aR_a) + S(P_bQ_bR_b) + S(P_cQ_cR_c) - S(PQR) = 2S(ABC)$$

(b)

$$\frac{1}{S(P_aQ_aR_a)} + \frac{1}{S(P_bQ_bR_b} + \frac{1}{S(P_cQ_cR_c} = \frac{1}{S(PQR)}$$

970. Ako obeležimo sa P, Q, R dodirne tačke upisanog kruga k sa stranicama BC, CA, AB trougla ABC; sa P_i, Q_i, R_i dodirne tačke spolja upisanog kruga

$k_i (i = a, b, c)$ sa pravama BC, CA, AB; sa P', Q', R' podnožja visina trougla PQR; sa P_i', Q_i', R_i' podnožja visina trougla $P_iQ_iR_i$; sa ϱ poluprečnik kruga k i sa p poluobim trougla ABC; dokazati da je

(a)

$$S(P_aQ_aR_a) \cdot S(P_bQ_bR_b) \cdot S(P_cQ_cR_c) = \frac{p^2}{2} S(PQR)^3$$

(b)

$$S(P_a'Q_a'R_a') \cdot S(P_b'Q_b'R_b') \cdot S(P_c'Q_c'R_c') = \frac{P^4}{4} S(P'Q'R')^3$$

971. Prave kroz tačku O koja se nalazi u trouglu ABC uporedne sa stranicama razlažu trougaonu površ (ABC) na tri paralelograma i tri trougaone površi. Dokazati da je proizvod površina tih paralelogramskih površi osam puta veći od proizvoda površina tih trougaonih površi.

972. Ako prave određene dvema tetivama AB i CD nekog kruga k sadrže središte S tetive MN tog istog kruga dokazati da su tačke X i Y u kojima prava MN seče prave AD i BC simetrične među sobom u odnosu na tačku S.

973. Ako su a, b, c stranice trougla ABC takve da je $a - b = b - c = d$ i ako je ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je

$$b^2 - 4d^2 = 12\varrho^2.$$

974. Ako su a, b, c stranice trougla ABC takve da je $a - b = b - c$ i ako je r poluprečnik opisanog kruga, a ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je

$$ac = 6r\varrho.$$

975. Ako je D tačka u kojoj raspolovnica ugla A seče stranicu BC trougla ABC, a E i F tačke prave BC takve da je $??DAE = ??DAF$, dokazati da je

$$\frac{AE^2}{AF^2} = \frac{BE \cdot CF}{BF \cdot CF} \quad \text{i} \quad \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BE \cdot BF}{CE \cdot CF}.$$

12. Nejednakosti u planimetriji

976. Ako za svake tri prave proizvoljnog skupa pravih jedne ravni postoji krug poluprečnika r koji sa svakom od tih triju pravih ima zajedničkih tačaka, dokazati da postoji krug poluprečnika r koji sa svakom pravom datog skupa ima zajedničkih tačaka.

977. Ako je d dijametar bilo kojeg ograničenog skupa $a_1, \ldots, a_n$ pravih jedne ravni, dokazati da postoji krug poluprečnika $r \leq \frac{d}{2\sqrt{3}}$ koji sa svakom pravom datog skupa ima najmanje jednu zajedničku tačku.

978. Ako je d dijametar bilo kojeg skupa tačaka neke ravni, dokazati da postoji kružna površ poluprečnika $r = \frac{d}{\sqrt{3}}$ koja sadrži sve tačke tog skupa (Jungova teorema).

979. Ako je d dijametar bilo kojeg ograničenog skupa tačaka u ravni, dokazati da postoji pravilna trougaona površ sa stranicama $a \leq \sqrt{3}d$ koja sadrži sve tačke tog skupa tačaka.

980. Ako je $a_1, \ldots, a_n$ konačan skup od n duži, dokazati da je

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

981. Ako je $a_1, \ldots, a_n$ konačan skup od n duži, dokazati da je

$$(a_1 + \ldots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2.$$

982. Ako je $a_1, \ldots, a_n$ konačan skup od n duži, dokazati da je

$$\frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)^2 \leq a_1^2 + \ldots + a_n^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n)^2.$$

983. Ako su A_n i H_n aritmetička i harmonijska sredina duži $a_1, \ldots, a_n$ dokazati da je

(a)

$$\min(a_1, \ldots, a_n) \leq H_n$$

(b)

$$\max(a_1, \ldots, a_n) \geq A_n$$

984. Ako su P i Q središta stranica AD i BC četvorougla $ABCD$, dokazati da je

$$|AB - CD| \leq 2PQ \leq AB + CD.$$

985. Ako je kod prostog četvorougla $ABCD$ $\angle A = \angle B$ i $\angle C = \angle D$, dokazati da je $BC > AD$.

986. Ako je kod prostog četvorougla $ABCD$ $\angle A = \angle B$ i $BC > AD$, dokazati da je $\angle D > \angle C$.

987. Ako je kod prostog četvorougla $ABCD$ $AD = BC$ i $\angle A > \angle B$, dokazati da je $\angle C > \angle D$.

988. Dokazati da je kod svakog trougla ABC

$$h_a \leq l_a \leq m_a.$$

989. Dokazati da kod trougla većoj stranici odgovara manja težišna linija, i obrnuto, da manjoj težišnoj liniji odgovara veća stranica.

990. Ako je kod trougla ABC $AC > AB$, dokazati da je $l_b < l_c$.

991. Ako je ABC jednakostraničan trougao i P proizvoljna tačka njegove ravni, dokazati da je

$$AP \leq BP + CP.$$

992. Ako je C središte kružnog luka ALB i D bilo koja druga tačka tog kružnog luka, dokazati da je

$$AC + BC > AD + BD.$$

993. Ako su duži a, b, c jednake stranicama nekog trougla, dokazati da su za svaki prirodni broj n odsečci $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{c}$ takođe jednaki stranicama nekog trougla.

994. Ako su b i c katete i a hipotenuza pravouglog trougla, a n prirodan broj veći od 2, dokazati da je

(a)
$$a\sqrt{2} \geq b + c$$

(b)
$$a^n > b^n + c^n$$

995. Ako je razlika kateta b i c pravouglog trougla jednaka simetrali pravog ugla, dokazati da je pri $b > c$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}.$$

996. Ako su a, b, c hipotenuze i katete pravouglog trougla, h_a visina koja odgovara hipotenuzi i ϱ poluprečnik kruga upisanog u taj trougao, dokazati da je

(a)
$$b + c < a + h_a$$

(b)
$$\frac{2}{5}h_a < \varrho < \frac{1}{2}h_a$$

997. Ako je h_a visina koja odgovara hipotenuzi pravouglog trougla, r poluprečnik opisanog i ϱ poluprečnik upisanog kruga tog trougla, dokazati da je

(a)
$$h_a \leq \varrho(\sqrt{2} + 1)$$

(b)
$$\varrho \leq r(\sqrt{2} - 1)$$

998. Ako je r poluprečnik opisanog kruga, ϱ poluprečnik upisanog kruga i h_a visina iz temena A proizvoljnog trougla ABC, dokazati da je

(a)

$$r \geq 2\varrho$$

(b)

$$h_a > 2\varrho$$

999. Ako su a, b, c stranice trougla pri čemu je $a \leq b$ i $a \leq c$, zatim h_a visina kojoj odgovara stranica a, a ϱ i ϱ_a poluprečnici upisanih krugova, dokazati da je

(a)

$$h_a \geq 3\varrho$$

(b)

$$h_a \geq \varrho_a$$

1000. Ako je r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga tetivnog i tangentnog četvorougla, dokazati da je

$$r \geq \varrho\sqrt{2}.$$

1001. Ako je r poluprečnik opisanog kruga, ϱ poluprečnik upisanog kruga i h_a najveća visina netupouglog trougla ABC, dokazati da je

$$r + \varrho \leq h_a.$$

1002. Ako su a, b, c stranice netupouglog trougla pri čemu je $a \leq b$ i $a \leq c$ zatim r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je

$$\frac{r}{\varrho} \leq \frac{b+c}{a}.$$

1003. Ako su h_a, h_b, h_c visine trougla ABC, dokazati da je

$$\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} < \frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}.$$

1004. Ako je p poluobim trougla ABC, r poluprečnik opisanog kruga, ϱ poluprečnik upisanog kruga i ϱ_a poluprečnik spolja upisanog kruga koji dodiruje stranicu BC, dokazati da je

(a) $p > 2r - \varrho$, ako je trougao ABC oštrougli.

(b) $p > 4r - \varrho_a$, ako je kod trougla ABC ugao A tup.

1005. Ako je p poluobim trougla ABC i M bilo koja njegova unutrašnja tačka, dokazati da je

$$p < MA + MB + MC < 2p.$$

1006. Ako obeležimo sa H ortocentar trougla ABC, sa O središte i sa r poluprečnik opisanog kruga, dokazati da je

$$OH < 3r.$$

1007. Ako je H ortocentar, O središte upisanog kruga i S središte opisanog kruga trougla, dokazati da je

$$OH \geq \sqrt{2}SH.$$

1008. Dat je konveksan ugao MON i u njemu tačka P. Odrediti na kracima OM i ON ugla MON tačke X i Y kolinearne s tačkom P takve da obim trougla OXY bude minimalan.

1009. Ako su a, b, c stranice i p poluobim trougla, dokazati da je

(a)
$$8(p-a)(p-b)(p-c) \le abc$$

(b)
$$a^2(p-a)+b^2(p-b)+c^2(p-c) \le \frac{3}{2}abc$$

(v)
$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \ge 6abc$$

(g)
$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \ge 48(p-a)(p-b)(p-c)$$

1010. Ako su a, b, c stranice i p poluobim trougla, dokazati da je

(a)
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \ge \frac{9}{4p}$$

(b)
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$$

(v)
$$\frac{p-a}{b+c}+\frac{p-b}{c+a}+\frac{p-c}{a+b} \ge \frac{3}{4}$$

(g)
$$\frac{p+a}{b+c}+\frac{p+b}{c+a}+\frac{p+c}{a+b} \ge \frac{15}{4}$$

1011. Ako su a, b, c stranice trougla, p njegov poluobim, r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je

(a)
$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge 2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

(b)
$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge \frac{9}{p}$$

(v)
$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge \frac{\sqrt{3}}{\varrho}$$

(g)
$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge \frac{2\sqrt{3}}{r}$$

1012. Ako su a, b, c stranice trougla, dokazati da je

(a)
$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$$

(b)

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$$

(c)

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

(d)

$$a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}(a + b + c)^2$$

1013. Ako su a, b, c stranice trougla, dokazati da je

(a)

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$$

(b)

$$ab + bc + ca > \frac{1}{4}(a + b + c)^2$$

1014. Ako je p poluobim trougla, r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je

(a)

$$3\sqrt{3}\varrho \leq \varrho \leq \frac{\sqrt{3}}{3}(4r + \varrho) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}r;$$

(b)

$$\frac{27}{2}r\varrho \leq 3\varrho(4r + \varrho) \leq 16r\varrho - 5\varrho^2 \leq \varrho^2 \leq 4r^2 + 4r\varrho + 3\varrho^2 \leq \frac{3r}{2}(4r + \varrho).$$

1015. Ako su a, b, c stranice i p poluobim trougla, a r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je

(a)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{3p}$$

(b)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{\sqrt{3}}{\varrho}$$

(v)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{\varrho}$$

1016. Ako su a, b, c stranice trougla, r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je

(a)

$$ab + bc + ca \leq 9r^2$$

(b)

$$ab + bc + ca \geq 18r\varrho$$

(v)

$$ab + bc + ca \geq 36\varrho^2$$

(g)

$$ab + bc + ca \le 4(r + \varrho)^2$$

(d)

$$ab + bc + ca \ge 4\varrho(5r - \varrho)$$

(ȷ)

$$ab + bc + ca \ge 4\varrho(4r + \varrho)$$

1017. Ako su a, b, c stranice trougla, r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je

(a)

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 36\varrho^2;$$

(b)

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 18r\varrho;$$

(v)

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 9r^2;$$

(g)

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 4(2r^2 + \varrho^2);$$

(d)

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 12\varrho(2r - \varrho);$$

(ȷ)

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\varrho(4r + \varrho).$$

1018. Ako su h_a, h_b, h_c visine i ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c poluprečnici spolja upisanih krugova trougla ABC, dokazati da je

$$\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} \ge 3.$$

1019. Ako su h_a, h_b, h_c visine trougla, p njegov poluobim, r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je :

(a)

$$h_a + h_b + h_c \ge 9\varrho;$$

(b)

$$h_a + h_b + h_c \le \sqrt{3}p;$$

(c)

$$h_a + h_b + h_c \le \frac{9}{2}r;$$

(d)

$$h_a + h_b + h_c \le 4r + \varrho;$$

(e)

$$h_a + h_b + h_c \le 3(r + \varrho);$$

(f)

$$h_a + h_b + h_c \le 2r + 5\varrho.$$

1020. Ako su l_a, l_b, l_c simetrale unutrašnjih uglova trougla, p njegov poluobim, r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je

(a)
$$l_a + l_b + l_c \leq \sqrt{3}p;$$

(b)
$$l_a + l_b + l_c \leq \frac{9}{2}r;$$

(c)
$$l_a + l_b + l_c \geq 9\varrho;$$

(d)
$$l_a + l_b + l_c \leq 4r + \varrho;$$

(e)
$$l_a + l_b + l_c \leq 3(r + \varrho).$$

1021. Ako su ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c poluprečnici spolja upisanih krugova, r i ϱ poluprečnici opisanog i upisanog kruga i p poluobim trougla ABC, dokazati da je

(a)
$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c \geq \sqrt{3}p;$$

(b)
$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c \geq 9\varrho;$$

(v)
$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c \geq 3(r + \varrho);$$

(g)
$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c \leq \frac{9}{2}r.$$

1022. Ako su m_a, m_b, m_c težišne linije, r i ϱ poluprečnici opisanog i upisanog kruga i p poluobim trougla ABC, dokazati da je

(a)
$$\frac{3}{2}p < m_a + m_b + m_c < 2p;$$

(b)
$$9\varrho \leq m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2}r.$$

1023. Ako su h_a, h_b, h_c visine, l_a, l_b, l_c simetrale uglova, m_a, m_b, m_c težišne linije, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c poluprečnici spolja upisanih krugova trougla ABC, dokazati da je

(a)
$$h_a + h_b + h_c \leq l_a + l_b + l_c \leq m_a + m_b + m_c;$$

(b)
$$l_a + l_b + l_c \leq \sqrt{\varrho_b\varrho_c} + \sqrt{\varrho_c\varrho_a} + \sqrt{\varrho_a\varrho_b} \leq \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c;$$

1024. Ako su a, b, c stranice i p poluobim trougla, a r poluprečnik opisanog i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je

(a)
$$abc \leq \frac{8}{27}p^3;$$
(b)
$$abc \leq 3\sqrt{3}r^3;$$
(c)
$$abc \geq 24\sqrt{3}\varrho^3;$$
(d)
$$abc \geq 8p\varrho^2;$$
(e)
$$abc \leq 2pr^2;$$
(f)
$$abc \leq 6\sqrt{3}r^2\varrho;$$
(g)
$$abc \geq 12\sqrt{3}r\varrho^2;$$

1025. Ako su ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c poluprečnici spolja upisanih krugova, ϱ poluprečnik upisanog kruga, r poluprečnik opisanog kruga i p poluobim tog trougla, dokazati da je

(a)
$$\varrho_a\varrho_b\varrho_c \geq 27\varrho^3;$$
(b)
$$\varrho_a\varrho_b\varrho_c \geq \frac{27}{2}r\varrho^2;$$
(c)
$$\varrho_a\varrho_b\varrho_c \leq \frac{27}{4}r^2\varrho;$$
(d)
$$\varrho_a\varrho_b\varrho_c \leq \frac{27}{8}r^3;$$
(e)
$$\varrho_a\varrho_b\varrho_c \leq \frac{\sqrt{3}}{9}p^3;$$
(f)
$$\varrho_a\varrho_b\varrho_c \leq \frac{1}{27}(4r+\varrho)^3.$$

1026. Ako su h_a, h_b, h_c visine trougla, p njegov poluobim, r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je :

(a)
$$h_ah_bh_c \leq \frac{\sqrt{3}}{9}p^3;$$
(b)
$$h_ah_bh_c \leq \frac{27}{8}r^3;$$

(c)
$$h_a h_b h_c \geq 27\varrho^3;$$
(d)
$$h_a h_b h_c \leq p^2\varrho;$$
(e)
$$h_a h_b h_c \leq \frac{27}{2} r\varrho^2;$$
(f)
$$h_a h_b h_c \leq \frac{27}{4} r^2\varrho.$$

1027. Ako su l_a, l_b, l_c simetrale unutrašnjih uglova trougla, p njegov poluobim, r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je

(a)
$$l_a l_b l_c \leq p^2\varrho;$$
(b)
$$l_a l_b l_c \leq \frac{\sqrt{3}}{9} p^3;$$
(c)
$$l_a l_b l_c \leq \frac{27}{4} r^2\varrho;$$
(d)
$$l_a l_b l_c \leq \frac{27}{8} r^3;$$
(e)
$$l_a l_b l_c \geq 27\varrho^3.$$

1028. Ako su h_a, h_b, h_c visine, r i ϱ poluprečnici opisanog i upisanog kruga i p poluobim trougla ABC, dokazati da je

(a)
$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \geq p^2;$$
(b)
$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leq \frac{27}{4} r^2;$$
(c)
$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leq \frac{27}{2} r\varrho;$$
(d)
$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leq p^2;$$

1029. Ako su l_a, l_b, l_c simetrale uglova, r i ϱ poluprečnici opisanog i upisanog kruga i p poluobim trougla $\triangle ABC$, dokazati da je:

(a)
$$l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq p^2$$
(b)
$$l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq \frac{27}{4} r^2$$

(c)

$$l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq 3(2r^2 + \varrho^2)$$

(d)

$$l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \geq 27\varrho^2$$

1030. Ako su $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ poluprečnici spolja upisanih krugova, ϱ poluprečnik upisanog kruga, r poluprečnik opisanog kruga i p poluobim trougla, dokazati da je:

(a)

$$\varrho_a^2 + \varrho_b^2 + \varrho_c^2 \geq p^2$$

(b)

$$\varrho_a^2 + \varrho_b^2 + \varrho_c^2 \geq 27\varrho^2$$

(c)

$$\varrho_a^2 + \varrho_b^2 + \varrho_c^2 \geq \frac{27}{4}r^2$$

.

