

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



ЗБОРНИК РАДОВА
У СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”
17. и 18. ОКТОБАР 2014.



$$r = \frac{|a|}{\theta} (a \in R^*)$$

Pierre Varignon, 1704.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ЗБОРНИК РАДОВА

V СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”

17. И 18. ОКТОБАР 2014.



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ЗБОРНИК РАДОВА – V СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”

17. И 18. ОКТОБАР 2014.

Издавач:

Универзитет у Београду
Математички факултет

За издавача:

проф. др Зоран Ракић, декан

Главни и одговорни уредник:

проф. др Миодраг Матељевић

Уредници:

проф. др Зорица Станимировић
доц. др Мирослав Марић
доц. др Миљан Кнежевић
Марек Светлик

Припрема за штампу:

Марек Светлик
Александра Делић

Илустрација на корицама:

ГеоГebra центар Београд, Математички факултет

Штампа:

Развојно-истраживачки центар графичког инжењерства
Технолошко-металуршког факултета у Београду, Карнегијева 4.

Тираж:

150 примерака

ISBN 978-86-7589-104-8

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд



51-7(082)
371.3::51(082)

СИМПОЗИЈУМ Математика и примене (5 ; 2014 ; Београд)
Зборник радова / V симпозијум Математика и примене, 17. и 18.
октобар
2014. ; [организатор] Универзитет у Београду, Математички факултет ;
[уредници Зорица Станимировић ... и др.]. - Београд : Математички
факултет,
2015 (Београд : Развојно-истраживачки центар графичког инжењерства
ТМФ). -
236 стр. : илустр. ; 30 cm

Радови на срп. и енгл. језику. - Текст лат. и ћир. - Тираж 150. - Напомене
уз текст. - Библиографија уз сваки рад. - Апстракти ; Abstracts.

ISBN 978-86-7589-104-8

1. Станимировић, Зорица [уредник] 2. Математички факултет (Београд)
а) Математика - Зборници б) Математика - Настава - Зборници

COBISS.SR-ID 218232076

САДРЖАЈ

1. MIODRAG MATELJEVIĆ - VERTIKALA BEOGRADSKE MATEMATIČKE ŠKOLE	
Miloš Arsenović, Miloljub Albijanić, Miljan Knežević, Marek Svetlik	1
2. LOKACIJSKI PROBLEM OPTIMALNOG RASPOREĐIVANJA KORISNIKA S PRIORITETIMA	
Stefan Mišković	12
3. BERTRANOV PARADOKS - NOVI POGLEDI	
Zoran Vidović	22
4. ПРИМЕНА МАТЕМАТИЧКОГ МОДЕЛА: ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКА ОПТИМИЗАЦИЈА У КОНТЕЈНЕРСКОМ ТРАНСПОРТУ	
Радослав Рајковић, Ђорђе Стакић	37
5. О ХЕМИЈСКОЈ ГЛАВНОЈ ЈЕДНАЧИНИ И АЛГОРИТМИМА ЗА СИМУЛАЦИЈУ СТОХАСТИЧКЕ АНАЛИЗЕ СА ТАЧКЕ ГЛЕДИШТА ПРАКТИЧНЕ ПРИМЕНЕ	
Олга Јакшић	48
6. VERIŽNI RAZLOMCI I PRIMENE	
Branko Malešević, Luka Milinković	60
7. ZAŠTITA INTEGRITETA PODATAKA U PRAKSI	
Dragan Vidaković, Duško Parezanović	68
8. UČENJE MATEMATIKE KROZ VIZUELNE I FIZIČKE MODELE: NEKOLIKO PRIMERA	
Ksenija Simić-Muller	75
9. POTENCIJAL JEDNOG ZADATKA IZVEDEN NA TEMELJU TALESOVOG TEOREMA O PROPORCIONALNIM DUŽINAMA	
Nives Baranović	86
10. CODING AND DECODING CROCHETING PATTERNS OF REGULAR POLYGONS	
Ivan Đokić, Milena Životić Ilić, Lilian Wieser	99
11. UČENJE PO POLJINIM PRINCIPIMA U GEOGEBRA OKRUŽENJU	
Valentin Kostić, Tanja Sekulić	104
12. СЕМИНАР „ГЕОГЕБРОМ КРОЗ СВЕТ МАТЕМАТИКЕ“ – СВРХА И УТИЦАЈ НА НАСТАВУ	
Јована Јездимировић, Славиша Радовић, Мирослав Марић	113
13. ПОЈАМ ЕЛИПСЕ У СРЕДЊОШКОЛСКОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ	
Игор Бањац	119
14. ТРАГОМ ЈЕДНОГ ЗАДАТКА О ВЕКТОРИМА	
Петар Мелентијевић, Милан Живановић	126
15. OER OBRAZOVNI SADRŽAJI KAO SPONA IZMEĐU AKADEMSKOG I PREDUZETNIČKOG ZNANJA	
Igor Obradović, Ranka Stanković, Marija Radojčić	133

16. DETERMINING OF THE SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE OPERATOR STURM-LIOUVILLE TYPE WITH TWO CONSTANT DELAYS	
Biljana Vojvodić, Milenko Pikula, Vladimir Vladičić	141
17. ОЦЕНА ГРЕШКЕ ГАУС-ЛОБАТО КВАДРАТУРНИХ ФОРМУЛА У ОДНОСУ НА ЧЕБИШЕВЉЕВЕ ТЕЖИНСКЕ ФУНКЦИЈЕ ДРУГЕ, ТРЕЋЕ И ЧЕТВРТЕ ВРСТЕ	
Љубица Мишић, Александар Пејчев	152
18. PERT METODOM DO USPEŠNIJEG UPRAVLJANJA ISTRAŽIVAČKIM PROJEKTIMA	
Nikola M. Perić	160
19. JEDAN PRISTUP ZA FORMIRANJE SIGURNIJIH LOZINKI ANALIZOM NAPADA REČNIKOM	
Irena Milinković, Luka Milinković	166
20. BLOCK REPRESENTATIONS OF GENERALIZED INVERSES OF MATRICES	
Vera Miler Jerković, Branko Malešević	176
21. VIŠEKRITERIJUMSKO ODLUČIVANJE METODOM AHP - DEFINICIJA, REŠAVANJE I PRIMENE	
Mladen Vidić	186

ПРЕДГОВОР

Пети симпозијум „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”, национални скуп са међународним учешћем, одржан је 17. и 18. октобра 2014. године у организацији Математичког факултета Универзитета у Београду и Српске академије наука и уметности. Скуп је одржан уз подршку Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

Програм симпозијума се одвијао у четири секције:

- Математика и примене - данас
- Математика и информатика у образовању
- Научноистраживачки и стручни рад студената
- 65 година живота и 40 година научног рада професора Миодрага Матељевића.

На отварању симпозијума, учеснике и госте су поздравили академик Љубиша Ракић, потпредседник САНУ, академик Драгош Цветковић, секретар одељеља САНУ за математику, физику и геонауке и Снежана Марковић, државни секретар у Министарству просвете, науке и технолошког развоја.

Кроз излагање на тему „Миодраг Матељевић - вертикала београдске математичке школе“, др Милољуб Албијанић, уредник за математику у Заводу за уџбенике, је на популаран начин представио лик и дело професора Миодрага Матељевића. Након тога, у име колектива Математичког факултета, сарадника и ученика професора Миодрага Матељевића, присутнима се обратио др Миљан Кнежевић, доцент Математичког факултета.

На свој живот и рад се осврнуо и проф. др Миодраг Матељевић. Присутни су имали прилику да чују веома интересантне детаље и анегдоте из његове веома успешне четрдесетогодишње каријере. Професор је причао о својим студентским данима, о својим професорима, затим о томе како је написао и објавио свој први рад, како је са својим ученицима на семинару за Комплексну анализу радио на решавању отворених математичких проблема, о томе како је то бити декан Математичког факултета.

Након отварања симпозијума, рад је настављен по секцијама.

У оквиру секције „Математика и примене - данас” одржан је велики број предавања о применама математике у различитим областима. Традиционално, секција „Математика и информатика у образовању” је окупила многе наставнике математике и информатике из основних и средњих школа из земље, али и из иностранства. Разматрани су актуелни проблеми који се тичу преношења знања, приступа учењу и настави. Секција „Научноистраживачки и стручни рад студената” је била право место да наши студенти прикажу своје радове као и пројекте на којима учествују. У оквиру секције „65 година живота и 40 година научног рада професора Миодрага Матељевића“ велики број пријатеља, колега, сарадника и ученика професора Матељевића је одржао занимљива предавања из разних области савремене математике.

Петом симпозијуму „Математика и примене“ је присуствовало око 250 учесника и гостију из земље и иностранства.

Програмски одбор Симпозијума:

проф. др Миодраг Матељевић, декан Математичког факултета, дописни члан САНУ
Академик проф. др Градимир Миловановић, Математички институт САНУ
проф. др Бошко Јовановић, редовни професор Математичког факултета, шеф
Катедре за нумеричку математику и оптимизацију
проф. др Зорица Станимировић, продекан за науку Математичког факултета,
Универзитета у Београду
доц. др Миљан Кнежевић, Математички факултет, Универзитета у Београду
доц. др Мирослав Марић, Математички факултет, Универзитета у Београду
Марек Светлик, асистент Математичког факултета Универзитета у Београду

Организациони одбор Симпозијума:

проф. др Зорица Станимировић, продекан за науку Математичког факултета
Универзитета у Београду
др Миљан Кнежевић, доцент Математичког факултета Универзитета у Београду
Марек Светлик, асистент Математичког факултета Универзитета у Београду
Ђорђе Стакић, Рачунарска лабораторија Математичког факултета Универзитета у
Београду
Сања Косановић, менаџер за односе са јавношћу Математичког факултета
Универзитета у Београду
Дино Спасовски, студент продекан Математичког факултета Универзитета у Београду

Захваљујемо свим учесницима на успешној реализацији скупа и постигнутим резултатима и идемо у сусрет VI Симпозијуму „Математика и примене”, који ће се одржати 16. и 17. октобра у организацији Математичког факултета Универзитета у Београду и Српске академије наука и уметности.

У Београду, септембар 2015.

Miodrag Mateljević – vertikalna beogradske matematičke škole

Miloš Arsenović

Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu
e-mail: arsenovic@matf.bg.ac.rs

Miloljub Albijanić

Univerzitet Singidunum – FEFA
e-mail: malbijanic@singidunum.ac.rs

Miljan Knežević

Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu
e-mail: kmiljan@matf.bg.ac.rs

Marek Svetlik

Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu
e-mail: svetlik@matf.bg.ac.rs

Apstrakt. Ovaj rad na popularan način odslikava profesora Miodraga Mateljevića. Prikazuje njegove ljudske, pedagoške i naučne vrednosti. U radu se pokazuje vertikalna povezanost u razvoju matematike u Srbiji, od Mike Petrovića do Miodraga Mateljevića. Mika Petrović je na određeni način, radom sa svojim učenicima i doktorantima, stvorio beogradsku matematičku školu. Ta škola iznedrila je sjajne matematičare i donela napredak u pedagoškom radu i matematičkom obrazovanju u Srbiji. Toj matematičkoj obrazovnoj i naučnoj vertikali pripada profesor Miodrag Mateljević, dopisni član SANU.

Ključne reči: Matematička beogradska škola.

1. Uvod – beogradska matematička škola

Zoru srpske matematike najavio je Dimitrije Nešić, profesor Velike škole. Zahvaljujući svojim ličnim osobinama, studentima je *prenosio ljubav prema predmetu, služio se jasnoćom izlaganja, usmeravao je pažnju studenata i učio ih da razlikuju glavno od sporednog, uživao se u nauku koju je predavao.*¹

Mihailo Petrović je doktorirao u Parizu. Profesori su mu bili čuveni Poenkare, Pikar i dr. Doktorsku tezu iz diferencijalnih jednačina odbranio je 1894. pred komisijom u kojoj su bili Ermit, Pikar i Penleve.

Po dolasku u Beograd izabran je za profesora na mesto svog profesora Dimitrija Nešića. Njegova su predavanja bila razumljiva, održavao je nivo koji je pristupačan slušaocima. Kod onih koji su želeli šire znanje podsticao je samostalni rad. Odlikovala ga je neposrednost, skromnost i vedrina duha. Harmoniju svojih duhovnih osobina uneo je u svakodnevni život.

Naučni rad je smatrao prvom dužnošću nastavnika univerziteta, jer bez nauke nema uspeha ni u nastavi, a ni napretka uopšte. Sa Milutinom Milankovićem delio je ne samo kabinet već i univerzalni matematički svet. On je predavao teorijsku matematiku, a Milanković primenjenu matematiku. *Zasluzno priznanje* dobio je 1939. godine *za svoj naučni rad u svim oblastima matematičkih nauka i stvaranje matematičke škole na Univerzitetu u Beogradu.*²

Petrovićeve matematičku školu (ili beogradsku matematičku školu) osnovala je grupa koja je doktorirala matematičke nauke kod njega. To su Tadija Pejović, Radivoje Kašanin, Jovan Karamata, Miloš Radojčić, Konstantin Orlov, Dragoslav Mitrinović, Vojislav Avakumović, Dragoljub Marković i dr.

¹ Dragan Trifunović, 1996, *Dimitrije Nešić – zora srpske matematike*, Arhimedes, Beograd, str. 19.

Dimitrije Nešić (1836–1904). Studije je započeo na Liceju u Beogradu, nastavio na Velikoj tehničkoj školi u Beču, a završio na Politehničkoj školi u Karlsruheu. Bio je pravi posvećenik prosvetnog hrama, human, plemenit, čovek anđeoske duše. Smatran je idealnim čovekom. Njegov student i naslednik u Velikoj školi bio je Mihailo Petrović.

² Mihailo Petrović (1868–1943). Školovao se u Prvoj beogradskoj gimnaziji, a diplomirao je na Prirodno–matematičkom odseku Filozofskog fakulteta u Beogradu 1889. Nastavio je školovanje u Parizu na *Ecole normale supérieure*. Doktorat je odbranio na Sorboni 1894.



Slika 1. Mihajlo Petrović

2. Vertikala: Mihailo – Tadija – Vojin – Miodrag

Mihailo Petrović postavio je temelj, koren i glavno stablo srpske matematike, kroz tzv. *beogradsku matematičku školu*. Kada se samo pogledaju imena matematičara koji su doktorirali kod Mike Petrovića, vidimo plejadu vrsnih matematičara koji su dalje razvijali matematiku u Srbiji, Matematički fakultet i Univerzitet u Beogradu. Miodrag Mateljević, profesor Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu pripada vertikali beogradske škole. Kod Mihaila Petrovića doktorirao je Tadija Pejović, a kod Tadije, Vojin Dajović, mentor profesora Mateljevića. Beogradska matematička škola rasadnik je dobrih matematičara, pa ima više grana koje je iznedrila, na primer, kod Mike Petrovića doktorirao je Dragoslav Mitrinović, a kod njega akademik Grada Milovanović i akademik Dragoš Cvetković. Takođe, kod Mike Petrovića doktorirao je Jovan Karamata, a kod njega akademik Bogoljub Stanković, te, kod profesora Stankovića, akademik Stevan Pilipović. Akademik Milosav Marjanović doktorirao je kod Tadije Pejovića i tako se lanci nastavljaju.

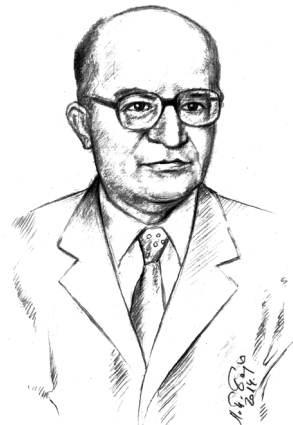
Njegovi doktoranti uspešno su razvijali nastavu matematike na matematičkim i tehničkim fakultetima u Srbiji. Na tehničkim fakultetima, pre svega na elektrotehnici, doprinos razvoju nastave dao je Dragoslav Mitrinović, pristupom koji je povezivao teoriju i primene. On je 1961. godine pokrenuo ediciju *Uvođenje mladih u naučni rad* u izdanju Zavoda za udžbenike.

Nastava matematike u Srbiji pripada tzv. tradicionalnoj školi (*definicija – teorema – dokaz*).

Ideja je da se u ovom radu prikaže vertikala beogradske matematičke škole kojoj zaslužno pripada Miodrag Mateljević.



Slika 2. Tadija Pejović



Slika 3. Vojin Dajović

Tadija Pejović bio je srpski matematičar, redovni profesor Univerziteta u Beogradu.³ Doktorirao je matematiku 1923. kod Mihaila Petrovića Alasa sa tezom pod nazivom - *Novi slučajevi itegrabilneta jedne važne diferencijalne jednačine prvog reda*.

