

I SEKCIJA: MATEMATIKA I PRIMENE DANAS

Vesna Jevremović, Bojana Milošević, Marko Obradović, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

„Karakterizacije raspodela verovatnoća sa posebnim osvrtom na eksponencijalnu raspodelu“

Apstrakt. Karakterizacija raspodela verovatnoća – način da se ustanove, ukoliko postoje, specifične osobine karakteristične samo za određenu familiju raspodela, je veoma važan zadatak, ne samo sa teorijskog, nego i sa praktičnog aspekta. Karakterizacija raspodela omogućava formiranje modela prirodnih pojava kao i konstruisanje i primenu statističkih testova. Postoje razne vrste karakterizacija: one koje su vezane za statistike poretka, za momente u raspodeli, za zasecanje raspodele... Uz normalnu raspodelu eksponencijalna raspodela je u vrhu raspodela koje su modeli realnih situacija, jer se javlja npr. u teoriji masovnog opsluživanja, u teoriji pouzdanosti... U radu će biti razmotrene četiri osnovne međusobno ekvivalentne karakterizacije eksponencijalne raspodele. Iz njih se izvode i karakterizacije raspodela koje se dobijaju transformacijom eksponencijalne raspodele: Paretova raspodela, logistička raspodela, Vejbulova raspodela... a takođe se dobija i karakterizacija Puasonovog procesa. Pitanjima karakterizacije raspodela su se bavili, a i danas se bave mnogi naučnici.

Ključne reči: karakterizacija raspodela; eksponencijalna raspodela; statistike poretka.

Bibliografija

[1] J. Galambos, S. Kotz. Characterizations of Probability Distributions. *Springer-Verlag*, 1978.

[2] Ahsanullah, Mohammad Ahsanullah, Gholamhossein G. Hamedani Hamedani. Exponential Distribution: Theory and Methods. *Nova Science Publishers*, 2010.

Zoran Vidović, Univerzitet u Beogradu, Učiteljski fakultet

„Bertranov paradoks - Novi pogledi“

Apstrakt. Jedan od najvažnijih paradoksa u teoriji verovatnoće predstavlja Bertranov paradoks, predstavljen 1888. godine, koji nas opominje da kad radimo sa geometrijskom, "lokalnom", verovatnoćom moramo da definišemo šta podrazumevamo pod pojmom slučajno. Bertran predstavlja tri rešenja ovog paradoksa, i ta rešenja su sadržana u skoro svakoj knjizi iz teorije verovatnoće, kao ilustracija da statistička verovatnoća ima kontradiktorno ponašanje kad se primenjuje u radu sa geometrijskim objektima. Najvažniji rezultati, prikupljeni iz radova *Bertrand's Paradox: Is there anything else?* autora *V. Jevremović* i *M. Obradovića* i *Bertrand's Paradox Revisited: More Lessons about that Ambiguous Word, Random* autora *S. Chi* i *R. Larson*, su prikazani u radu, objedinjeni u jednu celinu.

Značaj rada se ogleda u tome što se predstavlja novo rešenje Bertranovog paradoksa, teorijski rešeno uz podršku Monte Karlo simulacija. Simulacije su modelirane u programskom jezuku R, i rezultati simulacija su prikazani u radu, zajedno sa graficima. Prikazani su problemi u odogovarajućim dimenzijama koji su, na određen način, proširenje Bertranovog paradoksa.

Ključne reči: Bertranov paradoks, Monte Karlo, geometrijske verovatnoće.

Marija Minić, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

„Uzorkovanje metodom sortiranih skupova“

Apstrakt: Metoda sortiranih skupova je statistička metoda uzorkovanja koju je prvi opisao McIntyre (1952, Australian Journal of Agricultural rearsch, 3, 385-390), a Takahasi i Wakimoto su dali matematičku pozadinu (1968, On unbiased estimates of population mean based on the sample stratified by means of ordering, Annals of the Institute of Statistical Mathematics 20: 1-31.). Iako isprva nije izazvala veliko interesovanje, metoda sortiranih skupova je postala popularna poslednjih dvadesetak godina. Osnovna metoda sortiranih skupova iznedrila je mnoge druge sa njom povezane metode.

McIntyre predlaže ovu metodu kada su troškovi merenja obeležja visoki, finansijski i/ili vremenski. Ideja je da se jedinice uzorka sortiraju pomoću obeležja koje je lako i jeftino meriti. Odatle se dobija uzorak koje najbolje oslikavaju populaciju, a na kome se vrše stvarna merenja. Ocene parametara iz uzorka dobijenog metodom sortiranih skupova uglavnom su bolje u odnosu na ocene iz prostog slučajnog uzorka.

U ovom radu prikazan je koncept metode sortiranih skupova, kao i neke njene vrste i varijacije. Takođe je prikazana bibliografija radova koji se bave ovom temom.

Ključne reči: uzorkovanje, metoda sortiranih skupova, ocenjivanje parametara, bibliografija

Dušica Gavrilović, Institut za onkologiju i radiologiju Srbije

„Biostatistika u medicini: pojam i primena metodologije ROC krive“

Apstrakt: Najjednostavniji dijagnostički testovi koji se koriste u medicini obično su u stanju da izvrše klasifikaciju pacijenata u jednu od dve grupe: osobe koje imaju odnosno nemaju neko određeno oboljenje, simptome i sl. Klinički značaj takvih testova upravo je i zasnovan na njihovoj upotrebi tokom postavljanja dijagnoze bolesti.

Svaki dijagnostički test ima svoju senzitivnost, specifičnost, pozitivnu prediktivnu vrednost, negativnu prediktivnu vrednost i tačnost, što su neke od karakteristika koje su u funkciji kvantifikovanja dijagnostičkih sposobnosti izabranog testa i proceni njegovog kliničkog značaja. Mnogi faktori u biomedicini imaju neprekidnu kvantitativnu prirodu (napr. enzimi, biomarkeri) i mogu biti u funkciji dijagnostičkog testa, samo ukoliko je njihov diskriminacioni potencijal klinički zadovoljavajući. U svrhu takvog ispitivanja koristi se tzv. ROC (Receiver Operating Characteristics) kriva, bazirana na proračunu i grafičkom prikazu svih parova specifičnosti i senzitivnosti dobijenih evaluacijom granične (diskriminacione) vrednosti po svim uzoračkim vrednostima izabrane varijable.

Napretkom biomedicine, danas se ispituje ne samo dijagnostički već sve češće prognostički i/ili prediktivni potencijal mnogih faktora neprekidne kvantitativne prirode. Metodologija ROC krive, pored ispitivanja diskriminacionog potencijala (dijagnostičkog, prognostičkog, prediktivnog) neprekidne varijable, pruža mogućnost određivanja granične (diskriminacione) vrednosti kao i mogućnost testiranja značajnosti razlika (za nezavisne ili zavisne uzorke) diskriminacionih potencijala različitih varijabli za isti binarni ishod.

I pored brojnih teorijskih uopštenja metodologije ROC krive, ekspanzija savremenih istraživanja u biomedicini sa ciljem ispitivanja diskriminacionog potencijala i kliničkog značaja biomarkera ili njihovih kombinacija (naročito u oblasti hroničnih ili teških oboljenja poput maligniteta, infarkta miokarda, dijabetesa, side), uticaće na dalju primenu i razvoj ove metodologije.

Ključne reči: ROC kriva; senzitivnost testa; specifičnost testa

Bibliografija

- [3] **DG. Altman, JM. Bland.** Statistics Notes: Diagnostic tests 1: sensitivity and specificity. *BMJ*, 1994, 308:1552.
- [4] **DG. Altman, JM. Bland.** Statistics Notes: Diagnostic tests 2: predictive values. *BMJ*, 1994, 309:102.
- [5] **DG. Altman, JM. Bland.** Statistics Notes: Diagnostic tests 3: receiver operating characteristic plots. *BMJ*, 1994, 309:188.
- [4] **J. Hanley, B. McNeil.** The meaning and use of the area under the Receiver Operating Characteristic (ROC) curve. *Radiology*, 1982, 143: 29-36.
- [5] **J. Hanley, B. McNeil.** A Method of Comparing the Areas under Receiver Operating Characteristics Curves Derived from the Same Cases. *Radiology*, 1983, 148:839-843.
- [6] **MH. Zweig, G. Campbell.** Receiver-operating characteristic (ROC) plots: A fundamental evaluation tool in clinical medicine. *Clin Chem*, 1993, 39/4, 56-577.
- [7] **ER. DeLong, DM. DeLong, DL. Clarke-Pearson.** Comparing the areas under two or more correlated receiver operating characteristic curves: a nonparametric approach. *Biometrics*, 1988, 44, 837-845.

Goran V. Janjić, ICTM, University of Belgrade

Saša N. Malkov, Faculty of Mathematics, University of Belgrade

Miodrag V. Živković, Faculty of Mathematics, University of Belgrade

Snežana D. Zarić, Faculty of Chemistry, University of Belgrade; Department of Chemistry, Texas A&M University at Qatar

„Interactions of water molecule with phenyl group in crystal structures of small molecules and proteins“

Abstract. The interactions of water molecule with aromatic rings are of great importance since the water is in contact with aromatic molecules in many molecular systems, from materials to biological molecules. A substantial number of experimental and theoretical investigations have focused on characterizing the interaction between benzene and water as a prototype for aromatic–polar interactions.

For the study of interactions between water molecule and phenyl ring in proteins (PDB) and in crystal structures of small molecules (CSD) several mathematical methods have been used [1]. The density analysis shows that the most frequent populated area of water-phenyl contacts in crystal structures from the CSD and PDB corresponds to the ellipsoid with the vertical axis of 4.0 Å and horizontal axis of 5.5 Å. Only the contacts in this area will be analyzed, because the contacts inside the ellipsoid correspond to interactions with the phenyl group, while the contacts outside the ellipsoid mainly correspond to the interactions of water molecule with the protein backbone. The density analysis also shows that the water molecule has a tendency to be positioned outside of the ring, close to mean plane of the ring. In this area water molecule and phenyl ring form the CH/O and the parallel alignment interactions. The statistical analysis reveals that water molecule form relatively small number of the strongest OH/ π interactions (around 2%). The area corrected density distribution indicate that water oxygen have slightly pronounced preference to positions at or near the centre of phenyl ring, in the area where water molecule forms the strongest interactions with aromatic ring, and high preference for positions outside of the ring, in the area of the CH/O and parallel interactions. The less strong water/aromatic interactions are compensated by the additional stabilization due to simultaneous interactions in supramolecular structures in crystals.

Keywords: water/aromatic interactions; crystal structures; density analysis, statistical analysis; area correction.

References

[6] **G. Janjić, S. Malkov, M. Živković, S. Zarić**, What are preferred water/aromatic interactions in proteins and crystal structures of small molecules? *Physical Chemistry Chemical Physics*, DOI: 10.1039/C4CP00929K.

Хелена Грубор, Универзитет у Београду, Хемијски факултет

Душан Ж. Вељковић, Универзитет у Београду, Хемијски факултет

Саша Н. Малков, Универзитет у Београду, Математички факултет

Снежана Д. Зарић, Универзитет у Београду, Хемијски факултет; Department of Chemistry, Texas A&M University at Qatar

„Израчунавање тежње аминокиселина ка одређеном типу секундарне структуре применом различитих статистичких метода“

Апстракт. Тежња аминокиселина ка одређеној конформацији је од великог значаја за предвиђање секундарних и терцијарних структура протеина. Данас се зна да различите аминокиселине имају склоност да се нађу у једној од конформација протеина (хеликс, плочица, завојница). Примењен је велики број статистичких метода да би се израчунале наведене склоности аминокиселина [1,2].

У нашем ранијем раду проучавали смо преферентност аминокиселина ка одређеном типу и секундарне структуре коришћењем новог статистичког метода [3]. Јасна склоност аминокиселина да се јављају у одређеној секундарној структури омогућава њихово класификовање у једну од четири групе. Аминокиселине из исте групе имају сличне структурне карактеристике у погледу $C\beta$ и $C\gamma$ атома који указују на склоност ка одређеној секундарној структури.

У овом раду смо упоредили различите статистичке методе за рачунање склоности аминокиселина ка одговарајућој конформацији са статистичком методом коју смо понудили у нашем ранијем раду. Поређење је извршено на основу вредности корелационих коефицијената ($\rho(s,p)$). Као извор података користили смо структуре из Протеинске банке података (PDB). Приписивање секундарних структура извршено је помоћу програма DSSP.

Кључне речи: аминокиселине; преферентност; секундарне структуре.

Библиографија

[7] **P. Y. Chou, G. D. Fasman.** Conformational parameters for amino acids in helical, beta-sheet, and random coil regions calculated from proteins, *Biochemistry*, 1974, 13 (2), 211–222.