1031. Ako su m_a, m_b, m_c težišne linije i p poluobim trougla, a r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je: (a)

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq p^2$$

(b)

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq 27\varrho^2$$

(c)

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq \frac{27}{2}r\varrho$$

(d)

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq \frac{27}{4}r^2$$

(e)

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq 3(2r^2 + \varrho^2)$$

(f)

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq 9(2r - \varrho)$$

1032. ako su $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ poluprečnici spolja upisanih krugova, ϱ poluprečnik upisanog kruga i r poluprečnik opisanog kruga, dokazati da je:

(a)

$$\varrho_a\varrho_b + \varrho_b\varrho_c + \varrho_c\varrho_a \geq \frac{27}{2}r\varrho,$$

(b)

$$\varrho_a\varrho_b + \varrho_b\varrho_c + \varrho_c\varrho_a \geq 27\varrho^2,$$

(c)

$$\varrho_a\varrho_b + \varrho_b\varrho_c + \varrho_c\varrho_a \leq \frac{27}{4}r^2$$

1033. Ako su h_a, h_b, h_c visine trougla, a p njegov poluobim, r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je:

(a)

$$h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \geq 27\varrho^2$$

(b)

$$h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \leq \frac{27}{2} r\varrho$$

(c)

$$h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \leq \frac{27}{4} r^2$$

(b)

$$h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \leq p^2$$

1034. Ako su a, b, c stranice, h_a, h_b, h_c visine i $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ poluprečnici spolja upisanih krugova, dokazati da je:

(a)

$$h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \leq \varrho_a \varrho_b + \varrho_b \varrho_c + \varrho_c \varrho_a$$

(b)

$$h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \leq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

(c)

$$h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \leq \frac{3}{4}(ab + bc + ca)$$

1035. Ako su h_a, h_b, h_c visine, l_a, l_b, l_c simetrale uglova i m_a, m_b, m_c težišne linije trougla $\triangle ABC$, dokazati da je:

(a)

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \geq \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \geq \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}$$

(b)

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leq l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$$

1036. Ako su m_a, m_b, m_c težišne linije i r poluprečnik kruga opisanog oko trougla $\triangle ABC$, dokazati da je:

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} > \frac{2}{r}.$$

1037. Ako je P središte a p' bilo koja druga tačka stranice BC trougla $\triangle ABC$, zatim M i N podnožja upravnih iz P, a M' i N' podnožja upravnih iz P' na pravama AB i AC, dokazati da je:

$$PM \cdot PN > P'M' \cdot P'N'.$$

1038. Ako je D podnožje visine iz temena A trougla $\triangle ABC$, a E tačka u kojoj simetrala ugla A seče stranicu BC, dokazati da je:

$$|AC^2 - AB^2| \geq 2|BC \cdot DE|.$$

1039. Ako su AB i CD dve tetive kruga k koje se seku u nekoj tački S pod pravim uglom i ako su O i r središte i poluprečnik kruga k, a d duž određena tačkama O i S, dokazati da je:

(a)
$$AB + CD \geq 2r$$
(b)
$$AB \cdot CD \leq 2(2r^2 - d^2)$$

1040. U ravni trougla ABC odrediti tačku X takvu da zbir duži AX, BX, CX bude minimalan.

1041. U ravni četvorougla $ABCD$ odrediti tačku X takvu da zbir duži AX, BX, CX, DX bude minimalan.

1042. U prostom četvorouglu $ABCD$ odrediti tačku X takvu da zbir duži AX, BX, CX, DX bude minimalan.

1043. Ako stranice AB, BC, CD, DA i dijagonale AC, BD četvorougla $ABCD$ obeležimo respektivno sa a, b, c, d, e, f dokazati da je
$$e^2 + f^2 \leq b^2 + d^2 + 2ac.$$

1044. Ako su a, b, c, d duži jednake stranicama AB, BC, CD, DA i e, f duži jednake dijagonalama AC, BD proizvoljnog četvorougla $ABCD$, dokazati da je
$$(a + b + c + d)(e + f) > 2(e^2 + f^2).$$

1045. Ako su A, B, C, D četiri proizvoljne tačke jedne ravni, dokazati da je
$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

1046. Ako je M proizvoljna tačka ravni trougla ABC kome su stranice BC, CA, AB srazmerne datim brojevima p, q, r, dokazati da je
$$pAM \leq qBM + rCM.$$

1047. U ravni trougla ABC odrediti tačku X takvu da zbir
$$pAX + qBX + rCX,$$
gde su p, q, r dati pozitivni brojevi, bude minimalan.

1048. Ako obeležimo sa M proizvoljnu tačku iz unutrašnjosti trougla ABC, sa X_a, X_b, X_c rastojanja tačke M od temena A, B, C i sa y_a, y_b, y_c odstojanja tačke M od pravih BC, CA, AB, dokazati da je
(a)
$$X_a + X_b + X_c \geq 2(y_a + y_b + y_c);$$
(b)
$$\frac{1}{X_a} + \frac{1}{X_b} + \frac{1}{X_c} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{y_a} + \frac{1}{y_b} + \frac{1}{y_c});$$
(v)
$$X_a X_b X_c \geq 8 y_a y_b y_c$$
;
(b)
$$X_a X_b X_c \geq (y_b + y_c)(y_c + y_a)(y_a + y_b).$$

1049. Ako obeležimo sa M bilo koju tačku iz unutrašnjosti trougla ABC, sa X_a, X_b, X_c rastojanja tačke M od temena A, B, C i sa y_a, y_b, y_c odstojanja tačke M od pravih BC, CA, AB, dokazati da je

(a)
$$X_a^2 + X_b^2 + X_c^2 > 2(y_a^2 + y_b^2 + yc^2);$$

(b)
$$\sqrt{X_a} + \sqrt{X_b} + \sqrt{X_c} \geq 2(\sqrt{y_a} + \sqrt{y_b} + \sqrt{y_c}).$$

1050. Ako obeležimo sa M bilo koju tačku iz unutrašnjosti trougla ABC, sa X_a, X_b, X_c rastojanja tačke M od temena A, B, C i sa y_a, y_b, y_c odstojanja tačke M od pravih BC, CA, AB, dokazati da je

(a)
$$(X_a + X_b + X_c)(\frac{1}{y_a} + \frac{1}{y_b} + \frac{1}{y_c}) \geq 18.$$

(b)
$$(X_a^2 + X_b^2 + X_c^2)(\frac{1}{y_a^2} + \frac{1}{y_b^2} + \frac{1}{y_c^2}) \geq 36.$$

1051. Ako obeležimo sa M proizvoljnu tačku iz unutrašnjosti trougla ABC, sa X_a, X_b, X_c rastojanje tačke M od temena A, B, C i sa y_a, y_b, y_c odstojanje tačke M od pravih BC, CA, AB, dokazati da je

$$aX_a + bX_b + cX_c \geq 2(ay_a + by_b + cy_c).$$

1052. Ako obeležimo sa M proizvoljnu tačku iz unutrašnjosti trougla ABC, sa X_a, X_b, X_c rastojanje tačke M od temena A, B, C i sa y_a, y_b, y_c odstojanje tačke M od pravih BC, CA, AB, dokazati da je

(a)
$$X_a y_a + X_b y_b + X_c y_c \geq 2(y_b y_c + y_c y_a + y_a y_b);$$

(b)
$$X_b X_c + X_c X_a + X_a X_b \geq 2(X_a y_a + X_b y_b + X_c y_c);$$

(b)
$$X_b X_c + X_c X_b + X_a X_b \geq 2(y_b y_c + y_c y_a + y_a y_b);$$

1053. Ako obeležimo sa M tačku iz unutrašnjosti trougla ABC, sa X_a, X_b, X_c rastojanje tačke M od temena A, B, C i sa y_a, y_b, y_c odstojanje tačke M od pravih BC, CA, AB, dokazati da je

(a)
$$\frac{1}{y_b y_c} + \frac{1}{y_c y_a} + \frac{1}{y_a y_b} \geq 2(\frac{1}{X_a y_a} + \frac{1}{X_b y_b} + \frac{1}{X_c y_c};$$

(b)
$$\frac{1}{X_a y_a} + \frac{1}{X_b y_b} + \frac{1}{X_c y_c} \geq 2(\frac{1}{X_b X_c} + \frac{1}{X_c X_a} + \frac{1}{X_a X_b};$$

(c)
$$\frac{1}{y_b y_c} + \frac{1}{y_c y_a} + \frac{1}{y_a y_b} \geq 4(\frac{1}{X_b X_c} + \frac{1}{X_c X_a} + \frac{1}{X_a X_b}.$$

1054. Ako je S središte i ϱ poluprečnik kruga upisanog u trouglu ABC, dokazati da je

(a)

$$SA + SB + SC \geq 6\varrho$$

(b)

$$SA \cdot SB \cdot SC \geq 8\varrho^3$$

1055. Ako su $d_1, \ldots, d_n$ rastojanja proizvoljne tačke kruga opisanog oko pravilnog poligona koji ima n stranica od njegovih temena i r poluprečnik opisanog kruga, dokazati da je

(a)

$$d_1 + \ldots + d_n \geq r\sqrt{2n}$$

(b)

$$d_1 + \ldots + d_n \leq nr\sqrt{2}$$

1056. Ako je T težište poligona $A_1 \ldots A_n$ upisanog u krug poluprečnika r, dokazati da je

$$TA_1^2 + \ldots + TA_n^2 \leq nr^2.$$

1057. Ako je T težište konačnog skupa od n tačaka $A_1, \ldots, A_n$ i P proizvoljna tačka, dokazati da je

$$TA_1^2 + \ldots + TA_n^2 \leq PA_1^2 + \ldots + PA_n^2.$$

1058. Ako je T težište konačnog skupa od n tačaka $A_1, \ldots, A_n$, zatim P proizvoljna tačka neke prave p i Q podnožje upravne iz tačke T na pravoj p, dokazati da je

$$PA_1^2 + \ldots + PA_n^2 \leq QA_1^2 + \ldots + QA_n^2.$$

1059. Ako obeležimo sa M proizvoljnu tačku iz unutrašnjosti trougla ABC, sa X_a, X_b, X_c rastojanja tačke M od temena A, B, C i sa ϱ poluprečnik upisanog kruga tog trougla, dokazati da je

(a)

$$X_a + X_b + X_c \geq 6\varrho$$

(b)

$$X_a^2 + X_b^2 + X_c^2 \geq 12\varrho^2$$

1060. Ako obeležimo sa M proizvoljnu tačku iz unutrašnjosti trougla ABC, sa y_a, y_b, y_c odstojanja tačke M od pravih BC, CA, AB a sa r i ϱ poluprečnik opisanog i upisanog kruga tog trougla, dokazati da je

$$y_a^2 + y_b^2 + y_c^2 \geq 12\frac{\varrho^4}{r^2}.$$

1061. Dokazati da od svih trouglova upisanih u dati oštrougli trougao najmanji obim ima trougao koji je određen podnožjima visina datog trougla.

1062. Ako su h_a, h_b, h_c visine trougla ABC i y_a, y_b, y_c odstojanja proizvoljne tačke iz unutrašnjosti trougla ABC od pravih BC, CA, AB, dokazati da je

$$\min(h_a, h_b, h_c) \leq y_a + y_b + y_c \leq \max(h_a, h_b, h_c).$$

1063. Ako su h_a, h_b, h_c visine trougla ABC i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je
$$\min(h_a, h_b, h_c) \leq 3\varrho \leq \max(h_a, h_b, h_c).$$

1064. Neka je M proizvoljna tačka iz unutrašnjosti trougla ABC i M' Lemoanova tačka tog trougla. Ako su P i P', Q i Q', R i R' podnožja upravnih iz tačke M i M' na pravama BC, CA, AB dokazati da je
$$MP^2 + MQ^2 + MR^2 \geq M'P'^2 + M'Q'^2 + M'R'^2.$$

1065. Dokazati da od svih trouglova upisanih u dati trougao najmanji zbir kvadrata stranica ima trougao kome su temena podnožja upravnih iz Lemoanove tačke na stranicama datog trougla.

1066. Ako je O proizvoljna tačka iz unutrašnjosti trougla ABC i ako su A', B', C' tačke u kojima prave AO, BO, CO seku respektivno stranice BC, CA, AB, dokazati da je

(a)
$$\frac{AA'}{AO} + \frac{BB'}{BO} + \frac{CC'}{CO} \geq \frac{9}{2}$$

(b)
$$\frac{AA'}{OA'} + \frac{BB'}{OB'} + \frac{CC'}{OC'} \geq 9$$

1067. Ako je O proizvoljna tačka iz unutrašnjosti trougla ABC i ako su A', B', C' tačke u kojima prave AO, BO, CO seku respektivno stranice BC, CA, AB, dokazati da je

(a)
$$\frac{AO}{AA'} \cdot \frac{BO}{BB'} \cdot \frac{CO}{CC'} \leq \frac{8}{27}$$

(b)
$$\frac{OA'}{AA'} \cdot \frac{OB'}{BB'} \cdot \frac{CO}{CC'} \leq \frac{1}{27}$$

1068. Ako je O proizvoljna tačka iz unutrašnjosti trougla ABC i ako su A', B', C' tačke u kojima prave AO, BO, CO seku respektivno stranice BC, CA, AB, dokazati da je

(a)
$$\frac{AO}{OA'} + \frac{BO}{OB'} + \frac{CO}{OC'} \geq 6,$$

(b)
$$\frac{AO}{OA'} + \frac{BO}{OB'} + \frac{CO}{OC'} \geq 8.$$

1069. Ako se dijagonale AC i BD četvorougla $ABCD$ seku u tački O i ako prava kroz O uporedna sa AB seče stranice AD i BC u tačkama A_1 i B_1, prava kroz O uporedna sa BC seče stranice AB i CD u tačkama B_1 i C_2, prava kroz O uporedna sa AD seče stranice CD i AB u tačkama D_1 i A_2, dokazati da je
$$\frac{A_1B_2}{AB} \cdot \frac{B_1C_2}{BC} \cdot \frac{C_1D_2}{CD} \cdot \frac{D_1A_2}{DA} \leq 1.$$

1070. Ako su a, b, c stranice i S površina trougaone površi, dokazati da je

(a)
$$S \leq \frac{1}{2}(a^2 - ab + b^2);$$
(b)
$$S \leq \frac{1}{8}(a + b)^2;$$
(v)
$$S \leq \frac{1}{4}(a^2 + B^2);$$
(g)
$$S < \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2).$$

1071. Ako su a, b, c stranice i S površina trougaone površi, dokazati da je
(a)
$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{36}(a + b + c)^2;$$
(b)
$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + b^2 + c^2);$$
(v)
$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{12}(ab + bc + ca);$$
(g)
$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{12}[a^2 + b^2 + c^2 - (a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2].$$

1072. Ako je S površina i p poluobim neke trougaone površi, a r poluprečnik opisanog kruga i ϱ poluprečnik upisanog kruga, dokazati da je
(a)
$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{9}p^2;$$
(b)
$$S \geq 3\sqrt{3}\varrho^2;$$
(v)
$$S \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}r\varrho;$$
(g)
$$S \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}\varrho^2;$$
(d)
$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{3}(2r^2 + \varrho^2;$$
(đ)
$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{27}(4r + \varrho)^2;$$

(e)

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{3}(r+\varrho)^2.$$

1073. Ako su r i ϱ poluprečnici opisanog i upisanog kruga trougla ABC, dokazati da je

$$S(ABC) > 2\varrho\sqrt{r\varrho}.$$

1074. Ako su a, b, c stranice i S površina neke trougaone površi, dokazati da je

(a)

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt[3]{a^2b^2c^2};$$

(b)

$$S \leq \frac{1}{4}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2};$$

(v)

$$S \leq \frac{1}{4}\sqrt{a^4+b^4+c^4}.$$

1075. Ako su a, b, c stranice, h_a, h_b, h_c visine, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c poluprečnici spolja upisanih krugova i S površina neke trougaone površi, dokazati da je

(a)

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt[3]{a^2b^2c^2};$$

(b)

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt[3]{\varrho_a^2\varrho_b^2\varrho_c^2};$$

(v)

$$S \geq \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt[3]{ha_a^2ha_b^2ha_c^2};$$

(G)

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2);$$

(d)

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{9}{\varrho_a}^2{\varrho_b}^2{\varrho_c}^2.$$

1076. Ako je r poluprečnik opisanog kruga, ϱ poluprečnik upisanog kruga i S površina površi pravouglog trougla, dokazati da je

$$S \leq \frac{1}{2}(r+\varrho)^2.$$

1077. Ako su a, b, c, d duži jednake stranicama AB, BC, CD, DA i e i f duži jednake dijagonalama AC i BD prostog četvorougla $ABCD$, dokazati da je

(a)

$$S(ABCD) \leq \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2);$$

(b)

$$S(ABCD) \leq \frac{1}{4}(e^2+f^2).$$

1078. Ako su a, b, c, d duži jednake stranicama AB, BC, CD, DA i e i f duži jednake dijagonalama AC i BD konveksnog četvorougla $ABCD$, dokazati da je

$$S(ABCD) < \frac{sqrt3}{12}a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2.$$

1079. Ako su a, b, c, d stranice konveksnog četvorougla $ABCD$, dokazati da je

$$S(ABCD) \leq \frac{1}{4}(a + c)(b + d).$$

1080. Ako je p poluobim i S površina tangentne i tetivne četvorougaone površi $ABCD$, dokazati da je

$$S \leq \frac{1}{4}p^2.$$

1081. Neka je P tačka u konveksnom uglu AOB i neka su s i s' dve razne prave kroz S, od kojih prva seče krake OA i OB ugla AOB u tačkama P i Q, a druga seče krake OA i OB u tačkama P' i Q'.Ako je pri tome tačka S središte duži PQ, dokazati da je

$$S(OPQ) < S(OP'Q').$$

1082. Ako je k krug upisan u trougao ABC, a $A'B'C'$ jednakostraničan trougao upisan u krug k, dokazati da je

$$S(ABC) \geq 4S(A'B'C').$$

1083. Ako su temena P, Q, R trougla PQR na stranicama BC, CA, AB trougla ABC, dokazati da je površina bar jedne od trougaonih površi (AOR), (BRP), (CPQ) manja ili jednaka od površine trougaone površi (PQR).

1084. Ako su ABC i $A_1B_1C_1$ dva trougla od kojih je $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, a razlika stranica AB i AC manja od razlike stranica A_1B_1 i A_1C_1, dokazati da je

$$S(ABC) > S(A_1B_1C_1).$$

1085. Ako su ABC i $A_1B_1C_1$ dva trougla od kojih je $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, a razlika uglova B i C manja od razlike uglova B_1 i C_1, dokazati da je

$$S(ABC) > S(A_1B_1C_1).$$

1086. Ako dva trougla ABC i $A_1B_1C_1$ imaju jednake obime i jednake stranice BC i B_1C_1, i ako je razlika uglova B i C manja od razlike uglova B_1 i C_1, dokazati da je

$$S(ABC) > S(A_1B_1C_1).$$

1087. Dokazati da od svih trougaonih površi koje imaju jednak po jedan ugao i jednake zbirove stranica koje zahvataju te uglove, najveću površinu ima ona trougaona površ kojoj su te dve stranice među sobom jednake.