Predavao je na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu i kasnije na Prirodno-matematičkom fakultetu. Bio je u periodu 1952-1954. dekan Prirodno-matematičkog fakulteta. Za svoja predavanja pisao je udžbenike, a najznačajniji su bili *Matematička analiza* u 5 knjiga i *Diferencijalne jednačine* u 2 knjige. Bio je mentor više doktorskih disertacija, među kojima su bile disertacije Vojina Dajovića (1956), Nedeljka Parezanovića (1962), Slaviše Prešića (1963), Milosava Marjanovića (1964) i drugih.

Vojin Dajović rođen je pre sto godina.⁴ Svoju doktorsku disertaciju *Egzistencija graničnih vrednosti nekih klasa analitičkih funkcija* odbranio 1956. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, kod profesora Tadije Pejovića.

Posle doktoriranja na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu prošao je sva nastavnička zvanja i razvijao Kompleksnu analizu i nastavio je tradiciju rada sa mladim i obdarenim studentima. Zalagao za opštu afirmaciju matematike kao fundamentalne nauke i kao jednog od najvažnijih nastavnih predmeta na svim nivoima. Želeo je da se razvija uticaj matematike i matematičara na poboljšanje obrazovnog sistema i ukupne društvene stvarnosti. Poseban doprinos dao je prepoznavanju i negovanju obdarenih mladih matematičara i osnivanju Matematičke gimnazije u Beogradu.

3. Miodrag Mateljević – vertikalna beogradske matematičke škole

Cilj ovog rada je da se na popularan način osvetli put profesora Miodraga Mateljevića, koji je u duhovnom smislu naslednik svojih prethodnika, ali i čovek sa ličnim kvalitetima, vizijom i sposobnošću koje je svojim radom i dokazao.

Put počinje u Valjevu, kako kaže Matija, u *Karađorđevoj ulici između suda i pošte i sve je bilo određeno*. Valjevo je izuzetan grad, grad koji je iznedrio velikane, od pera i nauke. Zato je za one koji polaze iz Valjeva prema Beogradu i svetu, put mnogo zahtevniji, a morate proći i kroz Lajkovac, a tamo Radovan Beli kaže „vodite računa vi koji putujete za Beograd, opominje vas Kolubara. Neka vam je uvek na pameti da ona mora biti bistra voda koja se pije, gde god da se nalazite”.

Kada se Miodrag peo uz Balkansku ulicu putem od železničke stanice, nije ni slutio da će to biti simbolično penjanje u naučnom i pedagoškom pogledu. Na kraju svojih studija odmah se zainteresovao za naučni rad. Prenosimo vam njegove reči:

Po završetku fakulteta 1973. pokušavao sam nešto da radim. Sećam se da je profesor Marjanović držao kurseve Analiza na mnogostrukostima i kasnije Morsovu teoriju. U oblasti analize jedino je B. Mirković držao poslediplomske kurseve vezane za funkcionalnu analizu i linearne topološke prostore. U to vreme nisam znao tačno kako su formirane doktorske studije u SAD-u, šta je matematička škola i naučni rad.⁵

Profesor Mateljević ima izuzetnu intuiciju, pa je prilikom istraživanje i proučavanja literature naišao na Geringov problem⁶ koji mu nije davao mira. „Napao” ga je.

Zatvorene krive γ i γ_0 su ulančane ako γ_0 nije homotopno tački (nuli) u $\mathbb{R}^3 \setminus \gamma^$.*

Formulacija problema:

Ako su γ i γ_0 ulančane krive u \mathbb{R}^3 na rastojanju 1, dokazati da je dužina svake od ovih krivih najmanje 2π .

³Rođen je u Drači 1892. i živeo i radio u Beogradu do 1982. godine. Bio je jedan od 1300 kaplara u Prvom svetskom ratu. Mobilisan je kao rezervni potpukovnik kada je počeo Drugi svetski rat, zarobljen je i proveo je u zarobljeništvu period rata do završetka 1945. godine. Kada je 1. marta 1948. osnovano *Društvo matematičara i fizičara Srbije*, Tadija Pejović je bio prvi predsednik ovog društva (1948-1952). Napisao je knjigu *Moje uspomene i doživljaji 1892-1945* u dva toma.

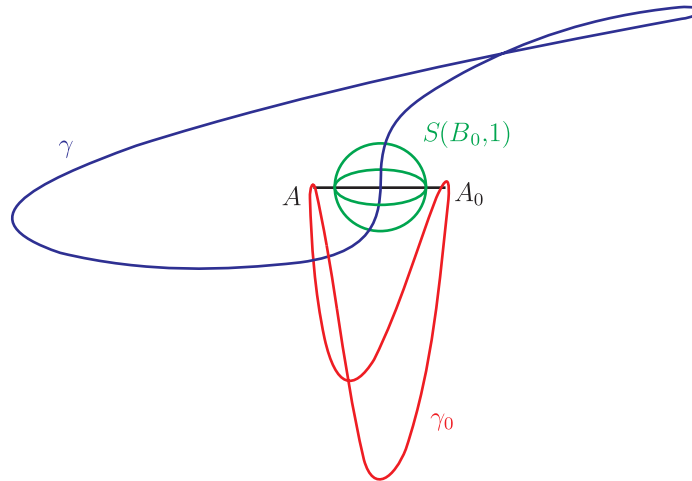
⁴Rođen je u Nikšiću 1914. i živeo i radio u Beogradu do 1993. godine.

⁵M. Mateljević, *Fragmenti sećanja na kompleksnu analizu u Beogradu (1968-1980) i Vojina Dajovića - Izoperimetrijska nejednakost, Hardy-jevi prostori i Fourier-ovi redovi*, Simpozijum MATEMATIKA I PRIMENE, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2013, Vol. IV(1).

⁶1925-2012, Order of the White Rose of Finland (1986), 1989 – izabran u National Academy of Sciences, Onsager Medal (1995), Steele Prize (2006).

O tome kako je došao na ideju za rešenje problema profesor Mateljević govori:

Pokušavao sam da konstruišem cilindre oko krivih, ali se problem stalno „otimao“. Otišao sam u Šid da se malo odmorim i posetim porodicu. Razgovarao sam sa domaćinom, ali Gehringov problem je stalno bio u glavi. Domaćin je ponudio da probamo domaće vino (*In vino veritas*) i iznenada, kao iz anegdote o Banachu, slika rešenja se pojavila. Video sam materijalne tačke kako se kreću i opisuju krive.⁷



Slika 4. Gehringov problem

U rešenju Gehring-ovog problema učestvuju sfera i kružnica, najsavršenije figure u svojim klasama. Sfera je simetrična u odnosu na svaku ravan kroz njen centar, a ekstremalnu situaciju čine dve kružnice koje pripadaju ortogonalnim ravnima tako da svaka prolazi kroz centar druge.

Kompletno rešenje Gehringovog problema profesor Mateljević objavio je u radu: *On linked Jordan curves in \mathbb{R}^3* , Mat. Vesnik (12) (27), 1975, 285-286.

Magistrirao je 1976. godine, a doktorirao 1979. godine na PMF u Beogradu na temu - *Ocene normi i ekstremalni problemi u H_1* , koja je posvećena izoperimetrijskoj nejednakosti. Tu je protumačeno šta je dužina krive. Mentor za doktorsku disertaciju bio je Vojin Dajović, a u komisiji su bili još i Miodjub Nikić i Vladimir Mičić.

O nastavku svog naučnog rada profesor Mateljević govori:

U dogovoru sa profesorom Dajovićem odlučio sam da proučavam ekstremalne probleme u H^p prostorima.⁸ Došao sam na ideju da ovu temu povežem sa izoperimetrijskom nejednakošću koja je jedan od najznačajnijih problema geometrije; polazne rezultate objavio sam u magistarskom radu *Nejednakosti u H^p prostorima i njihova ekstremalna svojstva*. iz 1976. godine i doktorskoj disertaciji *Ocene normi i ekstremalni problemi u H^1* iz 1979. godine.

Može se reći da je problem izoperimetrijske nejednakosti star koliko i matematika uopšte. Međutim njegovi detaljni i korektni dokazi su ipak relativno novijeg datuma. Izoperimetrijska nejednakost se najčešće formuliše kao nejednakost između površine A i obima L neke pristo-povezane ograničene figure u ravni i ta nejednakost glasi:

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Figure istog obima nazivaju se izoperimetrijske figure.

⁷M. Mateljević, 2014, *Fragmenti sećanja na kompleksnu analizu u Beogradu (1968-1980) i Vojina Dajovića - Izoperimetrijska nejednakost, Hardy-jevi prostori i Fourier-ovi redovi*, Simpozijum MATEMATIKA I PRIMENE, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu.

⁸M. Mateljević, 2014, *Fragmenti sećanja na kompleksnu analizu u Beogradu (1968-1980) i Vojina Dajovića - Izoperimetrijska nejednakost, Hardy-jevi prostori i Fourier-ovi redovi*, Simpozijum MATEMATIKA I PRIMENE, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu.

Dajemo neke formulacije izoperimetrijskog problema.

- (A) Između svih zatvorenih izoperimetrijskih n -touglova, odrediti n -tougao koji ograničava najveću površinu.
- (B) Između svih zatvorenih krivih u ravni, date dužine L , odrediti krivu koja ograničava najveću površinu.

U svojoj doktorskoj disertaciji profesor Mateljević pokazao je sledeće teoreme:

Teorema 1 (Izoperimetrijska nejednakost 1). *Neka je $P = P_n$ zatvoren orijentisan mnogougao (koji može imati i tačke samopreseka), $A(P_n)$ orijentisana površina i $\ell(P_n)$ dužina granice mnogougla P . Tada je*

$$A(P) \leq \frac{1}{4\pi} \ell(P)^2.$$

Teorema 2 (Izoperimetrijska nejednakost 2). *Neka je γ neprekidna, rektificibilna, zatvorena kriva (u opštem slučaju sa tačkama samopreseka). Obeležimo sa S orijentisanu površinu oblasti $G = \text{Int}(\gamma)$ i sa L dužinu krive γ . Tada važi*

$$|S| \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Može se konstruisati poligonalna linija (specijalno ravnoustrani mnogougao Λ sa parnim brojem stranica) tako da se njegov obim L_* i površina S_* proizvoljno malo razikuju od L i S . Ako bi bilo $L^2 - 4\pi S < 0$, moglo bi se odrediti Λ , tako da je $L_*^2 - 4\pi S_* < 0$, što protivreči nejednakosti za ravnoustrane mnogouglove.

Teorema 3 (Izoperimetrijska nejednakost 2). *Neka je γ neprekidna, rektificibilna, zatvorena Jordan-ova kriva. Neka je S površina oblasti $G = \text{Int}(\gamma)$ i L dužina krive γ . Tada važi*

$$2\pi \text{cap}(G) \leq L, \quad S \leq \pi(\text{cap}(G))^2, \quad (1)$$

i otuda

$$4\pi S \leq L^2. \quad (2)$$

Profesor Mateljević bio je u zimskom semestru 1981. počasni gost na Univerzitetu Winsconsin-Madison. Za docenta Matematičkog fakulteta izabran je 1983, za vanrednog profesora 1989, a za redovnog profesora 1995. godine. U toku zimskog semestra 1988. godine bio je vanredni profesor na University of Pittsburgh, a u toku školske 1988/89. – vanredni profesor na Wayne State University, Detroit. Učestvovao je na oko 50 međunarodnih konferencija gde je držao oko dvadeset uvodnih predavanja po pozivu (Poljska i Bugarska akademija nauka, na IWWA u SAD, na Nevannlina Colloquium u Švajcarskoj, Indiji, Novosibirsku itd.), kao i na brojnim domaćim konferencijama.

Predavao je Matematiku I i II, Analizu I i II, Teoriju realnih i kompleksnih funkcija, Kompleksnu analizu, a na poslediplomskim studijama držao je niz kurseva: Analiza na mnogostrukostima (SAD), Kompleksna analiza (SAD), Konformne invarijante, Kvazikonformna preslikavanja, Kompleksna dinamika, Geometrijska teorija funkcija itd. Bio je šef katedre za Kompleksnu analizu u više navrata, rukovodilac mnogih projekata, dekan Matematičkog fakulteta u dva mandata, itd.

Profesor Mateljević je pre svega stručnjak za kompleksnu analizu u kojoj je postigao rezultate značajne na svetskom nivou. Osnivač je i rukovodilac seminara za Kompleksnu analizu od 1991. Rad seminara, posredno ili neposredno, uticao je da se dobije niz naučnih rezultata. Između ostalog, rešeno je nekoliko poznatih Tajhmilerovih (Teichmüller) problema na kojima su radili istaknuti matematičari. Rezultati u vezi sa rešenjem Tajhmilerovih problema o karakterizaciji jedinstveno ekstremalnih kvazikonformnih preslikavanja, Geringovim problemom i izoperimetrijskim nejednakostima harmonijskih i analitičkih funkcija su prezentovani, sa dokazima, u međunarodnim monografijama.

3.1. Istaknuti radovi

Profesor Miodrag Mateljević do sada je objavio oko osamdeset naučnih radova.

Prema Google Scholar sajtu u septembru 2015. ukupan broj citata za sedam radova je $120 + 70 + 63 + 61 + 47 + 45 + 20 = 426$. Prikazujemo spisak sedam najviše citiranih radova M. Mateljevića:

- [1] 120 citata: Mateljević, M., Pavlović, M., *Behavior of power series with positive coefficients and Hardy Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. **87** No.2 (1983), 309–316.
- [2] 70 citata: Božin, V., Lakić, N., Marković, V., Mateljević, M., *The unique extremality*, Journal d'Analyse Math. **75** (1998), 299–338.
- [3] 63 citata: Mateljević, M., Pavlović, M., *Multipliers of H^p and BMOA*, Pacific Journal of Mathematics **146** (1990), 71-84.
- [4] 61 citata: Mateljević, M., Pavlović, M., *L^p -behaviour of the integral means of analytic functions*, Studia mathematica Vol. **77** (1983), 219–237.
- [5] 47 citata: Kalaj, D., Mateljević, M., *Inner estimate and quasiconformal harmonic maps between smooth domains*, J Anal Math (J. d'Analyse Math.) Vol. **100** (2006) 117–132.
- [6] 45 citata: M. Knežević, M. Mateljević, *On the quasi-isometries of harmonic quasi-conformal mappings* J Math Anal Appl (J. Math. Anal. Appl.), 2007, **334** (1), 404-413.
- [7] 20 citata: Mateljević, Marković, *New versions of the main inequality and uniqueness of harmonic maps*, J. d'Analyse Math **79**, 1999, 315-334.



Slika 5. Miodrag Mateljević



Slika 6. Lars Ahlfors

Među ovim radovima posebno se ističu radovi *Unique extremality of quasiconformal mappings*, štampan u *Journal d'Analyse Mathematique*, i *The unique extremality*, štampan u *Journal d'Analyse Mathematique*, koji su objavljeni zajedno sa V. Božinom, N. Lakićem i V. Markovićem. Ocena ovih radova najbolje se vidi u knjizi Američkog matematičkog društva koje je predstavilo novo izdanje Alforsove monografije u kome su prikazane i tri dodatne glave. U jednoj od njih piše:

For many years, all known uniquely extremal maps had the general form of Teichmüller mappings, but with the quadratic differentials not necessarily integrable. The paper [34] by Bozin, Lakic, Markovic and Mateljevic changed the situation dramatically.

(I) Božin, V., Lakić, N., Marković, V., **Mateljević, M.**, *The unique extremality*, Journal d'Analyse Math. **75** (1998), pp 299–338.

Teorema 4. (Ekvivalencijska teorema I) Neka $\chi \in \mathcal{M}$. Tada je χ jedinstveno ekstremalan u svojoj Teichmüller-ovoj klasi ako i samo je χ jedinstveno ekstremalan u svojoj infinitezimalnoj klasi.