[8] **M. Levitt.** Conformational preferences of amino acids in globular proteins, *Biochemistry*, 1978, 17, 4277–4285.

[3] **S. N. Malkov, M. V. Živković, M. V. Beljanski, M. B. Hall, S. D. Zarić,** A reexamination of the propensities of amino acids towards a particular secondary structure: classification of amino acids based on their chemical structure, *J Mol Model*, 2008, 14, 769–775.

Olga Jakšić, Institute of Chemistry, Technology and Metallurgy, University of Belgrade
„On Chemical Master Equation and Stochastic Simulations for Stochastic Analysis of Second Order Reactions“

Abstract. Stochastic processes are omnipresent in natural phenomena, but in social phenomena as well. There is a vast literature referring to mathematical methods that have been developed for treating stochastic processes, but when it comes to practical implementations of these methods, the proper interpretation of results becomes an issue, especially if the results obtained by different methods do not correspond to each other or to the results obtained by deterministic approach treatment of the same phenomena.

Here we investigate second order chemical reactions (which may be mathematically analogous to many other stochastic phenomena) in several different ways and give the comparative analysis of the obtained results.

We present the application of various mathematical methods for creation of deterministic model [1], [2], analytical analysis of fluctuation kinetics [3]–[5], stochastic simulation algorithms for visual and numerical analysis of fluctuation kinetics [6], [7] analytical analysis of fluctuation dynamics in equilibrium [8].

We give the comparative analysis of the obtained results with the special concern on the interpretation of the difference between the deterministic solution and the the expression for mean value of the reactant concentrations.

Keywords: chemical master equation, stochastic simulation algorithm, stochastic processes.

References

- [1] **L. Kolar-Anić, Ž. Čupić, V. Vukojević, and S. Anić.** The dynamics of nonlinear processes. *Belgrade: Faculty of Physical Chemistry*, 2011.
- [2] **O. M. Jakšić, D. V. Randjelović, Z. S. Jakšić, Ž. D. Čupić, and L. Z. Kolar-Anić.** Plasmonic sensors in multi-analyte environment: Rate constants and transient analysis. *Chem. Eng. Res. Des.*, 2014, 92, 91–101.
- [3] **D. A. McQuarrie.** Stochastic Approach to Chemical Kinetics. *J. Appl. Probab.*, 1967, 4, 3, pp. 413–478.
- [4] **O. M. Jakšić, Z. S. Jakšić, Ž. D. Čupić, D. V. Randjelović, and L. Z. Kolar-Anić.** Fluctuations in transient response of adsorption-based plasmonic sensors. *Sensors Actuators B Chem.*, 2014, 190, 419–428.
- [5] **N. Bailey.** The Elements of Stochastic Processes with Applications to Natural Sciences. *John Wiley & Sons: New York*, 1964.
- [6] **D. T. Gillespie.** Stochastic simulation of chemical kinetics. *Annu. Rev. Phys. Chem.*, 2007, 58, 35–55.
- [7] **D. T. Gillespie, A. Hellander, and L. R. Petzold.** Perspective: Stochastic algorithms for chemical kinetics. *J. Chem. Phys.*, 2013, 138, 17, 170901.
- [8] **Z. Djurić, I. Jokić, M. Frantlović, and O. Jakšić.** Fluctuations of the number of particles and mass adsorbed on the sensor surface surrounded by a mixture of an arbitrary number of gases. *Sens. Actuators, B*, 2007, 127, 2, 625–631.

Dušan P. Malenov, Innovation Center of the Faculty of Chemistry, University of Belgrade

Ivana S. Antonijević, Faculty of Chemistry, University of Belgrade

Snežana D. Zarić, Faculty of Chemistry, University of Belgrade; Department of Chemistry, Texas A&M University at Qatar

„Assessment of performance of density functionals by using statistical methods – the case of tetrathiafulvalene stacking“

Abstract. Tetrathiafulvalene is planar non-aromatic organosulfur compound and one of the most important constituents of molecular metals – organic materials with very high conductivity. Stacking interactions of tetrathiafulvalene are among the most important features responsible for physical properties of these materials [1]. In order to study stacking interactions between two tetrathiafulvalene molecules, benchmark study was performed to find dispersion corrected density functionals which are able to reproduce interaction energies obtained at CCSD(T)/CBS level, the golden standard of quantum chemistry [2]. Statistical parameters, namely root mean square error (RMSE), mean unsigned error (MUE), average (signed) error (AVG), maximum (MAX) and minimum (MIN) relative error, signed error standard deviation (SESD), and unsigned error standard deviation (UESD), were used in benchmark study to estimate the agreement of CCSD(T)/CBS and individual D3 density functionals, with def2-TZVP and 6-311++G** basis sets. Using statistical parameters, it was determined that B2PLYP-D3 with 6-311++G** basis set gives excellent agreement with CCSD(T)/CBS values of interaction energies. Additionally, M06L-D3 with the same basis set systematically underestimates interaction energies, but with excellent consistency. Finally, interaction energy curves calculated at both levels of theory are of almost identical shapes, confirming that energies of stacking interactions between two tetrathiafulvalene molecules can be calculated at both levels of theory.

Keywords: benchmark; statistics; CCSD(T)/CBS; DFT; tetrathiafulvalene

References

- [9] **L. E. Smart, E. A. Moore**, *Solid State Chemistry: An Introduction*, CRC Press, Boca Raton, 2012.
[2] **M. O. Sinnokrot, C. D. Sherrill**, *J. Phys. Chem. A*, 2004, 108, 10200-10207.

Ivan Dimitrijević, Faculty of Mathematics, University of Belgrade

„On nonlocal modified gravity with cosmological solutions“

Abstract. In this talk we consider nonlocal gravity action without matter in the form

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + R^p \mathcal{F}(\square) R \right),$$

where $\mathcal{F}(\square)$ is an analytic function of the d'Alembertian \square and $p = +1, -1$. We present a few $a(t)$ nonsingular bounce cosmological solutions for the above two actions using FLRW metric. see references [1-5].

This is joint work with B. Dragovich, J. Grujic and Z. Rakic.

Keywords: modified gravity; nonlocal gravity; cosmological solutions.

References

- [1] T. Biswas, T. Koivisto, A. Mazumdar Towards a resolution of the cosmological singularity in non-local higher derivative theories of gravity JCAP, 2010, 1011.
- [2] A. S. Koshelev, S. Yu. Vernov On bouncing solutions in non-local gravity. Phys. Part. Nuclei, 2012, 08, 666-668, [arXiv:1202.1289v1 [hep-th]].
- [3] T. Biswas, A. S. Koshelev, A. Mazumdar, S. Yu. Vernov Stable bounce and inflation in non-local higher derivative cosmology. JCAP, 2012, 08, [arXiv:1206.6374v2 [astro-ph.CO]].
- [4] I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic, Z. Rakic New cosmological solutions in nonlocal modified gravity Operation Research, 2013, 5-6, 550-559, [arXiv:1302.2794 [gr-qc]].
- [5] I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic, Z. Rakic A new model of nonlocal modified gravity Publications de l'Institut Mathematique, 2013, 94, 187 - 196.

Mirko Stojadinović, Faculty of Mathematics, University of Belgrade

„Solving and Generating Large Sudoku Puzzles by Reduction to SAT“

Abstract. Many different computer-based approaches for solving real-world problems (e.g., planning, scheduling, timetabling) exist. If someone improves the efficiency of these approaches in solving instances of puzzles and hard combinatorial problems, then this usually implies faster solving of real-world problems. Therefore, there is a great interest in generating such instances. In the most of the papers studying Sudoku, puzzles of size 9×9 are generated and solving methods are tested on these small-sized puzzles. These puzzles may be challenging for humans, but are solved by many different approaches on contemporary computers in less than 0.1 seconds. One way of solving Sudoku is by reducing to Propositional Satisfiability problem (SAT) [1, 2]. We show that a SAT encoding of Sudoku significantly outperforms two existing approaches when solving puzzles of larger size than 9×9 . We add preprocessing rules to the SAT encoding and improve efficiency of the existing algorithm [3] for generating large Sudoku puzzles. Preprocessing rules speed up solving process only slightly, but they significantly speed up the generating process. The property of generated puzzles is uniqueness of solution and by removing any of the pre-filled numbers this property is lost. Generated puzzles are challenging for the contemporary computers, and new algorithms that use only reasoning for solving these puzzles need to be developed.

Keywords: Sudoku, solve, generate, SAT

References

- [1] W. Klieber, G. Kwon. Efficient cnf encoding for selecting 1 from n objects. In Proc. International Workshop on Constraints in Formal Verification, 2007.
- [2] I. Lynce, J. Ouaknine. Sudoku as a sat problem. In ISAIM, 2006.
- [3] A. Chiu, E. Nasiri, R. Rashid. Parallelization of sudoku. Technical report, University of Toronto, 2012.

Стефан Мишковић, Универзитет у Београду, Математички факултет

„Проблем оптималног распоређивања корисника с приоритетима“

Апстракт: У предложеном проблему је дат скуп корисника и скуп ресурса, као и цене додељивања сваког корисника сваком ресурсу. За сваки пар корисник-ресурс дати су одговарајући приоритети придруживања, при чему се у оптималном случају корисник придружује оном успостављеном ресурсу за којег је вредност приоритета најмања. Број успостављених ресурса мора бити једнак унапред фиксираном броју, а сваког корисника је потребно доделити тачно једном ресурсу тако да је укупна цена придруживања (корисника који су му додељени) неком ресурсу најмања могућа. За дати модел прикатана је основна и робусна формулација, при којој варирају цене придруживања. За решавање проблема предложен је меметички алгоритам, који представља хибридизацију генетског алгоритма и алгоритма заснованог на локалном претраживању. За инстанце које је било могуће решити CPLEX решавачем у разумном временском року, приказано је одговарајуће поређење резултата, а за остале, приказани су резултати меметичког алгоритма.

Radoslav Rajković, Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

Dorđe Stakić, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

„Primena matematičkog modela: višekriterijumska optimizacija u kontejnerskom transportu“

Apstrakt. Kontejnerska revolucija rezultirala je velikim promenama u međunarodnoj trgovini i jedan je od najvažnijih doprinosa globalizaciji svetske ekonomije. U toku poslednjih decenija, postala je najbrže rastući segment tržišta čineći preko 16 % globalne pomorske trgovine po zapremini u 2012. dostigavši vrednost od 155 miliona TEU i 1,58 milijardi tona. [1]

U ovom radu je analizirana intermodalna transportna mreža sa posebnim osvrtom na uvoz kontejnera sa Dalekog Istoka ka Srbiji. Intermodalnu mrežu čine okeanski deo na kome su kontejneri transportovani posredstvom najvećih svetskih brodara i kopneni deo na kome su kontejneri transportovani koristeći različite vidove prevoza. [2]

Osnovni cilj ovog istraživanja je traženje najboljeg rešenja iz niza dopustivih rešenja u smislu više usvojenih kriterijuma: minimalno tranzitno vreme, najniži transportni troškovi i minimalna emisija gasova prilikom prevoza kontejnera od Šangaja do Beograda. U studiji smo razvili multi-objektni optimizacioni model, programiran u MATLAB-u, prikazujući najoptimalniji put za uvoz kontejnera u Srbiju. Razvijeni matematički model nam daje mogućnost posmatranja čitavog opsega rešenja, kao i mogućnost njihovog rangiranja, čijim se odabirom vrši jednostavna selekcija grupe najoptimalnijih rešenja, posmatrajući istovremeno minimizaciju tranzitnog vremena, transportnih troškova i emisije gasova. [3]

Model odgovara različitim zahtevima kupaca obzirom da neki zahtevaju niže troškove transporta, dok su drugi orijentisani na minimizaciju i brže vreme isporuke, uzimajući u obzir sve važnije pitanje održivosti životne sredine, minimizacijom emisije gasova. Matematički model veliku primenu nalazi u praksi, čijom jednostavnom primenom transportne kompanije mogu pratiti konstantne promene na tržištu sa posebnim osvrtom na održivost ekosistema.

Ključne reči: kontejnerski transport; višekriterijumska optimizacija; matematički model.

Bibliografija

- [1] Review of Maritime Transport: UNCTAD/RMT/2013, United National Publication Sales no. E.13.II.D.9, ISBN 978-92-1-112872-7, e-ISBN 978-92-1-054195-4, ISSN 0566-7682.
- [2] **R. Rajkovic, N. Zrnica, Đ. Stakić, B. Mahnić.** The Costs of Container Transport Flow Between Far East and Serbia Using Different Liner Shipping Services, Proceeding of the 11th International Conference on Logistics and Sustainable Transport, 2014, Celje, Slovenia.
- [3] **R. Rajkovic, N. Zrnica, Đ. Stakić.** Application of Mathematical Model for Container Transport Flow of Goods: from Far East to Serbia, Proceeding of the International Conference on Industrial Logistics, 2014, Brac, Croatia, 159 - 166.