1088. Dokazati da od svih trapeza koji imaju jednake obime i jednake odgovarajuće uporedne stranice, najveću površinu ima površ jednakokrakog trapeza.

1089. Dokazati da od svih paralelogramskih površi koje imaju jednak po jedan ugao i koje imaju jednake obime, najveću površinu ima površ romba.

1090. Dokazati da od svih trougaonih površi s jednakim obimima, najveću površinu ima površ jednakostraničnog trougla.

1091. Dokazati da od svih četvorougaonih površi s jednakim obimima, najveću površinu ima kvadratna površ.

1092. Dokazati da od svih konveksnih četvorougaonih površi koje imaju jednake odgovarajuće stranice, najveću površinu ima ona četvorougaona površ oko koje se može opisati krug.

1093. Dokazati da od svih konveksnih četvorougaonih površi koje imaju jednake obime i jednake odgovarajuće uglove, najveću površinu ima ona četvorougaona površ u koju se može upisati krug.

1094. Dokazati da od svih poligonskih površi koje imaju po n stranica i koje su upisane u isti krug, najveću površinu ima pravilna poligonska površ.

1095. Dokazati da od svih poligonskih površi koje imaju jednak broj stranica i kojima stranice dodiruju isti krug k, najmanju površinu ima pravilna poligonska površ.

1096. Dokazati da od svih n-tougaonih površi s jednakim obimima, najveću površinu ima pravilna n-tougaona površ.

1097. Ako su $(A_1...A_n)$ i $(B_1...B_n)$ dva pravilna poligona sa jednakim obimima, dokazati da je

$$S(A_1...A_n) < S(B_1...B_{n+1}).$$

1098. Ako trougaona površ ω pripada paralelogramskoj površi λ, dokazati da je

$$S(\lambda) \geq 2S(\omega).$$

1099. Dokazati da postoji paralelogramska površ λ koja sadrži proizvoljnu konveksnu poligonsku površ ω pri čemu je

$$S(\lambda) \leq 2S(\omega).$$

1100. Dokazati da postoji trougaona površ λ koja sadrži datu konveksnu poligonsku površ ω, pri čemu je

$$S(\omega) \geq \frac{1}{2}S(\lambda).$$

1101. Dokazati da postoji trougaona površ λ sadržana u datoj konveksnoj poligonskoj površi ω, pri čemu je jedna stranica površi λ uporedna s datom pravom p, a

$$S(\lambda) \geq \frac{3}{8}S(\omega).$$

1102. Ako je ω pravilna šestougaona površ, a λ trougaona površ sadržana u površi ω, pri čemu je jedna stranica površi λ uporedna s jednom stranicom površi ω, dokazati da je

$$S(\lambda) \leq \frac{3}{8}S(\omega).$$

1103. Dokazati da površina trougaone površi upisane u konveksni poligon ne može biti veća od površine maksimalne trougaone površi određene trima temenima tog konveksnog poligona.

1104. Svaki ravan lik ω dijametra d može se razložiti na tri lika tako da dijametar svakog od dobijenih likova bude manji od d (Borsukova teorema).

1105. Ako je d širina ograničene konveksne površi ω, dokazati da postoji kružna površ λ poluprečnika $\frac{d}{3}$ kojoj sve tačke pripadaju površi ω.

1106. Dokazati da uporedne prave oslonca ograničene površi ω koje imaju najveće moguće odstojanje, sadrže samo po jednu tačku te površi, pri čemu je duž koja je određena tim tačkama upravna na pomenutim pravama oslonca površi ω.

1107. Dokazati da je maksimalno odstojanje između dveju paralelnih pravih oslonca konveksne površi ω jednako dijametru d površi ω.

1108. Dokazati da se oko svake konveksne površi ω može opisati kvadrat.

13. KONSTRUKTIVNI ZADACI

13.1 Metoda geometrijskih mesta

1109. (*) Konstruisati skup svih tačaka jednako udaljenih od dveju datih tačaka A i B.

Konstruisati trougao ABC kada znamo:

1110. $b \pm c, a, A$.

1111. $b \pm c, a, B$.

1112. $b \pm c, a, h_b$.

1113. $b \pm c, h_c, B$.

1114. $b \pm c, B, C$.

1115. $b \pm c, a, B - C$.

1116. $b \pm c, m_a, h_b$.

1117. $b \pm c, h_b, h_c$.

1118. $b + c, h_b + h_c, a$.

1119. $b - c, h_c - h_b, a$.

1120. p, B, C.

1121. p, h_a, B.

1122. $a, b \pm h_a, b = c$.

1123. $h_a, m_a, a = 2b$.

1124. h_a, l_a, m_a.

1125. $B - C, h_a, m_a$.

1126. $B - C, l_a, m_a$.

1127. Konstruisati trougao ABC kome je ugao A jednak datom uglu α, zbir stranica AB i AC jednak datoj duži m, a zbir visine BD i odsečka CD jednak datoj duži n.

1128. Dati ku krug k sa središtem O, prečnik AB kruga k i na polupravoj OB tačka S. Konstruisati pravu koja sadrži tačku S i seče krug k u tačkama X i Y takvim da je $\angle AOX = 3\angle BOY$.

1129. Konstruisati pravougaonik kome je razlika dveju susednih stranica jednaka datoj duži d, a ugao između dijagonala jednak datom uglu ω.

1130. Konstruisati krug koji sadrži dve date tačke A, B i seče dati krug k u tačkama C i D takvim da je duž CD uporedna sa pravom p.

1131. Konstruisati krug koji sadrži datu tačku A i dodiruje datu pravu m u datoj tački M.

1132. Konstruisati krug koji sadrži datu tačku A i dodiruje datu pravu m u datoj tački M.

1133. Konstruisati krug koji sadrži dati tačku A i dodiruje dati krug m u datoj tački M.

1134. Konstruisati krug k koji dodiruje dati krug i datu pravu m u datoj tački M.

1135. Konstruisati krug koji dodiruje dati krug l i dati krug m u datoj tački M.

1136. Konstruisati krug koji sadrži dve date tačke A, B i seče dati krug l u tačkama C i D takvim da tetiva CD bude uporedna s datom pravom p.

1137. Date su četiri tačke A,B,C,D. Konstruisati krug koji sadrži tačke A i B tako da parovi njegovi dirki iz tačaka C i D zahvataju jednake uglove.

1138. Date su tri tačke A,B,C. Konstruisati krug kome parovi dirki iz tačaka A,B,C zahvataju uglove jednake datom uglu ω.

1139. Konstruisati krug k čija su odstojanja od četiri date tačke A,B,C,D među sobom jednaka. Analizirati slučaj kada su sve četiri date tačke izvan ili u krugu k i slučaj kada su neke od njih izvan, a neke u krugu k.

1140.(*) Konstruisati skup svih tačaka jednako udaljenih od dveju datih pravih a i b.

Konstruisati trougao ABC kada znamo:

1141. $a, b + c, h_b + h_c$.

1142. $a, b - c, h_c - h_b$.

1143. $A, a, b \pm c$.

1144. $A, a, h_b \pm h_c$.

1145. Konstruisati krug k koji dodiruje datu pravu a i dati krug l u datoj tački M.

1146.(*) Konstruisati skup temena svih uglova jednakih datom uglu ω, a u kojima kraci sadrže tačke A i B.

Konstruisati trougao ABC kada znamo

1147. A, a, m_a.

1148. A, a, h_a.

1149. A, a, h_b.

1150. A, h_a, p.

1151. A, r, p.

1152. $A, a, b \pm c$.

1153. $A, r, b \pm c$.

1154. $A, a, h_b \pm h_c$.

1155. $A, r, h_b \pm h_c$.

1156. $A, a, b(b \pm c)$.

1157. $A, r, b(b \pm c$.

1158. a, h_b, h_c.

1159. m_a, h_a, h_b.

1160. m_a, h_b, h_c.

1161. $B - C, m_a, a$.

1162. $B - C, a, b \pm c$.

1163. $B - C, h_b, b \pm c$.

1164. $B - C, b, c$.

1165. U dati krug l upisati četvorougao $ABCD$ kada znamo:
(a) AC, BD, $AB \pm BC$;
(b) AC, $AB + BC$, $AD - CD$.

1166. Date su četiri komplanarne tačke A, B, C, D. Konstruisati tačku X takvu da uglovi AXB i CXD budu jednaki datim uglovima α i β.

1167. Konstruisati romb $ABCD$ kome je stranica jednaka datoj duži a, a zbir ili razlika dijagonala jednaka datoj duži l.

1168. Date su dve uporedne prave p i q, na pravoj p tačka A i izvan pravih p i q tačka B. Konstruisati pravu koja sadrži tačku B i seče prave p i q u tačkama X i Y takvim da je
(a) $AX = AY$;
(b) $AX = XY$.

1169. U ravni trougla ABC odrediti tačku X takvu da je $\angle AXB = \angle BXC = \angle CXA$.

1170. Konstruisati Brokarove tačke datog trougla ABC, tj. tačke X i X' takve da je $\angle XAB = \angle XBC = \angle XCA$ i $\angle X'AC = \angle X'CB = \angle X'BA$.

1171. Konstruisati trougao ABC kome stranice BC, CA, AB respektivno sadrže date tačke P, Q, R i kome je ugao A jednak datom uglu α, visina iz temena A jednaka datoj duži h_a, a prava AP simetrala ugla A.

1172. Konstruisati paralelogram $ABCD$ kome je stranica AB jednaka datoj duži a, zbir ili razlika dijagonala jednaka datoj duži l, a jedan od uglova između dijagonala jednak datom uglu ω.

1173. Konstruisati paralelogram $ABCD$ kome je obim jednak datoj duži p, dijagonala AC jednaka datoj duži d, a razlika uglova BAC i CAD jednaka datom uglu ω.

1174. Date su tri nekolinearne tačke A, B, C. Konstruisati tačku takvu da četvorougao $ABCD$ bude tetivan i tangentan.

1175. Konstruisati četvorougao $ABCD$ koji je tangentan i tetivan ikome je dijagonala AC jednaka datoj duži l, ugao B jednak datom uglu β, a jedan od uglova između dijagonala jednak datom uglu ω.

1176. Date su tri tačke B, C, D. Konstruisati trougao ABC kome je ugao A jednak datom uglu α, a tačka D na simetrali unutrašnjeg ili spoljašnjeg ugla A.

1177. U dati krug l upisati trougao ABC takav da stranice AB i AC budu uporedne s datim pravama m i n, i da prava određena stranicom BC sadrži datu tačku P.

1178. U dati krug l upisati trougao ABC takav da prave određene stranicama AB i AC sadrže date tačke M i N, a stranica BC bude jednaka datoj duži a.

1179. U dati krug k upisati trapez kome je visina jednaka datoj h, a zbir ili razlika osnovice jednaka datoj duži l.

1180. Konstruisati kvadrat $ABCD$ takav da prave određene njegovim stranicama AB, BC, CD, DA sadrže respektivno date tačke P, Q, R, S.

1181. Oko datog četvorougla $PQRS$ opisati četvorougao $ABCD$ kome je dijagonala AC uporedna i jednaka datoj duži MN, a uglovi koje ta dijagonala zahvata sa stranicama AB i AD jednaki datim uglovima α_1 i α_2.

1182. Oko datog četvorougla $PQRS$ opisati četvorougao $ABCD$ kome dijagonala AC zahvata sa stranicama AB,AD, BC uglove jednake datim uglovima α_1, α_2, γ_1, γ_2.

1183. Date su tri razne tačke A, B, C i prava l. Odrediti na pravoj l tačku X takvu da razlika uglova ABX i ACX bude jednaka datom uglu ω.

1184. Dat je krug k, dve tačke A i B na krugu k i tačka P izvan kruga k. Konstruisati pravu koja sadrži tačku P i seče krug k u tačkama C, D takvim da je jedan od uglova koje zahvataju prave AD i BC jednak datom uglu ω.

1185. Dati su krug k i na njemu tri razne tačke A, B, C. Konstruisati tačku X da prave AX, BX, CX seku krug k u tačkama A', B', C' takvim da tetive $A'B'$ i $B'C'$ budu jednake datim dužima m i n.

1186. Dati su prava p, krug k i na krugu k dve tačke A, B. Odrediti na pravoj p tačku X takvu da prave AX i BX seku krug k u tačkama A' i B' pri čemu je tetiva $A'B'$ jednaka datoj duži l.

1187. Date su dve prave p i q koje se seku u tački S i izvan tih pravih dve tačke M, N. Konstruisati krug koji sadrži tačke S, M i seče prave p, q u tačkama P, Q takvim da tačke N, P, Q budu na jednoj pravoj.

1188. Date su prava a, na njoj tačka A i izvan prave a tačke B, C. Konstruisati krug k koji sadrži tačke A, B i seče pravu a u tački D pri čemu prava CD dodiruje krug k u tački D.

1189. Dat je prav ugao POQ i na kraku OP date su dve tačke A i B. Odrediti na kraku OQ tačku X takvu da je $\angle AXB = 2\angle ABX$.

1190. Konstruisati krug k koji sadrži dve tačke A, B i dodiruje datu pravu p.

1191. Date su prava p i sa iste strane od te prave dve tačke A, B. Odrediti na pravoj p tačku X takvu da konveksni ugao AXB bude maksimalan.

1192. Date su dve prave koje se seku u tački A i na jednoj od njih dve tačke B, D. Odrediti na drugoj pravoj tačku C da prava kroz tu tačku i središte S kruga opisanog oko trougla ABC sadrži tačku D.

1193. Dati su dva kruga koji s iste strane dodiruju izvesnu pravu p. Odrediti na toj pravoj p tačku X da zbir uglova koje zahvataju dirke kroz tu tačku na datim krugovima bude jednak datom uglu.

1194. Dati su krug k sa središtem O i tačka S različita od O. Konstruisati krug kome je središte S, a seče k pod uglovima jednakim datom uglu ω.

1195. Date su prava p i izvan te prave tačke M, N. Konstruisati krug kome je poluprečnik jednak datoj duži r, koji dodiruje pravu p pri čemu su njegove dirke kroz tačke M i N među sobom uporedne.

1196. Dati su krug k, linija l, i tačka P. Konstruisati pravu koja sadrži tačku P, seče liniju l u tački S i krug k u tačkama A, B takvim da je S središte duži AB.

1197.(*) Dat je kružni luk BLC

(a) Konstruisati skup središta krugova upisanih u trouglove kojima su dva temena tačke B i C, a treće teme promenljiva tačka luka BLC.

(b) Konstruisati skup središta spolja upisanih krugova svih pomenutih trouglova koji dodiruju stranice BC.

(v) Konstruisati skup središta spolja upisanih krugova svih pomenutih trouglova koji dodiruju stranice CA, zatim skup središta spolja upisanih krugova koji dodiruju stranice AB.

1198. Konstruisati trougao ABC kada znamo a, A, ϱ.

1199. Konstruisati trougao ABC kada znamo a, A, ϱ_a.

1200. Konstruisati trougao ABC kada znamo a, A, ϱ_b.

1201. Konstruisati trougao ABC kada znamo a, r, ϱ.

1202. Konstruisati trougao ABC kada znamo a, r, ϱ_a.

1203. Konstruisati trougao ABC kada znamo a, r, ϱ_b.

1204. Konstruisati trougao ABC kada znamo A, r, ϱ.

1205. Konstruisati trougao ABC kada znamo A, r, ϱ_a.

1206. Konstruisati trougao ABC kada znamo A, r, ϱ_b.

1207. Konstruisati skup središta svih tetiva datog kruga k koje pripadaju pravama datog pramena P.

1208. Konstruisati pravu koja sadrži datu tačku P i seče dati krug k u tačkama A, B takvim da zbir ili razlika duži AP i BP bude jednaka datoj duži l.

1209. Konstruisati pravu koja sadrži datu tačku P i seče dati krug k u tačkama A i B takvim da zbir ili razlika odstojanja tih tačaka od date prave p bude jednaka datoj duži l.

1210. Konstruisati skup svih tačaka kojima je zbir ili razlika odstojanja od dveju datih pravih m, n jednaka datoj duži l.

1211. Na datoj pravoj p odrediti tačku X takvu da zbir ili razlika njenih odstojanja od dveju datih pravih m i n bude jednaka datoj duži l.

1212. Date su dve orijentisane prave a, b i na njima tačke A, B. Konstruisati skup središta svih duži PQ kojima su krajevi P i Q promenljive tačke pravih a i b takve da je $AP = BQ$.

1213. Date su tri prave a, b, c i na pravama a, b tačke A, B. Odrediti na pravama a i b tačke X i Y takve da je $AX = BY$, a središte Z duži XY na pravoj c.

1214. Konstruisati skup temena pravih uglova svih pravouglih trouglova koji su podudarni s nekim datim pravouglim trouglom $A_oB_oC_o$ a kojima ostala dva temena pripadaju raznim kracima datog pravog ugla XOY.

1215. Date su tri prave a, b, c od kojih su prve dve upravne među sobom. Odrediti na pravama a, b, c tačke A, B, C takve da trougao ABC bude podudaran s datim trouglom $A_oB_oC_o$ kome je ugao C_o prav.

1216. Dat je ugao AOB i duž l. Ako su P i Q promenljive tačke polupravih OA i OB takve da je $PQ = l$, konstruisati skup svih tačaka R u kojima se seku upravne na polupravama OA i OB u tačkama P i Q.

1217. Date su tri razne prave a, b, c i duž l. Odrediti na pravoj c tačku C takvu da podnožja A i B upravnih iz tačke na pravama a i b određuju duž jednaku duži l.

1218.(*) Dati su krug l i na njemu dve razne tačke B, C. Konstruisati skup ortocentara svih trouglova kojima su dva temena tačke B i C, a treće teme promenljiva tačka A kruga l.

1219. Dati su krug l, prava p i na krugu k dve razne tačke B, C. Odrediti na krugu l tačku A takvu da ortocentar trougla ABC bude na pravoj p.

1220.(*) Dat je jednakostraničan trougao ABC. Konstruisati skup svih tačaka P takvih da prave BP i CQ seku prave AC i AB u tačkama Q i R pri čemu je $BQ = CR$.

1221. Dat je jednakostraničan trougao ABC i u njegovoj ravni prava p. Odrediti na pravoj p tačku P takvu da prave BP i CP seku prave AC i AB u tačkama Q i R pri čemu je $BQ = CR$.

1222.(*) Dati su krug k, na njemu dve fiksirane tačke A, B i promenljiva tačka P. Konstruisati skup podnožja svih upravnih iz središta duži AP na pravoj BP.

1223.(*) Date su u jednoj ravni dve prave $l1$ i $l2$ koje nisu paralelne niti upravne među sobom i izvan tih pravih tačka H. Konstruisati skup svih tačaka P kojima simetrične tačke $P1$ i $P2$ u odnosu na prave $l1$ i $l2$ određuju pravu koja sadrži tačku H.