Primetimo da postoje mnogi primeri ekstremalne dilatacije sa nekonstantnim modulom. Međutim, svi primeri jedinstveno ekstremalnih dilatacija poznatih do publikovanja naših naučnih radova bili su Teichmüller-ovog tipa. Štaviše, mnogi rezultati dobijeni proučavanjem ekstremalnih problema imaju pretpostavku da sve jedinstveno ekstremalne dilatacije μ zadovoljavaju uslov $|\mu(z)| = \|\mu\|_\infty$, za skoro svako z . U radovima profesora Mateljevića sa ovom tematikom osporena je ova pretpostavka i pokazano je da postoje jedinstveno ekstremalne dilatacije sa nekonstantnim modulom. Pod ovim se misli na dokaz onog rezultata koji predstavlja konstrukciju

University
LECTURE
Series

Volume 38

Lectures on
Quasiconformal
Mappings

Second Edition

Lars V. Ahlfors

with additional chapters by
C. J. Earle and I. Kra
M. Shishikura
J. H. Hubbard



American Mathematical Society
Providence, Rhode Island

Slika 7. Naslovna strana knjige Lectures on Quasiconformal Mappings

jedinstveno ekstremalnih dilatacija sa nekonstantnim modulima (skraćeno „konstrukcija”), dok oblik jedinstveno ekstremalne kompleksne dilatacije može biti veoma složen.

Earle i Kra napisali su: „Mnogo godina do sada, sva poznata jedinstveno ekstremalna preslikavanja su imala opšti oblik Teichmüller-ovih preslikavanja, sa kvadratnim diferencijalima koji ne moraju biti integrabilni. Radom čiji su autori Božin, Lakić, Marković i Mateljević situacija se dramatično promenila”.

(II) **Mateljević, M.**, Pavlović, M., *Behavior of power series with positive coefficients and Hardy Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. **87** No.2 (1983), pp 309–316.

Neka su $\alpha > 0$, $p > 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_n \geq 0$, $I_n = \{k : 2^n \leq k < 2^{n+1}, k \in \mathbb{N}\}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ i $t_n = \sum_{k \in I_n} a_k$. Tada postoji konstanta K , koja zavisi od p i α , tako da važi

$$\frac{1}{K} \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} t_n^p \leq \int_0^1 (1-x)^{-1} f^p(x) dx \leq K \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} t_n^p.$$

(III) **Mateljević, M.**, Pavlović, M., *Multipliers of H^1 and BMOA*, Pacific Journal of Mathematics **146** (1990), pp 71–84.

Neka su A i B dva vektorska prostora nizova. Niz $\lambda = \{\lambda_n\}$ se naziva multiplikatorom iz prostora A u prostor B ako važi $\{\lambda_n a_n\} \in B$, kad god je $\{a_n\} \in A$. Skup multiplikatora iz prostora A u prostor B označava se sa (A, B) . U daljem, analitičkoj funkciji na jediničnom disku $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ ćemo pridružiti niz koeficijenata dobijenih u Tejlorovom razvoju te funkcije, oko tačke $z = 0$, na \mathbb{D} .

Za funkciju g , koja je analitička na jediničnom disku \mathbb{D} , kažemo da pripada Blohovom prostoru \mathcal{B} ako važi $\|g\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|) |g'(z)| < \infty$.

Teorema 5. $(H^1, BMOA) = \mathcal{B}$, gde je BMOA prostor analitičkih funkcija na jediničnom disku \mathbb{D} , koje su ograničene srednje oscilacije. \square

(IV) **Mateljević, M.**, Pavlović, M., *L^p-behaviour of the integral means of analytic functions*, *Studia Mathematica* Vol. **77** (1983), pp 219–237.

Neka je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < 1$, analitička funkcija, $p, q \in (0, +\infty]$, $0 < r < 1$ i $0 < \alpha < +\infty$. U ovom radu se koriste uobičajene oznake za integralne sredine i normu funkcije f :

$$M_p(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, p > 0,$$

kao i

$$M_{\infty}(r, f) = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(re^{it})| \quad \text{i} \quad \|f\|_p = \sup_{0 < r < 1} M_p(r, f).$$

Kažemo da analitička funkcija $f \in X = H(p, q, \varphi)$ ako važi $F \in L^q(0, 1)$, gde je

$$F(r) = (1-r)^{-\frac{1}{q}} \varphi(1-r) M_p(r, f), \quad 0 < r < 1,$$

i φ je nenegativna rastuća funkcija definisana na $(0, 1]$, za koju je $C^{-1}t^{-\beta} \varphi(r) \leq \varphi(tr) \leq Ct^{-\beta} \varphi(r)$, $0 < t < 1$, $C > 0$, $\beta > 0$ ($\beta \geq \alpha > 0$). Norma u $X = H(p, q, \varphi)$ je data sa $\|f\|_X = \|F\|_{L^q}$.

Teorema 6. Neka je $I_0 = \{0\}$, $I_n = \{k : 2^{n-1} \leq k < 2^n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(r) = r^{-\alpha}$ i $\Delta_n(z) = \Delta_n f(z) = \sum_{k \in I_n} a_k z^k$. Tada je $f \in H(2, q, \varphi)$ ako i samo ako niz $\{2^{-n} \|\Delta_n\|_2\}_{n=0}^{\infty}$ pripada prostoru nizova l^q . \square

Teorema 7. Neka je $1 \leq p \leq +\infty$. Tada je $f \in H(p, q, \varphi)$ ako i samo ako je niz

$$\left\{ \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) (n+1)^{-\frac{1}{q}} \|\sigma_n\|_p \right\}_{n=0}^{\infty} \in l^q,$$

gde je $\sigma_n(z) = \sigma_n f(z) = \sum_{k=0}^n (1 - k/(n+1)) a_k z^k$. \square

(V) Kalaj, D., **Mateljević, M.**, *Inner estimate and quasiconformal harmonic maps between smooth domains*, *J Anal Math (J. d'Analyse Math.)* Vol. **100** (2006) pp 117–132.

U ovom radu je dokazana verzija „unutrašnje procene” za kvazikonformne difeomorfizme, koji zadovoljavaju određene nejednakosti koje se tiču njihovih Laplasijana. Ta činjenica povlači da kvazikonformna harmonijska preslikavanja između glatkih domena (u odnosu na približno analitičku metriku) imaju ograničene parcijalne izvode. Zapravo, ovakva preslikavanja su Lipschitz-ova. Takođe, u ovom radu su proučavana harmonijska preslikavanja u odnosu na

- (a) sfernu i euklidsku metriku (koje su približno analitičke metrike),
- (b) metriku indukovanu holomorfnim kvadratnim diferencijalom.

3.2. Odabrane publikacije – knjige i monografije

U izdanju Društva matematičara Srbije objavio je udžbenik „Kompleksne funkcije 1&2” 2006. godine. Posle više od 30 godina ovo je prvi savremeni udžbenik iz kompleksne analize na srpskom jeziku koji se koristi na više univerziteta za osnovne i postdiplomske studije.

U Zavodu za udžbenike objavio je još dva udžbenika:

M. Mateljević, *Kompleksna analiza 1*, Zavod za udžbenike, Beograd 2012,

M. Mateljević, *Kompleksna analiza 2*, Zavod za udžbenike, Beograd 2012,

kao i jednu monografiju

M. Mateljević, *Topics in Conformal, Quasiconformal and Harmonic maps*, Zavod za udžbenike, Beograd 2012.

Dobitnik je Nagrade grada Beograda za 2006. godinu za udžbenik-monografiju „Kompleksne funkcije 1&2”.

3.3. Mateljevićev Seminar za kompleksnu analizu i mentorski rad

Današnji beogradski seminari iz analize vuku korene iz prošlosti i rada sledećih matematičara: Gavrilović, Petrović, Karamata, Radojčić, Aljančić, Mitrinović, Dajović, Adamović, Stanojević, Mirković, Nikić, Udovičić, Arandelović i kasnije Mateljević, Jevtić, Pavlović, Kadelburg, Lažetić. U Novom Sadu dostignuća iz analize imali su Stanković, Marić, a kasnije Pilipović, dok u Nišu Milovanović, Rakočević, itd.

Od 1980. do 1989. godine na seminarima za analizu u Beogradu se razmatraju pitanja uglavnom iz klasične analize. M. Mateljević je osnivač i rukovodilac Seminara (GFT) za kompleksnu analizu od 1991. godine. Od 1992. godine Seminar okuplja mlade matematičare i počinje posredno da igra važnu ulogu (kroz dodatne aktivnosti) u obrazovanju naših matematičara i formiranju određenog pogleda na matematiku. Rad Seminara, posredno ili neposredno, uticao je da se dobije niz interesantnih rezultata. Spomenimo samo da je rešeno nekoliko poznatih Tajhmilerovih problema, na kojima su radili istaknuti matematičari, kao što su: Strebel, Earle, Reich, Hayman, Krushkal i drugi.

Seminar za kompleksnu analizu ima međunarodnu reputaciju, govori se i o beogradskoj matematičkoj školi. Izgledalo je da je kompleksna analiza u Beogradu dostigla najvišu tačku. Ali iznenađenja se nastavljaju. Na seminaru se pojavljuju V. Marković i V. Božin (smatraju se učenicima profesora Mateljevića). Zajedno sa Lakićem rešavaju Teichmüller-ov problem ekstremalnih dilatacija⁹. V. Marković¹⁰ je svetski lider u teoriji qc preslikavanja i 3-dimenzionalnoj topologiji i geometriji i profesor na Cambridge-u¹¹ i CALTECH-u. D. Kalaj i D. Šarić stiču međunarodnu reputaciju; na seminaru su počeli i V. Božin, N. Lakić, D. Vukotić¹², N. Šešum¹³, D. Šarić. Trenutno na Seminaru aktivno učestvuju M. Marković, M. Knežević, M. Svetlik, N. Mutavdžić, B. Karapetrović, P. Melentijević. Za Seminar (ili za grupu iz kompleksne analize) su vezani i M. Jevtić, M. Pavlović, M. Arsenović, S. Stević, I. Anić, M. Laudanović, O. Mihić¹⁴, N. Babačev, A. Abaob, A. Shkheam, D. Đurčić, S. Nikčević, V. Grujić, D. Kečkici, R. Živaljević, D. Milinković, D. Jocić, Đ. Milićević, D. Damjanović, D. Ranković, V. Baltić, N. Baranović (Jozić) i M. Albijanić.

Na Seminaru razmatraju se teme: kvazikonformna i harmonijska preslikavanja (veze sa kompleksnom dinamikom, Tajhmilerova teorija i hiperboličke 3-mnogostrukosti). Od 1996. intenzivno se razmatraju kvazikonformna i harmonijska preslikavanja. Pokazano je da su qc preslikavanja koja ispunjavaju nejednakosti između laplasijana i gradijenta, Lipšicova u prostoru i bi-Lipšicova u ravni. Opisana su qc harmonijska preslikavanja pomoću granične funkcije. Rešeno je nekoliko otvorenih problema koje je postavio O. Martio.

Profesor Mateljević bio je mentor većem broju studenata za specijalističke radove, a jedan od njih je i M. Albijanić; za magistarske radove, a među kojima su I. Anić, M. Laudanović, D. Sarić, N. Lakić, I. Strugar, M. Knežević i za doktorske teze, a među njima su V. Marković, S. Stević, D. Kalaj, V. Manojlović, M. Knežević i drugi. Među njegovim doktorandima posebno se istakao Vladimir Marković, sada univerzitetski profesor u Americi i Engleskoj. Nekoliko studenata M. Mateljevića danas se nalazi u grupi najkvalitetnijih naučnika na najpoznatijim svetskim univerzitetima.

3.4. Miodrag Mateljević – ličnost, pedagog, naučnik i dekan

U životu pun je vedrog duha i naročito voli lepotu (Kantove reči: *lepota je najviše dobro*). To je doprinelo da i u pedagoškom smislu traga za dobrim i lepim stilom, da osnovne postavke piše jasno i pregledno uz izuzetni vizuelni doživljaj.

Miodrag Mateljević pripada matematičarima platonistima, iako se i sam zalaže za formalnu strogoću. Važno mu je da ima ideju, to je vodilja koja pokreće njegovu intuiciju.

Profesor Miodrag Mateljević je dobitnik Nagrade grada Beograda za 2006. godinu. Tom prilikom je nekoliko svetskih matematičara dalo pisanu podršku kandidaturi za ovu nagradu. To su Edgar Reich, Vladimir A. Zorich, Cabiria Andreian Cazacu, Reiner Kuehnau i Krushkal Samuel, čije osvrte na naučni doprinos M. Mateljevića navodimo u nastavku.

1. *Krushkal Samuel*: Upoznat sam sa njegovim radom od 1983. Profesor Mateljević je sada daleko poznat vodeći stručnjak u određenim važnim oblastima geometrijske kompleksne analize i njenih

⁹ „Ahlfors-ov duh je ponovo u Beogradu”.

¹⁰ 2014. godine izabran za člana Britanskog (engleskog) kraljevskog društva (engleski Royal Fellow of the British Royal Society).

¹¹ Sadlerijan profesor na Univerzitetu Cambridge; ovu poziciju imao je i Hardy.

¹² Profesor na Universidad Autónoma de Madrid, España.

¹³ Profesor na Univerzitetu Rutgers - State University of New Jersey New Brunswick, NJ., pozivno predavanje u sekciji ICM2014, Seoul, Korea.

¹⁴ Uspostavila saradnju sa Shamoyan-om.

primena, gde je dao izuzetno značajne doprinose. Pre svega, oni se odnose na teoriju ekstremalnih kvazikonformnih preslikavanja, teoriju harmonijskih preslikavanja na mnogostrukostima i metričku geometriju. Njegovi rezultati o jedinstvenosti ekstremalnih kvazikonformnih preslikavanja i proširenje i generalizacija klasične Ahlfors-Schwarz leme su od temeljne važnosti. Njegovi drugi radovi o harmonijskim i kvazikonformnim preslikavanjima su takođe objavljeni u prestižnim časopisima. Ukratko, mogu karakterizovati profesora Miodraga Mateljevića kao izuzetno dobrog i kreativnog matematičara, s najjačim istraživačkim potencijalom, koji neprekidno proizvodi naučne rezultate najvišeg kalibra.

2. *Edgar Reich*: Mateljević je izvanredno doprineo svojim radom, svojim Seminarom i radom sa studentima doktorskih studija sadašnjem stanju znanja u oblasti ovog specijalnog broja: „Quasiconformal and Harmonic Mappings”, of the Publications de l’Institut Mathématique. Siguran sam da će ovo specijalno izdanje sa svojom prekrasnom zbirkom mnogo fascinantnih članaka motivisati dalji rad u godinama koje dolaze.

3. *Vladimir A. Zorich*: Po mom ne kratkotrajnom zapažanju profesor Mateljević je aktivan kao matematičar - naučnik (istraživanje ekstremalnih problema teorije harmonijskih i kvazikonformnih preslikavanja), kao matematičar - profesor (novi kursevi za studente), kao matematičar-organizator (kreator međunarodnog specijalnog broja časopisa Publication Inst Math-Belgrade, nouvelle serie 75(89), 2004., pod naslovom: Harmonic and Quasiconformal mappings). Učešće u pomenutom specijalnom broju Publication-a matematičara različitih zemalja je istovremeno izraz poverenja i poštovanja prema profesoru Miodragu Mateljević u kao naučniku.

4. *Cabiria Andreian Cazacu*: Profesor Miodrag Mateljević je jedan od velikih savremenih matematičara sa važnim doprinosom u razvoju geometrijske teorije funkcija u domenu kvazikonformnih i harmonijskih preslikavanja. Znam direktno njegov značajni doprinos i o jakoj školi koja je osnovana u Jugoslaviji, jer sam slušala njegovo pozivno predavanje na Nevanlinna kolokviju u Lozani 1997. Dalje smo osnovali plodnu saradnju. Profesor Mateljević učestvovao je sa zanimljivim predavanjima na međunarodnim konferencijama iz kompleksne analize - Rumunsko-finski seminari u Jašiju 1999 i 2000, Brašov i na petom kongresom rumunskih matematičara u Pitestiju 2003. U 2004. godini održao je dve izvrsne serije predavanja u poznatoj školi Instituta za matematiku „Simion Stoilow” Rumunske akademije nauka i objavio je nekoliko vrednih radova u Revue de mathematiques Roumaine Pures et Appliquees. Sve ove aktivnosti su dale podsticaj za istraživanja u Rumuniji u ovom području. Njegovi izuzetni rezultati o Dirihleovom principu, distorziji i jedinstvenosti harmonijskih preslikavanja i ekstremalnih kvazikonformnih preslikavanja zaslužuju jednoglasno uvažavanje matematičke zajednice.

5. *Reiner Kuehnau*: Ne samo njegovi radovi, već su i radovi njegovih studenata dobro poznati danas. Želim da iskoristim posebnu priliku da kažem i sledeće: Profesor Mateljević imao je pre nekoliko meseci plodnu ideju da pripremi posebno izdanje „Publications de l’Institut Mathématique” (Beograd) sa radovima u oblasti kvazikonformnih i harmonijskih preslikavanja. Rezultat je vrlo impresivna zbirka radova vrhunskih autora sa istoka i sa zapada. Ova zbirka je vrlo korisna za one koji rade u ovom polju.