Dragan Vidaković, Gimnazija Ivanjica

Duško Parezanović, Gimnazija Ivanjica

„Zaštita integriteta podataka u praksi“

Apstrakt. Integritet i tajnost podataka se najbolje štite sopstvenim alatima. Da bi alati bili kvalitetniji potrebno je pospešiti interes za kriptografiju. Najbolji put za to je kodiranje kriptografskih algoritama. To je razlog što smo odlučili, u ovom radu, da prikazemo digitalni potpis poruke.

RSA i Elliptic Curve Cryptography-ECC su vodeći kriptosistemi javnog ključa. U osnovi RSA je problem faktorisanja velikog celog broja koji je proizvod dva prosta broja. Kako postoji subekspencijalan algoritam koji ga rešava potrebno je, za veću sigurnost, uzeti veći broj. To zahteva veću upotrebu svih resursa (energija, memorija...) što ne odgovara modernim telekomunikacijama (bežičnim (senzorskim) mrežama...).

ECC se zasniva na teško rešivom problem nalaženja diskretnog logaritma na eliptičnoj krivoj. Pošto ne postoji subekspencijalan algoritam koji ga rešava a zahteva i značajno manje resursa National Security Agency-NSA [1] je preporučila zamenu RSA sa ECC.

Pored efektivnog potpisivanja poruke, upoređićemo i vremena potrebna za postizanje istog nivoa sigurnosti. Ukazaćemo na mogućnost skraćivanja vremena generisanje velikog prostog broja što je od značaja za oba kriptosistema. Pošto se potpisuje hash vrednost poruke priložićemo izvorni kod za SHA-1 što može biti inspirativno za one koji žele da počnu da se bave kriptografijom.

Ključne reči: Kriptosistemi javnog ključa; Digitalni potpis; Poređenje

Bibliografija

[10] **National Security Agency – NSA.** The Case for Elliptic Curve Cryptography, (pristup 22.08.2014.g.) dostupno na http://www.nsa.gov/business/programs/elliptic_curve.shtml

Đorđe Baralić, Matematički institut SANU, Beograd

„Cinderella - istraživanje, popularizacija i vizuelizacija matematike“

Apstrakt. Cinderella je matematički softver za dinamičku geometriju koji omogućava simuliranje eksperimenata u fizici i astronomiji, radu sa algoritmima i grafovima, kao i brojne druge matematičke alate. Prevažodno ga karakteriše jednostavnost za korišćenje, a u kombinaciji sa naprednijim matematičkim idejama moguće je realizovati veoma interesantne eksperimente, animacije i na jedan kreativan način koristiti za istraživanje i vizuelizaciju u matematici kao i njenu širu popularizaciju

Ključne reči: Cinderella; matematika; vizuelizacija; animacija; popularizacija.

Bibliografija

[1] Đ. Baralić, V. Vranić. Cinderella - način da vidimo apstraktnu matematiku. In: D. Jakanović and M. Pikula (eds.), *Proceedings of Third Mathematical Conference of the Republic of Srpska, Trebinje*, 2014, Vol. 2, pp. 69–78.

[2] J. Richter-Gebert, U. Kortenkamp. *The Cinderella. 2 Manual Working with The Interactive Geometry Software.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.

Manuela Muzika Dizdarević, Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo

Rade T. Živaljević, Matematički institut SANU, Beograd

„Simetrična popločavanja tribonima i Gröbnerove baze“

Apstrakt. U ovom radu je primjenjena teorija Gröbnerovih baza na rješavanje problema signed popločavanja ograničenih regiona u heksagonalnoj rešetki u ravni koja su invarijantna u odnosu na djelovanje grupe rotacija za ugao od 120° . Unaprijeđen je poznati rezultat Conwaya i Lagarias o signed popločavanju tribonima trougaonog regiona T_N u kojem se tvrdi da je popločavanje moguće ako i samo ako je $N = 9r$ ili je $N = 9r + 8$ pri čemu je r nenegativan cio broj. Ovdje pod tribonom smatramo tri vezane susjedne ćelije u heksagonalnoj rešetki. Problem popločavanja regiona u ravni sveli smo na algebarski problem pripadnosti polinoma odgovarajućem polinomijalnom idealu. Pri rješavanju problema pripadnosti idealu

koristili smo rezultate Gröbnerove teorije prilagođene za prstene polinoma nad domenima jedinstvene faktorizacije, što je u konkretnom slučaju prsten cijelih brojeva \mathbb{Z} . Tako smo pokazali da je signed popločavanje tribonima trougaonih regiona $T_N = T_{3k-1}$ i $T_N = T_{3k}$ u heksagonalnoj rešetki, simetrično s obzirom na rotaciju za ugao od 120° , moguće ako i samo ako je $N = 27r - 1$ ili je $N = 27r$ za neki cio broj $r \geq 0$.

Ključne reči: Popločavanje; Gröbnerova baza; tribon.

Manuela Muzika Dizdarević, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Sarajevo
Marinko Timotijević, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science,
University of Kragujevac

Rade Živaljević, Mathematical Institute SASA, Belgrade

„Signed polyomino tilings by n -in-line polyominoes and Gröbner bases“

Abstract. Conway and Lagarias observed that a triangular region $T(m)$ in a hexagonal lattice admits a *signed tiling* by three-in-line polyominoes (tribones) if and only if $m \in \{9d - 1, 9d \mid d \in \mathbb{N}\}$. We apply the theory of Gröbner bases over integers to show that $T(m)$ admits a signed tiling by n -in-line polyominoes (n -bones) if and only if $m \in \{dn^2 - 1, dn^2 \mid d \in \mathbb{N}\}$.

Keywords: polyominoes, polynominals, ideal, Gröbner bases, remainders.

References

- [1] A. Barvinok. Integer Points in Polyhedra. *European Mathematical Society*, 2008.
- [2] M. Beck, S. Robins. Computing the Continuous Discretely. *Springer*, 2007.
- [3] T. Becker, V. Weispfenning. Gröbner Bases. *Springer-Verlag, New York*, 1993.
- [4] O. Bodini, B. Nouvel. Z-Tilings of Polyominoes and Standard Basis, In Combinatorial Image Analysis. *Springer*, 2004, 137-150.
- [5] J.H. Conway, J.C Lagarias. Tiling with Polyominoes and Combinatorial Group Theory. *Journal of Combinatorial Theory*. Series A 53, 1990, 183-208.
- [6] D. Cox, J. Little, D. O’Shea. Ideals, Varieties and Algorithms. *Third Edition, Springer-Verlag, New York*, 2007.
- [7] D. Cox, J. Little, D. O’Shea. Using Algebraic Geometry. *Second Edition, Springer-Verlag, New York*, 2005.
- [8] D. Fuchs, S. Tabachnikov. Mathematical Omnibus. *Thirty Lectures on Classic Mathematics*, A.M.S., 2007.
- [9] S.W. Golomb. Polyominoes: Puyyles, Patterns, Problems and Packings. *Princeton Univ. Press*, 1996.
- [10] M. Muzika Dizdarević, R.T. Živaljević. Symmetric polyomino tilings, tribones, ideals and Gröbner bases. *arXiv:1407.2015* [math.CO].
- [11] D. Lichtblau. Revisiting strong Gröbner bases over Euclidean domains. *Wolfram Library Archive* <http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/7522>.
- [12] M. Reid. Tile Homotopy Groups. *L’Enseignement Mathematique* 49, 2003, no.1-2, 123-155.
- [13] B. Sturmfels. Algorithms in Invariant Theory. (2en ed.) *Springer*, 2008.
- [14] W. Thurston. Conway’s Tiling Groups. *Amer. Math. Mounthly* 97, 1990, 757-773.

Branko Malešević, Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

Luka Milinković, Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

„Verižni razlomci i primene“

Apstrakt. U radu će se prikazati neki elementi teorije aproksimacija realnih brojeva razlomcima. Posebno će se razmatrati racionalne aproksimacije realnih brojeva u obliku verižnih i međuverižnih razlomaka. Na osnovu tih reprezentacija izložiće se primene aproksimacija verižnim i međuverižnim razlomcima na neke poznate i na neke nove primere u akustici, mehanici, astronomiji i kriptografiji.

Ključne reči: Realni brojevi, racionalne aproksimacije, verižni i međuverižni razlomci.

Кatica R. (Stevanović) Hedrih, Математички институт SANU, Београд; Универзитет у Нишу, Машињски факултет

„Апроксимативно феноменолошко преликавање“

Апстракт: Уводни део приказује најзначајније дело Мhаила Петровића, комплексну теорију: “Елементи математичке феноменологије”, а са посебним освртом на већи број примера различитих аналогија међу моделима или динамикaма система у различитим научним областима. Те аналогије су: квалитативне аналогије, математичке аналогије, као и додатно структурне аналогије, а на примерима из теорије еластичности, динамике крутих тела и дискретних система, осцилација мeханичких и електричних система фракционог реда, осцилације хибридниh система. Дају се теореме о промени укупне енергије система фракционог реда и везе са генералисаном функцијом дисипације енергије фракционог реда.

Главни део излагања је усмерен на теорију и примене апроксимативног феноменолошког преликавања у локалној околини сингуларних или стационарних стања нелинеарних динамика система са већим бројем истиh.

Указано је на линеарно и нелинеарно апроксимативно преликавање феномена нелинеар динамике и методологију испитвања дејстава нелинеарних феномена локалним апроксимативним феноменолошким преликавањем својстава сингуларне динамике.

Кроз наведене примере, указује се на фундаментални значај дела Мhаила Петровића, комплексну теорију: “**Елементи математичке феноменологије**” за интеграцију научних сазнања у различитим областима наука, самерљив са теоријом стабилности Лјapunова. Истиче се значај ове теорије као могуће базе за стварање “**минималних**” **зajедничких основних програма универзитетских студија** природно-математичких и техничких наука, на којима би се градили виши степени усмерених студија природних наука или техничких наука.

На крају би се приказао и садржај **Специјалног броја Elsevier-овог часописа Non-Linear Mechanics**, који је у фази припреме за штампу, а посвећен овој теорији Мhаила Петровића. Предавач је позвани гост уредник тог специјалног броја часописа.

Даниел А. Романо, Педагошки факултет, Универзитет у Источном Сарајеву

„Коначно квази-регуларне релације“

Апстракт. Квази-регуларне и дуално квази-регуларне релације овај аутор је увео и анализиране су 2013. године. У овом тексту уведен и анализиран је концепт 'коначно дуалних квази-регуларних релација'.

II SEKCIJA: MATEMATIKA I INFORMATIKA U OBRAZOVANJU

Miodrag Mateljević, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

„Fragmenti razmatranja – površina, zapremina, dužina, geometrijske nejednakosti“

Apstrakt: U geometriji se definiše površina figura kao što su trougao, pravougaonik, mnogougao. Ako imamo neku figuru koja se može rastaviti na konačan broj trouglova (takve figure nazivaju se elementarne), tada je njena površina jednaka zbiru površina trouglova (aditivnost površine). Ali, šta je površina figure ordinatnog skupa funkcije $y = x^2$ nad $[0,1]$ (površina parabole) ili uopšte šta je površina skupa $Ord(f)$ pozitivne funkcije $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$?

Kako ordinatni skup nije elementaran i ne može se rastaviti na konačan broj trouglova, prirodno je postaviti pitanje: Kako za ovakve figure definisati i izračunati površinu. Prvo razmatramo Arhimedovu ideju za izračunavanje površine parabole. Dalji razvoj Arhimedove ideje omogućava da izračunamo površine kupe, piramide i torusa. Takođe razmatramo pojam integrala i primitivne funkcije kao i nejednakosti vezane za dužinu i površinu figura (izoperimetrijski problem).

Navedimo samo jedan specijalni izoperimetrijski problem (Geringov problem). Ovaj problem rešio sam 1975: Ako su γ i γ_0 ulančane krive u \mathbb{R}^3 na rastojanju I , dokazati da je dužina svake od ovih krivih najmanje 2π .

Rešenje ovog problema ima veze sa logom IMU (Internacionalne matematičke unije) (videti takođe Borromean prsten).

