Reproduktivna i nereproduktivna rešenja matrične jednačine $AXB = C$

Branko J. Malešević i Biljana M. Radičić
malesevic@etf.rs
biljana_radicic@yahoo.com

28. maj 2011.

Istorijat

Proučavanje opštih i reproduktivnih rešenja Bulovih jednačina započeo je početkom prošlog veka Löwenheim ([8.],[9.]), a kasnije nastavili i uopštili i drugi autori. Do prvih rezultata unutar skup−teorijskog okvira došli su S.B. Prešić ([15.],[16.]) i M. Božić ([13.]).

Istorijat

Proučavanje opštih i reproduktivnih rešenja Bulovih jednačina započeo je početkom prošlog veka Löwenheim ([8.],[9.]), a kasnije nastavili i uopštili i drugi autori. Do prvih rezultata unutar skup−teorijskog okvira došli su S.B. Prešić ([15.],[16.]) i M. Božić ([13.]).

Pojam reproduktivnih jednačina

Pojam reproduktivnih jednačina uveo je profesor S.B. Prešić u radu [15.] iz 1968. godine.

Reproduktivne jednačine su jednačine oblika $x = f(x)$ gde je:

1. S dati skup,
2. $f : S \longrightarrow S$, data funkcija,
3. x nepoznata jednačine i
4. funkcija f ispunjava *uslov reproduktivnosti*:

$$f \circ f = f \tag{1}$$

Funkcije koje ispunjavaju uslov (1) u literaturi se još nazivaju i *projektori ili idempotentna preslikavanja*.

Uslov (1) naziva se uslov reproduktivnosti jer funkcija f koja ispunjava navedeni uslov, nakon iteracije, reprodukuju samu sebe.

Funkcije koje ispunjavaju uslov (1) u literaturi se još nazivaju i *projektori ili idempotentna preslikavanja*.
Uslov (1) naziva se uslov reproduktivnosti jer funkcija f koja ispunjava navedeni uslov, nakon iteracije, reprodukuju samu sebe.

Opšta tvrđenja u vezi sa reproduktivnim jednačinama

Primer 1. (Primer transformacije polazne jednačine u ekvivalentni reproduktivni oblik) Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, X \in \mathbb{C}^{n \times p}$ i $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ispunjava uslov $ABA = A$.
Tada je,

$$AX = 0 \Longleftrightarrow X = f(X) = (I_m - BA)X$$

Funkcije koje ispunjavaju uslov (1) u literaturi se još nazivaju i *projektori ili idempotentna preslikavanja*.
Uslov (1) naziva se uslov reproduktivnosti jer funkcija f koja ispunjava navedeni uslov, nakon iteracije, reprodukuju samu sebe.

Opšta tvrđenja u vezi sa reproduktivnim jednačinama

Primer 1. (Primer transformacije polazne jednačine u ekvivalentni reproduktivni oblik) Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, X \in \mathbb{C}^{n\times p}$ i $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ ispunjava uslov $ABA = A$.
Tada je,

$$AX = 0 \Longleftrightarrow X = f(X) = (I_m - BA)X$$

$$\Longrightarrow) : AX = 0 \Longrightarrow BAX = 0 \Longrightarrow X - BAX = X \Longrightarrow \underbrace{(I_m - BA)X}_{f(X)} = X$$

Funkcije koje ispunjavaju uslov (1) u literaturi se još nazivaju i *projektori ili idempotentna preslikavanja*.
Uslov (1) naziva se uslov reproduktivnosti jer funkcija f koja ispunjava navedeni uslov, nakon iteracije, reprodukuju samu sebe.

Opšta tvrđenja u vezi sa reproduktivnim jednačinama

Primer 1. (Primer transformacije polazne jednačine u ekvivalentni reproduktivni oblik) Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, X \in \mathbb{C}^{n\times p}$ i $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ ispunjava uslov $ABA = A$.
Tada je,

$$AX = 0 \Longleftrightarrow X = f(X) = (I_m - BA)X$$

$$\Longrightarrow) : AX = 0 \Longrightarrow BAX = 0 \Longrightarrow X - BAX = X \Longrightarrow \underbrace{(I_m - BA)X}_{f(X)} = X$$

$$\Longleftarrow) : X = f(X) = (I_m - BA)X \Longrightarrow AX = A(I_m - BA)X \Longrightarrow$$
$$AX = AX - ABAX = AX - AX = 0. \ \blacklozenge$$

Teorema 1. ([15.] S. B. Prešić) Reproduktivna jednačina $x = f(x)$ ima sva rešenja iskazana sa $x = f(y)$, gde y prolazi skupom S. ■

Teorema 1. ([15.] S. B. Prešić) Reproduktivna jednačina $x = f(x)$ ima sva rešenja iskazana sa $x = f(y)$, gde y prolazi skupom S. ■

Teorema 2. ([15.] S. B. Prešić) Za svaku moguću jednačinu $J(x)$ postoji jednačina oblika $x = f(x)$ koja je ekvivalentna sa $J(x)$ i pri tom je reproduktivna. ■

Teorema 1. ([15.] S. B. Prešić) Reproduktivna jednačina $x = f(x)$ ima sva rešenja iskazana sa $x = f(y)$, gde y prolazi skupom S. ■

Teorema 2. ([15.] S. B. Prešić) Za svaku moguću jednačinu $J(x)$ postoji jednačina oblika $x = f(x)$ koja je ekvivalentna sa $J(x)$ i pri tom je reproduktivna. ■

Matrična jednačina $AXB = C$

Matrična jednačina

$$AXB = C \tag{2}$$

je i u savremenoj matematici predmet interesovanja i proučavanja brojnih autora.