1224. Dati su krug k i prava s koja sadrži njegovo središte O. Konstruisati skup svih tačaka u kojima tangente kruga k dodiruju promenljivi krug l koji sadrži tačku O, a središte mu se nalazi na pravoj s.

1225. Data su dva komplanarna kruga k i l koji se seku u dvema tačkama A i B. Konstruisati skup ortocentara svih trouglova PQR kojima je teme P promenljiva tačka kruga k, dok su temena Q i R tačke u kojima prave PA i PB seku krug l.

1226. Neka je A fiksirana tačka nekog kruga k, B promenljiva tačka tog kruga i $ABCD$ kvadrat na duži AB.

(a) Konstruisati skup temena C svih kvadrata $ABCD$;
(b) Konstruisati skup temena D svih kvadrata $ABCD$.

Konstruisati trougao ABC kada znamo:

1227. A, ϱ, h_a.

1228. A, ϱ, l_a.

1229. A, ϱ, ϱ_a.

1230. A, ϱ, ϱ_b.

1231. A, ϱ, a.

1232. A, ϱ, p.

1233. $A, \varrho, a - b$.

1234. $A, \varrho, b + c$.

1235. $A, \varrho, h_b \pm h_c$.

1236. A, ϱ_a, h_a.

1237. A, ϱ_a, l_a.

1238. A, ϱ_a, ϱ_b.

1239. A, ϱ_a, a.

1240. $A, \varrho_a, a + b$.

1241. $A, \varrho_a, b \pm c$

1242. $A, \varrho_a, h_b \pm h_c$.

1243. A, ϱ_b, h_a.

1244. A, ϱ_b, l_a.

1245. A, ϱ_b, ϱ_c.

1246. A, ϱ_b, a.

1247. A, ϱ_b, p.

1248. $A, \varrho_b, a + b$.

1249. $A, \varrho_b, b \pm c$.

1250. $A, \varrho_b, h_b \pm h_c$.

1251. A, p, a.

1252. A, p, h_a.

1253. A, p, l_a.

1254. $A, p, b \pm c$.

1255. $A, p, \varrho_a \pm \varrho$.

1256. $A, p, \varrho_b \pm \varrho_c$.

1257. $A, b + c, \varrho_a - \varrho$.

1258. $A, b + c, \varrho_b \pm \varrho$.

1259. $A, b - c, \varrho_a \pm \varrho$.

1260. $A, b - c, \varrho_b + \varrho_c$.

1261. $B - C, h_a, r$.

1262. $B - C, h_a, \varrho$.

1263. $B - C, h_a, \varrho_a$.

1264. $B - C, h_a, \varrho_b$.

1265. $B - C, h_a, m_a$.

1266. $B - C, l_a, m_a$.

1267. $B - C, l_a, r$.

1268. $B - C, l_a, \varrho$.

1269. $B - C, l_a, \varrho_a$.

1270. $B - C, l_a, \varrho_b$.

1271. $B - C, p, \varrho_a$.

1272. $B - C, p, \varrho_b$.

1273. $B - C, b + c, r$.

1274. $B - C, b + c, \varrho_b$.

1275. $B - C, b + c, \varrho_b + \varrho_c$.

1276. $B - C, b - c, r$.

1277. $B - C, b - c, \varrho$.

1278. $B - C, b - c, \varrho a$.

1279. $B - C, b - c, \varrho a - \varrho$.

1280. $B - C, \varrho, \varrho_a$.

1281. $B - C, \varrho_b, \varrho_c$.

1282. $B - C, r, \varrho$.

1283. $B - C, r, \varrho_a$.

1284. $B - C, r, \varrho_b$.

1285. $B - C, r, m_a$.

1286. a, p, ϱ.

1287. a, p, ϱ_a.

1288. $a, p, \varrho_a \pm \varrho$.

1289. $a, p, \varrho_b \pm \varrho_c$.

1290. $a, b \pm c, \varrho$.

1291. $a, b \pm c, \varrho_a$.

1292. $a, b \pm c, \varrho_b$.

1293. $a, b \pm c, \varrho_a \pm \varrho$.

1294. $a, b \pm c, \varrho_b \pm \varrho_c$.

1295. a, ϱ, ϱ_a.

1296. a, ϱ_b, ϱ_c.

1297. $b, c, \varrho_a + \varrho$.

1298. $b, c, \varrho_b - \varrho_c$.

1299. $b \pm c, \varrho, \varrho_a$.

1300. $b \pm c, \varrho_b, \varrho_c$.

1301. $b \pm c, \varrho + \varrho_a, r$.

1302. $b \pm c, \varrho_b + \varrho_c, r$.

1303. $b - c, r, \varrho$.

1304. $b - c, r, \varrho_a$.

1305. $b + c, r, \varrho_b$.

1306. $b - c, m_a, \varrho$.

1307. $b - c, m_a, \varrho_a$.

1308. $b + c, m_a, \varrho_b$.

1309. $b - c, h_a, \varrho$.

1310. $b - c, h_a, \varrho_a$.

1311. $b + c, h_a, \varrho_b$.

1312. $b - c, h_b, \varrho$.

1313. $b - c, h_b, \varrho_a$.

1314. $b + c, h_b, \varrho_b$.

1315. p, ϱ, ϱ_a.

1316. p, ϱ_b, ϱ_c.

1317. p, h_a, ϱ_a.

1318. p, l_a, ϱ_a.

1319. r, ϱ, ϱ_a.

1320. r, ϱ_b, ϱ_c.

1321. h_a, l_a, m_a.

1322. h_a, l_a, r.

1323. Date su tri nekolinearne tačke S_a, S_b, S_c. Konstruisati trougao ABC kome su tačke S_a, S_b, S_c središta spolja upisanih krugova.

1324. Date su tri nekolinearne tačke S, S_b, S_c. Konstruisati trougao ABC kome je tačka S središte upisanog kruga, tačka S_b središte spolja upisanog kruga koji dodiruje stanicu AC, a tačka S_c središte spolja upisanog kruga koji dodiruje stranicu AB.

1325. Konstruisati trougao ABC kada su date tačke K, L, N, u kojima njegov opisani krug seče prave određene visinom AD, težišnom linijom AA_1 i simetralom AE unutrašnjeg ugla A.

1326. Konstruisati trougao ABC kada su date tačke K, L, N, u kojima njegov opisani krug seče prave određene visinom AD, težišnom linijom AA_1 i simetralom AF spoljašnjeg ugla A.

1327. Date su tri kolinearne tačke D, E, A_1. Konstruisati trougao ABC kome je tačka D podnožje visine iz temena A, tačka E presek simetrale ugla A sa stranicom BC, A_1 središte stranice BC i kome je duž koja spaja teme A sa ortocentrom H jednaka datoj duži d.

1328. Date su tri razne tačke D, E, O. Konstruisati trougao ABC kome je tačka D podnožje visine iz temena A, tačka E presek simetrale ugla A sa stranicom BC i tačka O središte opisanog kruga.

1329. Date su tri tačke A, A_1, H. Konstruisati tačke B i C takve da ABC bude trougao kome je tačka H ortocentar, a tačka A_1 središte stranice BC.

1330. Dat je krug l i u njegovoj ravni tačka H. U krug l upisati trougao ABC kome je ortocentar tačka H, a stranica BC jednaka datoj duži a.

1331. Konstruisati trougao ABC kome je stranica BC jednaka datoj duži a, duž koja spaja teme A sa ortocentrom jednaka duži d, a poluprečnik upisanog kruga jednak datoj duži ϱ.

1332. Konstruisati trougao ABC kome je stranica BC jednaka datoj duži a,zbir ili razlika stranica AB i AC jednaka datoj duži s, a duž koja spaja teme A sa ortocentrom H jednaka datoj duži d.

1333. Dat je krug l i u njegovoj ravni tačka T. Upisati u krug l trougao ABC kome je tačka T težište, a razlika uglova B i C jednaka datom uglu ω.

1334. Date su tri nekolinearne tačke A_1, S, E. Konstruisati trougao ABC kome je tačka $A1$ središte stranice BC, tačka S središte upisanog kruga, a E tačka u kojoj simetrala unutrašnjeg ugla A seče stranicu BC.

1335. Date su tri nekolinearne tačke A_1, S_a, E. Konstruisati trougao ABC kome je tačka A_1 središte stranice BC, tačka S_a središte spolja upisanog kruga koji dodiruje stranicu BC i R tačka u kojoj simetrala unutrašnjeg ugla A seče stranicu BC.

1336. Date su tri nekolinearne tačke A_1, S, F. Konstruisati trougao ABC kome je tačka A_1 središte stranice BC, tačka S središte upisanog kruga, a F tačka u kojoj simetrala unutrašnjeg ugla A seče stranicu BC.

1337. Date su tri nekolinearne tačke A_1, S_a, F. Konstruisati trougao ABC kome je tačka A_1 središte stranice BC, tačka S_a središte spolja upisanog kruga koji dodiruje stranicu BC i F tačka u kojoj simetrala spoljašnjeg ugla A seče pravu BC.

1338. Date su tri nekolinearne tačke A_1, S_b, E. Konstruisati trougao ABC kome je tačka A_1 središte stranice BC, tačka S_b središte spolja upisanog kruga koji dodiruje stranicu CA i E tačka u kojoj simetrala unutrašnjeg ugla A seče stranicu BC.

1339. Date su tri nekolinearne tačke A_1, S_b, F. Konstruisati trougao ABC kome je tačka A_1 središte stranice BC, tačka S_b središte spolja upisanog kruga koji dodiruje stranicu CA i F tačka u kojoj simetrala spoljašnjeg ugla A seče pravu BC.

1340. Date su tri nekolinearne tačke A, A_1, S_1. Konstruisati trougao ABC kome je tačka A_1 središte stranice BC, a tačka S_1 središte Ojlerovog kruga.

1341. Date su tri nekolinearne tačke B, C, S_1. Konstruisati tačku A takvu da tačke A, B, C budu temena trougla kome je tačka S_1 središte Ojlerovog kruga.

1342. Date su tri nekolinearne tačke A, D, S_1. Konstruisati trougao ABC kome je tačka A jedino teme, tačka D podnožje visine iz tog temena i S_1 središte Ojlerovog kruga.

1343. Dati su krug l', tačka T i ugao ω. Konstruisati trougao ABC kome je l Ojlerov krug, T težište a razlika uglova B i C jednaka uglu ω.

1344. Date su dve konkurentne prave AX, AY i u njihovoj ravni tačka S_1. Konstruisati trougao ABC kome je tačka S_1 središte Ojlerovog kruga, ortocentar H na pravoj AX, a središte S upisanog kruga na pravoj AY.

1345.(*) Konstruisati skup svih tačaka kojima je razlika kvadrata rastojanja od dveju datih tačaka A i B jednaka kvadratu date duži l.

1346.(*) Konstruisati skup svih tačaka kojima je zbir kvadrata rastojanja od dveju datih tačaka A i B jednak kvadratu date duži l.

1347.(*) Konstruisati skup svih tačaka kojima je zbir kvadrata rastojanja od n datih tačaka $A_1, \ldots, A_n$ jednak kvadratu date duži l.

1348.(*) Date su četiri tačke A, B, C, D. Konstruisati skup svih tačaka P za koje je

$$PA^2 + PB^2 = PC^2 + PD^2.$$

1349. (*) Data su dva konačna skupa tačaka $A_1, \ldots, A_m$ i $B_1, \ldots, B_n$. Konstruisati skup svih tačaka P za koje je

$$PA_1^2 + \cdots + PA_m^2 = PB_1^2 + \cdots + PB_n^2.$$

1350. (*) Dati su par tačaka A, B, duž l i dva realna broja p, q. Konstruisati skup svih tačaka X takvih da je

$$pAX^2 + qBX^2 = l^2.$$

1351. (*) Date su tri tačke A, B, C, duž l i tri realna broja p, q, r. Konstruisati skup svih tačaka X za koje je

$$pAX^2 + qBX^2 + rCX^2 = l^2.$$

1352. (*) Dato je n komplanarnih tačaka $A_1, \ldots, A_n$, duž l i n realnih brojeva $k_1, \ldots, k_n$. Konstruisati skup svih tačaka X za koje je

$$k_1 A_1 X^2 + k_2 A_2 X^2 + \cdots + k_n A_n X^2 = l^2.$$

Konstruisati trougao $\triangle ABC$ kada znamo:

1353. $a, h_a, b^2 \pm c^2$.

1354. $a, m_a, b^2 \pm c^2$.

1355. $a, r, b^2 \pm c^2$.

1356. $a, A, b^2 \pm c^2$.

1357. $a, h_a, mb^2 + nc^2$.

1358. $a, m_a, mb^2 + nc^2$.

1359. $a, r, mb^2 + nc^2$.

1360. $a, A, mb^2 + nc^2$.

1361. Dato je šest tačaka A, B, C, D, E, F. Konstruisati tačku P takvu da je

$$PA^2 + PB^2 = PC^2 + PD^2 = PE^2 + PF^2.$$

1362. Dat je konačan skup od n tačaka $A_1, \ldots, A_n$. Na datoj pravoj p odrediti tačku P takvu da izraz $PA_1^2 + \cdots + PA_n^2$ bude minimalan.

1363. Date su tri razne tačke A, B, C. Kroz tačku C konstruisati pravu s takvu da razlika odstojanja AX i BY tačaka A i B od te prave bude jednaka kvadratu date duži r.

1364. (*) Konstruisati skup svih tačaka kojima su potencije u odnosu na dva data ekscentrična kruga k_1 i k_2 jednake.

1365. Konstruisati tačku X kojoj su potencije u odnosu na tri data ekscentrična kruga jednake.

1366. Konstruisati krug koji sadrži dve date tačke A, B i dodiruje datu pravu p.

1367. Konstruisati krug koji sadrži dve date tačke A, B i dodiruje dati krug k.

1368. Dati su krug k i dve tačke A, B, obe u krugu k ili obe izvan kruga k. Odrediti na krugu k tačke X i Y takve da konveksni ugao $\angle AXB$ bude maksimalan, a konveksni ugao $\angle AYB$ bude minimalan.

1369. (*) Konstruisati skup središta svih krugova koji seku dva data ekscentrična kruga k_1 i k_2 pod pravim uglovima.

1370. (*) Konstruisati skup središta svih krugova koje seče svaki od dvaju datih ekscentričnih krugova k_1 i k_2 u dijametralno suprotnim tačkama.

1371. (*) Konstruisati skup središta svih krugova koji seku svaki od dvaju datih ekscentričnih krugova k_1 i k_2 u dijametralno suprotnim tačkama.

1372. (*) Konstruisati skup središta svih krugova koji seku dati krug k_1 pod pravim uglovima i dati krug k_2 u dijametralno suprotnim tačkama.

1373. (*) Konstruisati skup središta svih krugova koje seče dati krug k_1 pod pravim uglovima i dati krug k_2 u dijametralno suprotnim tačkama.

1374. (*) Konstruisati skup središta svih krugova koji seku dati krug k_1 u dijametralno suprotnim tačkama i koje seče dati krug k_2 u dijametralno suprotnim tačkama.

1375. Dati su krug k, prava a i na pravoj a tačka A. Konstruisati krug koji dodiruje pravu a u tački A i

(a) seče krug k pod pravim uglovima;
(b) seče krug k u dijametralno suprotnim tačkama;
(c) kojeg seče krug k u dijametralno suprotnim tačkama.

1376. Dati su krug k i dve tačke A, B. Konstruisati krug koji sadrži tačke A, B i

(a) seče krug k pod pravim uglovima;
(b) seče krug k u dijametralno suprotnim tačkama;
(c) kojeg seče krug k u dijametralno suprotnim tačkama.

1377. Dati su krugovi k_1 i k_2 i tačka A. Konstruisati krug l koji sadrži tačku A i

(a) koji seče krugove k_1 i k_2 pod pravim uglovima;
(b) koji seče krugove k_1 i k_2 u dijametralno suprotnim tačkama;
(v) kojeg seku krugovi k_1 i k_2 u dijametralno suprotnim tačkama.

1378. Data su tri kruga k_1, k_2, k_3. Konstruisati krug

(a) koji seče krugove k_1, k_2, k_3 pod pravim uglovima;
(b) koji seče krugove k_1, k_2, k_3 u dijametralno suprotnim tačkama;
(v) kojeg seku krugovi k_1, k_2, k_3 u dijametralno suprotnim tačkama.

1379. Dati su krugovi k_1, k_2 i tačka A. Konstruisati krug l koji sadrži tačku A,

(a) seče krug k_1 pod pravim uglovima i krug k_2 u dijametralno suprotnim tačkama;

(b) seče krug k_1 pod pravim uglovima i kojeg seče krug k_2 u dijametralno suprotnim tačkama;

(v) seče krug k_1 u dijametralno suprotnim tačkama i kojeg seče krug k_2 u dijametralno suprotnim tačkama.

1380. Data su tri kruga k_1, k_2, k_3. Konstruisati krug koji seče

(a) krugove k_1, k_2 pod pravim uglovima i krug k_3 u dijametralno suprotnim tačkama;

(b) krugove k_1, k_2 pod pravim uglovima i kojeg seče krug k_3 u dijametralno suprotnim tačkama;

(v) krugove k_1, k_2 u dijametralno suprotnim tačkama i kojeg seče krug k_3 u dijametralno suprotnim tačkama.

1381. Konstruisati krug koji ima poluprečnik jednak duži r i koji pripada pramenu krugova određenim sa dva data kruga k_1 i k_2.

1382. Konstruisati krug k koji pripada pramenu krugova određenim sa dva data kruga k_1, k_2 i koji dodiruje treći dati krug l.

1383. Konstruisati krug k koji pripada pramenu krugova određenim sa dva data kruga k_1 i k_2, a ortogonalan je na datom krugu l koji ne pripada tom pramenu krugova.

1384.(*) Konstruisati skup svih tačaka u kojima je razlika potencija u odnosu na dva data ekscentrična kruga k_1 i k_2 jednaka kvadratu date duži l.

1385. Na datoj pravoj p odrediti tačku X kojoj je razlika potencija u odnosu na dva data kruga k_1 i k_2 kvadratu date duži a.

1386.(*) Date su dve razne tačke A, B i dve duži m, n. Na pravoj AB odrediti skup svih tačaka X za koje je $AX : BX = m : n$.

1387. Date su tri nekolinearne tačke A, B, C. Konstruisati pravu koja sadrži tačku C i kojoj su odstojanja od tačaka A i B srazmerna dvema datim dužima m i n.

1388. Date su tri nekolinearne tačke A, B, C. Konstruisati pravu x kojoj su odstojanja od tačaka A, B, C proporcionalna s trima dužima p, q, r.

Konstruisati trougao ABC kada znamo:

1389. $a, \varrho_a, \varrho_a : \varrho$.

1390. $b, c, \varrho_a : \varrho$.

1391. $b - c, h_a, \varrho_a : \varrho$.

1392. $b - c, l_a, \varrho_a : \varrho$.

1393. $b - c, m_a, \varrho_a : \varrho$.