Ksenija Simić-Muller, Pacific Lutheran University Tacoma, Washington, Sjedinjene Američke Države

„Učenje matematike kroz vizuelne i fizičke modele: nekoliko primera“

Apstrakt. Znanje matematike pre svega podrazumeva konceptualno razumevanje materijala. Ako učenici ne razumeju značenje ideja koje uče, biće im otežano i korišćenje procedura koje iz tih ideja proizilaze, a i dalje napredovanje u matematici. Da bi stekli konceptualno razumevanje, učenicima treba pružiti priliku da sami konstruišu matematičko znanje pre nego što nauče procedure. Pristup koji je često zastupljen u Sjedinjenim Američkim Državama je korišćenje modela, bilo vizuelnih ili fizičkih; oni se lako mogu crtati ili praviti, ali se takođe mogu koristiti i već postojeći kompjuterski programi. Jedan od resursa dostupnih korisnicima bilo gde u svetu je web stranica pod imenom National Library of Virtual Manipulatives, koja sadrži modele i prpratne aktivnosti za sve nivoe i oblasti školske matematike. U ovom radu će se predstaviti mogućnosti koje ovaj resurs pruža kroz primere primerene osnovnoj i srednjoj školi, od sabiranja decimalnih brojeva, do rešavanja linearnih jednačina i rastavljanja polinoma na činioce. U svim primerima će se posebna pažnja pokloniti konceptualnom razumevanju koje vizuelni i fizički modeli omogućavaju.

Ključne reči: matematičko obrazovanje; konceptualno razumevanje; vizuelni modeli; fizički modeli.

Небојша Васиљевић, Министарство трговине, туризма и телекомуникација

„Улога програмирања у општем образовању“

Апстракт: У све више земаља рачунарство, укључујући елементе програмирања, постаје обавезан део општег образовања. Претходни талас укључивања програмирања у образовне системе многих земаља десио се крајем седамдесетих и почетком осамдесетих година, након појаве кућних рачунара. На почетку ћемо поставити питање зашто је први талас био неуспешан и да ли уз другачији приступ ипак има смисла програмирање сврстати у општеобразовни садржај. Затим ћемо, кроз низ практичних примера, покушати да изведемо закључак да постоји јасан општеобразовни слој у знању програмирања и одговарајући методолошки приступ учењу програмирања који није оријентисан превасходно према потенцијалним будућим програмерима.

Nives Baranović, Filozofski fakultet u Splitu

„Potencijal jednog zadatka izveden na temelju Talesovog teorema o proporcionalnim dužinama“

Апстракт. Talesov teorem o proporcionalnim dužinama u nastavi matematike uvodi se pred kraj osnovne škole, najčešće tako da se do formalnog zapisa dolazi intuitivno na temelju mjerenja i uspostavljanja odgovarajućih proporcija, bez strogog dokazivanja, a zatim se primjena teorema uvježbava na odgovarajućim, ali vrlo sličnim zadacima. Nakon toga, ovisno o vrsti srednje škole, Talesov teorem i njegov obrat uvode se (u 1. razredu) formalno, ali na različite načine te se formalno i dokazuje.

Međutim, Talesov teorem iako naočigled jasan, učenicima ostaje nejasan te iako važan, vrlo brzo ga zasjene teoremi o sličnosti trokuta, koji postaju dominantno sredstvo u rješavanju brojnih zadataka. Događa se da pojedini učenici i Talesov teorem dokazuju primjenom sličnosti te se brzo nađu u začaranom krugu razmišljanja Talesovog teorema i teorema o sličnosti trokuta.

Pri rješavanju brojnih zadataka često se naglasak stavlja na određivanje neke veličine iz postavljene proporcije, a zatim se nižu slični zadaci u svrhu uvježbavanja istog. Umjesto da se, kada je jedan zadatak već riješen, sagledavaju i druge mogućnosti istog zadatka, kao i zadavanje istog zadatka na općenitijoj razini kako bi crpili što više njegovih potencijala, te različita znanja povezivali u funkcionalnu cjelinu.

Cilj ovog rada je ukazati na određene nejasnoće koje se javljaju pri obradi Taleovog teorema te usmjeriti pozornost na mogućnosti višestrukog iscrpljivanja jednog zadatka.

Кључне речи: Talesov teorem; obrat teorema; cirkularno razmišljanje; potencijal zadatka.

Драгана Станојевић, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, Београд

„Иницијални тестови знања за ученике у основној школи“

Апстракт. У раду су представљени иницијални тестови знања за ученике IV, VI и VIII разреда основне школе. Описана је методологија припреме тестова, упутстава за прегледање и упутстава за реализацију тестирања. Приказани су резултати пробног тестирања, које је реализовано у мају месецу 2014. године на пригодном узорку и резултати анкете коју су ученици попуњавали у вези са ставовима о тесту и математици уопште. Тестирање је спроведено у свим основним школама у Републици у септембру 2014. године.

Кључне речи: иницијални тестови; ученичка постигнућа; методологија тестирања

Библиографија

- [11] **R. C. Anderson**, How to Construct Achievement Tests to Assess Comprehension, *Review of Educational Research*, 1972, 42, 145-170.
- [12] **Ђ. Ђорђевић**. *Планирање израде теста и знања*. Београд: Савез друштва психолога Србије, 1986.
- [13] **N. K. Ross**. *Item writing for tests and examinations*. Paris: UNESCO, 2005.

Milena Marić, Deveta beogradska gimnazija „Mihailo Petrović Alas“

„Primena automatskih dokazivača teorema u nastavi geometrije u srednjoj školi“

Апстракт. У оквиру овог рада биће представљена паралелна анализа аутоматских доказивача теорема интегрисаних у системима за динамичку геометрију Geogebra 5 и система GCLC. Посебан осврт биће на томе како се доказивачи могу применити у настави геометрије у средњој школи. Излагање се базира на анализи примене аутоматских доказивача на решавање задатака из збирке за први разред средње школе. Један број задатака се директно може решити применом аутоматских доказивача, на поједине задатке се делимично могу применити доказивачи, док се на неке од задатака из збирке доказивачи уопште не могу применити. У оквиру рада смо анализирали разлоге због којих се појавило раслојаванје задатака у поменуте три групе. Са обзиром на то да аутоматски доказивачи могу да решавају само проблеме конструктивног типа, приликом њихове примене на решавање геометријских проблема значајну улогу игра реформулација задатка у облику конструкције. Један од занимљивих резултата ове анализе јесте да се аутоматски доказивачи изузетно једноставно могу применити на задатке који се свде на доказивање колонеарности тачака, подударности дужи, док се задаци који зависе од распореда тачака не могу решавати на овај начин, потешкоће се јављају и код провере једнакости углова јер се уместо једнакости користи подударност углова.

Кључне речи: Аутоматски доказивачи теорема, настава геометрије у средњој школи, GeoGebra, GCLC.

Библиографија

- [1] Z. Kovács. The portfolio prover in GeoGebra 5. Proceedings of the 10th International Workshop on Automated Deduction in Geometry (ADG 2014) University of Coimbra, Portuga, 2014.
- [2] I. Petrović, Z. Kovács, S. Weitzhofer, M. Hohenwarter, P. Janičić. Extending GeoGebra with Automated Theorem Proving by using OpenGeoProver. CADGME 2012 conference in Novi Sad, Serbia, 2012.
- [3] M. Marić, P. Janičić. Using GCLC System and its Theorem Provers for Teaching Geometry. CADGME 2012 conference in Novi Sad, Serbia, 2012.
- [4] Ž. Ivanović, S. Ognjanović. MATEMATIKA - Zbirka zadataka i testova za I razred gimnazija i tehničkih škola. Krug, Beograd, 2008.

Igor Banjac, Београдска пословна школа

„Појам елипсе у средњошколској настави математике“

Апстракт. Иако појам елипсе важи за стандардан у средњошколском образовању гимназија у Србији, искуство говори да то није случај, што је дошло до изражаја на овогодишњем Државном такмичењу из математике. Велики број ученика појам елипсе не види као геометријски појам, а приликом покушаја геометријског размишљања често се на основу тога да ли тврђење важи за круг закључује аналогно и за елипсу. Овај проблем није везан само за ученике гимназија, пошто се задаци који садрже појам елипсе често јављају и на пријемном испиту за факултете у Србији. Међутим, и ти задаци се обично свode на познавање и примену једне формуле, те је са становишта ученика често и пожељно да елипсу не посматрају као геометријски објекат.

Циљ рада је да укаже на овај проблем и представи тврђења која је аутор користио да подстакне ученике да у овој области размишљају и геометријски и алгебарски, као и да им укаже на сличности и разлике круга и елипсе.

Кључне речи: елипса, круг, целобројна реšetка

Библиографија

[14] **I. Niven, H. S. Zuckerman.** Lattice Point Coverings by Plane Figures. *American Mathematical Monthly*, 1967, Vol. 74 No. 4, pp. 353-362.

[15] **R. Honsberger.** *Mathematical Morsels*, The Mathematical Association of America, 1978.

[16] **J. Kečkić.** *Математика* (са збирком задатака) за 3. разред средње школе, Завод за удџбенике и наставна средства, Београд, 2010.

[4] Математичка такмичења средњошколца у Србији 2013/14, билтен, Друштво математичара Србије, 2014.

Петар Огризовић, Гимназија „Руђер Бошковић“, Београд

„Основни геометријски објекти против скупова тачака“

Апстракт. У раду је анализиран важећи наставни план предмета математика за пети разред основне школе у Републици Србији. Начињен је осврт на обим предвиђених садржаја, а посебно је сагледано увођење основних појмова из геометрије.

Током претходних деценија, у оквиру образовних реформи, начињене су измене у плану за пети разред, неки садржаји су уклоњени, а неки су претрпели мање измене. Тако је, на пример, тема „Скупови тачака“ преименована и сада се зове „Основни геометријски објекти“. Чини се да је ово урађено са намером да се избегне скуповна нотација у геометрији. Ипак, детаљном анализом уџбеника (које су одобрили Министарство просвете и Национални просветни савет) може се доћи и до другачијих закључака.

Циљ рада је да се наставницима математике у основним школама скрене пажња на недоследности у важећем наставном плану као и у уџбеницима за пети разред, и да се покрене дискусија на тему сагледавања геометријских објеката као скупова тачака.

Кључне речи: наставни планови, основни геометријски објекти, скупови тачака.

Петар Мелентијевић, Универзитет у Београду, Математички факултет

Милан Живановић, Висока школа струковних студија за образовање васпитача
Крушевац

„Трагом једног задатка о векторима“

Апстракт. Метода решавања проблема на више начина је једна од најпродуктивнијих метода учења математике. О њеном значају афирмативно се изјашњавао и један од најутицајнијих аутора из области наставе математике прошлог века Ђерђ Поја. Поред изузетног утицаја на развој мисаоних операција и математичког мишљења, ова метода је корисна и због откривања веза између различитих математичких области. Знања добијена на тај начин су трајнија и лакше се увиђа њихова применљивост у другим ситуацијама. У овом раду поменутој методи ћемо обогатити још једним конкретним примером из теорије вектора у средњошколској настави.

Кључне речи: вектори; правилан петоугао; решавање проблема на више начина.

Библиографија

[17] З. Лучић. *Огледи из историје античке геометрије*, Службени гласник, Београд, 2009.

[18] В. Стојановић. *Математископ 3*

[19] Ђ. Паунић. *Правилни полигони*, ДМС, Београд, 2006.

Ivana Đokić, Fifth School of Economics “Rakovica”, Belgrade

Milena Životić Pić, Fifth School of Economics “Rakovica”, Belgrade

Lilian Wieser, University of Applied Arts, Vienna, Austria

„Coding and decoding crocheting patterns of Regular Polygons“

Abstract. Crocheting patterns have algorithms in it’s core. During our exploration of algorithms for crocheting Regular Polygon Shapes we realized the importance of visualization prior to crocheting, since drawing or imagining is not enough for students. This paper is dedicated to coding of algorithms and animations of crocheting mathematical models. We made a general formula for crocheting perfect regular polygon with n sides. Using Processing programming language, we made an animation of making a perfect polygon, iteration by iteration. It serves as help for students for perceiving sort of tessellation, since one can see the polygons spreading through a plane in a special, concentric form. Since we strongly believe that each moment in the process of making is important, our aim is not automatization of a crocheting. In this paper we are also, at the end, emphasizing the importance of manual work and handcraft from different perspectives - cognitive, psychological and physiological.