Proučavanja se odnose na:

Proučavanja se odnose na:

1. Simetrična i antisimetrična rešenja matrične jednačine
   $AX = C$ ([4.],[5.] i [7.]),
   $AXB = C$ ([18.], [19.] i [20.]),

Proučavanja se odnose na:

1. Simetrična i antisimetrična rešenja matrične jednačine
   $AX = C$ ([4.],[5.] i [7.]),
   $AXB = C$ ([18.], [19.] i [20.]),
2. Refleksivna i anti-refleksivna rešenja matrične jednačine
   $AX = C$ ([21.]),
   $AXB = C$ ([2.]),

Proučavanja se odnose na:

1. Simetrična i antisimetrična rešenja matrične jednačine
$AX = C$ ([4.],[5.] i [7.]),
$AXB = C$ ([18.], [19.] i [20.]),
2. Refleksivna i anti-refleksivna rešenja matrične jednačine
$AX = C$ ([21.]),
$AXB = C$ ([2.]),
3. Realno-pozitivna i Realno-nenegativna rešenja matrične jednačine
$AX = C$ ([10.],[11.]),
$AXB = C$ ([3.]),

Proučavanja se odnose na:

1. Simetrična i antisimetrična rešenja matrične jednačine
   $AX = C$ ([4.],[5.] i [7.]),
   $AXB = C$ ([18.], [19.] i [20.]),
2. Refleksivna i anti-refleksivna rešenja matrične jednačine
   $AX = C$ ([21.]),
   $AXB = C$ ([2.]),
3. Realno-pozitivna i Realno-nenegativna rešenja matrične jednačine
   $AX = C$ ([10.],[11.]),
   $AXB = C$ ([3.]),
4. Iterativne metoda rešavanja matrične jednačine
   $AXB = C$ ([18.], [19.] i [20.]).

Proučavanja se odnose na:

1. Simetrična i antisimetrična rešenja matrične jednačine
   $AX = C$ ([4.],[5.] i [7.]),
   $AXB = C$ ([18.], [19.] i [20.]),
2. Refleksivna i anti-refleksivna rešenja matrične jednačine
   $AX = C$ ([21.]),
   $AXB = C$ ([2.]),
3. Realno-pozitivna i Realno-nenegativna rešenja matrične jednačine
   $AX = C$ ([10.],[11.]),
   $AXB = C$ ([3.]),
4. Iterativne metoda rešavanja matrične jednačine
   $AXB = C$ ([18.], [19.] i [20.]).

U slučaju da je $A = B = C$ tj. kada je u pitanju matrična jednačina

$$AXA = A,$$

njeno rešenje obeležavamo sa $A^{(1)}$ i nazivamo $\{1\}$-inverz matrice A.

U vezi sa matričnom jednačinom $AXB = C$ navodimo sledeće tvrđenje.

U vezi sa matričnom jednačinom $AXB = C$ navodimo sledeće tvrđenje.

Teorema 3. ([14.] R. Penrose) *Matrična jednačina $AXB = C$ jeste moguća akko za bilo koje $\{1\}$-inverze $A^{(1)}$ i $B^{(1)}$ važi uslov*

$$AA^{(1)}CB^{(1)}B = C. \tag{3}$$

U vezi sa matričnom jednačinom $AXB = C$ navodimo sledeće tvrđenje.

Teorema 3. ([14.] R. Penrose) *Matrična jednačina* $AXB = C$ *jeste moguća akko za bilo koje* $\{1\}$*-inverze* $A^{(1)}$ *i* $B^{(1)}$ *važi uslov*

$$AA^{(1)}CB^{(1)}B = C. \tag{3}$$

Opšte rešenje matrične jednačine $AXB = C$ *dato je formulom*

$$X = f(Y) = A^{(1)}CB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)}, \tag{4}$$

gde je Y *proizvoljna matrica odgovarajuće dimenzije.* ■

U vezi sa matričnom jednačinom $AXB = C$ navodimo sledeće tvrđenje.

Teorema 3. ([14.] R. Penrose) *Matrična jednačina $AXB = C$ jeste moguća akko za bilo koje $\{1\}$-inverze $A^{(1)}$ i $B^{(1)}$ važi uslov*

$$AA^{(1)}CB^{(1)}B = C. \tag{3}$$

Opšte rešenje matrične jednačine $AXB = C$ dato je formulom

$$X = f(Y) = A^{(1)}CB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)}, \tag{4}$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajuće dimenzije. ■

U vezi sa uslovom (3) autori prezentacije su dobili nov oblik potrebnog i dovoljnog uslova za postojanje rešenja matrične jednačine $AXB = C$.