Bio je dekan Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu od 2007. do kraja 2014. godine. Za dopisnog člana Srpske akademije nauka i umetnosti izabran je 1. novembra 2012. godine. Kao dekan Matematičkog fakulteta postigao je značajne rezultate. Nastavno-naučna veća na Fakultetu veoma su zahtevna, jer je teško upravljati tamo gde je velika koncentracija pameti, ali dekan Mateljević svojim ljudskim kvalitetima, uz visok nivo socijalne inteligencije, uspešno je rešavao značajna pitanja koja se tiču podizanja kvaliteta nastave, napredovanja nastavnika, angažovanja u naučnim projektima i konferencijama i drugo. Ali pored svih ovih standardnih pitanja dva rezultate posebno se ističu.

1. Univerzitet u Beogradu, zahvaljujući, pre svega pisanju naučnih radova svojih profesora, izuzetno je napredovao na Šangajskoj listi univerziteta. Ubedljivo najveći doprinos tome pružio je Matematički fakultet u Beogradu, sa izuzetnim naučnim radovima svojih profesora, i to ne samo po kvalitetu već i po broju naučnih radova, koji su nadvisili i nadaleko čuveni Univerzitet u Kembridžu, sa kojim nadmetanje skoro da nije moguće.

2. Upis na Matematički fakultet u Beogradu značajno se razlikuje na početku mandata dekana Mateljevića i danas, posle sedam godina rukovođenja. Naime, upis na početku mandata bio je takav da se jedva ispunjavala

predviđena kvota studenata. Danas, zahvaljujući angažovanju dekana, Mateljevića, njegovog tima, svih profesora i drugih društvenih okolnosti, upis na Matematički fakultet je takav da na jedno mesto konkurišu tri kandidata. Ova činjenica poboljšava kvalitet studenata, doprinosi još boljem kvalitetu studiranja i razvoja matematike u Srbiji.

U radu posvećenom Vojinu Dajoviću, Mateljević postavlja pitanje da li sam dostigao vrh Balkanske ulice i da li mogu da popijem kafu u hotelu Moskva? To pitanje ima jasan odgovor: Vi ste profesore Mateljeviću stigli u Knez Mihailovu ulicu, u Srpsku akademiju nauka i umetnosti, u kojoj sada slobodno možete piti kafu u pauzama daljeg stvaralačkog rada.

Lokacijski problem optimalnog raspoređivanja korisnika s prioritetima

Stefan Mišković

Matematički fakultet, Studentski trg 16, Beograd
e-mail: stefan@matf.bg.ac.rs

Apstrakt. Predloženi lokacijski problem polazi od skupa korisnika i skupa resursa, kao i cena dodeljivanja svakog korisnika svakom resursu. Za svakog korisnika dati su odgovarajući prioriteti pridruživanja svakom resursu, pri čemu se u optimalnom slučaju korisnik pridružuje onom uspostavljenom resursu za kojeg je vrednost prioriteta najmanja. Broj uspostavljenih resursa je unapred fiksiran, a svakog korisnika je potrebno dodeliti tačno jednom resursu, tako da je ukupna cena pridruživanja korisnika koji su dodeljeni nekom resursu najmanja. Za dati model, prikazana je osnovna i robusna formulacija, pri kojoj variraju cene pridruživanja. Za rešavanje instanci problema većih dimenzija predložen je memetski algoritam, koji predstavlja hibridizaciju genetskog algoritma i algoritma zasnovanog na lokalnom pretraživanju. Za instance, koje je bilo moguće rešiti pomoću CPLEX-a u razumnom vremenskom roku, prikazano je odgovarajuće poređenje rezultata, a za ostale su prikazani rezultati memetskog algoritma.

Ključne reči: Lokacijski problem; Robusna optimizacija; Memetski algoritam; Prioriteti korisnika.

1. Uvod

Lokacijski problemi čine posebnu grupu optimizacionih problema, kod kojih se najčešće, pod odgovarajućim uslovima, minimizuje određeno najveće rastojanje, suma rastojanja, ukupno vreme transporta, cene uspostavljanja resursa, i slično. Prema obliku funkcije cilja, oni se dele na min-sum probleme, kod kojih se, uz odgovarajuće uslove, minimizuje suma rastojanja, kao i min-max probleme, kod kojih se obično minimizuje maksimalno rastojanje između određenog fiksiranog čvora i uspostavljenog resursa. Ovaj problem pripada drugoj pomenutoj grupi i razmatra opterećenost uspostavljenih resursa na odgovarajućim lokacijama. U literaturi, većina lokacijskih problema u funkciji cilja uzima u obzir potražnju korisnika, dok razmatranje opterećenosti resursa nije toliko zastupljeno. Tako, ako se pod opterećenošću resursa podrazumeva suma svih cena pridruživanja koji su mu dodeljeni, u [10] su konstruisana dva modela, od kojih prvi minimizuje njegovu maksimalnu opterećenost, a drugi razliku između odgovarajuće maksimalne i minimalne opterećenosti. U radu je razvijen hibridni genetski algoritam unutar koga je inkorporirana lokalna pretraga. Predloženi pristup uspešno rešava instance dimenzija do 20000 korisnika i 500 resursa. U [9] je predložen balansirani lokacijski problem, gde se takođe razmatra razlika maksimalnog i minimalnog opterećenja, pri čemu se ovde pod tim podrazumeva broj korisnika koji su dodeljeni određenom uspostavljenom resursu. Razvijen je algoritam grananja i odsecanja, gde su uspešno rešavane instance sa do 100 korisnika i 50 resursa. Za razmatrani problem su u [11] razvijena dva metaheurička metoda koja efikasno rešavaju instance iz [9]. U [5] je razvijen genetski algoritam, a u [7] metoda promenljivih okolina za balansirani lokacijski problem, pri čemu oba pristupa uspešno rešavaju instance dimenzija do 1000 korisnika.

U ovom problemu razmatra se skup korisnika I i skup resursa J , kojima ti korisnici moraju biti dodeljeni, pri čemu je $|I| = m$ i $|J| = n$. Označimo sa d_{ij} , $i \in I$, $j \in J$ prioritete korisnika, a sa c_{ij} odgovarajuću cenu pridruživanja korisnika i resursu j . Potrebno je svakog korisnika dodeliti tačno jednom resursu, tako da je ukupna cena pridruživanja nekom resursu najmanja. Broj resursa koji mora biti uspostavljen je p ($p \leq n$), a svaki korisnik se dodeljuje onom resursu od uspostavljenih, čija je odgovarajuća preferenca najmanja. Razmatrani problem predstavlja uopštenje prvog problema iz [10], gde se u obzir uzimaju prioriteti korisnika za pridruživanje resursima.

Predloženi problem ima primenu prilikom efikasnog procesuiranja podataka dobijenih od korisnika sa društvenih mreža ili nekih drugih jedinica, na kojima korisnici mogu komunicirati ili razmenjivati podatke [10]. Pritom se ti podaci mogu pridružiti određenom kontrolnom resursu, pri čemu je cilj da se izvrši takav odabir resursa, kako bi se podaci što efikasnije procesuirali. Prilikom odlučivanja koji resurs će biti dodeljen kom korisniku, u obzir se mogu uzeti i prioriteti dodeljivanja, čija vrednost može zavisiti od fizičke lokacije resursa, pogodnosti podataka za obradu, i slično.

2. Matematička formulacija

Neka su, za svako $i \in I$ i $j \in J$, binarne promenljive x_{ij} i y_j definisane na sledeći način:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je korisnik } i \text{ dodeljen resursu } j, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{ako je resurs } j \text{ uspostavljen,} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

i neka promenljiva z predstavlja vrednost funkcije cilja.

Potrebno je izračunati

$$\min z \quad (1)$$

uz sledeća ograničenja:

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in I, \quad (2)$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J, \quad (3)$$

$$\sum_{j \in J} y_j = p, \quad (4)$$

$$\sum_{k \in J} d_{ik} x_{ik} \leq d_{ij} + M(1 - y_j) \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J, \quad (5)$$

$$\sum_{i \in I} c_{ij} x_{ij} \leq z \quad \forall j \in J, \quad (6)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J, \quad (7)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, \quad (8)$$

$$z \geq 0. \quad (9)$$

Uslov (1) zajedno sa ograničenjima (6) predstavlja funkciju cilja koja se minimizuje. Ograničenja (2) označavaju da se svaki korisnik mora dodeliti tačno jednom resursu, a uslovima (3) je naznačeno da takav resurs mora biti uspostavljen. Uslov (4) ograničava broj uspostavljenih resursa na tačno p , a uslovom (5) je obezbeđeno da svaki korisnik mora biti dodeljen onom uspostavljenom resursu, za koji je vrednost prioriteta d_{ij} najmanja. Parametar M predstavlja dovoljno veliku pozitivnu konstantu za koju važi $M > \max\{d_{ij} : i \in I, j \in J\}$. Uslovi (7), (8) i (9) se odnose na ograničenja promenljivih.

Primer 1. Neka je $I = \{1, 2, 3, 4\}$, $J = \{1, 2, 3\}$, $m = |I| = 4$, $n = |J| = 3$ i $p = 2$. Pretpostavimo da su matrice $D = [d_{ij}]_{i \in I, j \in J}$ i $C = [c_{ij}]_{i \in I, j \in J}$ definisane sa

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 23 \\ 44 & 98 & 36 \\ 77 & 41 & 68 \\ 34 & 3 & 50 \end{bmatrix}.$$

Razlikujemo sledeća tri slučaja:

- Uspostavljeni su resursi 1 i 2. Tada će prvi i treći korisnik biti dodeljeni prvom, a drugi i četvrti drugom resursu. Ukupna cena pridruživanja korisnika prvom resursu iznosi $10 + 77 = 87$, a drugom $98 + 3 = 101$.

- Uspostavljeni su resursi 1 i 3. Tada su prvi i treći korisnik dodeljeni prvom resursu i ukupna cena pridruživanja iznosi $10 + 77 = 87$, a preostala dva korisnika trećem resursu sa ukupnom cenom $36 + 50 = 86$.
- Ako su uspostavljeni drugi i treći resurs, drugom resursu su dodeljena prva tri korisnika, a trećem preostali četvrti korisnik. Ukupne cene pridruživanja su redom $11 + 98 + 41 = 150$ i 50 .

Na osnovu prethodnog zaključujemo da je optimalno rešenje primera

$$\min\{\max\{87, 101\}, \max\{87, 86\}, \max\{150, 50\}\} = \min\{101, 91, 150\} = 87$$

i da su pritom uspostavljeni prvi i treći resurs.

3. Robusna formulacija

Jedan od problema prilikom konstrukcije matematičkih modela koji se odnose na realne probleme iz prakse jeste nepouzdanost ulaznih podataka. U literaturi postoji nekoliko pristupa za uključivanje nepouzdanosti ulaznih podataka u matematičke modele u cilju što realnijeg odslikavanja realnih situacija iz prakse. Među njima se najviše koriste stohastičko programiranje [3] i optimizacija sa probabilističkim uslovima [2]. Međutim, glavni problemi koji se javljaju prilikom primena ova dva pristupa su činjenica da su raspodele verovatnoća ulaznih podataka retko poznate u praksi i to što dimenzije rezultujućih modela drastično rastu sa porastom broja scenarija. Robusna optimizacija je pristup, kojim se u obzir uzima nepouzdanost ulaznih podataka određenog problema, gde je ideja da se, imajući u vidu promenljivost nekih ulaznih podataka, kreira robusni matematički model kojim se razmatra najgori mogući scenario. Pritom nije potrebno uzeti u obzir odgovarajuću raspodelu verovatnoća ulaznih podataka, već jedino mogući interval u kome je dozvoljeno variranje određenog podatka.

U [1] razmatra problem mešovitog celobrojnog programiranja, za koji je potrebno izračunati

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

uz sledeća ograničenja:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

$$l_j \leq x_j \leq u_j \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

$$x_j \in \mathbb{Z} \quad \forall j = 1, \dots, k \quad k \leq n.$$

Problem je definisan nad realnim parametrima $c_j, l_j, u_j, b_i, a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, a jedina pretpostavka za promenljive $x_j, j = 1, \dots, n$ je da je prvih nekoliko njih celobrojno. Dodatno, pretpostavlja se da su parametri c_j i a_{ij} podložni robusnosti, tj. da se posmatraju kao promenljive za koje nije poznata raspodela, a jedina dostupna informacija je da variraju u intervalima $[c_j, c_j + \tilde{c}_j]$ i $[a_{ij}, a_{ij} + \tilde{a}_{ij}]$, $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$.

Neka je $J_0 = \{j : \tilde{c}_j > 0, 1 \leq j \leq n\}$ skup svih indeksa j za koje je parametar c_j podložan robusnosti i neka je celobrojni parametar Γ_0 vrednost iz intervala $[0, |J_0|]$. Slično, definisani su skupovi $J_i = \{j : \tilde{a}_{ij} > 0, 1 \leq j \leq n\}, i = 1, \dots, m$, koji predstavljaju skupove onih indeksa j za koje je (za fiksiran indeks i) parametar a_{ij} podložan robusnosti. Sa Γ_i je označen celobrojni parametar iz intervala $[0, |J_0|], i = 1, \dots, m$. Uloga parametra Γ_0 je da definiše nivo robusnosti u funkciji cilja. Ako je $\Gamma_0 = 0$, tada nijedna od vrednosti c_j ne podleže robusnosti, dok za $\Gamma_0 = |J_0|$ je $\tilde{c}_j > 0$ za sve j , odnosno svi odgovarajući parametri podležu robusnosti. U praksi se ovakve situacije smatraju ekstremnim slučajevima i od interesa su one kada je samo jedan deo svih parametara robusan. Slično, Γ_i definiše nivo robusnosti za parametre koji se odnose na ograničenja. Ako je $\Gamma_i = 0$, nijedna vrednosti $a_{ij}, i = 1, \dots, m$ ne podleže robusnosti, dok za $\Gamma_i = n$ sve vrednosti podležu. Robusna varijanta polaznog modela, koja se može konstruisati na osnovu prethodnog, ima svoj linearni ekvivalent [1].

Pretpostavimo da, kod predloženog problema, pridruživanja c_{ij} variraju u intervalu $[C_{ij}, C_{ij} + \tilde{c}_{ij}]$, $\tilde{c}_{ij} \geq 0$. Označimo sa $G_j = \{i \in I : \tilde{c}_{ij} > 0\}$ i $\Gamma_j = [0, |G_j|] \cap \mathbb{N}$, $j \in I$. Kod robusne varijante problema, potrebno je izračunati minimum

$$q_j = \sum_{i \in I} C_{ij} x_{ij} + \max_{P \subset G_j: |P| \leq \Gamma_j} \sum_{i \in P} \tilde{c}_{ij} x_{ij}$$

po svim $j \in J$. Na taj način se može definisati robusna matematička formulacija, gde je potrebno odrediti (1) uz uslove (2) – (5), (7) – (9) i

$$q_j \leq z \quad j \in J. \quad (10)$$

Na osnovu teoreme 1 iz [1] sledi da se problem definisan uslovima (1) – (5), (7) – (10) može formulirati kao problem linearnog programiranja. Model se svodi na izračunavanje

$$\min z \quad (11)$$

uz sledeća ograničenja:

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in I, \quad (12)$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J, \quad (13)$$

$$\sum_{j \in J} y_j = p, \quad (14)$$

$$\sum_{k \in J} d_{ik} x_{ik} \leq d_{ij} + M(1 - y_j) \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J, \quad (15)$$

$$\sum_{i \in I} C_{ij} x_{ij} + z_j \Gamma_j + \sum_{i \in G_i} p_{ij} \leq z \quad \forall j \in J, \quad (16)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J, \quad (17)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, \quad (18)$$

$$z \geq 0, \quad (19)$$

$$z_j + p_{ij} \geq \tilde{c}_{ij} x_{ij} \quad \forall i \in G_i \quad \forall j \in J, \quad (20)$$

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in G_i \quad \forall j \in J, \quad (21)$$

$$z_j \geq 0 \quad \forall j \in J. \quad (22)$$

Osnovni matematički model predloženog problema sadrži $|I||J|+|J|+1$ promenljivih i $3|I||J|+|I|+2|J|+3$ ograničenja, dok robusni model sadrži $|I||J| + \sum_{j \in J} G_j |J| + |J| + 1$ promenljivih i $3|I||J| + 2 \sum_{j \in J} G_j |J| + |I| + 3|J| + 2$ ograničenja. Za razliku od osnovnog, kod robusnog modela pri fiksiranim uspostavljenim resursima treba razmotriti, imajući u vidu vrednost parametra Γ_j , uticaj uvećanih vrednosti cena dodeljivanja na vrednost funkcije cilja (videti algoritam 3).

