OSNOVI GEOMETRIJE, septembar 2005.

1. a) Dokazati da se bisektrisa unutrašnjeg ugla i simetrala naspramne stranice u trouglu, seku u tački koja pripada opisanom krugu trougla.
b) U trouglu ABC važi $BC = \frac{1}{2}(AB + AC)$. Neka su tačke M i N središta ivica AB i AC i neka je l opisani krug trougla AMN. Dokazati da centar upisanog kruga trougla ABC pripada krugu l.
2. Konstruisati tetivni četvorougao kome su strane podudarne datim dužima.
3. Ako su oba para naspramnih ivica konveksnog četvorougla hiperboličke ravni medjusobno podudarne duži, dokazati da su one i hiperparalelne.
4.1 Neka je $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka euklidskog prostora. Šta je kompozicija dva zavojna poluobrtaja $I = Z_{\overrightarrow{AA_1}} \circ Z_{\overrightarrow{C_1D_1}}$.
4.2 U orijentisanom euklidskom prostoru E_3 data je transformacija Φ svojim formulama u odnosu na ortonormirani reper $O_{e_1e_2e_3}$: $x' = 2x - 2y + z + 1$, $y' = 2x + y - 2z + 2$, $z' = x + 2y + 2z - 1$. Dokazati da je Φ sličnost, odrediti osnovne komponente i skicirati putanju tačke.
4.3 Neka su P i P' tačke inverzne u odnosu na krug k i $M \in k$ proizvoljna tačka. Ako su tačke A i B, redom, preseci pravih MP i MP' sa k, dokazati da je AB ortogonalno na PP'.
napomena: raditi samo jedan od zadataka 4.1, 4.2, 4.3

Rešenja:

1. b) Ako je E presečna tačka simetrale ugla $\angle BAC$ i BC tada važi $BA : CA = BE : CE$. Tada je $BC = CE\frac{AB+AC}{AC}$. Odatle sledi $CE = \frac{1}{2}AC = CN$. Slično je i $BE = \frac{1}{2}AB = BM$. Znači trouglovi CNE i BME su jednakokraki pa su simetrale uglova $\angle BME$ i $\angle NCE$ ujedno i simetrle duži ME i NE. Zato tačka S njihov presek pripada i simetrli duži MN, a kako pripada i simetrali ugla $\angle MAN$, pripada i opisanom krugu trougla AMN.
2. Ideja je sledeća: Pretpostavimo da je $AD < AB$. Neka su B_1 i C_1 tačke stranice AB i dijagonale AC takve da je $AB_1 = AD$ i $B_1C_1 \| BC$. Neka je tačka C_2 takva da su trouglovi AB_1C_1 i ADC_2 podudarni i isto orijentisani. Tada su tačke C_2, D i C kolinearne, $DC_2 = \frac{AB \cdot BC}{AD}$ i $AC_2 : AC = AD : AB$.
3. Neka je S presek dijagonala konveksnog četvorougla $ABCD$. Iz podudarnosti trouglova ACD i ABC sledi da je $\angle DCA = \angle CAB$ i slično $\angle CDB = \angle DBA$. Zato su po stavu UUU i trouglovi ABS i CDS podudarni. Ako su M i N redom podnožja normala na AB i CD iz S onda su i trouglovi SAM i SCN podudarni, odakle sledi da je MN zajednička normala za AB i CD.
4.1. Neka su α i β ravni koja redom sadrže središta AA_1 i C_1D_1 i normalne su na njih. Tada je $I = S_\alpha \circ S_{ABB_1A_1} \circ S_{AA_1D_1D} \circ S_{A_1B_1C_1D_1} \circ S_{A_1B_1C_1D_1} \circ S_{AA_1D_1D} \circ S_{DCC_1D_1} \circ S_\beta = S_\alpha \circ S_{ABB_1A_1} \circ S_{DCC_1D_1} \circ S_\beta$ pa je to ponovo zavojni poluobrtaj.
4.2. Transformacija je sličnost sa koeficijentom 3, kompozicija homotetije sa koeficijentom 3 i neke izometrije. Ta izometrija ima jednostruku sopstvenu vrednost $\lambda = 1$ pa je reč o osnoj rotaciji. Nakon pronalaženja odgovarajuće ortonormirane baze dobija se da je ugao rotacije $\arccos \frac{3}{5}$.
4.3. Važi da je $H(P, P', C, D)$ gde su tačke C i D krajevi prečnika koji sadrži P i P', odakle sledi i $H(MP, MP', MC, MD)$ a kako je $MC \perp MD$ sledi da su ove dve prave simetrale uglova koje odredjuju MP i MP'. Sada lako sledi tvrdjenje.