1394. $b - c, B - C, \varrho_a : \varrho$.

1395. $a, \overline{l_a}, \varrho_b : \varrho_c$.

1396. $b, c, \varrho_b : \varrho_c$.

1397. $b + c, h_a, \varrho_b : \varrho_c$.

1398. $b + c, \overline{l_a}, \varrho_b : \varrho_c$.

1399. $b + c, m_a, \varrho_b : \varrho_c$.

1400. $b + c, B - C, \varrho_b : \varrho_c$.

1401. $l_a, B - C, b : c$.

1402. $h_a, B - C, b : c$.

1403. $h_a, l_a, b : c$.

1404. $h_a, a, \varrho_a : \varrho$.

1405. $h_a, p, \varrho_a : \varrho$.

1406. $h_a, b + c, \varrho_a : \varrho$.

1407. $h_a, m_a, \varrho_a : \varrho$.

1408. $h_a, l_a, \varrho_a : \varrho$.

1409. $h_a, r, \varrho_a : \varrho$.

1410. $h_a, a, \varrho_b : \varrho_c$.

1411. $h_a, p, \varrho_b : \varrho_c$.

1412. $h_a, b - c, \varrho_b : \varrho_c$.

1413. $h_a, m_a, \varrho_b : \varrho_c$.

1414. $h_a, l_a, \varrho_b : \varrho_c$.

1415. $h_a, r, \varrho_b : \varrho_c$.

1416. Date su na nekoj pravoj p tri razne tačke A, B, C. Odrediti na pravoj p tačku D takvu da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

Konstruisati trougao ABC kada znamo:

1417. h_a, ϱ, a.

1418. h_a, ϱ, p.

1419. $h_a, \varrho, b \pm c$.

1420. $h_a, \varrho, a + b$.

1421. h_a, ϱ, m_a.

1422. h_a, ϱ, r.

1423. h_a, ϱ_a, a.

1424. $h_a, \varrho_a, b \pm c$.

1425. $h_a, \varrho_a, a - b$.

1426. h_a, ϱ_a, m_a.

1427. h_a, ϱ_a, r.

1428. ϱ, ϱ_a, b.

1429. $\varrho, \varrho_a, b + c$.

1430. $\varrho, \varrho_a, a \pm b$.

1431. ϱ, ϱ_a, m_a.

1432. ϱ, ϱ_a, l_a.

1433. ϱ, ϱ_a, r.

1434. h_a, ϱ_b, a.

1435. h_a, ϱ_b, p.

1436. $h_a, \varrho_b, b \pm c$.

1437. $h_a, \varrho_b, a - b$.

1438. $h - a, \varrho_b, m_a$.

1439. h_a, ϱ_b, r.

1440. ϱ_b, ϱ_c, b.

1441. $\varrho_b, \varrho_c, b - c$.

1442. $\varrho_b, \varrho_c, a \pm b$.

1443. $\varrho_b, \varrho_c, m_a$.

1444. $\varrho_b, \varrho_c, l_a$.

1445. ϱ_b, rho_c, r.

1447. $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$.

1448. $h_a, m_a, b \pm c$.

1449. $B - C, r, b \pm c$.

1450. Date su dve razne tačke A, B i duž l. Odrediti na pravoj AB tačke C i D takve da je $\mathcal{H}(A, B : C, D)$ i $CD = l$.

Konstruisati trougao kada znamo:

1451. A, a, l_a.

1452. $A, a, \overline{l_a}$.

1453. A, r, l_a.

1454. a, r, l_a.

1455. h_a, l_a, a.

1456. $l_a, \overline{l_a}, a$.
1457. $B-C, h_a, a$.
1458. $B-C, h_a, a$.
1459. $B-C, H_a, b \pm c$.
1460. $B-C, l_a, b \pm c$.
1461. $h_a, l_a, b \pm c$.
1462. $l_a, \overline{l_a}, b \pm c$.
1463. $A, h_a, b \pm c$.
1464. $h_a, \varrho + \varrho - a, b \pm c$.
1465. $h_a, \varrho + \varrho_a, a$.
1466. $h_a, \varrho + \varrho_a, p$.
1467. $h_a, \varrho + \varrho_a, r$.
1468. $h_a, \varrho + \varrho_a, m_a$.
1469. $h_a, \varrho + \varrho_a, l_a$.
1470. $h_a, \varrho + \varrho_a, A$.
1471. $h_a, \varrho + \varrho_a, B - C$.
1473. $h_a, \varrho_b - \varrho_c, b \pm c$.
1474. $h_a, \varrho_b - \varrho_c, p$.
1475. $h_a, \varrho_b - \varrho_c, r$.
1476. $h_a, \varrho_b - \varrho_c, \varrho$.
1477. $h_a, \varrho_b - \varrho_c, \varrho_a$.
1478. $h_a, \varrho_b - \varrho_c, l_a$.
1479. $h_a, \varrho_b - \varrho_c, A$.
1480. $h_a, \varrho_b - \varrho_c, B - C$.
1481. Date su na nekoj pravoj p tri razne tačke A, B, O. Odrediti na pravoj p tačke C i D takve da je $\mathcal{H}(A, B : C, D)$ i O središte duži CD.

Konstruisati trougao ABC kada znamo:

1482. $A, l_a, b + c$.
1483. $h_a, \varrho_a - \varrho, b \pm c$.
1484. $h_a, \varrho_a - \varrho, p$.
1485. $h_a, \varrho_a - \varrho, l_a$.
1486. $h_a, \varrho_a - \varrho, h_b$.
1487. $h_a, \varrho_a - \varrho, A$.
1488. $h_a, \varrho_a - \varrho, b$.
1489. $h_a, \varrho_a - \varrho, B - C$.
1490. $h_a, \varrho_a - \varrho, \varrho_b - \varrho - c$.
1491. $A, \overline{l_a}, b - c$.
1492. $h_a, \varrho_b + \varrho_c, b \pm c$.
1493. $h_a, \varrho_b + \varrho_c, p$.
1494. $h_a, \varrho_b + \varrho_c, l_a$.

1495. $h_a, \varrho_b + \varrho_c, h_b$.

1496. $h_a, \varrho_b + \varrho_c, A$.

1497. $h_a, \varrho_b + \varrho_c, B$.

1498. $h_a, \varrho_b + \varrho_c, B - C$.

1499. $h_a, \varrho_b + \varrho_c, \varrho_a + \varrho$.

1500. l_a, bc, a.

1501. l_a, bc, p.

1502. l_a, bc, r.

1503. l_a, bc, ϱ.

1504. l_a, bc, ϱ_a.

1505. l_a, bc, h_a.

1506. l_a, bc, m_a.

1507. l_a, bc, A.

1508. l_a, bc, B.

1509. $l_a, bc, B - C$.

1510. $\overline{l_a}, bc, a$.

1511. $\overline{l_a}, bc, r$.

1512. $\overline{l_a}, bc, r$.

1513. $\overline{l_a}, bc, h_a$.

1514. $\overline{l_a}, bc, \varrho_a$.

1515. $\overline{l_a}, b_c, m_a$.

1516. $\overline{l_a}, b_c, A$.

1517. $\overline{l_a}, b_c, B$.

1518. $\overline{l_a}, b_c, B - C$.

1519. $h_a, b_c, B - C$.

1520. Data su na nekoj pravoj p dva para tačaka A, B i C, D. Odrediti na pravoj p par tačaka X, Y takav da je $\mathcal{H}(A, B : X, Y)$ i $\mathcal{H}(C, D : X, Y)$.

1521. Konstruisati trougao ABC kad znamo r, $\varrho_a + \varrho$, $\varrho_b - \varrho_c$.

1522. Dat je ugao XAY i na bisektrisi tog ugla tačka E. Konstruisati pravu koja sadrži tačku E i seče krake AX i AY tog ugla u tačkama B i C takvim da duž BC bude jednaka datoj duži a.

1523. Dat je ugao XAY i na bisektrisi njemu naporednog ugla tačka F i seče krake AX i AY u tačkama B i C takvim da duž BC bude jednaka datoj duži a.

1524. Kroz datu tačku M koja se nalazi na simetrali ugla naporednog s datim uglom O konstruisati pravu koja seče krake datog ugla OXY u tačkama P i Q takvim da je zbir duži MP i MQ jednak datoj duži l.

1525. Kroz datu tačku M koja se nalazi na raspolovnici datog ugla O konstruisati pravu koja seče krake tog ugla u tačkama P i Q takvim da je razlika duži MP i MQ jednak datoj duži l.

1526. Dat je ugao A i na raspolovnici tog ugla tačka E. Konstruisati pravu koja sadrži tačku E i seče krake tog ugla u tačkama B i C takvim da je zbir duži AB i AC jednak datoj duži l.

1527. Dat je ugao A i na simetrali njemu naporednog ugla tačka F. Konstruisati pravu koja sadrži tačku F i seče krake datog ugla A u tačkama B i C takvim da je razlika duži AC i AB jednak datoj duži l.

1528. Konstruisati trougao ABC kome su duži AP, BQ, CR respektivno jednake datim dužima p, q, r, gde su P, Q, R tačke stranica BC, CA, AB takve da je $BP : PC = CQ : QA = AR : RB = k$ i k dati broj.

1529. Konstruisati trougao ABC kome su stranica BC i odstojanja tačaka B i C od simetrale unutrašnjeg ugla A jednaka datim dužima a, m, n.

1530. Konstruisati $\triangle ABC$ kome su stranice BC i odstojanja tačaka B i C od simetrale spoljašnjeg ugla A jednaka datim dužima a, m, n.

1531. Konstruisati trougao ABC kome su simetrale unutrašnjeg ugla A i odstojanja temena B i C od te simetrale jednaka datim dužima l_a, m, n.

1532. Konstruisati $\triangle ABC$ kome su simetrala spoljašnjeg ugla A i odstojanja temena B i C od te simetrale jednaka datim dužima $\overline{l_a}$, m, n.

1533. Dati su trougao ABC i u njegovoj ravni tačka S. Konstruisati pravu koja sadrži tačku S i seče prave AB, AC, BC u tačkama P, Q, R takvim da je $\mathcal{H}(P, Q, R, S)$.

1534. Dati su krug k, prava s koja sadrži njegovo središte S i na krugu k dve tačke A i B. Odrediti na krugu k tačku Z takvu da prave AZ i BZ seku pravu s u tačkama X i Y pri čemu su duži SX i SY srazmerne dvema datim dužima m i n.

1535. Date su tri tačke O,S,S_a. Konstruisati trougao ABC kome je tačka O središte opisanog kruga, tačka S središte upisanog kruga i tačka S_a središte spolja upisanog kruga koji dodiruje stranicu BC.

1536. Date su tri nekolinearne tačke A,P,P_a. Konstruisati trougao ABC kome upisani krug seče stranicu BC u tački P, a spolja upisani krug koji odgovara temenu A dodiruje stranicu BC u tački P_a.

1537. Date su tri nekolinearne tačke A,P_b,P_c. Konstruisati trougao ABC kome spolja upisani krugovi koji odgovaraju temenima B i C dodiruju pravu BC.

1538. Dati su krug l, na njemu tačka A i u njegovoj ravni tačka S. Odrediti na krugu l tačke B i C takve da tačka S bude središte kruga upisanog u trougao ABC.

1539. Date su tri nekolinearne tačke D, A_1, S. Konstruisati trougao ABC kome je tačka D podnožje visine iz temena A, tačka A_1 središte stranice BC, a tačka S središte upisanog kruga.

1540.(*) Konstruisati skup svih tačaka kojima su odstojanja od dveju datih pravih a i b srazmerne dvema datim dužima m i n.

1541. U ravni datog trougla ABC odrediti tačku X kojoj su odstojanja od pravih BC, CA, AB srazmerna datim dužima p, q, r.

1542. U ravni datog četvorougla $ABCD$ odrediti tačku X kojoj su odstojanja od pravih AB i CD srazmerna datim dužima m i n, a zbir ili razlika odstojanja od pravih BC i AD jednaka datoj duži l.

1543.(*) Konstruisati skup svih tačaka kojima su rastojanja od dveju datih tačaka A i B srazmerna dvema datim dužima m i n.

Konstruisati trougao ABC kada znamo:

1544. $a,\ b : c,\ h_a$.

1555. $a, b : c, m_a$.

1556. $a, b : c, l_a$.

1557. $a, b : c, \overline{l_a}$.

1558. $a, b : c, A$.

1559. $a, b : c, B - C$.

1560. $h_a, m_a, a : b$.

1561. $l_a, a, b + c$.

1562. $\overline{l_a}, a, b - c$.

1563. $h_a, a, b - c$.

1564. l_a, a, p.

1565. h_a, a, p.

1566. $l_a, m_a, (b + c) : a$.

1567. $\overline{l_a}, m_a, (b - c) : a$.

1568. $l_a, r, (b + c) : a$.

1569. $\overline{l_a}, r, (b - c) : a$.

1570. $h_a, l_a, (b \pm c) : a$.

1571. $h_a, m_a, (b \pm c) : a$.

1572. $h_a, r, (b \pm c) : a$.

1573. $B - C, h_a, (b \pm c) : a$.

1574. $B - C, l_a, (b \pm c) : a$.

1575. Konstruisati jednakokraki trougao ABC kome je zbir ili razlika osnovice BC i jednog kraka jednaka datoj duži, a visina koja odgovara osnovici jednaka datoj duži h_a.

1576. Date su dve prave a, b i dve tačke A, B. Konstruisati tačku X kojoj su odstojanja od pravih a i b, a isto tako rastojanja od tačaka A i B srazmerna dvema datim dužima m i n.

1577. Date su dve paralelne prave p i q, na pravoj p tačka A i izvan tih pravih tačka S. Konstruisati druge dve paralelne prave od kojih jedna sadrži tačku A, a druga tačku S tako da sa datim pravama određuje paralelogram $ABCD$ kome je zbir ili razlika dveju susednih stranica jednaka datoj duži l.

1578. Dati su trougao ABC i tri duži p, q, r. U ravni trougla ABC odrediti tačku X takvu da je
$$AX : BX : CX = p : q : r.$$

1579. Dati su trougao ABC i tri realna broja p, q, r. U trouglu ABC odrediti tačku X takvu da je
$$S(XBC) : S(XCA) : S(XAB) = p : q : r.$$

1580. Date su tri razne tačke A, B, C. Konstruisati krug k koji sadrži tačku B takav da tangente na tom krugu kroz tačku A zahvataju ugao jednak datom uglu α.

1581. Date su tri razne tačke A, B, C. Konstruisati krug k koji sadrži tačku C tako da njegove tangente kroz tačku A zahvataju ugao jednak datom uglu α, a kroz tačku B ugao β.

1582. Date su tri razne tačke A, B, C. Konstruisati krug k čije tangente kroz tačku A zahvataju ugao jednak datom uglu α, a tangente kroz tačku B zahvataju ugao jednak datom uglu β, a tangente kroz C zahvataju ugao jednak datom uglu γ.

1583. Date su tri razne kolinearne tačke, redom A, B, C. Konstruisati skup svih tačaka X za koje je $\angle AXB = \angle BXC$.

1584. Date dve razne prave p i q i na pravoj p tri razne tačke redom A, B, C. Odrediti na pravoj q tačku X takvu da je $\angle AXB = \angle BXC$.

1585. Na nekoj pravoj p date su četiri razne tačke, redom A, B, C, D. Konstruisati tačku X takvu da je $\angle AXB = \angle BXC = \angle CXD$.

1586. Dat je krug k i na pravoj p koja sadrži njegovo središte date su dve tačke A, B. Odrediti na krugu k tačku X tako da prave AX i BX seku krug k u tačkama Y i Z takvim da je $XY = XZ$.

1587. Date su četiri razne kolinearne tačke, redom A, B, C, D. Konstruisati skup svih tačaka X za koje je $\angle AXB = \angle CXD$.

1588. Date su dve prave p, q i na pravoj p četiri razne tačke, redom A, B, C, D. Na pravoj q odrediti tačku X takvu da je $\angle AXB = \angle CXD$.

1589. Dato je šest kolinearnih tačaka redom A, B, C, D, E, F. Konstruisati tačku X takvu da je $\angle AXB = \angle CXD = \angle EXF$.

1590. (*) Konstruisati skup svih tačaka X takvih da parovi tangenata kroz svaku od tih tačaka na dvama datim krugovima k_1 i k_2 zahvataju jednake uglove.

1591. Na datoj pravoj p odrediti tačku X takvu da parovi tangenata kroz tu tačku na datim krugovima k_1 i k_2 zahvataju jednake uglove.

1592. Konstruisati tačku X takvu da parovi tangenata kroz istu na trima datim krugovima k_1, k_2, k_3 zahvataju jednake uglove.

1593. (*) Konstruisati skup svih tačaka kojima su potencije u odnosu na dva data kruga k_1 i k_2 srazmerne dvema datim dužima m i n.

1594. Na datoj pravoj p odrediti tačku X kojoj su potencije u odnosu na dva data kruga k_1 i k_2 srazmerne dvema datim dužima m i n.

1595. Konstruisati polaru date tačke P u odnosu na dati krug k.

1596. Konstruisati pol date prave p u odnosu na dati krug k.

1597. Dati su krug k i u njegovoj ravni tri tačke P, Q, R. Kroz tačku P konstruisati pravu p koja seče krug k u tačkama A, B i kroz tačku Q konstruisati pravu q koja seče krug k u tačkama C, D takvim da se prave BC i AD seku u tački R.

1598. (*) Konstruisati skup svih tačaka kojima se polare u odnosu na tri data kruga k_1, k_2, k_3 seku u jednoj tački.

1599. Na datoj pravoj p odrediti tačku X kojoj se polare u odnosu na tri data kruga k_1, k_2, k_3 seku u jednoj tački.

1600. (*) Konstruisati skup svih tačaka kojima su polare u odnosu na dva data kruga k_1 i k_2 upravne među sobom.

1601. Data su dva ekscentrična kruga k_1, k_2 i prava p. Odrediti na pravoj p tačku P kojoj su polare p_1 i p_2 u odnosu na krugove k_1 i k_2 upravne među sobom.

1602. (*) Dat je krug k i tačka A koja ne pripada tome krugu. Konstruisati skup ortocentara svih trouglova kojima je zajedničko teme A, dok su ostala dva temena svakog od tih trouglova dijametralno suprotne tačke kruga k.

1603. Dati su prava p, krug k i tačka A koja ne pripada krugu k. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ kome je stranica BC prečnik kruga k, a ortocentar H na pravoj p.

1604.(*) Dat je trougao ABC kome je $AB = AC$. Odrediti u trouglu ABC skup svih tačaka X kojima rastojanja od osnovice BC geometrijske sredine rastojanja od stranica AB i AC.