4. Predloženi memetski algoritam

Memetski algoritam (MA) je heuristika bazirana na populaciji jedinki, koja predstavlja skup potencijalnih rešenja nad kojima se primenjuju odgovarajući operatori, kako bi se njihov kvalitet tokom izvršavanja algoritma poboljšavao. MA se sastoji od evolutivnog dela i lokalnog pretraživanja, koji je inkorporiran unutar jedne generacije evolutivnog algoritma [6]. On se bazira na filozofskoj teoriji Ričarda Dokinsa, prema kojoj se svo ljudsko saznanje može raščlaniti na jednostavnije delove – meme, koje se kasnije mogu duplirati, modifikovati ili kombinovati sa drugim memama, kako bi se kreirale nove [4]. Ovakav pristup je inspirisao naučnike kasnih osamdesetih godina da definišu pojam memetskog algoritma [8]. Prvi memetski algoritam je predstavljao modifikaciju genetskog algoritma, u koji je bila inkorporirana lokalna pretraga i bio je primenjen na problem trgovačkog putnika [8]. Iako su u vreme njihove najranije definicije memetski algoritmi od strane naučne zajednice posmatrani skeptično, krajem 20. veka do danas uočljiva je njihova nagla ekspanzija.

Osnovna struktura memetskog algoritma za rešavanje predloženog problema je prikazana algoritmom 1. Memetski algoritam je baziran na populaciji, a cilj je da se kroz generacije poboljšavanjem jedinki napreduje ka optimalnom rešenju. Najpre se učitaju ulazni podaci, nakon čega se vrši inicijalizacija populacije. U toku jedne generacije, sve dok nije ispunjen kriterijum zaustavljanja, vrši se primena operatora selekcije, ukrštanja i mutacije, nakon čega se na odabrani skup jedinki vrši lokalno pretraživanje. Nakon završene primene memetskog algoritma, ispisuje se dobijeno rešenje.

Algoritam 1 Prikaz memetskog algoritma

- 1: Učitavanje podataka
 - 2: Inicijalizacija
 - 3: **while** nije ispunjen kriterijum zaustavljanja **do**
 - 4: Primena selekcije
 - 5: Primena ukrštanja
 - 6: Primena mutacije
 - 7: Primena lokalne pretrage
 - 8: **end while**
 - 9: Ispis rešenja
-

4.1. Kodiranje i funkcija cilja

U memetskom algoritmu je korišćeno binarno kodiranje, a genetski kod svake jedinke sadrži tačno p bitova jednakih 1 i $n - p$ bitova jednakih 0. Nema nekorektnih jedinki. Funkcija cilja za osnovni model je prikazana algoritmom 2, a za robusni algoritmom 3. Kod funkcije cilja je, za svakog korisnika i , potrebno pronaći uspostavljeni resurs j za koji je vrednost parametra d_{ij} najmanja (ukoliko postoji više takvih, bira se proizvoljan). Kada je takav resurs pronađen, na odgovarajuću sumu sum_j se dodaje vrednost c_{ij} . Konačno, među svim uspostavljenim resursima, bira se onaj čija je suma sum_j , $j \in J$ najveća. Kod robusne varijante problema, se, umesto parametra c_{ij} , najpre dodaje vrednost C_{ij} , a zatim se među svim vrednostima \tilde{c}_{ij} izaberu Γ najvećih vrednosti, koje se dodaju na vrednost sume sum_j odgovarajućeg resursa. Pritom treba voditi računa da se u tom slučaju korisnik i takođe dodeljuje onom uspostavljenom resursu j čija je vrednost d_{ij} najmanja.

4.2. Evolutivni deo i lokalna pretraga

Populacija se sastoji od 60 jedinki. Od toga se 40 jedinki smatra elitnim i prenosi direktno u narednu generaciju, a na preostalim 20 se primenjuju genetski operatori. Korišćena je fino gradirana turnirska selekcija sa parametrom 5.4. Pri ukrštanju dve jedinke $Gene1$ i $Gene2$, izaberu se oni bitovi i i j za koje je $Gene1_i = 1$, $Gene1_j = 0$, $Gene2_i = 0$ i $Gene2_j = 1$. Zatim se vrednosti odgovarajućih bitova razmene. Dati proces se ponovi $\lfloor p/2 \rfloor$ puta. Korišćena je prosta mutacija sa verovatnoćom $0.4/n$. Verovatnoća ukrštanja iznosi 0.85. Početna populacija se generiše proizvoljno, a kriterijumi zaustavljanja su maksimalan broj iteracija i maksimalan broj ponavljanja vrednosti funkcije cilja najbolje jedinke. Ti parametri iznose redom 5000 i 500.

U svakoj generaciji se na elitne jedinke primenjuje lokalna pretraga i izvršava dok god ima poboljšanja. Pritom se biraju proizvoljna dva bita i i j , od kojih jedan ima vrednost 1, a drugi 0, a zatim se izvrši njihova zamena. Ako je f_{old} vrednost starog i f_{new} vrednost novog rešenja, novo rešenje se prihvata ako je $f_{new} < c \cdot f_{old}$, pri čemu je $c = 1 + \epsilon$, a ϵ nenegativna realna konstanta bliska nuli. U ovoj implementaciji algoritma je uzeto

Algoritam 2 Računanje funkcije cilja za osnovni model

```
1: for all  $j \in N$  do
2:    $sum_j \leftarrow 0$ 
3: end for
4: for all  $i \in M$  do
5:    $best \leftarrow 0$ 
6:   for all  $j \in \{j \in N : Gene_j = 1\}$  do
7:     if  $best = 0$  or  $d_{ij} < d_{i,best}$  then
8:        $best \leftarrow j$ 
9:     end if
10:  end for
11:   $sum_{best} \leftarrow sum_{best} + C_{i,best}$ 
12: end for
13:  $value \leftarrow 0$ 
14: for all  $j \in \{j \in N : gene_j = 1\}$  do
15:   if  $sum_j > value$  then
16:      $value \leftarrow sum_j$ 
17:   end if
18: end for
19: return  $value$ 
```

Algoritam 3 Računanje funkcije cilja za robusni model

```
1: for all  $j \in N$  do
2:    $sum_j \leftarrow 0$ 
3:    $S_{best} \leftarrow \emptyset$ 
4: end for
5: for all  $i \in M$  do
6:    $best \leftarrow 0$ 
7:   for all  $j \in \{j \in N : Gene_j = 1\}$  do
8:     if  $best = 0$  or  $d_{ij} < d_{i,best}$  then
9:        $best \leftarrow j$ 
10:    end if
11:  end for
12:   $sum_{best} \leftarrow sum_{best} + C_{i,best}$ 
13:  Add  $i$  to array  $S_{best}$ 
14: end for
15: for all  $j \in N$  do
16:   Sort array  $S_j$  in non-increasing order
17: end for
18: for all  $j \in N$  do
19:   for  $i \leftarrow 1$  to  $\min\{G_j, S_j\}$  do
20:      $sum_{best} \leftarrow sum_{best} + \tilde{c}_{S_j[i],best}$ 
21:   end for
22: end for
23:  $value \leftarrow 0$ 
24: for all  $j \in \{j \in N : gene_j = 1\}$  do
25:   if  $sum_j > value$  then
26:      $value \leftarrow sum_j$ 
27:   end if
28: end for
29: return  $value$ 
```

$\epsilon = 10^{-3}$. Lokalna pretraga se izvršava dok god ima poboljšanja. Takođe, unutar jedne generacije se na svaku jedinku primenjuje po 10 puta.

U slučaju osnovne formulacije modela, prilikom zamene dva bita, može se iskoristiti prethodna vrednost funkcije cilja, kako bi se smanjila vremenska složenost za izračunavanje nove. Neka su izabrana dva bita i i j takva da je $Gene_i = 1$ i $Gene_j = 0$. Tada, pri odbacivanju gena i iz razmatranja, prilikom menjanja genetskog koda, dovoljno je posmatrati samo one elemente skupa I koji su pridruženi elementu $i \in J$ i za njih, umesto za sve, pronaći element iz J za koji je vrednost odgovarajućeg prioriteta najmanja. Slično, prilikom uspostavljanja resursa j , dovoljno je za sve elemente $k \in I$ jednostavno proveriti da li je vrednost d_{kj} manja od odgovarajuće trenutne najmanje vrednosti.

5. Eksperimentalni rezultati

Implementacija memetskog algoritma je izvršena u programskom jeziku C# pod Windows 7 operativnim sistemom, a implementacija CPLEX-a je inkorporirana u programski jezik C++. Sva testiranja su izvršena pod procesorom Inter Core i5-2430M sa 2.4 GHz i RAM memoriji od 8 GB. Za svaku instancu, algoritam je pokretan po 15 puta, a gornje ograničenje vremenskog izvršavanja CPLEX-a iznosi 180 minuta.

Test instance nad kojima je testiran algoritam su generisane na slučajan način. Vrednosti parametara m , n i p se nalaze u tabelama. Vrednost C_{ij} je generisana uniformno u intervalu $[0, 1000]$. Elementi matrice $D = [d_{ij}]$, $i \in I$, $j \in J$ su celi pozitivni brojevi. U svakom redu te matrice se nalaze različiti pozitivni celi brojevi iz intervala $[1, m]$. U svim instancama, za sve $i \in I$, vrednosti parametara Γ_i su jednake, pri čemu je $\Gamma_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, u zavisnosti od primera. Vrednosti \tilde{c}_{ij} su birane uniformno, i to tako da se cena pridruživanja može povećavati između 10% i 20%.

Rezultati izvršavanja MA su prikazani u tabelama 1 i 2. U tabeli 1 su prikazane instance za koje CPLEX u dozvoljenom vremenskom intervalu bio u mogućnosti da pronađe optimalno rešenje, a u tabeli 2 rezultati MA na većim instancama, za koje optimalna rešenja nisu poznata. Značenja zaglavlja u tabelama su sledeća:

- m, n, p, Γ_i – odgovarajuće vrednosti parametara iz definicije problema;
- Solution – optimalno rešenje instance, gde god je CPLEX bio u mogućnosti da ga pronađe;
- t_{CPX} – vremensko izvršavanje CPLEX-a u sekundama;
- Best – najbolji pronađeni rezultat MA kroz svih 15 izvršavanja;
- t_{MA} – prosečno vremensko izvršavanje MA do trenutka dobijanja najboljeg rešenja.

U tabeli 1 su prikazani rezultati za instance sa poznatim optimalnim rešenjem za koje je $m = 50$. Za vrednosti ostalih parametara je važno $10 \leq n \leq 25$, $5 \leq p \leq 15$ i $0 \leq \Gamma_i \leq 7$. Može se uočiti da je za sve testirane instance memetski algoritam dostigao optimalno rešenje. Prosečno izvršavanje CPLEX-a po svim testiranim instancama iznosilo je 11.775 s, a memetskog algoritma 0.168 s, što je oko 70 puta brže. Dok je sve instance MA rešio za nešto manje od jedne sekunde, u najgorem slučaju CPLEX-u je bilo potrebno nešto manje od jednog minuta. U tabeli se može uočiti i da vrednost funkcije cilja u svim slučajevima raste sa porastom vrednosti parametra Γ_i .

U tabeli 2 su prikazani rezultati za instance čija optimalna rešenja nisu poznata i za koje je $m = 1000$. Za vrednosti ostalih parametara je važno $25 \leq n \leq 125$, $10 \leq p \leq 50$ i $0 \leq \Gamma_i \leq 7$. Prosečno izvršavanje memetskog algoritma po svim testiranim instancama iznosilo je 227.67 s, dok su sve instance rešene za nešto manje od deset minuta. U tabeli se može uočiti i da vrednost funkcije cilja u svim slučajevima raste sa porastom vrednosti parametra Γ_i .

6. Zaključak

U ovom radu je predložen lokacijski problem koji predstavlja uopštenje problema iz [10], kod koga se u obzir uzimaju prioriteta klijenata. Problem je iz grupe min-max lokacijskih problema i predstavlja varijantu problema p -centra, kod koje se minimizuje maksimalna opterećenost resursa. Predloženi problem ima primenu prilikom efikasnog procesuiranja podataka dobijenih od korisnika sa društvenih mreža ili nekih drugih jedinica, na kojima korisnici mogu komunicirati ili razmenjivati podatke.

Razvijena je odgovarajuća matematička formulacija problema, gde je on predstavljen kao problem mešovito celobrojnog programiranja. Dodatno, razmatran je slučaj kada cene pridruživanja korisnika variraju unutar fiksnog intervala, gde je razvijena odgovarajuća robusna varijanta matematičkog modela, koja je takođe predstavljena u linearnom obliku. Konstruisan je i memetski algoritam prilagođen problemu, koji predstavlja hibridizaciju genetskog algoritma i algoritma zasnovanog na lokalnom pretraživanju. Kao genetski operatori su korišćeni

Tabela 1. Rezultati CPLEX-a i MA na instancama sa poznatim optimalnim rešenjem

m	n	p	Γ_i	Solution	t_{CPX}	Best	t_{MA}
50	10	5	0	5252.675	0.782	<i>opt</i>	0.008
50	10	5	1	5439.789	1.503	<i>opt</i>	0.009
50	10	5	2	5559.278	1.560	<i>opt</i>	0.008
50	10	5	3	5650.184	1.947	<i>opt</i>	0.007
50	10	5	4	5737.142	2.126	<i>opt</i>	0.008
50	10	5	5	5821.322	2.012	<i>opt</i>	0.007
50	10	5	6	5902.318	4.332	<i>opt</i>	0.006
50	10	5	7	5952.907	2.776	<i>opt</i>	0.007
50	15	7	0	3580.243	2.190	<i>opt</i>	0.233
50	15	7	1	3715.321	5.187	<i>opt</i>	0.323
50	15	7	2	3828.284	3.973	<i>opt</i>	0.221
50	15	7	3	3922.278	6.252	<i>opt</i>	0.047
50	15	7	4	3988.685	5.758	<i>opt</i>	0.038
50	15	7	5	4049.700	6.419	<i>opt</i>	0.239
50	15	7	6	4088.255	5.958	<i>opt</i>	0.095
50	15	7	7	4110.132	5.712	<i>opt</i>	0.120
50	20	10	0	2527.098	3.133	<i>opt</i>	0.079
50	20	10	1	2656.720	11.432	<i>opt</i>	0.057
50	20	10	2	2767.613	10.201	<i>opt</i>	0.057
50	20	10	3	2854.556	9.301	<i>opt</i>	0.049
50	20	10	4	2891.762	10.964	<i>opt</i>	0.060
50	20	10	5	2912.981	13.687	<i>opt</i>	0.093
50	20	10	6	2912.981	11.553	<i>opt</i>	0.064
50	20	10	7	2912.981	12.428	<i>opt</i>	0.063
50	25	10	0	2347.387	18.910	<i>opt</i>	0.589
50	25	10	1	2440.571	24.702	<i>opt</i>	0.583
50	25	10	2	2522.289	24.078	<i>opt</i>	0.544
50	25	10	3	2585.104	21.484	<i>opt</i>	0.622
50	25	10	4	2642.386	41.457	<i>opt</i>	0.541
50	25	10	5	2693.843	49.847	<i>opt</i>	0.624
50	25	10	6	2708.223	42.855	<i>opt</i>	0.503
50	25	10	7	2720.670	54.687	<i>opt</i>	0.715
50	25	15	0	2535.615	2.557	<i>opt</i>	0.016
50	25	15	1	2657.491	4.541	<i>opt</i>	0.015
50	25	15	2	2771.772	6.302	<i>opt</i>	0.012
50	25	15	3	2870.082	7.578	<i>opt</i>	0.017
50	25	15	4	2920.295	8.383	<i>opt</i>	0.013
50	25	15	5	2932.283	7.779	<i>opt</i>	0.014
50	25	15	6	2932.283	7.628	<i>opt</i>	0.014
50	25	15	7	2932.283	7.037	<i>opt</i>	0.014

fino gradirana turnirska selekcija, modifikovano ravnomerno ukrštanje i prosta mutacija. Primenjen je i elitistički pristup, pri čemu se deo jedinki prosleđuje direktno u narednu generaciju.