Primer 2. (Primer nereproduktivnih rešenja) Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Tada,

1. $AX = 0 \Longleftrightarrow (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times m})\ X = (I_n - A^{(1)}A)Y,$
2. $XA = 0 \Longleftrightarrow (\exists Y \in \mathbb{C}^{m\times n})\ X = Y(I_n - AA^{(1)}),$
3. $AXA = A \Longleftrightarrow (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = A^{(1)} + Y - A^{(1)}AYAA^{(1)},$
4. $AX = A \Longleftrightarrow (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = I_n + (I_n - A^{(1)}A)Y,$
5. $XA = A \Longleftrightarrow (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = I_n + Y(I_n - AA^{(1)}).$ ♦

Primer 2. (Primer nereproduktivnih rešenja) Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Tada,

1. $AX = 0 \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times m})\ X = (I_n - A^{(1)}A)Y$,
2. $XA = 0 \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{m\times n})\ X = Y(I_n - AA^{(1)})$,
3. $AXA = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = A^{(1)} + Y - A^{(1)}AYAA^{(1)}$,
4. $AX = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = I_n + (I_n - A^{(1)}A)Y$,
5. $XA = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = I_n + Y(I_n - AA^{(1)})$. ♦

Lema 1. *Ako je X_0 ma koje posebno rešenje matrične jednačine $AXB = C$, opšte rešenje matrične jednačine $AXB = C$ dato je formulom*:

$$X = f(Y) = X_0 + Y - A^{(1)}A\,Y\,B\,B^{(1)},$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija. ■

Primenom KRONECKERovog tenzorskog proizvoda matrica matričnu jednačinu $AXB = C$ možemo razmatrati u obliku ekvivaletnog linearnog sistema:

$$(A \otimes B^T)vec(X) = vec(C), \tag{5}$$

gde $vec(X)$ označava vektor dobijen od matrice X zapisivanjem vrsta matrice u vektor kolonu.
Preciznije *vec* određuje operator $vec_{m,n} : \mathbb{C}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{C}^{mn}$ definisan koordinatno sa

$$vec_{m,n}(x_{ij}) = x_{(i-1)n+j}.$$

Primenom KRONECKERovog tenzorskog proizvoda matrica matričnu jednačinu $AXB = C$ možemo razmatrati u obliku ekvivaletnog linearnog sistema:

$$(A \otimes B^T) vec(X) = vec(C), \tag{5}$$

gde $vec(X)$ označava vektor dobijen od matrice X zapisivanjem vrsta matrice u vektor kolonu.
Preciznije *vec* određuje operator $vec_{m,n} : \mathbb{C}^{m \times n} \longrightarrow \mathbb{C}^{mn}$ definisan koordinatno sa

$$vec_{m,n}(x_{ij}) = x_{(i-1)n+j}.$$

Inverzni operator $mat_{m,n} : \mathbb{C}^{mn} \longrightarrow \mathbb{C}^{m \times n}$ definišemo koordinatno sa

$$mat_{m,n}(x_i) = x_{pq}$$

za $p = [i/n] + 1$ i $q = i \ (mod\ n)$. Ukoliko se zna dimenzija vektora i matrica o kojima se radi indekse operatora možemo izostaviti.

Sledeći primer pokazuje da za matričnu jednačinu $AXB = C$ postoji posebno rešenje X_0 koje se ne može zapisati u obliku $A^{(1)} C\, B^{(1)}$.

Sledeći primer pokazuje da za matričnu jednačinu $AXB = C$ postoji posebno rešenje X_0 koje se ne može zapisati u obliku $A^{(1)} C \, B^{(1)}$.

Primer 3. Matrični sistem:

$$AXB = C \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$

Sledeći primer pokazuje da za matričnu jednačinu $AXB = C$ postoji posebno rešenje X_0 koje se ne može zapisati u obliku $A^{(1)} C\, B^{(1)}$.

Primer 3. Matrični sistem:

$$AXB = C \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$

po matrici $X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}$ može se razmatrati u obliku ekvivaletnog linearnog sistema:

Sledeći primer pokazuje da za matričnu jednačinu $AXB = C$ postoji posebno rešenje X_0 koje se ne može zapisati u obliku $A^{(1)} C\, B^{(1)}$.