Ivan Obradović, Ranka Stanković, Marija Radojičić, Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet

„OER obrazovni sadržaji kao spona između akademskog i preduzetničkog znanja“

Apstrakt. Cilj ovog rada je da ukaže na mogućnosti i prednosti koje nude slobodni obrazovni materijali (Open Educational Resources - OER), kao i da ponudi koncept sistema koji omogućava njihovo kreiranje, publikovanje i pretraživanje. Koncept se razvija u okviru Tempus projekta "Spajanje akademskog i preduzetničkog znanja kroz tehnološki potpomognuto učenje" (Blending Academic and Entrepreneurial Knowledge in Technology Enhanced Learning - BAEKTEL) u koji je uključeno šest univerziteta sa Zapadnog Balkana, tri iz Evropske unije i dve vodeće privredne kompanije. Jedan od osnovnih zadataka projekta je da se kreira međuuniverzitetska mreža repozitorijuma koji će sadržati različite vidove slobodno dostupnih obrazovnih sadržaja u elektronskoj formi, poput elektronskih kurseva, prezentacija, udžbenika, skripti, video obrazovnih sadržaja i drugih obrazovnih resursa. Biće predstavljena edX platforma koja omogućava kreiranje ovakvih sadržaja sa posebnim osvrtom na didaktičke zahteve koji se postavljaju pred kreatore obrazovnih materijala. Svi obrazovni sadržaji u okviru mreže biće opisani pomoću metapodataka, a njihovo pretraživanje biće omogućeno na portalu projekta. U radu će biti opisani i neki drugi značajni ciljevi projekta kao što su korišćenje pomenutog koncepta za uspostavljanje veze između teorije i prakse, osavremenjivanje i prilagođavanje nastavnih sadržaja, kao saradnju između visokoobrazovnih institucija i kompanija iz privrede.

Gljučne reči: OER, elektronski obrazovni materijali, edX, elektronsko učenje.

Valentina Kostić, Gimnazija Pirot

Tanja Sekulić, Visoka tehnička škola strukovnih studija, Zrenjanin

„Učenje po Poljinim principima u GeoGebra okruženju“

Apstrakt. GeoGebra je softver koji se sve više primenjuje u nastavi i učenju matematike. Zbog dvostrukog prikaza matematičkih objekata, algebarskog i geometrijskog, GeoGebra je moćan kognitivno-vizuelni alat. Njeno vizuelno, dinamično i interaktivno okruženje pruža široki spektar mogućnosti u objašnjavanju, istraživanju i modeliranju matematičkih koncepata i njihovih međusobnih odnosa. Poljin model rešavanja problema i principi heurističke nastave su kompatibilni sa GeoGebrom. Primenom ovog edukativnog softvera, uz adekvatna didaktičko-metodička rešenja, nastavnik može da kreira okolinu za učenje koja podstiče i usmerava učenike da istražuju, otkrivaju i kroz sopstveno iskustvo dolaze do novih saznanja. U radu je prikazana mogućnost didaktičkog oblikovanja koncepta lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije u GeoGebri, po Poljinim principima. Dinamički radni listovi, koje prikazujemo, pripremljeni su tako da učenici mogu samostalno da istražuju i kreiraju svoj put kojim dolaze do novih saznanja.

Gljučne reči: GeoGebra; vizuelizacija; Poljin model rešavanja problema; ekstremne vrednosti.

Јована Јездимировић, ГеоГебра Центар Београд
Славиша Радовић, ГеоГебра Центар Београд
Мирослав Марић, Универзитет у Београду, Математички факултет
„ГеоГебром кроз свет математике“

Апстракт. У овом раду ће бити приказани резултати истраживања о ставовима и професионалним компетенцијама наставника математике за коришћење ИКТ-а у наставном процесу. Спроведена су квалитативна и квантитативна испитивања везана за улогу наставника у традиционалној и е-настави као и употребу ИКТ-а и програмског пакета ГеоГебра на часовима математике. Истраживања имају за циљ да покажу на који начин и у којој мери су разлике у ставовима наставника о природи подучавања, уверења о ефикасној наставној пракси и коришћењу традиционалних и/или савремених ИКТ наставних средстава међусобно повезане, као и која врста професионалног усавршавања је наставницима математике најпотребнија.

Кључне речи: ГеоГебра; ИКТ; наставници математике.

Татјана Станковић, **Марјана Мартинов-Переги**, **Јелена Миљић**, Електротехничка школа “НиколаТесла”, Панчево

„Математика - да знам, да разумем и да удем“

Апстракт. Искуство нам указује на то да велики број ученика поседује процедурално (алгоритамско), али не и концептуално односно функционално знање математике. Да би ученици стекли и концептуална односно функционална знања неопходно је креирати наставна окружења која ће од ученика захтевати лично ангажовање и примену стеченог знања приликом решавања практичних проблема у различитим контекстима. У раду је описан атипичан методолошки приступ настави математике приликом обраде наставних јединица које се односе на примену метода решавања система линеарних једначина. Приказано је како су ученици првог разреда средње стручне школе (ЕТШ “Никола Тесла”, Панчево) решавајући практичне проблеме у оквиру наставе Математике, Основа електротехнике, Програмирања, Рачунарства и информатике, паралелно усвајали знања из ових дисциплина тј. овладали различитим методама решавања система линеарних једначина решавањем проблема из свакодневног живота, али и стручних проблема (применом Кирхофових правила), програмирањем у Free Pascal-у, радом у Геогебри и EWB-у (Electronic Workbench вер.5.12.), како су ова стечена знања применили у струци приликом анализе теоријских и практичних резултата добијених симулацијом експеримената. Овакав приступ настави превазилази традиционалне оквире базиране на корелацији међу предметима и додатно мотивише ученике да активно учествују у процесу стицања знања.

Кључне речи: активно учење, функционално знање, образовни софтвер, системи линеарних једначина

Зорица Маринковић, Земунска гимназија

„Мала збирка опасних задатака“

Апстракт. “ Мала збирка опасних задатака “ је резултат истраживања ученика првог разреда Земунске гимназије на тему присутности математике у свакодневном животу, а у оквиру наставне теме Пропорционалност.

Збирка се састоји од 13 одабраних задатака чији је садржај везан за тумачење упутстава на амбалажи, рачунање попушта на рекламираним производима, језичке недоумице и слично. Решења ових задатака су понекад смешна и зависе од тумачења текста, некада нису могућа али се у сваком од њих могу пронаћи и дискутовати на први поглед споредни параметри: какав је хемијски састав, зашто је неки текст писан ситним словима, да ли је могуће купити чарапе на комад, да ли је цена прихватљивија ако се завршава цифром 9, како платити тачан износ и слично.

Дошли смо до интересантних закључака, као на пример да је снижење и веће него што пише на реклами или да не постоје одговарајуће новчанице којима бисмо могли платити тачан износ. Овакав начин учења је изузетно користан јер кроз интердисциплинарност развија критичко мишљење и трансверзалне компетенције, материјал који се користи доступан је свим ученицима и може се употребити на различитим нивима, од инклузивног образовања до врло сложених истраживања.

Кључне речи: проценат, пропорција, трансверзалне компетенције

Библиографија

[20] **Stanislaw Schukajlow and André Krug**, Do Multiple Solutions Matter? Prompting Multiple Solutions, Interest, Competence, and Autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2014, 45, 497 - 533.

[21] **Timo Tossavainen**, Three theories and a teaching model - Tools for better teaching, Summer University and Experience Workshop, 13 July 2013 - 25 July 2013 Hungary, Eger, EKF

III СЕКЦИЈА: НАУЧНОИСТРАЖИВАЧКИ И СТРУЧНИ РАД СТУДЕНАТА

Pavle V. M. Blagojević, Rheinische Friedrich-Wilhelms Universität Bonn; Freie Universität Berlin; Matematički institut SANU

„Tverberg's theorem strikes back“

Abstract: Many of the strengthenings and extensions of the topological Tverberg theorem can be derived with surprising ease directly from the original theorem: For this we present new proof technique that combines a concept of "Tverberg unavoidable subcomplexes" with the observation that Tverberg points that equalize the distance from such a subcomplex can be obtained from maps to an extended target space.

Thus we obtain simple proofs for many variants of the topological Tverberg theorem, such as the colored Tverberg theorem of Zivaljevic and Vrecica (1992). We also get a new strengthened version of the generalized van Kampen-Flores theorem by Sarkaria (1991) and Volovikov (1996), an affine version of their "j-wise disjoint" Tverberg theorem, and a topological version of Soberon's (2013) result on Tverberg points with equal barycentric coordinates. (joint work with Florian Frick and Günter Ziegler)

Александра Росић, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања

„Ојлеров проблем 36 официра, латински квадрати и универзална алгебра“

Апстракт. У раду су представљени иницијални тестови знања за ученике IV, VI и VIII разреда основне школе. Описана је методологија припреме тестова, упутстава за прегледање и упутстава за реализацију тестирања. Приказани су резултати пробног тестирања, које је реализовано у мају месецу 2014. године на пригодном узорку и резултати анкете коју су ученици попуњавали у вези са ставовима о тесту и математици уопште. Тестирање је спроведено у свим основним школама у Републици у септембру 2014. године.

Кључне речи: иницијални тестови; ученичка постигнућа; методологија тестирања

Библиографија

[22] **R. C. Anderson**, How to Construct Achievement Tests to Assess Comprehension, *Review of Educational Research*, 1972, 42, 145-170.

[23] **Б. Ђорђевић**. *Планирање израде теста и знања*. Београд: Савез друштвава психолога Србије, 1986.

[24] **N. K. Ross**. *Item writing for tests and examinations*. Paris: UNESCO, 2005.

Љубица Михаић, Универзитет у Београду, Математички факултет; Висока технолошка школа струковних студија, Шабац

Александар Пејчев, Универзитет у Београду, Машински факултет

„Оцена грешке Gauss-Lobatto квадратурних формула у односу на Chebyshev-љеве тежинске функције друге, треће и четврте врсте“

Апстракт. У овом раду разматрамо апроксимацију интеграла функције, аналитичке у области комплексне равни која је ограничена елипсом са фокусима ± 1 , у односу на Chebyshev-љеве тежинске функције друге, треће и четврте врсте и са двоструким чвором у крајњој тачки -1 . Испитује се максимум модула језгра у интегралној репрезентацији остатка Gauss-Lobatto квадратурне формуле. Gautschi у [1] експлицитно формулише комплексна језгра као функције три променљиве у односу на четири Chebyshev-љеве тежине при чему је детаљно проучено понашање модула језгра само у случају прве тежине, док су за остале три постављане хипотезе засноване на нумеричким резултатима. Користећи методе сличне онима које су приказане у [2], на елипси је могуће одредити тачан положај максимума модула језгара која одговарају и осталим тежинским функцијама. Због комплексности експлицитног израза, језгро најпре уопштено означимо са $const \cdot \frac{ab}{cd}$, а затим са $const \cdot \frac{AB}{CD}$ вредност језгра у тачки у којој хипотеза тврди да се достиже максимум. Затим, полазећи од неједнакости $\frac{ab}{cd} < \frac{AB}{CD}$, задатак сводимо на испитивање негативности израза $I(\rho, \sigma, n) = abCD - ABcd$. Одређеним трансформацијама израз I постаје полиномијалан по променљивој ρ , па наизменично фиксирајући остале променљиве, анализирајући асимптотско понашање и коефицијенте датог полинома, добијају се резултати који потврђују Gautschi-јеве хипотезе наведене у [1].

Кључне речи: Gauss-Lobatto квадратурне формуле; Chebyshev-љеве тежинске функције; Интегрална репрезентација остатка квадратурне формуле; Оцена грешке.

Библиографија

- [1] W. Gautschi, The remainder term for analytic functions of Gauss-Radau and Gauss-Lobatto quadrature rules with multiple end points, Journal of Computational and Applied Mathematics 33 (1990) 315-329.
- [2] A.V. Pejčev, M.M. Spalević, On the remainder term of Gauss-Radau quadrature with Chebyshev weight of the third kind for analytic functions, Appl. Math. Comp. 219 (2012) 2760–2765.
- [3] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, M.S. Pranić, On the remainder term of Gauss-Radau quadratures for analytic functions, J. Comput. Appl. Math. 218 (2008) 281–289.

Marko Milošević, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

„Hibridizacija biometrijskih metoda u cilju identifikacije osoba“

Apstrakt. Računarska identifikacija osoba je proces kojim mašina dovodi u vezu akcije korisnika sa ranije dostupnim podacima o njemu, u bazi podataka. Naročito je značajna u obezbeđivanju objekata od neautorizovanih upada. U ovom radu je predstavljena mogućnost kombinovanja većeg broja biometrijskih metoda identifikacije osoba sa ciljem prevazilaženja ograničenja pojedinačnih procedura. Predloženi sistem kombinuje prednosti pouzdanosti metode identifikacije pomoću skeniranja otiska prsta sa brzinom izvršavanja i lakoćom implementacije metoda prepoznavanja lica. Automatizovani metod računarske identifikacije prepoznavanjem lica postavljanjem kamera koje ne zahtevaju interakciju korisnika, i u realnom vremenu obrađuju podatke, je moguće kombinovati sa maksimalnom preciznošću analize otiska prsta, kako bi bio otklonjen nedostatak prvog metoda, pouzdanost. Istovremeno se broj slučajeva u kojima korisnik identifikuje vremenski zahtevnim metodom skeniranja otiska prsta svodi na minimum. Rezultati istraživanja pokazuju da je moguće podesiti model algoritma za prepoznavanje lica tako da se u zahtevanoj meri eliminišu slučajevi neopravdane autentifikacije korisnika, uz povećanje broja odbijenih fotografija. Primena metoda analize otiska prsta u takvim specijalnim slučajevima eliminiše nedostatak prvog sistema, bez značajnog rasta prosečnog vremena potrebnog za identifikaciju.