Algoritam je testiran nad instancama koje sadrže do 1000 korisnika i 125 potencijalnih lokacija za resurse. Na manjim instancama, algoritam je svuda dostigao optimalna rešenja, pa se, na osnovu toga može pretpostaviti i da su dobijena rešenja na većim instancama takođe dovoljno kvalitetna, iako tu činjenicu nije bilo moguće neposredno proveriti, jer CPLEX nije bio u mogućnosti da u razumnom vremenskom roku pronađe rešenje. Takođe, prosečno vreme izvršavanja memetskog algoritma bilo je oko 70 puta brže od vremena izvršavanja CPLEX-a, dok je, u najgorem slučaju ono bilo nešto manje od deset minuta, što govori o njegovoj efikasnosti.

Pravci daljeg rada podrazumevaju razmatranje mogućnosti paralelizacije predloženog algoritma, kao i njegovo prilagođavanje srodnim problemima, ali i primena novih heuristika na predloženi problem, kako bi se kvalitet dobijenih rezultata nad instancama većih dimenzija mogao neposredno proveriti.

Tabela 2. Rezultati MA na instancama čija optimalna rešenja nisu poznata

m	n	p	Γ_i	Best	t_{MA}
1000	25	10	0	49912.467	160.755
1000	25	10	1	50090.721	91.736
1000	25	10	2	50261.228	120.296
1000	25	10	3	50427.734	82.321
1000	25	10	4	50592.723	90.788
1000	25	10	5	50750.988	108.261
1000	25	10	6	50908.318	105.402
1000	25	10	7	51057.881	91.326
1000	50	15	0	32325.036	115.595
1000	50	15	1	32484.939	115.825
1000	50	15	2	32935.346	150.680
1000	50	15	3	32773.035	129.033
1000	50	15	4	32903.699	106.233
1000	50	15	5	33019.500	154.759
1000	50	15	6	33327.330	86.768
1000	50	15	7	33656.097	115.276
1000	75	20	0	24297.016	150.550
1000	75	20	1	24408.466	197.143
1000	75	20	2	24286.807	152.529
1000	75	20	3	24646.380	147.191
1000	75	20	4	24791.523	166.715
1000	75	20	5	24973.246	144.284
1000	75	20	6	25110.251	118.351
1000	75	20	7	25153.162	160.133
1000	100	30	0	16520.407	202.280
1000	100	30	1	16614.998	251.708
1000	100	30	2	16599.916	277.992
1000	100	30	3	16906.900	240.436
1000	100	30	4	17279.336	243.665
1000	100	30	5	17136.164	238.648
1000	100	30	6	17432.269	244.339
1000	100	30	7	17329.191	200.231
1000	125	50	0	10387.721	472.721
1000	125	50	1	10573.205	537.339
1000	125	50	2	10661.525	494.224
1000	125	50	3	10854.331	534.601
1000	125	50	4	10792.048	521.500
1000	125	50	5	10836.654	545.033
1000	125	50	6	11103.238	517.156
1000	125	50	7	11227.399	522.976

Zahvalnica. Ovo istraživanje je podržano od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije (projekat 044006).

Bibliografija

- [1] **D. Bertsimas, M. Sim.** Robust discrete optimization and network flows. *Mathematical Programming*, 2003, 98, 49-71.
- [2] **A. Charnes, W. Cooper.** Chance-constrained programming. *Management Science*, 1959, 6 (1), 73-79.
- [3] **G. Dantzig** Linear programming under uncertainty. *Management Science*, 1955, 1 (3-4), 197-206.
- [4] **R. Dawkins.** The Selfish Gene. *Clarendon Press, Oxford*, 1976.
- [5] **A. Filipović, J. Kratica, A. Savić, Dj. Dugošija.** The modification of genetic algorithms for solving the balanced location problem. In: *Proceedings Of The Fifth Balkan Conference In Informatics*, 2012, pp. 243-246.
- [6] **W. E. Hart, N. Krasnogor, J. E. Smith.** Memetic evolutionary algorithms. In: *W. E. Hart, N. Krasnogor, J. E. Smith (Eds.), Recent Advances in Memetic Algorithms*, Springer, Berlin, 2004.

- [7] **J. Kratica, L. Markus Leitner, I. Ljubić.** Variable Neighborhood Search for Solving the Balanced Location Problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 2012, 39, 21-28.
- [8] **P. Moscato, M. Norman.** A competitive and cooperative approach to complex combinatorial search, *Technical Reports 790, Caltech Concurrent Computation Program*, 1989.
- [9] **A. Marin.** The discrete facility location problem with balanced allocation of customers. *European Journal of Operational Research*, 2003, 210 (1), 27-38.
- [10] **Z. Stanimirović, S. Mišković.** Efficient Metaheuristic Approaches for Exploration Of Online Social Networks. In: *W. C. Hu, N. Kaabouch (Eds.), Big Data Management, Technologies, and Applications, Pennsylvania, USA: IGI Global*, 2013, 222-269.
- [11] **Z. Stanimirović, M. Marić, N. Radojčić, S. Božović.** Two efficient hybrid metaheuristic methods for solving the Load Balance Problem. *Applied and computational mathematics*, 2014, 13(3), 332-349.

Bertranov paradoks - Novi pogledi

Zoran Vidović

Učiteljski fakultet, Kraljice Natalije 43
e-mail: zoranvidovic1990@gmail.com

Apstrakt. Jedan od najvažnijih paradoksa u teoriji verovatnoće je Bertranov paradoks, formulisan daleke 1889. godine, koji ukazuje da pri radu sa geometrijskom, "lokalnom", verovatnoćom moramo da definišemo šta podrazumevamo pod pojmom slučajno. Bertran predstavlja tri rešenja ovog paradoksa, i ta rešenja su sadržana u skoro svakoj knjizi iz teorije verovatnoće, kao ilustracija da je neophodna dodatna pažnja pri računjanju verovatnoća u radu sa geometrijskim objektima. U ovom radu su prikazani i objedinjeni u celinu najvažniji rezultati, iz radova *Bertrand's Paradox: Is there anything else?* autora V. Jevremović i M. Obradovića i *Bertrand's Paradox Revisited: More Lessons about that Ambiguous Word, Random* autora S. Chi i R. Larson, su prikazani u radu.

U nastavku je dato nekoliko novih varijacija Bertranovog paradoksa, od kojih su neki teorijski rešeni i simulaciono ilustrovani Monte Karlo metodama. Simulacije su modelirane u programskom jezuku R, i rezultati simulacija su prikazani u radu.

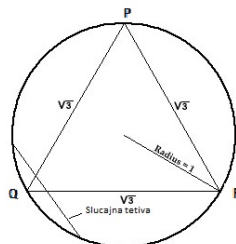
Prikazani su problemi koji su, na određen način, proširenje Bertranovog paradoksa.

Ključne reči: Bertranov paradoks, Monte Karlo metode, geometrijske verovatnoće.

1. Uvod

U teoriji verovatnoće najčešće radimo sa kvantitativnim slučajnim veličinama koje uzimaju vrednosti iz skupa na kome je definisana nenegativna mera, koja zadovoljava određene uslove koji nam omogućuju da tu meru interpretiramo kao verovatnoću. U teoriji geometrijskih verovatnoća slučajne veličine nisu kvantitativne veličine nego geometrijski objekti kao što su tačke, linije i ravni. Pošto definisanje mere na takvim objektima nije jednostavna ni lako uočljiva procedura, uz dodatni problem kad se određuje odgovarajući skup vrednosti, dolazi do nastanka različitih "paradoksa". Paradoksi su direktno povezani sa različitim idejama koje pak mogu biti korisne u intuitivnom definisanju geometrijskih verovatnoća.

Razmotrimo paradoks *slučajne tetive*, opštepoznat kao Bertranov paradoks: *Posmatrajmo jednakostranični trougao PQR upisan u jedinični krug i izaberimo na slučajan način tetivu AB datog kruga. Kolika je verovatnoća da je tetiva duža od stranice datog trougla?*



Ovaj problem se smatra paradoksom jer naizgled ima tri različita rešenja.

Prvo rešenje podrazumeva da je tačka A tetive proizvoljno izabrana na kružnici a zatim rotiramo trougao tako da tačka A postane jedno teme trougla, recimo P . Tačka B se bira slučajno na kružnici. Ako tačka B pripada luku \widehat{QR} , tada je tetiva AB duža od stranice jednakostraničnog trougla. Stoga je verovatnoća $1/3$, jer je jednaka odnosu luka \widehat{QR} i obima kruga.

Drugo rešenje se dobija pri slučajnom izboru tačke T u krugu i izboru tetive AB tako da tačka T predstavlja njeno središte. Tetiva AB će biti duža od stranice jednakostraničnog trougla PQR ako se tačka T nalazi u oblasti

kruga upisanog u trouglu. Ovaj krug ima isti centar kao i prvobitni, a poluprečnik $1/2$. Verovatnoća je sad $1/4$, pošto je jednaka odnosu površina manjeg i većeg kruga.

Treće rešenje počinje izborom prečnika UV kruga i rotacijom trougla tako da jedna stranica trougla, recimo PQ , bude normalna na prečnik. Biramo tačku sa odabranog prečnika, koja će da predstavlja središte tetive AB . Tetiva AB je duža od stranice trougla ako je njena središna tačka bliža centru kruga, odnosno da se nalazi između tačaka M i N koje se nalaze na prečniku, jednako udaljene od centra sa obe strane prečnika i njihovo međusobno rastojanje je jednako dužini poluprečnika. Stoga je verovatnoća jednaka MN/UV , odnosno $1/2$.

Sva tri rešenja su tačna, ali oni se odnose na različite probleme. Za svako pitanje vezano za geometrijsku verovatnoću moramo prvo da definišemo šta se misli pod pojmom "slučajno". Ovaj pojam je ekvivalentan određivanju funkcije raspodele, odnosno gustine raspodele, za one slučajne veličine čije realizacije jedinstveno određuju tetivu na krugu.

Međutim, određivanje funkcije raspodele nije nimalo lak posao. Neophodno je ispravno prepoznati parametarski prostor koordinata na kome je definisan geometrijski objekat, obezbediti da je geometrijski objekat jednoznačno definisan sa odgovarajućim koordinatama, definisati verovatnosnu meru na tom prostoru, i tek na osnovu ispunjenih stavki, definisati funkciju raspodele na koordinatama geometrijskog objekta, u ovom slučaju tetive na krugu. Opširnije u [3].

2. Funkcije raspodele za tetivu na krugu

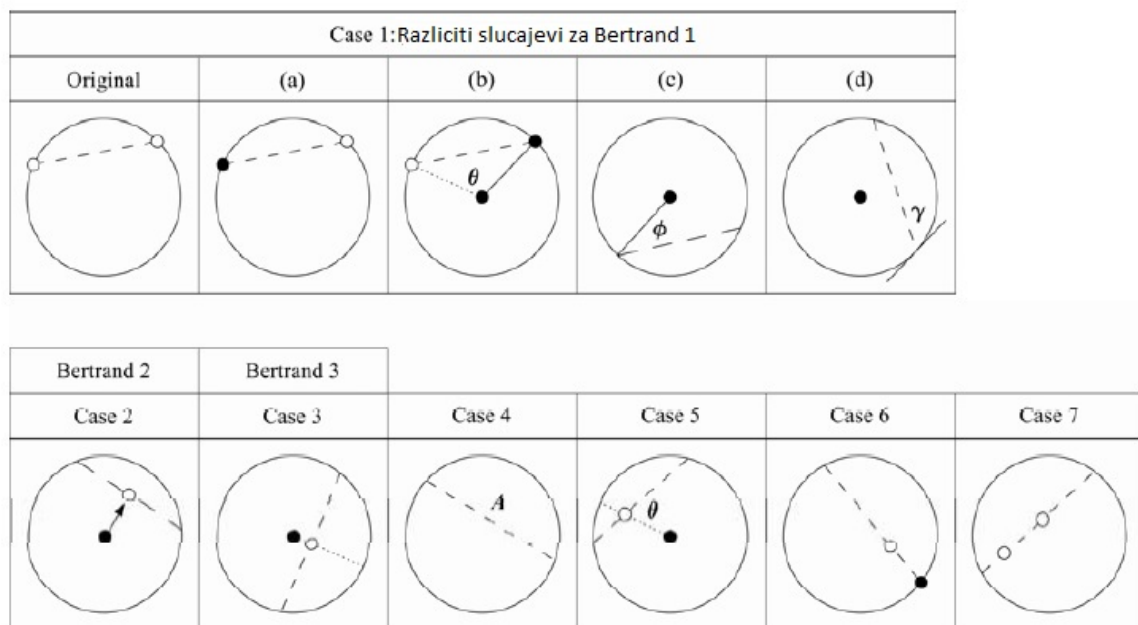
U narednom delu proširujemo Bertranovo klasično razmatranje slučajnosti na osam scenarija, uključujući prvobitna tri, detaljno razmotrenih u [4]. Prikazujemo funkcije raspodela za one slučajne veličine čije realizacije određuju na jednoznačan način tetivu u krugu. Razmatraju su svi slučajevi pojedinačno.

Na slikama, koje su preuzete iz rada [4], uočavamo:

1. "prazne" tačke koje ističu lokaciju slučajne tačke u krugu,
2. isprekidane linije koje predstavljaju generisanu slučajnu tetivu,
3. pune linije koje predstavljaju geometrijski objekat.

Smatra se da je poluprečnik kruga jednak r . U narednom delu često ćemo koristiti sledeću teoremu.

Slika 1.



Teorema 1. Neka je $Y = f(X)$ i neka je $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ strogo monotona diferencijabilna funkcija. Ako je $h = f^{-1}$ (inverzna funkcija od f), tada je

$$g_Y(y) = g_X(h(y))|h'(y)|, \quad y \in (a, b)$$

i $g_Y(y) = 0$ za $x \notin (a, b)$ gde je

$$a = \min(f(-\infty), f(\infty)), \quad b = \max(f(-\infty), f(\infty)).$$

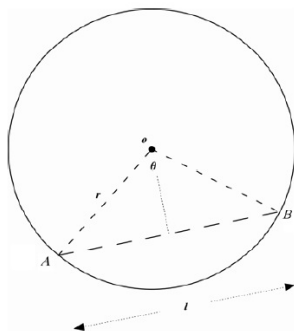
2.1. Tetiva je određena sa tačkama na kružnici

Ovo je prva originalna karakterizacija slučajnosti od strane Bertrana. Postoji nekoliko ekvivalentnih formulacija koje vode ka istoj raspodeli. Kao dodatak na Bertranovu formuaciju o dvema tačkama na kružnici, uključujemo sledeće:

- Fiksirajmo tačku na kružnici; uniformno odaberimo drugu tačku na kružnici. Formirajmo tetivu koja je određena sa ovim tačkama. Slučajnost je realizovana zbog izbora druge tačke uniformno na kružnici, odnosno na $(0, 2\pi r)$, ili uniformno na $(0, \pi r)$ ako zbog simetrije ograničimo lokaciju druge tačke na kružnici.
- Odaberimo ugao θ iz $(0, \pi)$. Formirajmo tetivu AB određenu sa dva poluprečnika i centralnim uglom θ , $\angle(AOB) = \theta$. Slučajni izbor ugla θ uzrokuje slučajnost izbora tetive (Slika 2.).
- Fiksirajmo poluprečnik OA . Formirajmo ugao $\angle(OAB) = \phi$, sa tačkom B na kružnici i neka je ϕ uniformno raspodeljen iz intervala $(0, \pi/2)$. Tako određujemo slučajnu tetivu AB . Iz slučajnosti ugla ϕ dobijamo i slučajnost tetive AB .
- Odaberimo onu tangentu TD na krugu koja odgovara poluprečniku OT . Formirajmo slučajnu tetivu TC koja je definisana uglom $\angle(DTC) = \gamma$, koji je uniformno raspodeljen u $(0, \pi/2)$, i tačkom C koja se nalazi na kružnici. Slučajnost ugla γ implicira i slučajnost odgovarajuće tetive.

U nastavku ćemo da predstavimo funkciju raspodele dužine slučajne tetive za slučaj Bertran 1b. Analogno se funkcije raspodele mogu pronaći i za ostale slučajeve. Slučajan ugao θ je iz uniformne raspodele na $(0, \pi)$, što je u direktnoj vezi sa dužinom slučajne tetive L kao:

Slika 2.