Primer 3. Matrični sistem:

$$AXB = C \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$

po matrici $X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}$ može se razmatrati u obliku ekvivaletnog linearnog sistema:

$$(A \otimes B^T)vec(X) = vec(C) \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 4 & -4 & 8 \\ 2 & -2 & 4 & 4 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ jedna reprezentacija opštih $\{1\}$-inverza je data sa matricama

Za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ jedna reprezentacija opštih $\{1\}$-inverza je data sa matricama

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1-2c-a+2d-2b+4b & a-2d & b-2e \\ c-d-2e & d & e \end{bmatrix} \; (a,b,c,d,e \in \mathbb{C})$$

i

Za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ jedna reprezentacija opštih $\{1\}$-inverza je data sa matricama

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1-2c-a+2d-2b+4b & a-2d & b-2e \\ c-d-2e & d & e \end{bmatrix} \; (a,b,c,d,e \in \mathbb{C})$$

i

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1-p+f-q-2g+2r & f-q & g-r \\ p+q-2r & q & r \end{bmatrix} \; (f,g,p,q,r \in \mathbb{C}).$$

Za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ jedna reprezentacija opštih $\{1\}$-inverza je data sa matricama

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 - 2c - a + 2d - 2b + 4b & a - 2d & b - 2e \\ c - d - 2e & d & e \end{bmatrix} (a, b, c, d, e \in \mathbb{C})$$

i

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 - p + f - q - 2g + 2r & f - q & g - r \\ p + q - 2r & q & r \end{bmatrix} (f, g, p, q, r \in \mathbb{C}).$$

Matrica:

$$X_0 = A^{(1)} C B^{(1)} = \begin{bmatrix} (-3 - 3f + 6g + 6c + 6cf - 12cg) & (-3f + 6cf) & (-3g + 6cg) \\ (-3c - 3cf + 6cg) & (-3cf) & (-3cg) \end{bmatrix},$$

za $c, f, g \in \mathbb{C}$, predstavlja jedno rešenje matričnog sistema.

Pokazaćemo da tako određeno rešenje nije opšte.

Opšte rešenje prethodnog linearnog sistema, do kog smo došli nekom od standardnih metoda, dato je u obliku

$$vec(X) = [\ (-3-3k+6l+6m+6p-12r)\quad (-3k+6p)\quad (-3l+6r)\quad (-3m-3p+6r)\quad (-3p)\quad (-3r)\ ]^T (k,l,m,p,r \in \mathbb{C}).$$

Pokazaćemo da tako određeno rešenje nije opšte.

Opšte rešenje prethodnog linearnog sistema, do kog smo došli nekom od standardnih metoda, dato je u obliku

$vec(X) = [\ (-3-3k+6l+6m+6p-12r) \quad (-3k+6p) \quad (-3l+6r) \quad (-3m-3p+6r) \quad (-3p) \quad (-3r)\ ]^T (k,l,m,p,r \in \mathbb{C})$.

Odatle dobijamo matricu opšteg rešenja:

$$X = mat_{2,3}(vec(X)) = \begin{bmatrix} (-3-3k+6l+6m+6p-12r) & (-3k+6p) & (-3l+6r) \\ (-3m-3p+6r) & (-3p) & (-3r) \end{bmatrix}.$$

Pokazaćemo da tako određeno rešenje nije opšte.

Opšte rešenje prethodnog linearnog sistema, do kog smo došli nekom od standardnih metoda, dato je u obliku

$vec(X) = [\ (-3-3k+6l+6m+6p-12r)\ \ (-3k+6p)\ \ (-3l+6r)\ \ (-3m-3p+6r)\ \ (-3p)\ \ (-3r)\ ]^T (k,l,m,p,r \in \mathbb{C})$.

Odatle dobijamo matricu opšteg rešenja:

$$X = mat_{2,3}(vec(X)) = \begin{bmatrix} (-3-3k+6l+6m+6p-12r) & (-3k+6p) & (-3l+6r) \\ (-3m-3p+6r) & (-3p) & (-3r) \end{bmatrix}.$$

Uslov $p = mk$ i $r = ml$ jeste potreban i dovoljan uslov da bi važila reprezentacija $X = A^{(1)}CB^{(1)}$.
Konkretno za $m = k = l = 0$ i $p = r = 1$

Pokazaćemo da tako određeno rešenje nije opšte.

Opšte rešenje prethodnog linearnog sistema, do kog smo došli nekom od standardnih metoda, dato je u obliku

$$vec(X) = [\ (-3-3k+6l+6m+6p-12r) \quad (-3k+6p) \quad (-3l+6r) \quad (-3m-3p+6r) \quad (-3p) \quad (-3r)\ ]^T (k,l,m,p,r \in \mathbb{C}).$$

Odatle dobijamo matricu opšteg rešenja:

$$X = mat_{2,3}(vec(X)) = \left[\begin{array}{ccc} (-3-3k+6l+6m+6p-12r) & (-3k+6p) & (-3l+6r) \\ (-3m-3p+6r) & (-3p) & (-3r) \end{array} \right].$$

Uslov $p = mk$ i $r = ml$ jeste potreban i dovoljan uslov da bi važila reprezentacija $X = A^{(1)}CB^{(1)}$.
Konkretno za $m = k = l = 0$ i $p = r = 1$ matrica

$$X_1 = \left[\begin{array}{ccc} -6 & 6 & 6 \\ 3 & -3 & -3 \end{array} \right]$$

jeste partikularno rešenje matričnog sistema sa osobinom da za bilo koji izbor $\{1\}$-inverza $A^{(1)}$ i $B^{(1)}$ matrica A i B važi: $X_1 \neq A^{(1)}CB^{(1)}$. ♦