1605. Dat je jednakostraničan trougao ABC kome je visina jednaka duži h. Konstruisati skup svih tačaka M kojima odstojanja x, y, z od pravih BC, CA, AB zadovoljavaju jednakost

$$x^2 + y^2 + z^2 = h^2.$$

1606.(*) Dati su krug l i na njemu dve tačke B, C. Konstruisati skup središta Ojlerovih krugova svih trouglova kojima su dva temena tačke B i C, a treće teme promenljiva tačka A kruga l.

1607. Dati su krug k, prava p i na krugu k dve tačke B, C. Odrediti na krugu k tačku A takvu da središte Ojlerovog kruga trougla ABC bude na pravoj p.

1608.(*) Dati su krug l i na njemu dve razne tačke B, C. Konstruisati skup središta svih trouglova kojima su dva temena tačke B i C, a treće teme promenljiva tačka A kruga l.

1609.(*) Date su dve komplanarne duži AB, CD i realan broj l. Konstruisati u ravni kojoj pripadaju te duži skup svih tačaka M za koje je

$$S(MAB) + S(MCD) = l^2.$$

13.2 Metoda transformacija

(a) Sličnost

1610. Konstruisati lik Ω' homotetičan s datim likom Ω ako je dato središte O i koeficijent k te homotetije. Analizirati slučaj kada lik predstavlja (a) pravu, (b) krug, (v) trougao, (g) četvorougao, (d) n-tougao.

1611. Date su dve prave a, b izvan tih pravih tačka O. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku O i seče prave a ib u tačkama A iB takvim da duži OA iOBbudu srazmerne dvema datim dužima m i n.

1612. Data su dva kruga a i b i tačka O. Odrediti na krugovima a ib tačke A i B kolinearne s tačkom O pri čemu su duži OA i OB srazmerne dvama datim dužima m i n.

Konstruisati trougao ABC kada znamo:

1613. $A, l_a, b : c$.

1614. A, h_a, m_b.

1615. A, m_a, c.

1616. m_a, h_b, h_c.

1617. l_a, h_b, h_c.

1618. a, h_a, m_b.

1619. a, h_b, m_c.

1620. $a, r, \angle(a, m_b)$.

1621. $a, m_b, b^2 - c^2$.

1622. $a, b^2 - c^2, \angle(a, m_b)$.

1623. b, c, l_a.

1624. b, c, m_a.

1625. m_a, m_b, m_c.

1626. $a, m_b, b : c$.

1627. $a, m_b, b^2 + c^2$.

1628. $a, m_a, \angle(c, m_c)$.

1629. $a, r, \angle(m_b, m_c)$.

1630. $a, A, \angle(m_b, m_c)$.

1631. $a, r, (b + c) : (b - c)$.

1632. $a, A, (b + c) : (b - c)$.

1633. Date su dve prave b, c i dve tačke M, N. Konstruisati trougao ABC kome su temena B i C na pravama b i c, a tačke M i N središta stranica AB i AC.

1634. Date su prave a, b, c, d i tačka T. Konstruisati trougao ABC kome se temena A, B, C nalaze na pravama a, b, c; središte D stranice BC nalazi na pravoj d, a težište tog trougla je tačka T.

1635. Na datim pravama a, b, c, d odrediti tačke A, B, C, D takve da je četvorougao $ABCD$ paralelogram kome je središte data tačka S.

1636. Dati su krug k prava p i na krugu k dve tačke B, C. Odrediti na krugu k tačku A takvu da tačke A, B, C određuju trougao kome se težište nalazi na pravoj p.

1637. Konstruisati trougao ABC kome je simetrala AE unutrašnjeg ugla A jednaka datoj duži l_a dok su poluprečnici krugova opisanih oko trouglova ABE i ACE jednaki datim dužima r_1 i r_2.

1638. Konstruisati trougao ABC kome je ugao A jednak datom uglu α, dok su poluprečnici krugova opisanih oko trouglova ABE i ACE gde je E tačka u kojoj simetrala ugla A seče stranicu BC, jednaki datim dužima r_1 i r_2.

1639. Date su tri tačke P, Q, R i šest duži p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2. Konstruisati trougao ABC takav da prave BC, CA, AB sadrže respektivno tačke P, Q, R pri čemu je $BP : PC = p_1 : p_2$, $CQ : QA = q_1 : q_2$, $AR : RB = r_1 : r_2$.

1640. Dati su krug k, tačka O i dve duži m, n. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku O i seče krug k u tačkama A, B, takvim da je $OA : OB = m : n$.

1641. Kroz presečnu tačku P dvaju datih krugova k_1 i k_2 konstruisati pravu s koja seče krugove k_1 i k_2 još u tačkama Q i R takvim da tetive PQ i PR budu srazmerne dvema datim dužima m i n.

1642. Data su dva kruga k_1, k_2 i tačka S. Konstruisati dve paralelne prave t_1 i t_2 od kojih prva dodiruje krug k_1 a druga krug k_2 tako da odstojanja tačke S od tih pravih t_1 i t_2 budu srazmerna dvema datim dužima m i n.

1643. Data su dva koncentrična kruga k_1, k_2 i tačka P. Kroz tačku P konstruisati pravu koja seče krug k_1 u tačkama A, B i krug k_2 u tačkama C, D takvim da tetive AB i CD budu srazmerne dvema datim dužima m i n.

1644. Data su tri koncentrična kruga a, b, c i tačka P. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku P i seče date krugove redom u tačkama A, B, C, takvim da duži AB i BC budu srazmerne dvema datim dužima m i n.

1645. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku P i seče četiri data koncentrična kruga a, b, c, d redom u tačkama A, B, C, D takvim da je duž AB jednaka duži CD.

Konstruisati trougao ABC kada znamo:

1646. $A, b : c, h_a$.

1647. $A, b : c, l_a$.

1648. $A, b : c, m_a$.

1649. $A, b : c, p$.

1650. $A, b : c, \varrho$.

1651. A, B, h_a.

1652. A, B, l_a.

1653. A, B, m_a.

1654. A, B, p.

1655. $A, B, b \pm a$.

1656. A, B, ah_a.

1657. $A, a : h_a, m_a$.

1658. $A, a : h_a, l_a$.

1659. $A, a : h_a, r$.

1660. $A, a : h_a, \varrho$.

1661. $A, a : h_a, p$.

1662. $A, a : h_a, b \pm a$.

1663. $B, a : h_a, l_a$.

1664. $B, a : h_a, m_a$.

1665. $B, a : h_a, r$.

1666. $B, a : h_a, \varrho$.

1667. $B, a : h_a, p$.

1668. $B, a : h_a, b \pm a$.

1669. $a : h_a, b : c, r$.

1670. $a : h_a, b : c, \varrho$.

1671. $a : h_a, b : c, p$.

1672. $a : h_a, b : c, l_a$.

1673. $a : h_a, b : c, m_a$.

1674. $A, \varrho : \varrho_a, h_a$.
1675. $A, \varrho : \varrho_a, l_a$.
1676. $A, \varrho : \varrho_a, m_a$.
1677. $A, \varrho : \varrho_a, r$.
1678. $A, \varrho : \varrho_a, a$.
1679. $A, \varrho : \varrho_a, b \pm c$.
1680. $A, \varrho_b : \varrho_c, h_a$.
1681. $A, \varrho_b : \varrho_c, l_a$.
1682. $A, \varrho_b : \varrho_c, m_a$.
1683. $A, \varrho_b : \varrho_c, r$.
1684. $A, \varrho_b : \varrho_c, \varrho$.
1685. $A, \varrho_b : \varrho_c, p$.
1686. $A, \varrho_b : \varrho_c, a$.
1687. $A, \varrho_b : \varrho_c, b \pm c$.

Konstruisati trougao ABC kome je D podnožje visine iz temena A ako znamo:

1688. $A, BD : DC, h_a$.
1689. $A, BD : DC, l_a$.
1690. $A, BD : DC, m_a$.
1691. $A, BD : DC, r$.
1692. $A, BD : DC, \varrho$.
1693. $A, BD : DC, p$.
1694. $A, BD : DC, b \pm c$.
1695. $B, BD : DC, h_a$.
1696. $B, BD : DC, l_a$.
1697. $B, BD : DC, m_a$.
1698. $B, BD : DC, r$.
1699. $B, BD : DC, \varrho$.
1700. $B, BD : DC, p$.
1701. $B, BD : DC, b \pm c$.
1702. $BD : DC, b : c, h_a$.
1703. $BD : DC, b : c, l_a$.
1704. $BD : DC, b : c, m_a$.
1705. $BD : DC, b : c, p$.
1706. $BD : DC, b : c, r$.
1707. $BD : DC, b : c, \varrho$.
1708. $BD : DC, b : c, \varrho_a$.

Konstruisati četvorougao $ABCD$ kada znamo:

1709. $A, C, AC, AB : AD, BC : CD$.

1710. $A, C, AB : BC, AB : AD, BC : CD$.

1711. $A, C, AC : BD, AB : AD, BC : CD$.

1712. $A, AB : AD, AC, BC, DC$.

1713. $A, B, C, AC, AB : AD$.

1714. Konstruisati kvadrat $ABCD$ kome je zbir ili razlika dijagonale i stranice jednaka datoj duži l.

1715. Konstruisati tetivan četvorougao $ABCD$ kome je ugao A jednak datom uglu α, dijagonala AC jednaka datoj duži d_1 i kome su stranice AB i AD srazmerne dvema datim dužima m i n, a stranice BC i CD srazmerne dvema datim dužima p i q.

1716. Dati su ugao AOB, prava p i tačka S. Konstruisati pravu koja je paralelna s pravom p i koja seče krake OA iOB ugla AOB u tačkama X i Y takvim da ugao XSY bude jednak datom uglu ω.

1717. Dati su ugao AOB,prava p i tačka S. Konstruisati pravu koja je paralelna s pravom p i koja seče krake OA i OB ugla AOB u tačkama X i Y takvim da duži SX i SY budu srazmerne dvema datim dužima m i n.

1718. Na stranicama BC, CA, AB datog trougla ABC odrediti tačke P, Q, R takve da duž QR bude paralelna s datom pravom p,duži PQ i PR budu srazmerne dvema datim dužima m i n, a ugao QPR jednak datom uglu ω.

1719. U dati trougao ABC upisati trougao PQR kome su stranice QR, RP, PQ paralelne s datim pravama p, q, r.

1720. U dati trougao ABC upisati kvadrat $PQRS$ kome su temena P i Q na stranici BC a temena R i S na stranicama CA i AB.

1721. U dati trougao ABC upisati paralelogram $PQRS$ koji je sličan s datim paralelogramom $P'Q'R'S'$ i kome se temena P i O nalaze na stranici BC, a temena R i S na stranicama CA i AB.

1722. U dati trougao ABC upisati pravougaonik $PQRS$ kome su temena P i O na stranici BC, temena R i S na stranicama CA i AB, a dijagonala PR paralelna s datom pravom l.

1723. Dat je trougao ABC i na stranici BC tačka P. Odrediti na stranicama BC, CA, AB tačke Q, R, S takve da četvorougao $PQRS$ bude paralelogram kome su susedne stranice PQ i QR srazmerne datim dužima m i n.

1724. Na stranicama AB, BC, CD, CA datog četvorougla $ABCD$ odrediti tačke P, Q, R, S takve da četvorougao $PQRS$ bude romb kome su stranice paralelne s dijagonalama AC i BD.

1725. Konstruisati trapez $ABCD$ kome su uglovi A i B na osnovici jednaki datim uglovima α i β, a dijagonale AC i BD jednake datim dužima d_1 i d_2.

1726. Konstruisati pravu S koja je paralelna s datom pravom p i koja seče stranice AB i AC datog trougla ABC u tačkama X i Y takvim da su duži BX i CY srazmerne dvema datim dužima m i n.

1727. Na stranicama AB i AC datog trougla ABC odrediti tačke X i Y takve da je $AX = XY = YC$.

1728. Na stranicama AB i AC datog trougla ABC odrediti tačke X i Y takve da je $BX = XY = YC$.

1729. Na stranicama AB i AC datog trougla ABC odrediti tačke X i Y takve da duž XY bude jednaka datoj duži d, a duži BX i CY srazmerne dvema datim dužima m i n.

1730. Na stranicama AB i AC datog trougla ABC odrediti tačke X i Y takve da duži BX i CY budu srazmerne dvema dati dužima m i n, a duž XY jednaka zbiru ili razlici duži BX i CY.

1731. Na pravoj p date su dve razne tačke A i B. Konstruisati dva kruga koji dodiruju pravu p u tačkama A i B, koji se dodiruju među sobom i kojima su poluprečnici srazmerni datim dužima m i m.

1732. Date su dve prave a, b i na svakoj od njih po jedna tačka A, B. Konstruisati dva kruga k i l kojima su poluprečnici srazmerni datim dužima m i n, koji se dodiruju među sobom i kod kojih prvi dodiruje pravu a u tački A a drugi dodiruje pravu b u tački B.

1733. Konstruisati pravu koja sadrži datu tačku S i seče krake OA i OB datog ugla AOB u tačkama X i Y takvim da duži OX i OY budu srazmerne dvema datim dužima m i n.

1734. Date su tri konkurentne prave a, b, c i van njih tačka S. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku S i seče prave a, b, c respektivno u tačkama A, B, C takvim da duži AB i BC budu srazmerne datim dužima m i n.

1735. Date su četiri prave a, b, c, d. Konstruisati pravu p koja je uporedna pravoj d i seče prave a, b, c u tačkama A, B, C takvim da duži AB i BC budu srazmerne dvema datim dužima m i n.

1736. Date su komplanarne prave a, b, c, d, e i dve duži m, n. Konstruisati pravu s koja je paralelna s pravom e i seče prave a, b, c, d u tačkama A, B, C, D takvim da je

$$AB : CD = m : n.$$

1737. Konstruisati pravu koja je paralelna sa datom pravom p i koja seče stranice AB i CD datog četvorougla $ABCD$ u tačkama M i N takvim da je

$$AM : MB = DN : NC.$$

1738. Date su tri planarne prave a, b, c i na svakoj od tih pravih po jedna tačka A, B, C. Konstruisati pravu s koja seče prave a, b, c u tačkama X, Y, Z takvim da duži AX i BY budu srazmerne dvema datim dužima l i m, a duži BY i CZ srazmerne dvema datim dužima m i n.

1739. Date su tri paralelne prave a, b, c i na svakoj od njih po jedna tačka A, B, C. Odrediti na pravama a, b, c tačke X, Y, Z takve da duži AX i BY budu srazmerne datim dužima l i m, duži BX i CZ budu srazmerne datim dužima m i n, a ugao XYZ bude jednak datom uglu ω.

1740. Date su dve uporedne prave p, q i izvan njih dve tačke A i B. Konstruisati dve prave od kojih jedna sadrži tačku A i seče prave p i q u tačkama X i Y, a druga sadrži tačku B i seče prave p i q u tačkama Z i Y takvim da je

(a) $XY = YZ$;
(b) $XZ = YZ$.

1741. Na stranicama AB i AC datog trougla ABC odrediti tačke X i Y takve da je $XY \parallel BC$ i $XY = BX \pm CY$.

1742. Na stranicama AB i AC datog trougla ABC odrediti tačke X i Y takve da je $XY \parallel BC$ i $XY^2 = AX \cdot XB$.

1743. Na stranicama AB i AC datog trougla ABC odrediti tačke X i Y takve da je $XY \parallel BC$ i $XY^2 = BX^2 + CX^2$.

Konstruisati trougao ABC kada znamo:

1744. $A, a+b, a+c$

1745. $A, a-b, a-c$.

1746. $A, a+b, b+c$.

1747. $A, a-b, b-c$.

1748. $A, a, b+2c$.

1749. $m_a \pm a, \angle(m_a, a), b$.

1750. $m_a \pm a, \angle(m_a, a), b : c$.

1751. $A, m_b, b \pm c$.

1752. $B, a, b - h_a$.

1753. h_a, h_b, h_c.

1754. Konstruisati jednakokraki trougao kome je krak jednak datoj duži b, a zbir ili razlika osnovice i njoj odgovarajuće visine jednaka datoj duži l.

1755. Konstruisati trougao ABC kada znamo A, a, nc gde je n dati broj.

1756. Konstruisati trougao ABC kome upisani krug seče težišnu liniju AA_1 u tačkama M i N takvim da je $AM = MN = NA_1$ i kome je poznat jedan od elemenata: $a, b+c, p, h_a, m_a, l_a, r, q$.

1757. Na stranici BC datog trougla ABC odrediti tačku D takvu da poluprečnici krugova upisanih u trouglove ABD i ACD budu međusobno jednaki.

1758. Na stranici BC datog trougla ABC odrediti tačku D tako da poluprečnici spolja upisanih krugova trougla ABD i ACD koji odgovaraju stranicama BD i CD budu međusobno jednaki.

1759. Na stranici BC datog trougla ABC odrediti tačku D tako da poluprečnici spolja upisanih krugova trouglova ABD i ACD koji odgovaraju stranicama AB i AC budu međusobno jednaki.

1760. Dat je trougao ABC i na pravoj BC data je tačka P. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku P i seče prave AB i AC u tačkama X i Y takvim da je $BX = CY$.

1761. Data su dva kruga k_1 I k_2 i tačka A. Konstruisati pravu koja sadrži tačku A, a seče krug k_1 u tačkama X_1, Y_1 i krug k_2 u X_2, Y_2 takvim da tetive X_1Y_1 i X_2Y_2 budu srazmerne poluprečnicima krugova k_1 i k_2

1762. Konstruisati krug koji dodiruje dva data kruga k_1 i k_2 pri čemu prava kroz dodirne tačke sadrži datu tačku A.

1763. Konstruisati krug koji dodiruje dva data kruga k_1 i k_2 pri čemu prava kroz dodirne tačke mora biti paralelna datoj pravoj p.

1764. Konstruisati krug k koji sadrži dva date tačke A, B i dodiruje datu pravu p.

1765. Konstruisati krug k koji sadrži datu tačku A i dodiruje dve date prave p_1 i p_2.

1766. Konstruisati krug k koji dodiruje dve date prave p_1 i p_2 i dati krug k.

1767. Konstruisati krug k koji sadrži datu tačku A i dodiruje date pravu p i dati krug l.

1768. Konstruisati krug koji dodiruje dva data kruga k_1 i k_2 i datu pravu p.

1769. Konstruisati krug k koji sadrži datu tačku A i dodiruje dva data kruga l_1 i l_2.

1770. Konstruisati krug k koji dodiruje tri data kruga l_1, l_2 i l_3.

1771. Dat je konveksan ugao XAY i u njemu tačka P. Konstruisati pravu koja sadrži tačku P i seče krake AX i AY tog ugla u tačkama B i C takvim da obim trougla ABC bude minimalan.

1772. Date su tri nekolinearne tačke A, B, C. Na pravoj AB odrediti tačku P takvu da je $AB \cdot BP = CP^2$.

1773. Date su na nekoj pravoj p tri razne tačke A, B, C i dve duži m, n. Odrediti na pravoj p tačku P takvu da je $\mathcal{R}(A, B; C; P) = m : n$.