Ključne reči: Identifikacija osoba; prepoznavanje lica; analiza otiska prsta; bezbednost

Irena Milinković, Univerzitet u Beogradu, Fakultet organizacionih nauka

Luka Milinković, Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

„Jedan pristup za formiranje sigurnijih lozinki analizom napada rečnikom“

Apstrakt. Privatnost podataka i pravilan izbor lozinki nije više važan samo za specijalne službe, kao što su vojska i policija, već svakome ko koristi računare, mobilne uređaje, e-mail, elektronsko bankarstvo i druge slične servise. Da bi se tačno definisali uslovi, koji su potrebni da se formira sigurna lozinka neophodno je analizirati, koji je sve napadi mogu ugroziti. Tek nakon toga se pristupa odbrani od takvih napada pravilnim izborom lozinki. U radu je prikazana analiza kriterijuma, predloženih od strane autora, koje treba poštovati pri izboru lozinki da bi one bile otporne na većinu poznatih tehnika napada. Akcenat je stavljen na napad rečnikom, kao jedna od najčešće korišćenih pri nasilnom otkrivanju lozinki. Često pominjano pravilo: „Sigurna je samo lozinka koja se sastoji od cifara, simbola, malih i velikih slova.“ nije jedini uslov za sigurnu lozinku. Čak se može reći da ovo pravilo garantuje formiranje najkomplikovanije lozinke, koju je, nekada, teško i zapamtiti. Postoje i neki drugi uslovi, koji, ako se ispune, mogu da obezbede zahtevanu sigurnost lozinke, koja se ne sastoji od nasumično izabranih karaktera, pa ju je lakše i zapamtiti. Kako doći do ovakve lozinke predstavljeno je detaljnom analizom njihove dužine i skupova karaktera koji se pri tom koriste. Pomoću kombinatorike, preko formula i grafika, biće pokazano da se različitost lozinki ne može opisati samo preko varijacija, već se u računu moraju koristiti i kombinacije.

Ključne reči: Autentifikacija, kombinatorika, lozinke, napad rečnikom, zaštita privatnosti.

Miloš Martinović, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Miodrag Živković, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Đorđe Stakić, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

„Kriptoanaliza šifre E0“

Apstrakt. E0 je algoritam koji se koristi za šifrovanje u okviru standard blutut (Bluetooth). Blutut je standard za bežičnu komunikaciju raznih uređaja, najčešće mobilnih telefona, bežičnih slušalica, štampača, koji omogućava tim uređajima da međusobno komuniciraju. Sama E0 je lančana šifra koja se sastoji od četiri pomeračka registra sa linearnom povratnom spregom različite dužine, koji se kombinuju sa konačnim automatom. U radu se prikazuje i arhitektura bezbedonosnog sistema u okviru standarda blutut.

Specifikacija algoritma za šifrovanje E0 iz rada [25] je programski realizovana, u programskom jeziku C, što je provereno pomoću više test vektora koji su dati u specifikaciji blutut-a verzija 1.1 [3]. U radu se opisuje i realizuje napad na E0, pri čemu se zbog složenosti napada kao celine (2^{85} koraka), realizacija može praktično izvršiti za umanjenu verziju algoritma E0. U kriptoanalizi se bavimo napadom sa poznatim otvorenim tekstom gde se pretpostavlja da je poznata određena količina nešifrovanog teksta a zadatak je da se rekonstuiše ostatak otvorenog teksta koji nije poznat. U konkretnom slučaju, napadu na šifru E0, primenićemo tzv.pretpostavi i odredi napad gde se pretpostavlja inicijalno stanje konačnog automata i sadržaj pomeračkog registra najkrace dužine. Pokazuje se da se nakon rešavanja sistema linearnih jednačina po modulu 2, u 2^{85} koraka dolazi do početnih stanja svih pomeračkih registara šifre E0.

Ključne reči: Kriptoanaliza; Bluetooth; šifra E0.

Bibliografija

[26] **Cristophe De Cannière, Thomas Johansson, Bart Preneel.** Cryptanalysis of the Bluetooth Stream Cipher.

[27] **Ophir Levy, Avishai Wool.** A Uniform Framework for Cryptanalysis of the Bluetooth E0 Cipher.

[3] **Specification of the Bluetooth System, Specification Volume 1.** Version 1.1.

Nikola M. Perić, Khaoticen, Beograd

„PERT metodom do uspešnijeg upravljanja istraživačkim projektima“

Apstrakt. Primene matematike su, danas, brojne, a njena sveprisutnost je na zavidnom nivou i u nauci o upravljanju. Za planiranje i kontrolu vremena potrebnog za realizaciju projekta razvijen je skup metoda iz domena primenjene matematike koje se jednim imenom nazivaju tehnike mrežnog planiranja, a koje se oslanjaju na teoriju grafova. PERT, kao tehnika mrežnog planiranja, najčešće se koristi u upravljanju istraživačkim i razvojnim projektima u oblasti informaciono-komunikacionih tehnologija, sa naglaskom da je primenljiva i na projekte iz drugih naučnih oblasti. Predmet ovog rada je prikaz korišćenja PERT metode, sa aspekta upravljanja projektima, u situacijama kada je nemoguće deterministički odrediti potrebno vreme za realizaciju projekta, već se pribegava probablističkom pristupu.

Ključne reči: PERT metoda; upravljanje vremenom; istraživački projekti; razvojni projekti.

Mladen Vidić, Saobraćajni fakultet Doboj

„Višekriterijumsko odlučivanje metodom AHP – definicija, rešavanje i primene“

Apstrakt. Višekriterijumsko odlučivanje po jednoj ili više ciljnih funkcija ima neprekidnu primenu u realnom životu, u poslovnim primenama i tehnologijama. Matematika je idealan alat za precizno formulisanje i rešavanje zadataka odlučivanja. Praktični problemi odlučivanja se najčešće opisuju u objedinjenoj formi kao zadaci optimizacije jedne ili više ciljnih funkcija uz skup ograničenja definisanih sistemom linearnih (ne)jednačina. Konačan skup vrednosti u \mathbb{R}^n u kojem važe ta ograničenja označavamo P . Definisane skupa ograničenja pomoću sistema linearnih nejednačina često nije dovoljno za praktične zadatke odlučivanja. Ovome se dodaje jedna ili više funkcija $C(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definisane eksplicitno, koje treba pozicionirati u nekom graničnom položaju na skupu dopuštenih rešenja, obično minimizirati ili maksimizirati, na skupu P dopuštenih rešenja određenom ograničenjima. Definisane funkciju sa optimizacijskim uslovom nazivamo *ciljna funkcija*. Ako su ciljne funkcije $C_i(X)$ nelinearnog tipa ili ako im tip argumenata i tip vrednosti nije u skupu realnih brojeva, tada ne možemo primeniti iterativne metode koje generišu niz numeričkih iteracija ka konačnom rešenju. Nepoznata veličina X koja je vektor u \mathbb{R}^n ili matrica u $\mathbb{R}^{m \times n}$ sa dobro odabranom početnom iteracijom X_0 kreće se uvek u tom prostoru rešenja. Moramo koristiti druge metode koje koriste relativne odnose diskretnih vrednosti kriterijuma u odnosu na druge vrednosti ili apsolutnu diskretnu vrednost. Najpoznatija je metoda AHP (eng. *Analytical Hierarchy Process*) koja rešava traženje optimalnog rešenja za postavljeni sistem ograničenja pomoću uzajamnih prioriteta alternativa u odnosu na ciljeve i sistem (nelinearnih) ciljnih funkcija diskretnog i kontinualnog tipa vrednosti za koje znamo samo uzajamne prioritete.

Ključne reči: Višekriterijumsko odlučivanje; AHP; Saaty skala; database pretraživanje;

Bibliografija

- [1] **A. Ishizaka, A. Labib.** Analytic Hierarchy Process and Expert Choice: Benefits and Limitations. *University of Portsmouth, Portsmouth Business School, United Kingdom, 2009*
- [2] **M. Vidić.** Višekriterijumska analiza za izbor softverske tehnologije na primeru SUBP metodom AHP. *Zbornik radova, Infofest, Budva, 2011*
- [3] **E. Forman.** Decision by Objectives: The Analytic Hierarchy Process and Expert Choice. *World Scientific Press, 2001*

Danica Kosanović, Faculty of Mathematics, University of Belgrade

William Amos, Department of Zoology, University of Cambridge

„Modelling Microsatellite Evolution – Are Modern Humans Twice As Old As We Thought?“

Abstract. Microsatellites, or short tandem repeats (STRs), are highly polymorphic DNA sequences. They mutate mainly by gaining and losing repeat units creating a linear random walk called the stepwise mutation model (SMM). However, despite extensive study, the exact mutational process still remains unclear. Under a strict, unbounded SMM, mean repeat number drifts up and down over time and does not lead to a stationary distribution. Exploiting random walk theory, new genetic distance measures were developed based on squared differences in allele length. Two versions, ASD and $(\delta\mu)^2$ distance ([1], [2]) both have expectations that increase linearly with time under the SMM, the former having larger variance. However, direct analysis of mutations suggest a variant of the SMM where longer alleles tend to contract and shorter ones expand (=centrally directed mutation model, CDM). In our study we explore how genetic distances differ between the SMM and CDM. We extend this to re-evaluate Goldstein et al.'s dating of the deepest split in the human lineage. We show that the more realistic CDM models are likely to reduce genetic distances, possibly by a factor of two, pushing back divergence dates relative to the standard SMM.

Keywords: DNA evolution; microsatellites; stepwise mutation model; genetic distances.

References

[28] **Goldstein D.B., Ruiz-Linares A., Cavalli-Sforza L.L., Feldman M.W.**, An evaluation of genetic distances for use with microsatellite loci, 1995a, *Genetics* **139**:463–471.

[29] **Goldstein D.B., Ruiz-Linares A., Cavalli-Sforza L.L., Feldman M.W.** Genetic absolute dating based on microsatellites and the origins of modern humans, 1995b, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **92**:6723–6727.

Vera Miler Jerković, Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

Branko Malešević, Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

„Blok reprezentacija uopštenih inverza“

Apstrakt. U radu će se razmotriti svi oblici uopštenih $\{1, 2, 3, 4, 5, 5^k\}$ inverza u obliku blok matrica. Razmatraće se Moore-Penroseov inverz, Grupni inverz i Drazin inverz. Prikazaće se neki poznati i neki novi rezultati.

Ključne reči: Uopšteni inverz, Moore-Penroseov inverz, Grupni inverz, Drazin inverz.

Валентина Лекић, Банка Интеза, Београд

„Опције и стохастичко моделирање цена акција на берзи“

Миленко Пикула, Универзитет у Источном Сарајеву, Филозофски факултет
Биљана Војводић, Министарство науке и технологије Републике Српске

„Одређивање рјешења граничног задатка оператора типа Штурм-Лиувил са два константна кашњења“

Апстракт. У раду посматрамо гранични проблем оператора типа Штурм-Лиувил са два константна кашњења $L = L(q_1(x), q_2(x), \tau_2, \tau_1)$:

$$ly := -y''(x) + q_1(x)(x - \tau_1) + q_2(x)(x - \tau_2) = \lambda y(x), \lambda = z^2, y(x - \tau_1) \equiv 0, x \in [0, \tau_1].$$

Основни спектрални задаци за класични оператор типа Штурм-Лиувил су у потпуности изучени и главни резултати се могу наћи у [30], док су инверзни проблеми за диференцијалне операторе са кашњењем још увијек недовољно истражени.

Рјешење за посматрани гранични проблем оператора типа Штурм-Лиувил са два константна кашњења, као и асимптотика својствених вриједности, познати су само у случају када за τ_1 и τ_2 вриједи $\tau_1 = k_0 \tau_2$ ([31],[32]). У општем случају поступак конструкције рјешења је знатно сложенији због усложњавања односа између линеарних комбинација кашњења τ_1 и τ_2 , као и због њихових односа у околини π . Због тога прво конструишемо рјешење за гранични задатак оператора са два константна кашњења у случају када за τ_1 и τ_2 вриједи услов $\tau_1 = k_0 \tau_2 + \delta$, $\delta \in (0, \frac{\tau_2}{l_0+1})$, $l_0 \tau_1 \leq \pi < (l_0 + 1)\tau_1$, а затим, користећи овај резултат, конструишемо рјешење у општем случају. Рјешења конструишемо методом узастопних апроксимација.