Međutim,

Međutim,

Lema 2. *Svako posebno* X_0 *rešenje moguće matrične jednačine* $AXB = C$ *može se zapisati u obliku*

$$X_0 = mat_{n,p}\Big((A \otimes B^T)^{(1)} \cdot vec_{n,p}(C)\Big),$$

za odgovarajući izbor $\{1\}$*-inverza matrice* $A \otimes B^T$*.*

Međutim,

Lema 2. *Svako posebno X_0 rešenje moguće matrične jednačine $AXB = C$ može se zapisati u obliku*

$$X_0 = mat_{n,p}\Big((A \otimes B^T)^{(1)} \cdot vec_{n,p}(C)\Big),$$

za odgovarajući izbor $\{1\}$-inverza matrice $A \otimes B^T$.

Proširena forma Teoreme 3. glasi:

Teorema 3'. Ako je X_0 ma koje posebno rešenje jednačine $AXB = C$, opšte rešenje matrične jednačine $AXB = C$ dato je formulom

$$X = f(Y) = X_0 + Y - A^{(1)}A\,Y\,B\,B^{(1)},$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija. Pri tom opšte rešenje jednačine $AXB = C$ je reproduktivno akko je $X_0 = A^{(1)}C\,B^{(1)}$.■

S obzirom da je

Međutim,

Lema 2. *Svako posebno* X_0 *rešenje moguće matrične jednačine* $AXB = C$ *može se zapisati u obliku*

$$X_0 = mat_{n,p}\Big((A \otimes B^T)^{(1)} \cdot vec_{n,p}(C)\Big),$$

za odgovarajući izbor $\{1\}$*-inverza matrice* $A \otimes B^T$*.*

Proširena forma Teoreme 3. glasi:

Teorema 3'. Ako je X_0 ma koje posebno rešenje jednačine $AXB = C$, opšte rešenje matrične jednačine $AXB = C$ dato je formulom

$$X = f(Y) = X_0 + Y - A^{(1)}A\,Y\,B\,B^{(1)},$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija. Pri tom opšte rešenje jednačine $AXB = C$ je reproduktivno akko je $X_0 = A^{(1)}C\,B^{(1)}$.■

S obzirom da je

$$f^2(Y) = f(Y) + (X_0 - A^{(1)}C\,B^{(1)}),$$

zaključujemo da je opšte rešenje matrične jednačine $AXB = C$ reproduktivno akko je $X_0 = A^{(1)}C\,B^{(1)}$.

Primer 4.(Određivanje reproduktivnih rešenja iz nereproduktivnih rešenja) Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Tada,

1. $AX = 0 \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times m})\ X = (I_n - A^{(1)}A)Y$,
2. $XA = 0 \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{m\times n})\ X = Y(I_n - AA^{(1)})$,
3. $AXA = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = A^{(1)} + Y - A^{(1)}AYAA^{(1)}$,
4. $AX = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = I_n + (I_n - A^{(1)}A)Y$,
5. $XA = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = I_n + Y(I_n - AA^{(1)})$.

Prethodno navedena nereproduktivna rešenja specijalnih slučajeva matrične jednačine $AXB = C$ ([17.] S.B. Prešić) dovode se u reproduktivni oblik ([12.] M. Haverić)

1. $AX = 0 \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times m})\ X = (I_n - A^{(1)}A)Y$,
2. $XA = 0 \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{m\times n})\ X = Y(I_n - AA^{(1)})$,
3. $AXA = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = A^{(1)}AA^{(1)} + Y - A^{(1)}AYAA^{(1)}$,
4. $AX = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = A^{(1)}A + (I_n - A^{(1)}A)Y$,
5. $XA = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = AA^{(1)} + Y(I_n - AA^{(1)})$. ♦

Primer 5. (Primer transformacije polaznog matričnog sistema u ekvivalentnu reproduktivnu matričnu jednačinu)

Primer 5. (Primer transformacije polaznog matričnog sistema u ekvivalentnu reproduktivnu matričnu jednačinu) Matrični sistem ([14.] R.Penrose)

$$(6) \quad AX = B \qquad \wedge \qquad (7) \quad XD = E$$

ima rešenje ako i samo ako je svaka jednačina moguća i

Primer 5. (Primer transformacije polaznog matričnog sistema u ekvivalentnu reproduktivnu matričnu jednačinu) Matrični sistem ([14.] R.Penrose)

$$(6) \quad AX = B \qquad \wedge \qquad (7) \quad XD = E$$

ima rešenje ako i samo ako je svaka jednačina moguća i $AE = BD$.