$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{L}{2r},$$

sa gustinom raspodele

$$f_{\theta} = \frac{1}{\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Stoga,

$$f_L(l) = f_{\theta}(\theta) \left| \frac{d\theta}{dl} \right| = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{4r^2 - l^2}}, \quad 0 \leq l \leq 2r.$$

Funkcija raspodele za L je:

$$F_L(l) = P(L \leq l) = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{l}{2r}\right), \quad 0 \leq l \leq 2r.$$

Postavljanjem da je $l = \sqrt{3}$ i $r = 1$, dobijamo

$$1 - F_L(l) = P(L > \sqrt{3}) = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{1}{3},$$

kao što je bilo očekivano za prvi Bertranov slučaj.

2.2. Tetiva je određena centrom unutar kruga

Odaberimo tačku unutar kruga kao centar tetive, koja je uniformno raspodeljena u krugu poluprečnika r . Ovaj scenario odgovara Bertranovom drugom rešenju. Koristimo X kao slučajnu promenjivu koja predstavlja rastojanje tačke od centra kruga. Može se lako pokazati da je gustina za X oblika

$$f_X(x) = \frac{2x}{r^2}, \quad 0 \leq x \leq r.$$

Dužina slučajne tetive je u relaciji sa X preko

$$X^2 = r^2 - (0.5L)^2.$$

Stoga možemo da nađemo gustinu za L

$$\begin{aligned} f_L(l) &= \left[f_X(x) \left| \frac{dx}{dl} \right| \right]_{x=\sqrt{r^2 - (0.5l)^2}} = \frac{2\sqrt{r^2 - (0.5l)^2}}{r^2} \frac{l}{2\sqrt{4r^2 - l^2}} \\ &= \frac{1}{2r^2}, \quad 0 \leq l \leq 2r. \end{aligned}$$

Funkcija raspodele za L je

$$F_L(l) = \frac{l^2}{4r^2}, \quad 0 \leq l \leq 2r.$$

Ako stavimo da je $l = \sqrt{3}$ i $r = 1$ dobijamo

$$1 - F_L(\sqrt{3}) = P(L > \sqrt{3}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

kao što je i očekivano za drugi Bertranov slučaj.

2.3. Tetiva je određena centrom na poluprečniku kruga

Rastojanje centra tetive i centra kruga je uniformno na $(0, r)$. Ovo je ekvivalentno određivanju slučajne tačke na poluprečniku koja postaje centar tetive. Definišemo slučajnu promenjivu X , sa realizacijom $X = x$, koja je uniformna na $(0, r)$ i predstavlja rastojanje tačke na poluprečniku od centra kruga. Kao i u prethodnom slučaju, X i L su povezani sledećom vezom,

$$X^2 = r^2 - (0.5l)^2,$$

sa gustinom za X

$$f_X(x) = \frac{1}{r}, \quad 0 \leq x \leq r.$$

Stoga,

$$f_L(l) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dl} \right| = \frac{1}{r} \frac{l}{2\sqrt{4r^2 - l^2}}, \quad 0 \leq l \leq 2r.$$

Funkcija raspodele za L je data sa

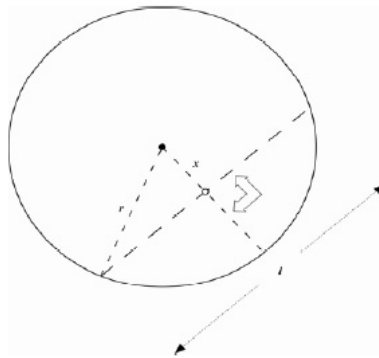
$$F_L(l) = 1 - \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2r}, \quad 0 \leq l \leq 2r.$$

Ako stavimo da je $l = \sqrt{3}$ i $r = 1$ dobijamo

$$1 - F_L(\sqrt{3}) = P(L > \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{4-3}}{2} = \frac{1}{2},$$

kao što je i očekivano za Bertran 3.

Slika 3.



Prelazimo sada na druge formulacije Bertranovog zadatka, tj. na druge načine određivanja tetive.

2.4. Tetiva je određena tako da razdvaja krug na dve oblasti, manja oblast A je uniformna na $(0, 0.5\pi r^2)$

Geometrijskim razmatranjem dobijamo da je veza između oblasti A i dužine tetive data sa

$$A = \frac{\theta}{2\pi} \pi r^2 - 0.5L \sqrt{r^2 - (0.5L)^2} = r^2 \arcsin\left(\frac{L}{2r}\right) - \frac{L}{4} \sqrt{4r^2 - L^2} = h(L).$$

Oblast A (šrafirana na Slici 4.) jednaka je razlici oblasti koja podseća na *parče pite* sa centralnim uglom θ i oblasti trougla sa osnovom $L = l$. Koristili smo da je

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{L}{2r}.$$

Pošto je funkcija $h(L)$ monotonno rastuća, možemo da izrazimo gustinu za L iz $f_A(a) = \frac{2}{\pi r^2}$, $0 \leq a \leq \frac{\pi r^2}{2}$, kao

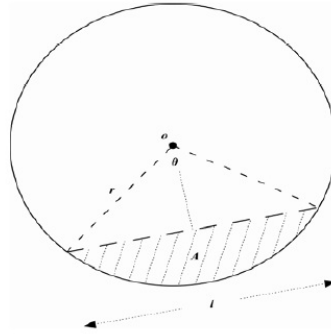
$$f_L(l) = f_A(a) \Big|_{a=h(l)} \left| \frac{dh(l)}{dl} \right| = \frac{2}{\pi r^2} \left[\frac{r^2}{\sqrt{4r^2 - l^2}} - \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{4} + \frac{l^2}{4\sqrt{4r^2 - l^2}} \right] = \frac{l^2}{\pi r^2 \sqrt{4r^2 - l^2}}, \quad 0 \leq l \leq 2r.$$

Integracijom dobijamo funkciju raspodele

$$F_L(l) = \frac{2}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{l}{2r}\right) - \frac{l\sqrt{4r^2 - l^2}}{4r^2} \right], \quad 0 \leq l \leq 2r.$$

Numerički, verovatnoća da tetiva zadovoljava Bertranov uslov je 0.609 .

Slika 4.



2.5. Tetiva je određena jednom tačkom na kružnici i jednom tačkom u krugu

Povezivanjem ove dve tačke dobijamo slučajnu tetivu. Tražimo funkciju raspodele za L . Prvo odaberemo tačku na kružnici K (Slika 5.). Ako se tačka unutar kruga, koja je uniformna u krugu, nalazi unutar osenčenih oblasti $KEFK$ i $KABK$, dužina tetive će biti manja od l . $P(L \leq l)$ postaje odnos površina oblasti, pošto je tačka unutar kruga uniformno raspoređena u krugu poluprečnika r .

$$P(L \leq l) = \frac{Oblast(KEFK) + Oblast(KADK)}{\pi r^2} = \frac{2 * oblast(KABK)}{\pi r^2}.$$

$$Oblast(OKABO) = \frac{2\beta}{2\pi} \pi r^2 = \beta r^2 = r^2 \arcsin\left(\frac{l}{2r}\right),$$

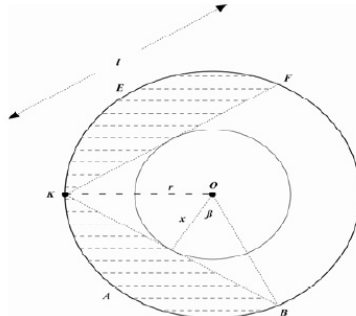
$$Oblast(OKBO) = 0.5lx = 0.5l\sqrt{r^2 - (0.5l)^2} = \frac{l\sqrt{4r^2 - l^2}}{4},$$

$$Oblast(KABK) = Oblast(OKABO) - Oblast(OKBO) = r^2 \arcsin\left(\frac{l}{2r}\right) - \frac{l\sqrt{4r^2 - l^2}}{4},$$

$$\begin{aligned} P(L \leq l) &= \frac{2}{\pi r^2} \left[r^2 \arcsin\left(\frac{l}{2r}\right) - \frac{l\sqrt{4r^2 - l^2}}{4} \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{l}{2r}\right) - \frac{l\sqrt{4r^2 - l^2}}{4r^2} \right], \quad 0 \leq l \leq 2r. \end{aligned}$$

Bertranova verovatnoća je¹, opet, 0.609 .

Slika 5.



¹Odnosno, verovatnoća da je ispunjen Bertranov uslov za tetivu kruga.

2.6. Tetiva je određena tačkom R u krugu i uglom određenim sa R i krakom OR

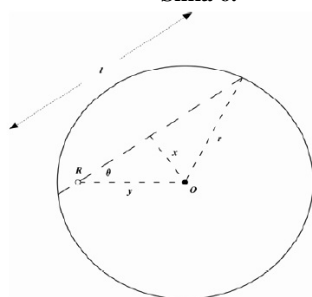
Odaberimo tačku unutar kruga, R . Koristićemo Y kao slučajnu veličinu koja predstavlja rastojanje tačke R od centra kruga (dužinu duži OR). Rotiranjem oko tačke R , dobijamo ugao θ sa krakom RO , uniformno raspodeljen na $(0, \pi/2)$, koji određuje slučajnu tetivu. Rastojanje od centra tetive je slučajna veličina X , data sa $X = Y \sin \theta$.

Nalazimo raspodelu za X , odakle ćemo moći da odredimo i raspodelu za L . Ovde su Y i θ nezavisne slučajne veličine, sa gustinama

$$f_Y(y) = \frac{2y}{r^2}, \quad 0 \leq y \leq r; \quad f_\theta(\theta) = \frac{2}{\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Treba da odredimo f_X preko $f_{Y\theta}(y, \theta)$. Pošto su Y i θ nezavisne njihovu zajedničku gustinu možemo da predstavimo kao proizvod marginalnih gustina. Primitimo da je oblast integracije za θ ($\arcsin(\frac{x}{r}), \pi/2$), na kome je $f_{Y\theta}(y, \theta)$ različita od nule.

Slika 6.



$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\arcsin \frac{x}{r}}^{0.5\pi} f_{\theta Y}(\theta, y) \left| \frac{dy}{dx} \right| d\theta = \int_{\arcsin \frac{x}{r}}^{0.5\pi} \left(\frac{2y}{r^2} \frac{2}{\pi} \right) \frac{1}{\sin \theta} d\theta = \\ &= \frac{4x}{\pi r^2} \int_{\arcsin \frac{x}{r}}^{0.5\pi} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} = \frac{4x}{\pi r^2} \left(-\cot \theta \Big|_{\arcsin \frac{x}{r}}^{0.5\pi} \right) = \frac{4\sqrt{r^2 - x^2}}{\pi r^2}, \quad 0 \leq x \leq r. \end{aligned} \quad (1)$$

Prethodna gustina se može izvesti i na drugi način (rešenje autora). Pošto su slučajne veličine Y i θ nezavisne njihovu zajedničku gustinu možemo da predstavimo kao proizvod marginalnih, odnosno $f_{(Y,\theta)}(y, \theta) = f_Y(y)f_\theta(\theta)$. Uvedemo smene

$$\begin{aligned} u &= y, \\ v &= u \sin \theta, \quad (\theta = \arcsin \frac{v}{u}). \end{aligned} \quad (2)$$

Odavde dobijamo da je apsolutna vrednost Jakobijana $|J| = \frac{1}{\sqrt{u^2 - v^2}}$, te dobijamo da je zajednička gustina za (U, V) data se

$$f_{(U,V)}(u, v) = f_Y(u)f_\theta(\arcsin \frac{v}{u})|J| = \frac{4}{r^2\pi} \frac{u}{\sqrt{u^2 - v^2}},$$

gde je $v \in (0, r)$ i $u \in (0, r)$. Nalazimo gustinu za V , a to je ujedno gustina za X , preko

$$f_V(v) = \int_v^r \frac{4}{r^2\pi} \frac{u}{\sqrt{u^2 - v^2}} du = \frac{4}{r^2\pi} \sqrt{r^2 - v^2}, \quad 0 \leq v \leq r. \quad (3)$$

Dužina slučajne tetive L je povezana sa X na sledeći način

$$X^2 = r^2 - (0.5L)^2.$$

Stoga, možemo predstaviti gustinu za L kao

$$f_L(l) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dl} \right| = \frac{4\sqrt{r^2 - x^2}}{\pi r^2} \frac{l}{2\sqrt{4r^2 - l^2}} = \frac{4(0.5l)}{\pi r^2} \frac{l}{2\sqrt{4r^2 - l^2}} = \frac{1}{\pi r^2} \frac{l^2}{\sqrt{4r^2 - l^2}}, \quad 0 \leq l \leq 2r. \quad (4)$$

Funkcija raspodele dobijena integracijom je

$$F_L(l) = \frac{2}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{l}{2r}\right) - \frac{l\sqrt{4r^2 - l^2}}{4r^2} \right], \quad 0 \leq l \leq 2r.$$

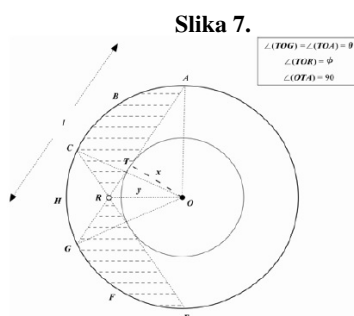
Vidimo da se dobija ista funkcija raspodele za dužinu tetive kao i u prethodna dva dela.

2.7. Tetiva je određena dvema tačkama unutar kruga

Identifikujmo dve nezavisne i jednako raspoređene tačke unutar kruga poluprečnika r , koje generišu slučajnu tetivu. Prvo ćemo da predstavimo uslovnu lokaciju prve tačke (smatramo da znamo gde se nalazi). Udaljenost tačke od centra kruga neka bude predstavljeno slučajnom veličinom Y koja ima gustinu verovatnoće (drugi Bertrandov slučaj)

$$f_Y(y) = \frac{2y}{r^2}, \quad 0 \leq y \leq r.$$

Za određivanje funkcije raspodele za dužinu tetive, $F_L(l)$, koristimo formulu potpune verovatnoće.



Tačka R , uslovna lokacija prve tačke, koja ima rastojanje od centra kruga izraženo preko slučajne veličine Y , sad uslovno $Y = y$. Dužina tetive je manja od l (dužina duži AG) ako se tetiva nalazi unutar dve, jednake i osenčene, oblasti: $Oblast(ABCRA)$ i $Oblast(EFGRE)$. Prave OT i ATG su međusobno normalne. Sad tražimo površinu šrafirane oblasti koja nam treba za funkciju raspodele.

$$P(L \leq l | Y = y) = \frac{2 * Oblast(ABCRA)}{\pi r^2},$$

i odakle dobijamo

$$F_L(l) = P(L \leq l) = \int_0^r P(L \leq l | Y = y) f_Y(y) dy = \int_0^r P(L \leq l | Y = y) \frac{2y}{r^2} dy.$$

Predstavljamo oblast

$$Oblast(ABCRA) = Oblast(OABCHGO) - Oblast(OGAO) - Oblast(CHGRC),$$

gde je

Oblast(OABCHGO) određena uglom 2θ ,

Oblast(OGAO) oblast trougla, određenog uglom 2θ ,

$CHGRC = OCHGO - OCRO - OGRO = OCHGO - 2 * OGRO$,

gde je

$OCHGO$ oblast određena centralnim uglom $\angle COG$, koji je jednak $2(\theta - \phi)$:

$\angle COG = \angle COR + \angle GOR = 2\angle GOR = 2 * (\angle TOG - \angle TOR) = 2(\theta - \phi)$,

i važi $OCRO = OGRO$.

Koristićemo sledeće notacije: l : dužina tetive, y : rastojanje od centra kruga i slučajne tačke, x : rastojanje od centra kruga i centra tetive.

Koristićemo sledeće jednakosti:

$$x^2 = r^2 - (0.5l)^2, \quad x = \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2}.$$

Izračunavamo površinu označenih oblasti

$$OABCHGO = \pi r^2 \frac{2\theta}{2\pi} = r^2\theta.$$

Možemo da isključimo θ iz analize.

$$OGAO = \frac{1}{2}lx = \frac{1}{2}l\sqrt{r^2 - (0.5l)^2} = \frac{l\sqrt{4r^2 - l^2}}{4},$$

$$OCHGO = \pi r^2 \frac{2(\theta - \phi)}{2\pi} = r^2(\theta - \phi),$$

gde je

$$\phi = \arccos\left(\frac{x}{y}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2y}\right),$$

$$\begin{aligned} OGRO &= \frac{1}{2}baza * visina = \frac{1}{2}(GT - RT)x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{y^2 - x^2}\right)x = \\ &= \frac{l\sqrt{4r^2 - l^2}}{8} - \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}\sqrt{4y^2 - 4r^2 + l^2}}{8} \end{aligned}$$

gde su GT i RT prava rastojanja.

