DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA, jun 2005

1. Dokazati da krajevi duži fiksirane dužine c na binormali zavojne linije $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), a, b > 0$ pripadaju nekoj zavojnoj liniji.
2. Naći jednačine krivih koje polove uglove izmedju koordinatnih linija površi $f(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u), u > 0$.
3. Naći geodezijske linije kružnog cilindra.
4. U poluravanskom modelu geometrije Lobačevskog $L^2 = \{(x, y) \in R^2 | y > 0\}$ čija je metrika $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ data je geodezijska $a : x = 0, y > 0$ i u polarnim koordinatama sistema Oxy tačka $A(1, \theta), \theta < \frac{\pi}{2}$.
a) Naći rastojanje tačke A od geodezijske linije a.
b) Date su tačke $B(1, \frac{\pi}{2}), C(0, 0)$. Dokazati da je $\Pi(AB) = \angle BAC = 2arctg\ e^{-|AB|}$.

Rešenja:

1. Direktnim računom dobijaju se vektori T, N i B:

$$T = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b), \quad N = (-\cos t, -\sin t, 0), \quad B = T \times N = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t, -b\cos t, a).$$

Tada je nova kriva zadata sa

$$\beta(t) = \alpha(t) + cB(t) = (a\cos t + \frac{cb\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin t - \frac{cb\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}, bt + \frac{ca}{\sqrt{a^2+b^2}}).$$

Da bi β bila zavojna linija (a podstaknuti adicionim formulama) potražimo x i φ tako da je $a = x\cos\varphi$, $\frac{cb}{\sqrt{a^2+b^2}} = x\sin\varphi$. Lako se dobija da je

$$x = \sqrt{a^2 + \frac{c^2b^2}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{a^4+a^2b^2+c^2b^2}{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi = a\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^4+a^2b^2+c^2b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{cb}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^4+a^2b^2+c^2b^2}}.$$

Kako su druga dva izraza manja ili jednaka 1, takav ugao φ zaista postoji a tada kriva β ima parametrizaciju

$$\beta(t) = (x\cos(t-\varphi), x\sin(t-\varphi), b(t-\varphi + b\varphi + \frac{ca}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

što predstavlja zavojnu liniju sa parametrom $t - \varphi$.

2. Važi da je

$$f_u = (\cos v, \sin v, 1), \quad f_v = (-u\sin v, u\cos v, 0),$$

$$E = \langle f_u, f_u\rangle = 2, \quad F = \langle f_u, f_v\rangle = 0, \quad G = \langle f_v, f_v\rangle = u^2.$$

$$\cos\angle(f_u, f_v) = \frac{F}{\|f_u\|\|f_v\|} = 0,$$

pa su koordinatne linije ortogonalne. Neka je $\alpha(s) = f(u(s), v(s))$ tražena kriva. Tada njen tangentni vektor u svakoj tački zaklapa ugao $45°$ sa vektorom $f_u(s) = (\cos v(s), \sin v(s), 1)$. Lako se dobijaju sledeće formule

$$\dot\alpha(s) = (\dot u(s)\cos v(s) - u(s)\dot v(s)\sin v(s), \dot u(s)\sin v(s) + u(s)\dot v(s)\cos v(s), \dot u(s)),$$

$$\|\dot\alpha(s)\|^2 = 2\dot u^2(s) + u^2(s)\dot v^2(s), \quad \langle\dot{\alpha(s)}, f_u(s)\rangle = 2\dot u(s), \quad \|f_u(s)\|^2 = 2,$$

pa dalje sledi

$$\frac{\sqrt2}{2} = \frac{2\dot u(s)}{\sqrt2\sqrt{2\dot u^2(s) + u^2(s)\dot v^2(s)}}$$

odnosno

$$\dot v(s) = \pm\frac{\sqrt2\dot u(s)}{u(s)}.$$

Dobijaju se dve familije krivih

$$u_1(v) = C_1e^{\frac{1}{\sqrt2}v}, \quad u_2(v) = C_2e^{\frac{-1}{\sqrt2}v}.$$

3. Parametrizacija kružnog cilindra je $f(u, v) = (a\cos u, a\sin u, bv)$. Lako se dobija

$$f_u = (-a\sin u, a\cos u, 0), \quad f_v = (0, 0, b),$$

$$E = a^2, \quad F = 0, \quad G = b^2.$$

Zato važi da je $\Gamma_{ij}^k = 0$, pa će prirodno parametrizovana kriva biti geodezijska ukoliko je $\ddot u = 0, \ddot v = 0$. Lako se uočava da su tada sledeće krive geodezijske

$$\alpha(s) = (a\cos\frac{s}{a}, a\sin\frac{s}{a}, c)$$

$$\gamma(t) = (a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}).$$

Kako svakom vektoru tangentnog prostora površi u svakoj tački odgovara tačno jedna geodezijska linija a svaki od njih je kolinearan sa jednim od vektora $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$, ovo su sve geodezijske kružnog cilindra.

4.a) Traženo rastojanje je rastojanje od tačke A do podnožja normale iz A na pravu a. Ta normala je deo kruga ortogonalnog na x-osu, tj. kruga sa centrom u $C(0,0)$ i poluprečnikom 1, a traženo podnožje je tačka $B(1, \frac{\pi}{2}$. Hiperboličku duž AB možemo parametrizovati sa $\gamma = (\cos t, \sin t), t \in (\theta, \frac{\pi}{2})$.Kako je metrika $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2} = \frac{d\rho^2+\rho^2 dt^2}{\rho^2\sin^2 t}$ pa je

$$\|AB\| = \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} = -\ln tg\frac{\theta}{2}.$$

b) Prava AC je deo kruga β koji sadrži tačke A i C i ima centar M na osi. Trougao $\triangle CAM$ je jednakokraki pa je $\angle CAM = \angle ACM = \theta$. Znači ugao izmedju β i γ je θ, odnosno $\Pi(AB) = \theta$ odakle sledi tvrdjenje.