НУМЕРИЧКА АНАЛИЗА 2 - јун 2005

У свим задацима рачунати са 4 значајне цифре.

Задатак 1 Милновом методом приближно решити Кошијев проблем

$$y' = \frac{xe^x}{1+x^2}; \quad y(0) = 1$$

у тачки $x = 0,6$, са кораком $h = 0,1$. Почетне вредности рачунати Рунге–Кута формулама.

Решење: Коришћењем формула Рунге–Кута чија је грешка реда $O(h^4)$ и одговарајућих Милнових предиктор–коректор формула добијамо решење:

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	$0,0$	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$
y_i	1	$1,005$	$1,022$	$1,053$	$1,097$	$1,156$	$1,229$

Дакле, $y(0,6) \approx 1,23$. Вредности функције y за $i \leq 3$ рачунали смо Рунге–Кута формулама, а остале Милновим формулама.

Задатак 2 Рицовом методом на интервалу $(0, 1)$, одредити приближно решење граничног проблема

$$\begin{cases} (xy')' + y & = & x \\ y(0) & = & 0 \\ y(1) & = & 1 \end{cases}$$

у облику $y(x) = x + x(1-x)(c_1 + c_2 x)$.

Решење: На основу облика у ком се тражи решење закључујемо да су базисне функције $\varphi_0 = x$, $\varphi_1 = x(1-x)$ и $\varphi_2 = x^2(1-x)$. Једноставно се проверава да оне линеарно независне, те да φ_0 задовољава граничне услове, док φ_1 и φ_2 задовољавају хомогене граничне услове. Уврштавањем функције $y(x) = x + x(1-x)(c_1 + c_2 x)$ у полазну диференцијалну једначину долазимо до функције грешке: $R(x;,c_1,c_2) = 1 + c_1(1 - 3x - x^2) + c_2(4x - 8x^2 - x^3)$. Из услова ортогоналности

$$\int_0^1 R(x;,c_1,c_2)\varphi_k(x)dx = 0, \quad k = 1, 2,$$

добијамо систем једначина

$$\frac{2}{15}c_1 + \frac{1}{10}c_2 = \frac{1}{6},$$

$$\frac{1}{10}c_1 + \frac{19}{210}c_2 = \frac{1}{12},$$

одакле је $c_1 = 3,269, c_2 = -2,692$, што нас доводи до крајњег решења $y(x) = x + x(1-x)(3,27 - 2,69x)$.

Задатак 3 Одредити приближно решење граничног проблема

$$\begin{cases} \Delta u - 20u & = & -1, & (x,y) \in G = (0,1) \times (0,1) \\ u(x,y) & = & \cos(x+y), & (x,y) \in \partial G, \end{cases}$$

ако је корак $h = 0,5$. Претпоставити да функција u задовољава услове симетричности у односу на координатне осе и праве $y = \pm x$.

Решење: Лапласов оператор и функције $f(x,y) = -1$, $g(x,y) = \cos(x+y)$ су симетрични у односу на праве $y = \pm x$, а пошто тај услов задовољава и функција u, проблем можемо разматрати у делу области G који се налази између полуправих $y = \pm x$, $x \geq 0$. Након дискретизације проблема (то јест, формирања мреже са кораком h) закључујемо да четири тачке те области $((0,\ 0), (0,5,\ 0,5), (0,5,\ 0)$

и $(0,5,\ \ -0,5))$ припадају унутрашњости области G, те на њих примењујемо такозвану схему крст. Означимо са $V_i, i = 1, ..., 4$, редом приближне вредности функције u у горњим тачкама. После краћег рачуна, добијамо: $V_1 = 0,0950, V_2 = 0,219, V_3 = 0,151$ и $V_4 = 0,256$. Вредности на граници добијамо коришћењем функције g. Преостаје да се добијене вредности пренесу симетрично на целу област G.

Коначно решење заокружујемо на једну децималу мање у односу на оно које је добијено рачуном.

Задатак 4 Користећи трапезну формулу за $n = 4$ приближно решити интегралну једначину

$$u(x) + \int_1^2 x^t t^x u(t)dt = x.$$

Решење: $n = 4 \Rightarrow h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2-1}{4} = 0,25$, одакле је

$$\int_1^2 x^t t^x u(t)dt \approx \frac{0,25}{2}\left(x^1 1^x V_0 + 2x^{\frac{5}{4}}\left(\frac{5}{4}\right)^x V_1 + 2x^{\frac{6}{4}}\left(\frac{6}{4}\right)^x V_2 + 2x^{\frac{7}{4}}\left(\frac{7}{4}\right)^x V_3 + x^2 2^x V_4\right).$$

Уврштавајући горњу апроксимацију интеграла у $u(x) + \int_1^2 x^t t^x u(t)dt = x$, те узимајући да се x креће од 1 до 2 са кораком 0,25, добијамо систем од 5 линеарних једначина по $V_i, i = 0, ..., 4$. Његовим решавањем добијамо:

$$\begin{aligned} &u(1) \approx V_0 = 0,500 \\ &u(1,25) \approx V_1 = 0,499 \\ &u(1,50) \approx V_2 = 0,428 \\ &u(1,75) \approx V_3 = 0,271 \\ &u(2) \approx V_4 = 0,0106. \end{aligned}$$

Коначно решење смо заокружили на једну децималу мање у односу на оно које је добијено рачуном.

Напомена (везана за све задатке): У зависности од тога да ли се рачунања врше помоћу обичног дигитрона, неког програмабилног или, пак, коришћењем неког озбиљнијег софтвера, од случаја до случаја, може доћи до незнатног неподударања резултата (најчешће на последњој децимали).