Primer 5. (Primer transformacije polaznog matričnog sistema u ekvivalentnu reproduktivnu matričnu jednačinu) Matrični sistem ([14.] R.Penrose)

$$(6) \quad AX = B \qquad \wedge \qquad (7) \quad XD = E$$

ima rešenje ako i samo ako je svaka jednačina moguća i $AE = BD$. Zaista,

$$AX = B \; / \cdot D, \quad A \cdot / \; XD = E$$

Primer 5. (Primer transformacije polaznog matričnog sistema u ekvivalentnu reproduktivnu matričnu jednačinu) Matrični sistem ([14.] R.Penrose)

$$(6) \quad AX = B \qquad \wedge \qquad (7) \quad XD = E$$

ima rešenje ako i samo ako je svaka jednačina moguća i $AE = BD$. Zaista,

$$AX = B \ / \cdot D, \quad A \cdot / \ XD = E$$

$$(8) \qquad AXD = BD, \quad AXD = AE$$

odatle sledi $AE = BD$.

Ako je svaka od njih moguća i

Primer 5. (Primer transformacije polaznog matričnog sistema u ekvivalentnu reproduktivnu matričnu jednačinu) Matrični sistem ([14.] R.Penrose)

$$(6) \quad AX = B \qquad \wedge \qquad (7) \quad XD = E$$

ima rešenje ako i samo ako je svaka jednačina moguća i $AE = BD$. Zaista,

$$AX = B \; / \cdot D, \quad A \cdot / \; XD = E$$

$$AXD = BD, \quad AXD = AE \tag{8}$$

odatle sledi $AE = BD$.

Ako je svaka od njih moguća i $AE = BD$, tada je ([14.] R.Penrose)

$$X = A^{(1)}B + ED^{(1)} - A^{(1)}AED^{(1)}$$

jedno zajedničko rešenje za (6) i (7).

Ako je X_0 ma koje zajedničko rešenje za (6) i (7) tada je opšte rešenje ([1.] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville) dato sa:

Ako je X_0 ma koje zajedničko rešenje za (6) i (7) tada je opšte rešenje ([1.] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville) dato sa:

$$(9a) \qquad X = g(Y) = X_0 + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija.

Takođe,

$$AX = B \wedge XD = E$$

$$\Updownarrow$$

Ako je X_0 ma koje zajedničko rešenje za (6) i (7) tada je opšte rešenje ([1.] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville) dato sa:

$$(9a) \qquad X = g(Y) = X_0 + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija.

Takođe,

$$AX = B \wedge XD = E$$

$$\Updownarrow$$

$$(9b) \quad X = f(Y) = A^{(1)}B + ED^{(1)} - A^{(1)}AED^{(1)} + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija.

Ako je X_0 ma koje zajedničko rešenje za (6) i (7) tada je opšte rešenje ([1.] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville) dato sa:

$$X = g(Y) = X_0 + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)}) \tag{9a}$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija.

Takođe,

$$AX = B \wedge XD = E$$

$$\Updownarrow$$

$$X = f(Y) = A^{(1)}B + ED^{(1)} - A^{(1)}AED^{(1)} + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)}) \tag{9b}$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija.

$\Longleftarrow)$: $X = f(Y) = A^{(1)}B + ED^{(1)} - A^{(1)}AED^{(1)} + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})$

Ako je X_0 ma koje zajedničko rešenje za (6) i (7) tada je opšte rešenje ([1.] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville) dato sa:

$$(9a) \qquad X = g(Y) = X_0 + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija.

Takođe,

$$AX = B \wedge XD = E$$

$$\Updownarrow$$

$$(9b) \quad X = f(Y) = A^{(1)}B + ED^{(1)} - A^{(1)}AED^{(1)} + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija.

$\Longleftarrow)$: $X = f(Y) = A^{(1)}B + ED^{(1)} - A^{(1)}AED^{(1)} + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})$

$AX = AA^{(1)}B + AED^{(1)} - AA^{(1)}AED^{(1)} + A(I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})$

Ako je X_0 ma koje zajedničko rešenje za (6) i (7) tada je opšte rešenje ([1.] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville) dato sa:

$$(9a) \qquad X = g(Y) = X_0 + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija.

Takođe,

$$AX = B \wedge XD = E$$

$$\Updownarrow$$

$$(9b) \quad X = f(Y) = A^{(1)}B + ED^{(1)} - A^{(1)}AED^{(1)} + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija.

$\Longleftarrow)$: $X = f(Y) = A^{(1)}B + ED^{(1)} - A^{(1)}AED^{(1)} + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})$

$AX = AA^{(1)}B + AED^{(1)} - AA^{(1)}AED^{(1)} + A(I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)}) \Longrightarrow AX = B,$

Ako je X_0 ma koje zajedničko rešenje za (6) i (7) tada je opšte rešenje ([1.] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville) dato sa:

$$(9a) \qquad X = g(Y) = X_0 + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija.

Takođe,

$$AX = B \wedge XD = E$$

$$\Updownarrow$$

$$(9b) \quad X = f(Y) = A^{(1)}B + ED^{(1)} - A^{(1)}AED^{(1)} + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija.