13.3. Inverzija

1774. Dati su krug k i tačka A, prava a i krug l.
(a) Konstruisati tačku A' inverznu s tačkom A u odnosu na krug k.
(b) Konstruisati pravu a' inverznu s pravom a u odnosu na krug k.
(c) Konstruisati krug l' inverzan s krugom l u odnosu na krug k.

1775. Date su prave a, b i tačka O. Konstruisati pravu koja sadrži tačku O i seče prave a i b u tačkama X i Y takvim da proizvod duži OX i OY bude jednak kvadratu date duži r.

1776. Data su dva kruga a, b i tačka O. Na krugovima a i b odrediti tačke A i B kolinearne s tačkom O takve da proizvod duži OA i OB bude jednak kvadratu date duži r.

Konstruisati trougao $\triangle ABC$ kada znamo:

1777. $A, a, b \cdot (b \pm c)$.

1778. $A, r, b \cdot (b \pm c)$.

1779. $a, r, b \cdot (b \pm c)$.

1780. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ kome je stranica BC podudarna datoj duži a, a ugao $\angle A$ jednak datom uglu $\angle\alpha$, a proizvod duži BA i BD, gde je D podnožje visine iz temena C, jednak kvadratu date duži r.

1781. Odrediti središte i koeficijent inverzije u kojoj trima datim tačkama A, B, C odgovaraju nekolinearne tačke A', B', C' takve da trougao $\triangle A'B'C'$ bude podudaran sa datim trouglom $A_1B_1C_1$.

1782. Konstruisati središte O inverzije proizvoljnog koeficijenta r u kojoj trima datim kolinearnim tačkama A, B, C odgovaraju kolinearne tačke A', B', C' takve da tačka C' bude središte duži $A'B'$.

1783. Konstruisati središte i koeficijent inverzije u kojoj svaki od triju datih krugova k_1, k_2, k_3 odgovara samom sebi, drugim rečima, konstruisati krug koji seče ortogonalno tri data kruga k_1, k_2, k_3.

1784. Konstruisati središte i koeficijent inverzije u kojoj trima datim krugovima k_1, k_2, k_3 na nekolinearnim središtima S_1, S_2, S_3 odgovaraju krugovi k_1', k_2', k_3' kojima se središta S_1', S_2', S_3' nalaze na datoj pravoj l'.

1785. Date su tri tačke A, B, C i duž r. Kroz tačku C konstruisati pravu s takvu da podnožja X i Y upravnih iz tačaka A i B na toj pravoj s zadovoljavaju relaciju:

(a) $AX \cdot BY = r^2$,

(b) $AX^2 - BY^2 = r^2$.

1786. Konstruisati krug k koji sadrži dve date tačke A, B i seče dati krug l pod pravim uglovima.

1787. Konstruisati krug k koji sadrži dve date tačke A, B i seče dati krug l pod uglovima jednakim datom uglu ω.

1788. Konstruisati krug k koji sadrži dve date tačke A, B i dodiruje datu pravu p.

1789. Konstruisati krug k koji sadrži dve date tačke A, B i dodiruje dati krug l.

1790. Konstruisati krug k koji sadrži datu tačku A i seče date krugove l_1 i l_2 pod uglovima jednakim datim uglovima ω_1 i ω_2.

1791. Konstruisati krug k koji sadrži datu tačku R dodiruje datu pravu p i dati krug l.

1792. Konstruisati krug k koji sadrži datu tačku A i dodiruje dva data kruga k_1 i k_2.

1793. Konstruisati krug k koji seče ortogonalno dva data kruga k_1 i k_2 i dodiruje dati krug k_3.

1794. Konstruisati krug k koji seče ortogonalno dva data kruga k_1 i k_2 i krug k_3 pod uglovima jednakim datom uglu ω.

1795. Konstruisati krug k koji dodiruje tri data kruga k_1, k_2, k_3 (*Apolonijev problem*).

1796. Konstruisati krug k koji dodiruje dva data kruga k_1, k_2 i seče dati krug k_3 pod uglovima jednakim datom uglu ω.

1797. U dati krug k upisati n-tougao $A_1 \ldots A_n$ takav da prave određene njegovim stranicama $A_1A_2, \ldots A_nA_1$ sadrže respektivno date tačke $P_1, \ldots, P_n$.

13.4 Translacija

1798. Data su dva kruga k_1, k_2 i prava p. Odrediti na krugovima k_1 i k_2 tačke X i Y takve da duž XY bude paralelna sa pravom p i jednaka datoj duži l.

1799. Dati su dva kruga k_1, k_2 i prava p. Konstruisati pravu s koja je paralelna sa pravom p i koja seče krug k_1 u tačkama A, B i krug k_2 u tačkama C, D takvim da je tetiva AB jednaka tetivi CD.

1800. Dati su dva kruga k_1, k_2 i prava p. Konstruisati pravu s koja je paralelna s pravom p i koja seče krug k_1 u tačkama A, B i krug k_2 u tačkama C, D takvim da je zbir ili razlika tetiva AB i CD jednaka datoj duži l.

1801. Dati su dva kruga k_1, k_2 i tačka S. Kroz tačku S konstruisati pravu koja seče krug k_1 u tačkama A, B i krug k_2 u tačkama C, D takvim da je tetiva AB jednaka tetivi CD.

1802. Kroz presečnu tačku P dvaju datih krugova k_1 i k_2 konstruisati pravu s koja seče krugove k_1 i k_2 još u tačkama Q i R takvim da je zbir ili razlika tetiva PQ i PR jednaka datoj duži l.

1803. Date su tri razne tačke A, B, C. Kroz tačku A konstruisati pravu s takvu da duž koja spaja podnožja upravnih iz tačaka B i C na toj pravoj bude jednaka datoj duži l.

1804. Dati su prava p,krug k i na krugu k dve tačke A, B. Odrediti na krugu k tačku X takvu da prave AX i BX seku pravu p u tačkama Y i Z pri čemu je duž YZ jednaka datoj duži d.

1805. Dati su krug k i na njemu dve tačke A, B, zatim prava s i na njoj tačka S. Odrediti na krugu k tačku X takvu da prave AX i BX seku pravu s u tačkama Y i Z pri čemu su duži SY i SZ srazmerne datim dužima m i n.

1806. Data su dva kruga k_1, k_2 sa središtima S_1, S_2 i tačka P. Odrediti na krugovima k_1 i k_2 tačke A_1 i A_2 takve da je $S_1A_1 \parallel S_2A_2$ i $\angle S_1PA_1 = \angle S_2PA_2$.

1807. Data su dva kruga k_1, k_2 sa središtima S_1, S_2 i dve tačke P_1, P_2. Odrediti na krugovima k_1 i k_2 tačke A_1 i A_2 takve da je $S_1A_1 \parallel S_2A_2$ i $\angle S_1P_1A_1 = \angle S_2P_2A_2$.

1808. Date su u ravni četiri prave a, b, c, d pri čemu je $a \parallel b$ i $c \parallel d$. Kroz datu tačku M konstruisati pravu s koja seče date prave u tačkama A, B, C, D takvim da je $AB = CD$.

1809. Date su tri prave a, b, c i na pravama a, b tačke A, B. Konstruisati pravu s koja je paralelna s pravom c i koja seče prave a i b u tačkama X i Y takvim da su duži AX i BY srazmerne datim dužima m i n.

1810. Date su tri prave a, b, c i na pravama a, b tačke A i B. Konstruisati pravu s koja je paralelna s pravom c i koja seče prave a i b u tačkama X i Y takvim da je zbir ili razlika duži AX i BY jednaka datoj duži l.

1811. Date su dve prave a, b i na svakoj od njih po jedna tačka A, B. Konstruisati pravu s koja seče prave a i b u tačkama X i Y takvim da je duž XY jednaka datoj duži d, a duži AX i BY srazmerne dvema datim dužima m i n.

1812. Date su dve prave a, b i na svakoj od tih pravih po jedna tačka A, B. Konstruisati pravu s koja seče prave a i b u tačkama X i Y takvim da je duž XY jednaka datoj duži d, a zbir ili razlika duži AX i BY jednaka datoj duži l.

1813. Date su prave a, b, c, d, p. Konstruisati pravu s koja je paralelna s pravom p i koja seče prave a, b, c, d respektivno u tačkama A, B, C, D takvim da duži AB i CD budu srazmerne dvema datim dužima m i n.

1814. Date su kolinearne prave a, b, c, d, p. Konstruisati pravu s koja je paralelna s pravom p i koja seče prave a, b, c, d u tačkama A, B, C, D takvim da je zbir ili razlika duži AB i CD jednaka datoj duži l.

1815. Date su dve paralelne prave a, b i dve tačke M, N koje se nalaze s raznih strana svake od tih pravih. Odrediti na pravama a i b tačke A i B takve da duž AB bude paralelna s datom pravom p, a zbir duži MA, AB, BN minimalan.

1816. Date su četiri prave a, b, c, d takve da je $a \parallel b$ i $c \parallel d$, zatim dve tačke M, N koje se nalaze s raznih strana svake od tih pravih. Odrediti na pravama a, b, c, d tačke A, B, C, D takvim da duži AB i CD budu respektivno paralelne s dvema datim pravama p i q, a zbir duži ???? AB, BC, CD, DN minimalan.

Konstruisati trougao ABC kada znamo:

1817. m_a, m_b, m_c.

1818. h_a, m_a, m_b.

1819. h_a, m_b, m_c.

1820. m_a, h_a, h_b.

1821. m_a, h_b, h_c.

1822. m_a, b, c.

1823. $m_a, h_a, b : c$.

1824. $m_a, h_b, b : c$.

1825. $m_a, m_b, b : c$.

1826. A, m_b, m_c.

1827. A, m_a, m_b.

1828. A, m_a, h_a.

1829. A, m_a, h_b.

1830. $A, m_a, b^2 \pm c^2$.

1831. $A, m_a, b^2 \pm c^2$.

Konstruisati četvorougao $ABCD$ kada znamo:

1832. $AB, CD, AC, BD, \angle(AC, BD)$.

1833. $AB, BC, CD, DA, \angle(AB, CD)$.

1834. $AC, BD, AB : CD, BC : AD, \angle(AC, BD)$.

1835. $A, B, AC, BD, \angle(AC, BD)$.

1836. A, B, BC, CD, DA.

1837. $A, B, AB, CD, \angle(AB, CD)$.

1838. $A, B, AB, CD, AD : BC$.

1839. $A, B, AB, CD, AD \pm BC$.

1840. $A, B, AB, AD \pm BC, \angle(AB, CD)$.

1841. A, B, C, AB, CD.

Konstruisati trapez $ABCD$ sa paralelnim stranicama AB i CD kada znamo:

1842. AB, BC, CD, DA.

1843. AB, CD, AC, BD.

1844. AD, BC, AC, BD.

1845. $AB, AC, BD, \angle(AC, BD)$.

1846. A, B, AB, CD.

1847. A, B, AC, BD.

1848. $A, B, AB : CD, AC$.

1849. $A, B, AB \pm CD, AC : BD$.

1850. Na katetama AB i AC datog pravouglog trougla ABC odrediti tačke X i Y takve da duž XY bude jednaka datoj duži d, a zbir kvadrata duži BX i CY jednak kvadratu date duži l.

1851. Oko datog trougla PQR opisati trougao ABC kome su stranice BC, CA, AB respektivno jednake datim dužima a, b, c.

1852. Oko datog trougla PQR opisati jednakostraničan trougao ABC maksimalnog obima.

1853. Konstruisati pravougaonik $ABCD$ takav da stranica AB bude jednaka datoj duži i da prave određene stranicama AB, BC, CD, DA sadrže respektivno date tačke P, Q, R, S.

1854. Konstruisati paralelogram kome znamo stranice i ugao između dijagonala.

1855. Konstruisati trapez $ABCD$ kome znamo dijagonale AC i BD, duž koja spaja središta dijagonala i duž koja spaja središta dveju naspramnih stranica.

1856. U dati krug l upisati trapez $ABCD$ kome znamo visinu i zbir ili razliku paralelnih stranica AB i CD.

1857. Konstruisati četvorougao $ABCD$ kome znamo stranice AB, BC, CD, DA i duž koja spaja središta M i N naspramnih stranica AB i CD.

1858. Konstruisati četvorougao $ABCD$ kome su stranice AB, BC, CD, DA jednake datim dužima a, b, c, d, a duž koja spaja središta M i N naspramnih stranica AB i CD jednaka datoj duži l.

1859. Konstruisati četvorougao $ABCD$ kome su stranice AB, BC, CD, DA jednake datim dužima a, b, c, d, a duž koja spaja središta P i Q dijagonala AC i BD

1860. Konstruisati četvorougao $ABCD$ kome su stranice AB, BC, CD, DA jednake datim dužima a, b, c, d, a duž MN jednaka datoj duži l,gde su M i N tačke stranica AB i CD takve da je $AM : MB = m : n$ i $DN : NC = m : n$, a m i n date duži.

1861. Konstruisati četvorougao $ABCD$ kome su stranice AB, BC, CD, DA jednake datim dužima a, b, c, d, a duž PQ jednaka datoj duži l,gde su P i Q tačke dijagonala AC i BD takve da je $AP : PC = m : n$ i $BQ : QD = m : n$, a m i n date duži.

1862. U dati trougao ABC upisati pravougaonik $PQRS$ kome su temena P i Q na stranici BC, temena R i S na stranicama AC i AB, a dijagonala PR jednaka datoj duži d.

1863. U dati trougao ABC upisati pravougaonik $PQRS$ kome su temena P i Q na stranici BC, temena R i S na stranicama AC i AB, a dijagonala PR minimalne dužine.

1864. U dati trougao ABC upisati pravougaonik $PQRS$ datog obima $2p$ tako da njegova dva temena P i Q budu na stranici BC, a ostala dva temena R i S na stranicama AC i AB.

1865. U dati trougao ABC upisati pravougaonik maksimalne površine tako da njegova dva temena P i Q budu na stranici BC, a ostala dva temena R i S na stranicama AC i AB.

1866. U dati trougao ABC upisati pravougaonik $PQRS$ date površine k tako da njegova dva temena P i Q budu na stranici BC, a ostala dva temena R i S na stranicama AC i AB.

1867. Dat je trougao ABC i u njemu tačka P. Odrediti na trouglu tačku Q takvu da izlomljena linija APQ razloži trougaonu površ (ABC) na dve jednake površi.

1868. Kroz datu tačku P koja se nalazi na stranici AB date četvorougaone površi $(ABCD)$ konstruisati pravu koja razlaže tu površ na dve ekvivalentne površi.

1869. Kroz teme A_1 konveksne poligonske površi $(A_1A_2\ldots A_n)$ konstruisati $k-1$ pravih koje razlažu tu poligonsku površ na k ekvivalentnih površi.

4.Simetrija

Simetrija u odnosu na tačku

1870. Date su dve prave a, b i van njih tačka S. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku S i seče prave a i b u tačkama A i B takvim da je tačka S središte duži AB.

1871. Dat je konveksan ugao XAY i u njemu tačka P. Konstruisati pravu koja sadrži tačku P i seče krake AX i AY u tačkama B i C takvim da površina trougla ABC bude minimalna.

1872. Kroz presečnu tačku P datih krugova k_1 i k_2 konstruisati pravu p na kojoj krugovi k_1 i k_2 odsecaju jednake tetive.

1873. Kroz presečnu tačku P dvaju datih krugova k_1 i k_2 konstruisati pravu p koja seče krugove k_1 i k_2 još u tačkama Q i R takvim da je zbir ili razlika tetiva PQ i PR jednaka datoj duži l.

1874. Dati su krug k, na njemu dve tačke A i B, zatim prava p i na njoj tačka P. Odrediti na krugu k tačku X takvu da prave AX i BX seku pravu p u tačkama X i Z koje su simetrične među sobom u odnosu na tačku P.

1875. Data je prava p i s iste strane od te prave date su dve tačke B', C'. Konstruisati trougao ABC kome se stranica BC nalazi na pravoj p, i kome su tačke B' i C' podnožja visina iz temena B i C.

1876. Dat je ugao XAY i u njegovoj ravni tačka S_1. Konstruisati trougao ABC kome se središte Ojlerovog kruga poklapa s tačkom S_1, ortocentar H nalazi na pravoj AX, a središte upisanog kruga na polupravoj AY.

Konstruisati trougao ABC kada znamo:

1877. m_a, m_b, m_c.

1878. m_a, m_b, g_c.

1879. m_a, h_b, h_c.

1880. $m_a, h_b, b \pm c$.

1881. $m_a, h_a, b^2 \pm c^2$.

1882. $m_a, h_a, b : c$.

1883. A, m_a, h_a.

1884. A, m_a, h_b.

1885. $A, m_a, b?c$.

1886. $A, m_a, b^2 \pm c^2$.

1887. $A, m_a, b(b \pm c)$.

1888. A, m_b, m_c.

1889. $A, \varrho, b - c$.

1890. $A, \varrho_a, b - c$.

1891. $A, \varrho_b, b+c$.

1892. $A, \varrho, h_b - h_c$.

1893. $A, \varrho_a, h_b - h_c$.

1894. $A, \varrho_b, h_b - h_c$.

1895. Dat je konačan skup od n tačaka $S_1, \ldots, S_n$. Konstruisati n-tougao $A_1 \ldots A_n$ kome su tačke $S_1, \ldots, S_n$ respektivno središta stranica $A_1A_2, \ldots$, A_nA_1. Analizirati posebno slučaj kada je n neparan i slučaj kada je n paran broj.

Simetrija u odnosu na pravu

1896. Dati su krugovi k_1, k_2, prava s i ne njoj tačka A. Odrediti na krugovima k_1 i k_2 tačke B i C takve da ABC bude trougao kome je prava s simetrala ugla A, dok su stranice AB i AC srazmerne dvema datim dužima m i n.

1897. Date su dve razne prave a i b i izvan njih tačka P. Na pravoj a odrediti tačku Q takvu da duž PQ bude jednaka zbiru odstojanja tačaka P i Q od prave b.

1898. Dati su prava a i dve tačke B i C. Odrediti na pravoj a tačku A takvu da razlika uglova B i C trougla ABC bude jednaka datom uglu.

1899. Data je prava p i izvan nje date su dve tačke A i B. Odrediti na pravoj p tačku X takvu da zbir ili razlika duži bude jednaka datoj duži d.

1900. Konstruisati krug k koji sadrži dve date tačke A, B i dodiruje datu pravu p.

1901. Dati su prava p i sa iste strane od te prave dve tačke A, B. Odrediti na pravoj p tačku X takvu da konveksni ugao AXB bude maksimalan.

1902. Date su tri prave a, b, c i na pravama a, b respektivno tačke A, B. Odrediti na pravama a i b tačke X i Y takve da je $XY \parallel c$ i $AX = BY$.

1903. Date su dve prave a, b i na njima respektivno tačke A, B. Odrediti na pravama a i b tačke X i Y takve da je $AX = BY$, a duž XY jednaka datoj duži l.