Затим показујемо да се на основу добијеног рјешења за посматрани гранични задатак и на основу резултата из [33], добија и асимптотика својствених вриједности граничног задатка оператора са два константна кашњења у општем случају.

Кључне речи: гранични проблем; константно кашњење; конструкција рјешења.

Библиографија

[34] G. Freiling, V. Yurko. Inverse Sturm-Liouville problems and their applications, New York, 2008.

[35] М. Пикула, Н. Павловић. Конструкција рјешења граничног задатка са два константна кашњења и асимптотика сопствених вриједности, Proceedings, Third Mathematical Conference of the Republic Srpska, Vol.1, 2014, pp.83-91

[36] М. Пикула, Н. Павловић, Б. Војводић. Први регуларизовани траг граничног задатка типа Штурм-Лиувил са два константна кашњења, Четврта математичка конференција Републике Српске, Требиње, 06-07. јун 2014

Иван Анић, Универзитет у Београду, Математички факултет

„PISA тестирање у Србији“

Бојан Совиљ, Компанија „Mozzart“

„Примена математике у играма на срећу“

Младен Стаменковић, Универзитет у Београду, Економски факултет

„Математичке методе у економији“

Simpozijum MATEMATIKA I PRIMENE, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2014, Vol. V(1)

Tibor Jona, Senior Communications Advisor at KPMG
„Култура комуникације“

Ива Павловић Пушица, Прва економска школа Београд
„Математичке методе у економији“

IV СЕКЦИЈА: 65 година живота и 40 година научног рада професора Миодрага Матељевића

Stevan Pilipović, Department of Mathematics and Informatics, University of Novi Sad
„Convolution, hypoellipticity and ellipticity of some classes of linear and semilinear pseudodifferential equations“

Abstract. In the first part we present the relations of Weyl and Anti-Wick quantization through the convolution while in the second part we present a class of linear and semilinear elliptic equations on spaces of tempered ultradistributions of Beurling and Roumieu type.

The talk is based on the joint papers with Mrcio Cappiello and Bojan Prangoski.

Gradimir V. Milovanović, Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts
„Two Centuries of Gaussian Quadrature Rules“

Abstract. In 1814 Carl Friedrich Gauß (1777-1855) developed his famous method of numerical integration which dramatically improves the earlier method of Isaac Newton (1643-1727) from 1676. Beside the some historical details, in this lecture we present recent progress in this subject (cf, [2]), as well as new important applications of this theory in several different directions. Precisely, we give the construction of several quadratures of Gaussian type with respect to strong non-classical and exotic weight functions which appear in approximation theory, summation of slowly convergent series, fraction calculus, etc. Some interesting applications of such kind of quadratures in summation of series, cubature formulas, statistics, physics, and calculation of the so-called “two-electron repulsion integrals” in computational quantum chemistry, are presented, as well as the corresponding software [1,3].

Keywords: Gaussian quadrature; three-term recurrence relation; weight function; summation of series.

References

1. **A.S. Cvetkovic, G.V. Milovanović.** The Mathematica Package “OrthogonalPolynomials”. *Facta Univ. Ser. Math. Inform.*, 2004, 19, 17 – 36.
2. **G. Mastroianni, G.V. Milovanović.** *Interpolation Processes. Basic Theory and Applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer–Verlag, Berlin, 2008.
3. **G.V. Milovanovic, A.S. Cvetković.** Special classes of orthogonal polynomials and corresponding quadratures of Gaussian type. *Math. Balkanica*, 2011, 26, 169 – 184.

Pavle V. M. Blagojević, Rheinische Friedrich-Wilhelms Universität Bonn; Freie Universität, Berlin, Matematički institut SANU

„On complex highly regular embeddings“

Abstract. A continuous map $C^d \rightarrow C^N$ is a complex k -regular embedding if any k pairwise distinct points in C^d are mapped by f into k complex linearly independent vectors in C^N . Our central result on complex k -regular embeddings extends results of Cohen & Handel (1978), Chisholm (1979) and Blagojević, Lück & Ziegler (2013) on real k -regular embeddings. In this talk we present the following lower bounds for the existence of complex k -regular embeddings
Let p be an odd prime, $k \geq 1$ and $d = p^t$ for $t \geq 1$. If there exists a complex k -regular embedding $C^d \rightarrow C^N$, then $d(k - \alpha_p(k)) + \alpha_p(k) \leq N$. Here $\alpha_p(k)$ denotes the sum of coefficients in the p -adic expansion of k .

These lower bounds are obtained via modified Cohen & Handel (1978) framework and study of Chern classes of complex regular representation. The main technical result, used for the study of the Chern classes, is the following upper bound for the height of the cohomology of the unordered configuration space

If $d \geq 2$ and $k \geq 2$ are integers, and p is an odd prime. Then

$$\text{height} \left(H^* \left(\frac{F(R^d, k)}{\sigma_k}; F_p \right) \right) \leq \min\{p^t : 2p^t \geq d\}.$$

Милош Арсеновић, Математички факултет, Универзитет у Београду

Милољуб Албијанић, Универзитет Сингидунум и ФЕФА

Миљан Кнежевић, Математички факултет, Универзитет у Београду

Марек Светлик, Математички факултет, Универзитет у Београду

„Миодраг Матељевић – вертикала београдске математичке школе“

Апстракт. Излагање на популаран начин одсликава професора Миодрага Матељевића. Приказује његове људске, педагошке и научне вредности. У раду се приказује вертикална повезаност у развоју математике у Србији, од Мике Петровића до Миодрага Матељевића. Мика Петровић је на одређени начин, радом са својим ученицима и докторантима, створио Београдску математичку школу. Та школа изнедрила је разне математичаре и донела напредак у педагошком раду и математичком образовању у Србији. Тој математичкој образовној и научној вертикали припада професор Миодраг Матељевић, дописни члан САНУ.

Кључне речи: математичка београдска школа.

David Kalaj, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Montenegro

„Muckenhoupt weights and Lindelof theorem for harmonic mappings“

Abstract: We extend the result of Lavrentiev which asserts that the harmonic measure and the arc-length measure are A_∞ equivalent in a chord-arc Jordan domain. By using this result we extend the classical result of Lindelöf to the class of quasiconformal (q.c.) harmonic mappings by proving the following assertion. Assume that f is a quasiconformal harmonic mapping of the unit disk U onto a Jordan domain. Then the function $A(z) = \arg(\partial_\varphi(f(z))/z)$ where $z = re^{i\varphi}$, is well-defined and smooth in $U^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$ and has a continuous extension to the boundary of the unit disk if and only if the image domain has C^1 boundary.

Ljubica Velimirović, Faculty of Science and Mathematics University of Niš

„On Infinitesimal Bending Problems“

Abstract. Problem of infinitesimal bending of surfaces is a special part of theory of surface deformation. Surface bending theory considers bending of surfaces, isometrical deformations as well as infinitesimal bending of surfaces and presents one of the main consisting parts of global Differential geometry. On the other hand, infinitesimal bending of surfaces is not an isometric deformation, or roughly speaking it is with appropriate precision. Arc length is stationary under infinitesimal bending.

The first result at the surface bending theory belongs to Cauchy. He has proved that closed convex polyhedrons are rigid. Later, 1838, F. Minding gave hypothesis that the sphere is rigid. Liebman 1899 confirms this hypothesis. The next contributions to the bending theory belongs to D. Hielbert, H Weil, Blaschke, Cohn-Vossen, A. D. Alexandrov, N.V. Efimov, A. V. Pogorelov, V. T. Fomenko, I. Kh. Sabitov, R. Connelly, R. Bishop, H. Stachel.

The shape (Old English: gesceap, created thing) of an object located in some space is a geometrical description of the part of that space occupied by the object, as determined by its external boundary - abstracting from location and orientation in space, size, and other properties such as colour, content, and material composition. In Geometry, two subsets of an Euclidean space have the same shape if one can be transformed to the other by a combination of translations, rotations (together also called rigid transformations), and uniform scalings. In other words, the shape of a set of points is all the geometrical information that is invariant to translations, rotations, and size changes. Having the same shape is an equivalence relation, and accordingly a precise mathematical definition of the notion of shape can be given as being an equivalence class of subsets of a Euclidean space having the same shape. A more flexible definition of shape takes into consideration the fact that we often deal with deformable shapes in reality, (e.g. a person in different postures, a tree bending in the wind or a hand with different finger positions). By allowing also isometric (or near-isometric) deformations like bending, the intrinsic geometry of the object will stay the same, while sub-parts might be located at very different positions in space. This definition uses the fact that, geodesics (curves measured along the surface of the object) stay the same, independent of the isometric embedding. This means that the distance from a finger to a toe of a person measured along the body is always the same, no matter how the body is posed.

Comparisons play an important role in many scientific areas. When comparing one surface to another, differences between the two can be interpreted as deformations which transform one object to the other. Bending of surfaces theory occurs and is applied at the problems at civil engineering shell theory as well as to membrane cell theory. There is an increasing interest in the field of deformable surface modeling. It has become clear that even though the applications areas differ significantly the methodological overlap is enormous. We will give an overview of the history, recent results and open problems at the theory of infinitesimal bending.

We consider some properties of magnitudes related to infinitesimal bending at Euclidean and Generalised Riemannian Space. Recent results of the author and cooperators Svetislav Mincic, Mica Stankovic, Marija Najdanovic, Milan Zlatanovic, Milica Cvetkovic and Nikola Velimirovic will be mentioned.

Keywords: infinitesimal bending; shape; Generalized Riemannian space.

References

- [1] **Ljubica S. Velimirovic, Milica D. Cvetkovic**, Gaudi surfaces and curvature based functional variations, Applied Mathematics and Computation, Vol. 228: 377–383 (2014).
- [2] **Ljubica S. Velimirovic, Marija S. Ciric**, : On the total mean curvature of piecewise smooth surfaces under infinitesimal bending. Appl. Math. Lett. Vol. 24(9): 1515-1519 (2011).
- [3] **Ljubica S. Velimirovic, Marija S. Ciric, Nikola M. Velimirovic**, On the Willmore energy of shells under infinitesimal deformations, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 61(11): 3181-3190 (2011).
- [4] **Ljubica S. Velimirovic, Svetislav M. Mincic, Mica S. Stankovic**: Infinitesimal rigidity and flexibility of a non-symmetric affine connection space. Eur. J. Comb. 31(4): 1148-1159 (2010)

Milutin Obradović, Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade

Saminathan Ponnusamy, Indian Statistical Institute (ISI), Chennai, India

„Univalence of Partial Sums for Some Classes of Univalent Functions”

Abstract. Let S denote the family of all functions f that are analytic and univalent in the unit disk $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ and normalized such that $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$. For the functions of the previous form let $s_n(f, z) := s_n(z) = z + \sum_{k=2}^n a_k z^k$ denote the n -th ($n \geq 2$) partial sums/sections of f . The question of finding the largest radius of univalence r_n of $s_n(z)$, when f belongs to S or some of its interesting subclasses, has been a subject of study by a number of researchers. In this lecture we present some recent results of the authors and their cooperators.

Keywords: univalence; partial sums; radius.

References

[37] **M. Obradovic and S. Ponnusamy** Partial sums and radius problem for certain class of conformal mappings. *Siberian Math. J.*, 2011, 52(2), 291-302.

[38] **M. Obradovic and S. Ponnusamy** Starlikeness of sections of univalent functions. *Rocky Mountain J. Math.*, 2014, 44(3), 1003-1014.

Дарко Милинковић, Математички факултет, Универзитет у Београду

„Action spectrum and symplectic invariants in Floer theories“

Abstract. We will discuss some properties of symplectic invariants constructed by the modified min/max principle applied to the Hamiltonian action functional with different boundary conditions.

Милош Арсеновић, Математички факултет, Универзитет у Београду

„On multipliers in spaces of harmonic functions and related results“

Abstract. Spaces of multipliers between harmonic function spaces on the unit ball in n -dimensional space are investigated. Characterization of these spaces are obtained in many different spaces: weighted Hardy spaces, mixed norm spaces, Triebel-Lizorkin spaces. Related results on embedding relations between these spaces are also presented. The results are obtained in joint work with R. Shamoyan.