$\Longleftarrow)$: $X = f(Y) = A^{(1)}B + ED^{(1)} - A^{(1)}AED^{(1)} + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})$

$AX = AA^{(1)}B + AED^{(1)} - AA^{(1)}AED^{(1)} + A(I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)}) \Longrightarrow AX = B,$

$XD = A^{(1)}BD + ED^{(1)}D - A^{(1)}AED^{(1)}D + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})D$

Ako je X_0 ma koje zajedničko rešenje za (6) i (7) tada je opšte rešenje ([1.] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville) dato sa:

$$(9a) \qquad X = g(Y) = X_0 + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija.

Takođe,

$$AX = B \wedge XD = E$$

$$\Updownarrow$$

$$(9b) \quad X = f(Y) = A^{(1)}B + ED^{(1)} - A^{(1)}AED^{(1)} + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija.

$\Longleftarrow) : X = f(Y) = A^{(1)}B + ED^{(1)} - A^{(1)}AED^{(1)} + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})$

$AX = AA^{(1)}B + AED^{(1)} - AA^{(1)}AED^{(1)} + A(I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)}) \Longrightarrow AX = B,$

$XD = A^{(1)}BD + ED^{(1)}D - A^{(1)}AED^{(1)}D + (I - A^{(1)}A)Y(I - DD^{(1)})D \Longrightarrow XD = E.$

$\Longrightarrow) : AX = B \wedge XD = E$

$\Longrightarrow$) : $AX = B \wedge XD = E$

Rešenje matrične jednačine (6) je $X = f_1(Y) = A^{(1)}B + Y - A^{(1)}AY$.

$\Longrightarrow) : AX = B \wedge XD = E$

Rešenje matrične jednačine (6) je $X = f_1(Y) = A^{(1)}B + Y - A^{(1)}AY$.

Rešenje matrične jednačine (7) je $X = f_2(Y) = ED^{(1)} + Y - YDD^{(1)}$.

$\Longrightarrow) : AX = B \wedge XD = E$

Rešenje matrične jednačine (6) je $X = f_1(Y) = A^{(1)}B + Y - A^{(1)}AY$.

Rešenje matrične jednačine (7) je $X = f_2(Y) = ED^{(1)} + Y - YDD^{(1)}$.

Rešenje sistema (8) je $X = f_3(Y) = A^{(1)}AED^{(1)} + Y - A^{(1)}AYDD^{(1)}$.

$\Longrightarrow) : AX = B \wedge XD = E$

Rešenje matrične jednačine (6) je $X = f_1(Y) = A^{(1)}B + Y - A^{(1)}AY$.

Rešenje matrične jednačine (7) je $X = f_2(Y) = ED^{(1)} + Y - YDD^{(1)}$.

Rešenje sistema (8) je $X = f_3(Y) = A^{(1)}AED^{(1)} + Y - A^{(1)}AYDD^{(1)}$.

Zajedničko Penrose-ovo rešenje za (6), (7) i (8) je

$$X = f(Y) = f_1(Y) + f_2(Y) - f_3(Y).$$

$\Longrightarrow$) : $AX = B \wedge XD = E$

Rešenje matrične jednačine (6) je $X = f_1(Y) = A^{(1)}B + Y - A^{(1)}AY$.

Rešenje matrične jednačine (7) je $X = f_2(Y) = ED^{(1)} + Y - YDD^{(1)}$.

Rešenje sistema (8) je $X = f_3(Y) = A^{(1)}AED^{(1)} + Y - A^{(1)}AYDD^{(1)}$.

Zajedničko Penrose-ovo rešenje za (6), (7) i (8) je

$$X = f(Y) = f_1(Y) + f_2(Y) - f_3(Y).$$

Drugim rečima, zajedničko X moguće je predstaviti u obliku $X = f(Y)$. Time smo dokazali da (6) $\wedge$ (7) $\Longrightarrow X = f(Y)$.

Iz

$$g^2(Y) = g(Y) + (X_0 - A^{(1)}B - ED^{(1)} + A^{(1)}AED^{(1)})$$

zaključujemo da je (9a) reproduktivno rešenje za (6) $\wedge$ (7) akko je $X_0 = A^{(1)}B + ED^{(1)} - A^{(1)}AED^{(1)}$, odnosno da je (9b) reproduktivna matrična jednačina ekvivalentna polaznom sistemu. ♦

Primer 6. (Primer transformacije polaznog matričnog sistema u ekvivalentnu reproduktivnu matričnu jednačinu) Neka je $\bar{A}$ rešenje matričnog sistema

$$(10) \qquad AXA = A \quad \wedge \quad A^k X = XA^k.$$

Tada $\bar{A}$ nazivamo k-komutativni $\{1\}$-inverz.

Zajedničko rešenje sistema (10) je dato u obliku $\widehat{X} = \bar{A}A\bar{A}$.