1904. Date su tri prave a, b, c i na pravama a, b respektivno tačke A, B. Odrediti na pravama a i b tačke X i Y takve da je $AX = BY$, a središte duži XY na pravoj c.

Konstruisati trougao ABC kada znamo:

1905. $a, h_a, b \pm c$.

1906. $a, h_a, m_b \pm m_c$.

1907. $a, b^2 - c^2, m_b \pm m_c$.

1908. $m_a, h_a, b \pm c$.

1909. $h_a, l_a, b : c$.

1910. a, h_a, l_a.

1911. $a, l_a, \bar{l}_a$.

1912. $B - C, a, h_a$.

1913. $B - C, a, l_a$.

1914. $B - C, a, b^2 - c^2$.

1915. $B - C, b, c$.

1916. $B - C, r, b \pm c$.

1917. $B - C, r, b^2 \pm c^2$.

1918. $B - C, r, b(b \pm c)$.

1919. $B - C, b : c, h_a$.

1920. $B - C, b : c, l_a$.

1921. $B - C, b : c, m_a$.

1922. $B - C, b : c, p$.

1923. $B - C, b : c$, r.

1924. $B - C, b : c, \varrho$.

1925. $B - C, b : c, \varrho_a$.

Konstruisati četvorougao $ABCD$ kome se teme C nalazi na simetrali ugla A i kome znamo:

1926. AB, BC, CD, DA.

1927. $AB, AD, AC, BC : CD$.

1928. $AB, AD, AC, B - D$.

1929. $BC, CD, AB : AD, B - D$.

U dati krug k upisati četvorougao $ABCD$ kada znamo:

1930. $AB, CD, BC : AD$.

1931. $AB, CD, BC \pm AD$.

1932. $AB, CD, BC^2 \pm AD^2$.

1933. $AB, CD, BC(BC \pm AD)$.

Konstruisati tangentan četvorougao $ABCD$ kada znamo:

1934. AB, AD, B, D.

1935. $AB - AD, BD, B, D$.

1936. Dati su prava p i sa iste strane od te prave dve tačke A, B. Odrediti na pravoj p tačku X takvu da zbir duži AX i BX bude minimalan.

1937. Dati su prava p i s raznih od te prave dve tačke A, B. Odrediti na pravoj p tačku X takvu da razlika njenih rastojanja od tačaka A i B bude minimalna.

1938. Data je prava p i izvan nje date su dve tačke M i N. Odrediti na pravoj p dve tačke X i Y takve da dužXY bude jednaka datoj duži l i da zbir duži MX, XY, YN bude minimalan.

1939. Data je prava p i izvan nje date su dve tačke M i N. Odrediti na pravoj p tačku X takvu da duži MX i NX određuju s pravom p jednake uglove.

1940. Data je prava PQ i izvan nje date su dve tačke M i N. Odrediti na pravoj PQ tačku X takvu da je $MXP = 2NXQ$.

1941. Date su dve prave p, q i izvan njih dve tačke M i N. Odrediti na pravoj p tačku A i na pravoj q tačke B i C takve da tačka M bude na pravoj AB, tačka N na pravoj AC i da bude $AB = AC$.

1942. Dati su prava p i izvan nje dve tačke A i B. Odrediti na pravoj p tačku C takvu da trougao ABC bude minimalnog obima.

1943. Dati su oštrougli trougao ABC i na stranici BC tačka P. Odrediti na stranicama CA i AB tačke Q i R takve da obim trougla PQR bude minimalan.

1944. U dati oštrougli trougao PQR upisati trougao PQR minimalnog obima.

1945. Date su dve prave p, q i izvan njih tačka A. Odrediti na pravama p i q tačke B i C takve da obim trougla ABC bude minimalan.

1946. Na trima datim pravama a, b, c odrediti tačke P, Q, R takve da zbir duži PQ, QR, AB bude minimalan.

1947. Konstruisati trougao ABC ako su date tri tačke H_a, H_b, H_c koje su simetrične s ortocentrom H tog trougla u odnosu na prave određene stranicama BC, CA, AB.

1948. Konstruisati trougao ABC ako su date tri tačke O_a, O_b, O_c koje su simetrične sa središtem O opisanog kruga u odnosu na prave određene stranicama BC, CA, AB.

1949. Konstruisati trougao ABC ako su ate tri tačke P, Q, R u kojima simetrale uglova A, B, C seku opisani krug.

1950. Date su tri konkurentne prave s_a, s_b, s_c i na pravoj s_a tačka A. Odrediti na pravama s_b, s_c tačke B i C takve da prave s_a, s_b, s_c budu simetrale unutrašnjih i spoljašnjih uglova trougla ABC.

1951. Dati su krug k sa središtem S i tri prave s_a, s_b, s_c koje se seku u tački S. Odrediti na pravama s_a, s_b, s_c tačke A, B, C takve da prave BC, CA, AB budu tangente kruga k.

1952. Date su tri konkurentne prave s_a, s_b, s_c i na pravoj s_a tačka A_1. Konstruisati trougao ABC kome je tačka A_1 središte stranice BC i kome su prave s_a, s_b, s_c simetrale stranica BC, CA, AB.

1953. Dat je konačan skup od n tačaka $s_1, \ldots, s_n$. Konstruisati $n - tougao$ $A_1 \ldots A_n$ kome su prave $s_1, \ldots, s_n$ respektivno simetrale unutrašnjih ili spoljašnjih uglova $A_1, \ldots, A_n$. Analizirati posebno slučaj kada je n paran broj i slučaj kada je n neparan broj.

1954. Dat je konačan skup od n komplanarnih pravih $s_1, \ldots, s_n$. Konstruisati n-tougao $A_1 \ldots A_n$ kome su prave $s_1, \ldots, s_n$ respektivno simetrale stranica $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$. Analizirati posebno slučaj kada je n paran i slučaj kada je n neparan broj.

1955. Dati su tačka S_1 i konačan skup od $n-1$ pravih $s_2, \ldots, s_n$. Konstruisati n-tougao $A_1 \ldots A_n$ kome se središte stranice A_1A_2 poklapa s tačkom S, a simetrale stranica $A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ poklapaju respektivno s pravama $s_2, \ldots, s_n$.

1956. U dati krug k upisati n-tougao $A_1 \ldots A_n$ kome su stranice $A_1A_2, \ldots, A_nA-$ 1 respektivno paralelne s datim pravama $p_1, \ldots, p_n$. Analizirati posebno slučaj kada je n neparan i slučaj kada je n paran broj.

1957. U dati krug k upisati n-tougao $A_1 \ldots A_n$ kome prava određena stranicom A_1A_2 sadrži datu tačku P_1, dok su stranice $A_2A_3, \ldots, A_nA-1$ respektivno paralelne s datim pravama $p_2, \ldots, p_n$. Analizirati posebno slučaj kada je n paran i slučaj kada je n neparan broj.

13.5. Rotacija

1958. Date su dve linije a i b od kojih svaka predstavlja pravu ili krug i tačka S. Odrediti na linijama a i b tačke A i B takve da ugao ASB bude jednak datom uglu ω a duži SA i SB srazmerne dvema datim dužima m i n.

1959. Date su dve linije a i b od kojih svaka predstavlja pravu ili krug i tačka S. Odrediti na linijama a i b tačke X i Y takve da ugao XSY bude jednak datom uglu ω, a proizvod duži SX i SY jednak kvadratu date duži r.

1960. Dati su prava ili krug l i tačka A. Odrediti na liniji l tačke B i C takve da ugao BAC bude jednak datom uglu ω, a duži AB i AC srazmerne dvema datim dužima m i n.

1961. Dati su prava l ili krug l i tačka A. Odrediti na liniji l tačke B i C takve da ugao BAC bude jednak datom uglu ω i da proizvod duži AB i AC bude jednak kvadratu date duži r.

Konstruisati trougao ABC kada znamo:

1962. A, h_a, b_c.

1963. A, r, b_c.

1964. A, a, b_c.

1965. $B - C, r, b_c$.

1966. $B - c, h_a, b_c$.

1967. $B - c, l_a, b_c$.

1968. a, r, bc.

1969. h_a, l_a, b_c.

1970. $\bar{l}_a, l_a, bc$.

1971. Dat je trougao MAN i u njegovoj ravni tačka S_1. Odrediti na kracima AM i AN tog ugla tačke B i C takve da ABC bude trougao kome je tačka S_1 središte Ojlerovog kruga.

1972. U dati paralelogram $ABCD$ upisati paralelogram $PQRS$ kome su dijagonale PR i QS srazmerne dvema datim dužima m i N, a jedan od uglova koje određuju dijagonale jednak datom uglu.

1973. U dati paralelogram $ABCD$ upisati paralelogram $PQRS$ kome su stranice PQ i RS srazmerne dvema datim dužima m i n, a dijagonale PR i QS seku se pod uglom jednakim datom uglu ω.

1974. U dati paralelogram $ABCD$ upisati paralelogram $PQRS$ kome je jedan od uglova između dijagonala jednak datom uglu ω, a proizvod dijagonala jednak kvadratu date duži r.

1975. U dati paralelogram $ABCD$ upisati pravougaonik $PQRS$ kome dijagonale zahvataju ugao jednak datom uglu ω.

1976. U dati paralelogram $ABCD$ upisati romb $PQRS$ kome su dijagonale srazmerne dvema datim dužima m i n.

1978. Konstruisati tetivan četvorougao $ABCD$ kome su stranice AB, BC, CD, DA respektivno jednake datim dužima.

1979. Konstruisati četvorougao $ABCD$ kome su stranice AB, BC, CD, DA respektivno jednake datim dužima a, b, c, d a zbir naspramnih uglova B i D jednak datom uglu ω.

1980. Konstruisati četvorougao $ABCD$ kome su uglovi B i D jednaki datim uglovima β i γ, stranice BC i CD jednake datim dužima b i c, a stranice AB i AD srazmerne dvema datim dužima m i n.

1981. U dati kvadrat $ABCD$ upisati kvadrat $PQRS$ kome je stranica jednaka datoj duži l.

1982. Konstruisati kvadrat $ABCD$ takav da prave određene njegovim stranicama AB, BC, CD, DA respektivno sadrže date tačke P, Q, R, S.

1983. Dati su krug k i dve tačke A i B. Konstruisati tangentu t kruga k takvu da odstojanja AM i AN tačke A od prave t i upravne kroz tačku B na pravoj t budu srazmerne dvema datim dužima m i n.

1984. Dati su krug k sa središtem S, dve tačke A, B i ugao ω. Odrediti na krugu k tačke C i D takve da je $AC \cong BD$ i $\angle CSD \cong \omega$.

1985. Dat je krug l i na njemu tačka A. Odrediti na krugu tačke B i C takve da ugao BAC bude jednak datom uglu ω, a zbir ili razlika tetiva AB i AC jednaka datoj duži D.

1986. Date su dve prave m i n i tačka S. Konstruisati krug k koje je središte S i koji seče pravu m u tačkama A, B i pravu n u tačkama C, D takvim da je zbir ili razlika tetiva AB i CD jednaka datoj duži l.

1987. Data su dva koncentrična kruga k_1, k_2 i tačka P. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku P seče krug k_1 u tačkama A, B i krug k_2 u tačkama C, D takvima da tetive AB i CD budu srazmerne dvema dužima m i n.

1988. Data su dva koncentrična kruga k_1, k_2 i tačka P. Odrediti na krugovima k_1 i k_2 tačke X_1 i X_2 takve da duž X_1X_2 budu jednake datoj duži l, a ugao X_1PX_2 jednak datom uglu ω.

1989. Dati su dva kruga k_1 i k_2, tačka O i ugao ω. Kroz tačku O konstruisati dve prave p_1 i p_2 koje zahtevaju ugao jednak s uglom ω i na kojima krugovi k_1 i k_2 odsecaju jednake tetive.

1990. Date su dve prave a, b i tačka S. Konstruisati dva kruga k_1 i k_2 koji se među sobom dodiruju u tački S, kojima su poluprečnici srazmerni dvema datim dužima m i n, i od kojih prvi dodiruje pravu a, a drugi pravu b.

1991. Data su dva kruga k_1, k_2 sa središtima S_1, S_2 i dve tačke M_1, M_2. Odrediti na krugovima k_1 i k_2 tačke X_1 i X_2 takve da ugao $S_1M_1X_1$ bude jednak s uglom $S_2M_2X_2$, a jedan od uglova koje zahvataju prave S_1X_1 i S_2X_2 jednak je sa datim uglom ω.

1992. Data su dva kruga k_1, k_2 sa središtima S_1, S_2 i dve tačke M_1, M_2. Odrediti na krugovima k_1 i k_2 tačke X_1 i X_2 takve da je razlika uglova $S_1M_1X_1$ i $S_2M_2X_2$ jednaka s datim uglom δ, a jedan od uglova koje određuju prave S_1X_1 i S_2X_2 jednak s datim uglom ω.

1993. Date su dve konkurentne prave a, b i dve tačke C, D. Odrediti na pravama a i b tačke A i B takve da su duži AC i BD srazmerne dvema datim dužima m i n, a jedan od uglova koje određuju prave AC i BD jednak datom uglu ω.

1994. Date su tri paralelne prave a, b, c i krug d. Konstruisati kvadrat $ABCD$ kome temena A, B, C, D pripadaju respektivno linijama a, b, c, d.

1995. Dati su tri koncentrična kruga a, b, c i prava d. Konstruisati kvadrat $ABCD$ kome temena A, B, C, D pripadaju respektivno linijama a, b, c, d.

1996. Konstruisati središte S obrtne sličnosti dvaju obrtno sličnih likova ω i ω' ako su data dva para odgovarajućih tačaka A, A' i B, B'.

1997. Date su dve prave a, b na njima respektivno tačke A, B i van tih pravih tačka P. Konstruisati pravu p koja sadrži tačku P i seče prave a i b u tačkama X i Y takvima da su duži AX i BY srazmerne dvema datom dužima m i n.

1998. Date su tri prave a, b, c i na pravama a, b respektivno tačke X i Y takve da prave XY i c budu među sobom paralelne, a duži AX i BY srazmerne dvema datim dužima m i n.

1999. Date su prave a, b i na njima respektivno tačke A, B. Konstruisati pravu p koja seče prave a i b u tačkama X i Y takvima da duži AX i BY budu srazmerne dvema datim dužima m i n, a duž XY jednaka datoj duži l.

2000. Data su dva ekscentrična kruga k_1, k_2 sa središtima $O_{1,2}$, na tim krugovima respektivno tačke A_1, A_2 i tačka P koja ne pripada tim krugovima. Odrediti na krugovima k_1 i k_2 tačke X_1 i X_2 takve da uglovi $A_1O_1X_1$ i $A_2O_2X_2$ budu jednaki i istosmerni, a tačke P, X_1, X_2 kolinearne.

2001. Data su dva ekscentrična kruga k_1, k_2 sa središtima O_1, O_2 i na njima respektivno tačke A_1, A_2. Odrediti na krugovima k_1 i k_2 tačke X_1 i X_2 takve da uglovi $A_1O_1X_1$ i $A_2O_2X_2$ budu jednaki i istosmerni, a prava X_1X_2 paralelna s datom pravom p.

2002. Data su dva ekscentrična kruga k_1, k_2 sa središtima O_1, O_2 i na njima respektivno tačke A_1, A_2. Odrediti na krugovima k_1 i k_2 tačke X_1 i X_2 takve da uglovi $A_1O_1X_1$ i $A_2O_2X_2$ budu jednaki i istosmerni, a duž X_1X_2 jednaka datoj duži l.

2003. Date su dve prave a, b, na njima respektivno tačke A, B i van tih pravih tačka P. Konstruisati pravu p koja sadrži tačku P i seče prave a i b u tačkama X i Y takvim da je zbir ili razlika duži AX i BY jednaka datoj duži l.

2004. Date su dve prave x, y, na pravoj x dve tačke A, B i na pravoj y dve tačke C, D. Odrediti na pravama x i y tačke X i Y takve da duži AX i CY budu srazmerne dvema datim dužima m i n, a duži BX i DY srazmerne dvema datim dužima p i g.

2005. Date su tri prave a, b, c i na njima respektivno tačke A, B, C. Konstruisati pravu s koja seče prave a, b, c u tačkama X, Y, Z takvim da je

$$AX = BY = CZ.$$

2006. Na stranicama AB i AC datog trougla ABC odrediti tačke X i Y takve da je

$$BX = XY = YC.$$

Konstruisati četvorouglove $ABCD$ kada znamo:

2007. $A, B, AB, CD, AD : BC$.

2008. $A, B, C, AB, AD : BC$.

2009. Date su četiri prave a, b, c, d koje se seku u istoj tački O. Konstruisati paralelogram $ABCD$ kome su temena A, B, C, D respektivno na pravama a, b, c, d a stranice AB i BC jednake s datim dužima m i n.

2010. Dati su trougao XAY, tačka P i trougao $A_1B_1C_1$. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku P i seče krake AX i AY ugla XAY u tačkama B i C takvim da je

$$S(ABC) = S(A_1B_1C_1).$$

2011. Data su dva kruga k i k' koji se seku u tačkama A i B. Odrediti na krugovima k i k' tačke X i X' takve da zbir ili razlika uglova ABX i ABX' bude jednaka datom uglu ω, a duž XX' jednaka datoj duži l'.

2012. Konstruisati četvorougao $ABCD$ kome su uglovi A, B, C respektivno jednaki s datim uglovima α, β, γ a dijagonale AC i BD jednake datim dužima d_1 i d_2.

2013. Konstruisati četvorougao $ABCD$ kome su uglovi A, B, C jednaki datim uglovima α, β, γ, dijagonale AC i BC srazmerne dvema datim dužima m i n, a obim jednak datoj duži l.

2014. Konstruisati pravougaonik $ABCD$ kome stranice AB, BC, CD, DA sadrže respektivno date tačke P, Q, R, S i kome je dijagonala AC jednaka datoj duži d.

2015. Konstruisati četvorougao $ABCD$ koji je sličan s datim četvorouglom $A_1B_1C_1D_1$ i kome stranice AB, BC, CD, DA pripadaju pravama koje respektivno sadrže date tačke P, Q, R, S.

2016. Konstruisati četvorougao $ABCD$ koji je sličan s datim četvorouglom $A_1B_1C_1D_1$ i kome temena A, B, C, D respektivno pripadaju datim pravama a, b, c, d.

2017. Konstruisati četvorougao $ABCD$ koji je sličan s datim četvorouglom $A_1B_1C_1D_1$ i kome teme A pripada datom krugu k a prave određene stranicama BC, CD i dijagonalom BD sadrže respektivno date tačke P, Q, R.

2018. Date su četiri prave a, b, c, d i tri duži p, q, r. Konstruisati pravu s koja seče prave a, b, c, d u tačkama A, B, C, D takvim da je

$$AB : BC : CD = p : q : r.$$