Branko Dragovich, Institute of Physics, University of Belgrade

„*p*-Adic Properties of the Genetic Code“

Abstract. The generic code (GC) is mapping from the space of 64 codons onto set of 21 elements, which consists of 20 amino acids and 1 stop signal. Codons are ordered triples of four nucleotides (C, A, T (U), G) and they are building blocks of the genes. These canonical amino acids are building blocks of the proteins, and stop signal terminates synthesis of proteins. One of the main reasons for modeling the GC is a huge number (about 1084) of possible connections between 64 codons and 20 amino acids with one stop signal, while in living organisms there is practically one GC with 30 slight variations. In this contribution we use *p*-adic distance to describe ultrametric structure of the codon space. By this way, we show that codons which are nearest in the *p*-adic sense code the same amino acid. In this approach [1-3], codons are presented by natural numbers in three digit expansion in the base 5. Four codons are related to four digits as follows: C=1, A=2, T=U=3, G=4. Digit 0 means absence of codon. 5-adic and 2-adic norms are used for *p*-adic distances.

In this talk, it will be presented a brief review of modeling of the generic code, emphasizing ultrametric structure of codon space, which is quantitatively described by *p*-adic distances. Note that *p*-adic distance is the most significant example of the ultrametric distance, which satisfies strong triangle (ultrametric) inequality, i. e. $d(x, y) = \max \{d(x, z), d(z, y)\}$. It will be also discussed extension of this *p*-adic ultrametric approach to amino acids, modification of Hamming distance, possible evolution of the GC and to some other bioinformation systems,

Keywords: The genetic code; *p*-adic distance, ultrametric.

References

- B. Dragovich, A. Dragovich.** A *p*-adic model of DNA sequence and genetic code. *P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, 2009, 1 (1), 34-41, [arXiv:q-bio.GN/0607018v1].
- B, Dragovich, A. Dragovich.** *p*-Adic modeling of the genome and the genetic code, *Computer Journal*, 2010, 53 (4), 432-442, [arXiv:0707.304v1 [q-bio.OT]].
- B. Dragovich.** *p*-Adic structure of the genetic code. *NeuroQuantology*, 2011, 9 (4), 716-727, [arXiv:1202.2353 [q-bio.OT]].

Оливера Мухић, Факултет организационих наука, Универзитет у Београду

„О два паралелна живота Gehring-овог проблема“

Апстракт. У овом раду се говори о Семинару из комплексне анализе, који се одржава почев од 1990. године, ша све до данас, а посебно о периоду од 1996. до 2000. године. Дат је кратак садржај тема о којима се тада говорило на семинару, чија је актуелност и данас евидентна. У раду је реч и о изузетној улози професора Матељевића, на првом месту због формирања тзв. Београдске школе за комплексну анализу, а затим и о његовој интуитивности, захваљујући којој је настала читава серија научних радова из области квазиконформних пресликавања, Teichmüller-ових простора, хармонијских пресликавања, као и, у мањој мери, изопериметријског проблема за функције више променљивих. У раду је дат посебан осврт на проблем који је Gehring поставио 1974. године. Професор Матељевић је 1975. године дао комплетно решење овог тзв. Gehring-овог проблема. Међутим, занимљиво је да је скоро истовремено (тј. са закашњењем од годину дана) Gehring-ов проблем закупио пажњу и многих других познатих математичара и да, несвесни да резултат већ постоји у Београду, они објављују низ научних радова у угледним математичким часописима. Овде ће бити приказана упоредна анализа неколико резултата из 70 – их година, као и неких из ближе прошлости.

Мирјана Вуковић, Академија наука и умјетности Босне и Херцеговине
Емил Илић – Георгијевић, Грађевински факултет Универзитета у Сарајеву
Оливера Стевановић, Универзитет Синергија

„О примјени Парсефалове формуле на проблеме G_θ^κ сумабилности развоја по сопственим функцијама Лапласовог оператора“

Апстракт. Према Тичмаршу [6], ако $f \in L^2(D)$, онда је Рисова сумабилност (λ, κ) развоја функције $f \in L^2(D)$ по сопственим функцијама k -димензионалног рубног проблема $\Delta u + \lambda u = 0$ у D , $u = 0$ на ∂D , локална особина функције f у тачки у којој се она развија ако је $\kappa \geq \frac{k}{2}$. Овдје доказујемо исти резултат, али за Авакумовићеву G_κ^θ -сумабилност, тј. Доказујемо да G_κ^θ -сумабилност развоја функције $f \in L^2(D)$ по сопственим функцијама у $x_0 \in D$ зависи само од понашања функције f у околини тачке x_0 ако је $\kappa \geq \frac{k}{2}$, што представља побољшање процене до које је дошао М. Маравић у [4] гдје је доказано да G_κ^θ -сумабилност зависи само од понашања функције f у околини тачке x_0 ако је $\kappa > \frac{\kappa-1}{2}(2\theta-1)^{-1} + 1, \frac{1}{2} < \theta < 1$. Међутим, том приликом, М. Маравић је користио поређење са Рисовим поступком сумабилности, док се у овом раду проблему приступа директно, тј. конструише се функција помоћу које се добија језгро G_κ^θ -сумабилности. Т. V. Avadhani је у [1] доказао да Рисова сумабилност (λ, κ) реда у $x_0 \in D$ зависи само од понашања функције f у околини тачке x_0 ако је $\kappa \geq \frac{k}{2}$, тако да је за очекивати да се добијени резултат може побољшати.

Кључне речи: G_κ^θ -поступак сумабилности; Беселова функција; Парсевалова формула.

Библиографија

1. T. V. Avadhani. On the summability of eigenfunction expansions I. *J. Indian Math. Soc.*, 1954, XVII, 1, 9–18.
2. V. G. Avakumović. Über die Eigenwerte der Schwingungsgleichung. *Math. Scand.*, 1956, 4, 161–173.
3. K. Chandrasekharan and S. Minakshisundaram. Typical means. Geoffrey Cum berlege, Oxford University Press, 1952.
4. M. Maravić. Über die G_κ^θ -Summierbarkeit der verallgemeinerten Fourier-Reihen. *Publ. Inst. math. Acad. Serbe Sci.*, 1958, XII, 137–147.
5. M. Maravić. Sumabilnost razvitka po sopstvenim funkcijama Laplaceova operatora u n -dimenzionalnom prostoru. ANUBiH, Djela, knjiga LV, Sarajevo, 1979.
6. E. C. Titchmarsh. Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations II. Oxford at the Clarendon Press, 1958.
7. M. Vuković. O nekim problemima sumabilnosti i primjenama na generalisane Fourier-ove redove, doktorska disertacija, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu (1979), X+83. [8] G. N. Watson. A Treatise of the Theory of Bessel Functions. Cambridge, 1952.
8. G. N. Watson. A Treatise of the Theory of Bessel Functions. Cambridge, 1952.

Romeo Meštrović, Maritime Faculty, University of Montenegro

Žarko Pavićević, Faculty of Science, University of Montenegro

„On Linear Space Properties of Privalov Spaces on the Unit disk“

Abstract. For given $1 < p < \infty$, the Privalov class N^p consists of all holomorphic functions f on the open unit disk $|z| < 1$ in the complex plane \mathbb{C} such that

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} (\log^+ |f(re^{i\theta})|)^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

The radial limit of a function $f \in N^p$ defined as $f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ exists for almost every $e^{i\theta}$. In [1] M. Stoll showed that the space N^p with the topology given by the metric ρ_p defined by

$$\rho_p(f, g) = \left(\int_0^{2\pi} (\log(1 + |f^*(re^{i\theta}) - g^*(re^{i\theta})|))^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p}},$$

becomes an F -algebra.

Here we establish some linear space properties of the spaces N^p .

Keywords: Privalov space N^p ; F -algebra; topological dual.

References

[1] **M. Stoll.** Mean growth and Taylor coefficients of some topological algebras of analytic functions. *Ann. Polon. Math.*, 1977, 35, 139 - 158.

Владимир Божин, Математички факултет, Универзитет у Београду

„Јединствена екстремалност у две и више димензија“

Апстракт. Приказаћемо резултате везане за јединствену екстремалност у Teichmüller-овом простору, који су рађени у оквиру Београдске школе комплексне анализе. Дискутоваћемо решење познатог Teichmüller-овог проблема. Такође, размотрићемо новија уопштења на квазиконформна пресликавања у три или више димензија. Техника се у вишедимензионалним просторима разликује, али постоје аналогне Reich-Strebel неједнакости, које се могу користити.

Владимир Драговић, Математички институт САНУ

Борислав Гајић, Математички институт САНУ

„О прецесионом кретању четвородимензионог крутог тела“

Апстракт. Лагранжев симетричан случај обртања четвородимензионог тешког крутог тела на $e(4)$ је дефинисао Бељајев. У овом раду конструисано је партикуларно решење Лагранжевог случаја које представља уопштење вертикалне регуларне прецесије. Полазећи од тог решења дато је четвородимензионо уопштење класичог Гриолијевог случаја кретања крутог тела. Показано је да добијено решење представља уопштење регуларне невертикалне прецесије.

Кључне речи: четвородимензионо круто тело; регуларна прецесија

Marjan Marković, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Montenegro

„Semi-norms of the Bergman projection“

Abstract. It is known that the Bergman projection operator maps the space of essentially bounded functions in the unit ball in the d -dimensional complex vector space onto the Bloch space of the unit ball. This work deals with the various semi-norms of the Bergman projection. We improve some recent results due to Perälä, Kalaj, Vujadinović and the author.

For each $\sigma > -1$ let

$$K_\sigma(z, w) = \frac{(1 - |w|^2)^\sigma}{(1 - \langle z, w \rangle)^{d+1+\sigma}},$$

$$T_\sigma f(z) = c_\sigma \int_B K_\sigma(z, w) f(w) dv(w), \quad z \in B,$$

and where $B = \{z \in \mathbb{C}^d : |z| < 1\}$, dv is the normalized Lebesgue measure on B , and $T_\sigma 1 = 1$. T_σ is the Bergman projection which project $L^\infty(B)$ continuously onto the Bloch space \mathcal{B} .

Let n be any positive integer and denote $\tilde{d} = \binom{n+d-1}{d-1}$. Let $|\cdot|_{\mathbb{C}^{\tilde{d}}}$ be a norm on $\mathbb{C}^{\tilde{d}}$ which satisfies $|\bar{Z}|_{\mathbb{C}^{\tilde{d}}} = |Z|_{\mathbb{C}^{\tilde{d}}}$, $Z \in \mathbb{C}^{\tilde{d}}$. For a multi-index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ stands for the differential operator $D_{z_1}^{\alpha_1}, \dots, D_{z_n}^{\alpha_n}$. Denote by $\mathcal{D}_z: H(B) \rightarrow H(B)^{\tilde{d}}$ the following operator $\mathcal{D}_z f(z) = (\dots, D_z^\alpha f(z), \dots)$. On the right side we have all $D_z^\alpha f(z)$ such that for $\alpha \in \mathbb{N}^d$ holds $|\alpha| = n$, therefore it contains \tilde{d} components.

In \mathcal{B} we introduce the semi-norm

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\|G\|_\infty \leq 1} (1 - |z|^2)^n |\mathcal{D}_z f(z)|_{\mathbb{C}^{\tilde{d}}}.$$

It is known that $f \in \mathcal{B}$ if and only if $\|f\|_{\mathcal{B}} < \infty$. We consider the semi-norm of T_σ given by $\|T_\sigma: L^\infty(B) \rightarrow \mathcal{B}\| = \sup_{\|G\|_\infty \leq 1} \|T_\sigma G\|_{\mathcal{B}}$.

We prove: For the Bergman projection T_σ holds

$$\|T_\sigma: L^\infty(B) \rightarrow \mathcal{B}\| = c \frac{\Gamma(\lambda + n)\Gamma(n)}{\Gamma^2(\frac{\lambda}{2} + \frac{n}{2})}$$

for every $\sigma > -1$, where $\lambda = d + 1 + \sigma$ and $c = \max_{|\zeta|=1} |Z(\zeta)|_{\mathbb{C}^{\tilde{d}}}$; here $Z(\zeta) = (\dots, \zeta^\alpha, \dots) \in \mathbb{C}^{\tilde{d}}$ contains all $\zeta^\alpha = \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_d^{\alpha_d}$, $|\alpha| = n$.

Keywords: Bergman projection, Bloch space, Integral operators

References

- D. Kalaj, M. Marković.** Norm of the Bergman projection. *Mathematica Scandinavica*, 2014, 115, 143 - 160.
- D. Kalaj, Dj. Vujadinović.** Norm of the Bergman Projection onto the Bloch Space. *Journal of Operator Theory*, to appear.
- M. Marković.** A Sharp Constant for the Bergman Projection. *Canadian Mathematical Bulletin*, to appear.

Миљан Кнежевић, Математички факултет, Универзитет у Београду

Марек Светлик, Математички факултет, Универзитет у Београду

„On hyperbolic type metrics and related problems“