U ([6.] J.D.Kečkić) pokazano je da je formulom

$$(11) \quad X = f(Y) = \widehat{X} + Y - (I - \bar{A}A)YA^k\bar{A}^k - \bar{A}^kA^kY(I - A\bar{A}) - \bar{A}AYA\bar{A},$$

gde je Y proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija, dato opšte rešenje sistema (10).

Neka je X_0 ma koje rešenje sistema (10). Tada je i

$$X = g(Y) = f(Y + X_0 - \hat{X})$$

opšte rešenje dato formulom Prešić-evog tipa

$$(12) \quad X = g(Y) = X_0 + Y - (I - \bar{A}A)YA^k\bar{A}^k - \bar{A}^kA^kY(I - A\bar{A}) - \bar{A}AYA\bar{A}.$$

Iz svojstava:

$$A^k\bar{A}^k = \bar{A}^kA^k,\ (A^k\bar{A}^k)^2 = A^k\bar{A}^k,\ (\bar{A}^kA^k)^2 = \bar{A}^kA^k,$$

$$(I - \bar{A}A)\bar{A}^kA^k = 0,\ \bar{A}^kA^k(I - \bar{A}A) = 0$$

i

$$X_0A^k\bar{A}^k = A^k\bar{A}^{k+1}, \quad \bar{A}^kA^kX_0 = A^k\bar{A}^{k+1},$$

gde je X_0 ma koje posebno rešenje sistema (10), dobijamo da je

$$g^2(Y) = g(Y) + (X_0 - \bar{A}A\bar{A})$$

odakle zaključujemo da je formula (12) reproduktivna akko $X_0 = \bar{A}A\bar{A}$. Samim tim (11) jeste reproduktivna matrična jednačina ekvivaletna polaznom sistemu (11). ♦

Reference

[1.] A. Ben-Israel and T.N.E. Greville, Generalized Inverse, Theory and Applications, John Wiley and Sons (Pure and applied mathematics - monographs), New York 1974.

[2.] D. Cvetković−Ilić, The reflexive solutions of the matrix equation $AXB = C$, Comp. Math. Appl., 51 (2006), 897−902.

[3.] D. Cvetković−Ilić, Re-nnd solutions of the matrix equation $AXB = C$, Journal of the Australian Mathematical Society, 84 (2008), 63−72.

[4.] H. Dai, On the symmetric solutions of linear matrix equations, Linear Algebra Appl. 131 1−7 (1990).

[5.] H. Dai, On the symmetric solutions of linear matrix equation, Linear Algebra Appl. 93 1−7 (1987).

[6.] J.D. Kečkić, Commutative weak generalized inverses of a square matrix and some related matrix equations, Publications de l'institut mathematique, Nouvelle serie, tome 38 (52), Beograd 1985.

[7.] K-W.E.Chu, Symetric solutions of linear matrix equations by matrix decompositions, Linear Algebra Appl. 119 35−50 (1989).

[8.] L. Löwenheim, Uber das Auflösungsproblem im logischen Klassenkal- kul, Sitzungsber. Berl. Math. Gesclschaft 7. 1908, 89-94.

[9.] L. Löwenheim, Uber die Auflösung von Gleichungen im logischen Gebietenkalkul, Math. Ann. 68, 1910, 169-207.

[10.] L.Wu, The Re-positive definite solutions to the matrix inverse problem AX = B, Linear Algebra Appl., 174 145−151 (1992).

[11.] L.Wu and B. Cain, The Re-nonnegative definite solutions to the matrix inverse problem $AX = B$, Linear Algebra Appl. 236 137−146 (1996).

[12.] M. Haverić, Formulae for general reproductive solutions of certain matrix equations, Publication de l'institut mathematique, Nouvelle serie, tome 34(48), Beograd 1983.

[13.] M. Božić, A note on reproductive solutions, Publ. Inst. Math. Belgrade 19 (33), 1975, 33-35.

[14.] R. Penrose, A generalized inverses for matrices , Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955).

[15.] S. B. Prešić, Une class d'équations matricielles et l'équation fonctionnelle $f^2 = f$, Publ.Inst. Math. Belgrade 8 (22), 1968, 143-148.

[16.] S. B. Prešić, Ein Satz über reproduktive Lösungen , Publ. Inst. Math. Belgrade 14 (28), 1973, 133-136.

[17.] S. B. Prešić, Certaines équations matricielles, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., $N^{\underline{o}}$ 121 (1963).

[18.] Y. X. Peng, X.Y.Hu, L.Zhang, An iteration method for the symmetric solutions and the optimal approximation solution of the matrix equation $AXB = C$, Appl. Math. Comp. 160 763−777 (2005).

[19.] Z.Y. Peng, An iterative method for the least squares symmetric solution of the linear matrix equation $AXB = C$, Appl. Math. Comp.,170 (2005) 711−723.

[20.] Z.Y. Peng, New matrix iterative methods for constraint solutions of the matrix equation $AXB = C$, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235 (2010) 726−735.

[21.] Z.Y. Peng, X.Y. Hu, The reflexive and anti-reflexive solutions of the matrix equation $AX = B$, Linear Algebra Appl., 375 147−155 (2003).