Sad možemo da izrazimo *Oblast(ABCRA)*:

$$ABCRA = OABCHGO - OGAO - CHGRC =$$

$$OABCHGO - OGAO - (OCHGO - 2 * OGRO) =$$

$$= r^2\theta - \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}\sqrt{4y^2 - 4r^2 + l^2}}{4}.$$

Neka je rastojanje tačke R od centra kruga dato sa y , uslovna verovatnoća da je dužina slučajne tetive manja od l postaje

$$P(L \leq l | Y = y) = \frac{2 * Oblast(ABCRA)}{povrsina\ kruga} = \frac{2\phi}{\pi} - \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}\sqrt{4y^2 - 4r^2 + l^2}}{2\pi r^2}.$$

Funkcija verovatnoće za L se može pronaći korišćenjem formule totalne verovatnoće, integracijom nad oblasti definisanosti za slučajnu veličinu Y . Donja granica je x jer rastojanje od centra kruga i tačke mora biti veće od x ukoliko je dužina tetive manja od l . Stoga

$$F_L(l) = P(L \leq l) = \int_{y=x}^r P(L \leq l | Y = y) f_Y(y) dy =$$

$$\int_{y=x}^r P(L \leq l | Y = y) \frac{2y}{r^2} dy = \int_{y=x}^r \left(\frac{4y\phi}{\pi r^2} - \frac{4xy\sqrt{y^2 - x^2}}{\pi r^4} \right) dy =$$

$$\frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) - \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}(10r^2 - 4x^2)}{3\pi r^4} = \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2r}\right) - \frac{l(6r^2 + l^2)\sqrt{4r^2 - l^2}}{12\pi r^4},$$

$$0 \leq l \leq 2r.$$

Gde smo koristili

$$\int_{y=x}^r \arccos\left(\frac{x}{y}\right) y dy = \frac{1}{2} \left[r^2 \arccos\left(\frac{x}{r}\right) - x\sqrt{r^2 - x^2} \right],$$

$$\int_{y=x}^r \sqrt{y^2 - x^2} y dy = \frac{1}{3} \sqrt{(r^2 - x^2)^3}, \quad 0 \leq x \leq r.$$

Diferenciranjem funkcije raspodele dobijamo gustinu

$$f_L(l) = \frac{1}{3\pi\sqrt{4r^2 - l^2}} \left(\frac{l}{r}\right)^4, \quad 0 \leq l \leq 2r.$$

Bertranova verovatnoća je, u ovom slučaju, jednaka 0.7468 .

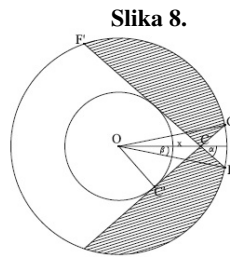
3. Nova rešenja

U narednom delu predstavljamo Bertranovu verovatnoću, slike i rezultate simulacija koje su predstavili M. Obradović i V. Jevremović u [5].

Neka je tetiva određena sa dve tačke, koje su nezavisne i predstavljaju realizacije slučajne veličine sa uniformnom raspodelom na čitavom krugu, odnosno da su određene polarnim koordinatama $(\rho \sin \theta, \rho \cos \theta)$, gde su $\rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi)$.

Postavlja se pitanje: Kolika je verovatnoća da tetiva određena sa ovim tačkama bude duža od stranice upisanog jednakostraničnog trougla u krugu?

Lakše se nalazi verovatnoća komplementarnog događaja prethodnom događaju, a to zahteva određivanje osenčene površine na krugu (Slika 8.). Smatramo, bez umanjenja opštosti, da je jedna tačka fiksirana u krugu, u ovom slučaju, tačka C .



Postupak je sledeći: Ako imamo tačku C koja je udaljena od centra kruga, i tu udaljenost predstavljamo sa x , i tačku D unutar osenčene oblasti unutar kruga, tada one određuju tetivu koja ne ispunjava Bertranov uslov. Integral na osenčenoj oblasti je jednak razlici integrala na oblasti ograničenoj sa segmenom FF' i integralu na oblasti CFG . Prvi integral je jednak

$$J = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{1}{2\cos\phi}}^1 d\rho d\phi.$$

Integral na oblasti CFG jednak je

$$K(x) = \int_{-\beta}^{\beta} \int_{\frac{x \sin \alpha}{\sin(\alpha - \phi)}}^1 d\rho d\phi,$$

gde je $\beta = \frac{\pi}{3} - \arccos \frac{1}{2x}$ iz trougla $OC'C'$, a primenom sinusne teoreme na trougao OCF dobijamo

$$\frac{1}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{x}{\sin(\alpha - \beta)},$$

odakle zaključujemo da je

$$\alpha = \arctan \frac{\frac{\sqrt{3}}{4x} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - (\frac{1}{2x})^2}}{\frac{\sqrt{1}}{4x} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - (\frac{1}{2x})^2} + x}.$$

Pošto je rastojanje x uniformno raspodeljeno na poluprečniku, gustina za odgovarajuću slučajnu veličinu X je jednaka 1, za $0 \leq x \leq 1$, tako da verovatnoća da je dužina tetive manja od $\sqrt{3}$ jednaka:

$$p = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2\pi} 2(J - K(x)) dx \approx 0.0963,$$

te je verovatnoća da tetiva zadovoljava Bertranov uslov² jednaka 0.9037 . Prikazujemo i rezultate Monte Karlo simulacija za ovaj slučaj (Tabela 1.).

Tabela 1.

Broj parova tačaka C i D	100	500	1000	10000
Ocenjene Bertranove verovatnoće	0.8700	0.8940	0.9000	0.8961

Sasvim nov način jednoznačnog određivanja tetive u krugu je da odaberemo jednu tačku na kružnici, odnosno da je tačka uniformno raspodeljena na kružnici, i jednu tačku u krugu, opet uniformno raspodeljenu u krugu, koje su međusobno nezavisne. Verovatnoća da je tetiva, na ovakav način odabrana, duža od stranice jednakostraničnog trougla upisanog u krug, još nije prikazana ni u jednom radu. Prikazujemo teorijsko rešenje ovog slučaja, kao i rezultate Monte Karlo simulacija.

Kao i u radu [5], nalazimo verovatnoću komplementarnog događaja, jer je lakša za izračunavanje. Bez umanjavanja opštosti, možemo da fiksiramo jednu tačku na kružnici, recimo tačku (1,0), i da nađemo površinu oblasti KAB (Slika 8.). Koristimo integralom J .

$$J = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{1}{2 \cos \phi}}^1 d\rho d\phi = \frac{2\pi}{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$$

Zbog simetrije, imamo dve oblasti sa istom površinom, KAB i KEF . Zbog uniformnosti polarnih koordinata dobijamo da je verovatnoća događaja da je dužina tetive manja od $\sqrt{3}$ jednaka 0.2475 , te je Bertranova verovatnoća jednaka 0.7525.

Rezultati simulacije su pokazali sledeće:

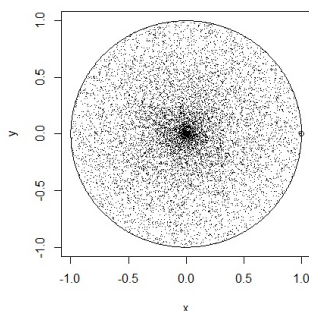
Tabela 2.

Broj parova tačaka A i B	100	500	1000	10000
Ocenjene Bertranove verovatnoće	0.7525	0.7529	0.7529	0.7521

Predstavljamo sliku sa generisanih 10000 tačaka B , dok smo fiksirali tačku $A(1, 0)$ (Slika 9.). Naredne slike, uključujući i sliku 9., sa pojedinim izuzetcima, su generisane u programu R, zajedno sa rezultatima koji su predstavljeni u tabelama 2,3,4,5,6,7,8 i 9.

²Bertranov uslov(događaj) je uslov(događaj) da je tetiva kruga veća od stranice upisanog jednakostraničnog trougla u krugu.

Slika 9.



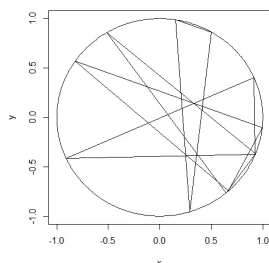
3.1. Proširenje Bertranovog paradoksa u dvodimenzionalnom prostoru

Razmatrajmo sledeći problem: *Odaberimo tri proizvoljne tačke na kružnici A, B i C , koje su nezavisne, i neka te tačke određuju jednoznačno trougao. Neka slučajna veličina X predstavlja broj stranica trougla koje su veće ili jednake od $\sqrt{3}$, tj. X uzima vrednosti iz skupa $\{0, 1, 2\}$. Sa kojim verovatnoćama slučajna veličina X uzima odgovarajuće vrednosti?* Prikazaćemo teorijsko rešenje ovog problema i rezultate Monte Karlo simulacija. Tri nezavisne tačke na kružnici kruga, poluprečnika R , obrazuju lukove dužina x, y i $2R\pi - x - y$, te ovaj problem možemo da predstavimo u \mathbf{R}^2 prostor. Skup svih ishoda je $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x, y; x + y < 2R\pi\}$. Slučajna veličina X uzima vrednosti $\{0, 1, 2\}$ u zavisnosti od toga da li tačke na kružnici obrazuju trougao koji ima 0, 1 ili 2 stranice duže od $\sqrt{3}$. Događaj $\{X = 3\}$ je događaj mere nula.

Retki su slučajevi u matematici kada je teorijsko rešenje problema najbolje predstavlja grafički. Ovaj slučaj je takav (Slika 11.). Za one vrednosti dužine lukova x i y koje pripadaju odgovarajućim trouglovima (Slika 12.), slučajna veličina X uzimaće vrednosti $\{0, 1, 2\}$. Stoga $P\{X = k\} = 1/3, k = 0, 1, 2$.

Na slici 10. su prikazana četiri trougla koja su nastala generisanjem, za svaki trougao, po tri nezavisne tačke na kružnici kruga, dok su na slici 11³. predstavljene dužine lukova.

Slika 10.

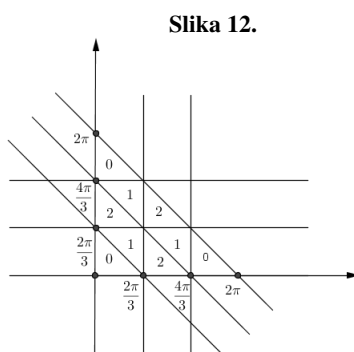
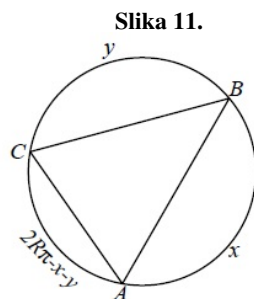


U tabeli 3. su prikazani rezultati Monte Karlo simulacije za ovaj problem. Simulacije potvrđuju teorijsko rešenje.

Tabela 3.

Broj parova (A,B,C)	$\{X = 0\}$	$\{X = 1\}$	$\{X = 2\}$
100	0.3302	0.3392	0.3306
500	0.3348	0.3321	0.3330
1000	0.3318	0.3335	0.3347
10000	0.3337	0.3335	0.3327

³Slika 11., 12. i 13. su nastale u programu GeoGebra.



Pogledom iz druge perspektive, trougao na krugu možemo jednoznačno odrediti i ako odaberemo dve tačke unutar kruga, koje su nezavisne i uniformno raspodeljene na krugu, i odabirom jedne tačke na kružnici kruga, nezavisnu od prethodne dve. Za trougao određen na ovaj način, i slučajnu veličinu X definisanu od pre, dajemo rezultate simulacija (Tabela 4.).

Tabela 4.

Broj parova (A,B,C)	$\{X = 0\}$	$\{X = 1\}$	$\{X = 2\}$
100	0.0353	0.3335	0.6312
500	0.0305	0.3276	0.6418
1000	0.0316	0.3254	0.6430
10000	0.0318	0.3242	0.6440

Formulaciju ovog problema dao je M. Obradović, a rezultate dobio(odredio) autor rada.

3.2. Proširenje Bertranovog paradoksa u trodimenzionalnom prostoru

Razmatramo sledeći problem: *Pretpostavimo da je u jediničnoj sferi upisan tetraedar. Kolika je verovatnoća da slučajna ravan koja preseca datu sferu generiše krug poluprečnika R , tako da površina jednakostraničnog trougla upisanog u taj krug bude veća od površine jedne stranice tetraedra?*

Pre nego što krenemo u raspravu na koje načine možemo da generišemo slučajnu ravan, odredićemo kolika je ivica tetraedra u sferi poluprečnika r . Za odgovor poslužiće nam slika 13., na kojoj je prikazan tetraedar sa odgovarajućim temenima A, B, C i V . Neka je O podnožje visine na trougao ABC , i neka je S centar opisane sfere oko tetraedra. Tada je $r = |SC| = |SV|$. Trougao SCV je jednakokraki, tačka P je polovina njegove osnove CV . Iz sličnosti trouglova OCV i SPV dobijamo proporciju $|OV| : |CV| = |PV| : |SV|$. Kako je $|CO| = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, onda je $|OV| = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, pa se dobija da je $r = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ (smatramo da je a ivica tetraedra).

Pošto je $r = 1$ dobijamo da je ivica tetraedra u sferi $a = \frac{4}{\sqrt{6}}$.

Rastojanje centra sfere, S , od jedne stranice tetraedra (ujedno smo odredili rastojanje centra sfere od ravni koja je određena sa ovim trouglom), odnosno $|SO| = |VO| - |VS| = \frac{1}{3}$.

Formulišemo drugačije početni problem: *Događaj da ravan koja preseca jediničnu sferu, pri čemu generiše*

Slika 13.

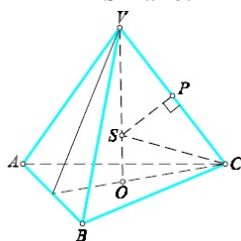


Tabela 5.

Broj parova (A,B,C)	100	500	1000	10000
Ocenjene verovatoće	0.5287	0.5186	0.5198	0.5185

krug poluprečnika R , tako da površina jednakostraničnog trougla u tom krugu bude veća od površine stranice upisanog tetraedra u sferi je ekvivalentan događaju da rastojanje centra novonastalog kruga od centra sfere bude manje od rastojanja centra sfere i jedne strane tetraedra.

Postoje različite metodičke procedure izbora kruga na sferi, koji je generisan presekom slučajne ravni i sfere, izdvajamo neke od njih:

1. Pomoću tri tačke na sferi koje određuju presečnu ravan (Tabela 5.);
2. Pomoću jedne tačke S unutar sfere, koja je centar kruga, ali je ravan tog kruga normalna na OS , gde je O centar sfere (Tabela 6.);
3. Pomoću dve tačke na sferi i treće unutar sfere (Tabela 7.);
4. Pomoću dve tačke u sferi i jedne na sferi (Tabela 8.);
5. Pomoću tri tačke u sferi (Tabela 9.).

Za svaki od navedenih načina jednoznačnog izbora slučajne ravni prikazujemo tabele sa ocenjenim verovatnoćama na osnovu simulacija.

Tabela 6.

Broj parova (A,B,C)	100	500	1000	10000
Ocenjene verovatoće	0.3338	0.3346	0.3342	0.3336

Tabela 7.

Broj parova (A,B,C)	100	500	1000	10000
Ocenjene verovatoće	0.7741	0.7762	0.7778	0.7770

Tabela 8.

Broj parova (A,B,C)	100	500	1000	10000
Ocenjene verovatoće	0.8881	0.8906	0.8893	0.8893

Tabela 9.

Broj parova (A,B,C)	100	500	1000	10000
Ocenjene verovatoće	0.9434	0.9424	0.9433	0.9433

Formulaciju ovog problema predložila je V. Jevremović, simulacione studije je uradio autor ovog rada.

4. Zaključak

Bertranov paradoks opominje da pri radu sa geometrijskom verovatnoćom moramo da definišemo sta podrazumevamo pod pojmom *slučajno*. Ukoliko pre početka rada sa geometrijskim verovatnoćama to, pak, ne učinimo, možemo se naći u situaciji da za određen problem imamo više različitih rešenja. Time bismo bili u dilemi kao svojevremeno Bertran: "*Između ova tri rešenja, koje je korektno? Nijedno rešenje nije netačno, nijedno rešenje nije tačno, stoga je pitanje pogrešno formulisano*"⁴.

Izdvojio bih i jednu rečenicu iz rada [5] koja predstavlja suštinu razmišljanja o ovakvim problemima, ona glasi: *Rezultati nas opominju da budemo pažljivi pri radu sa geometrijskom verovatnoćom, i da tačno definišemo šta je slučajan događaj za koji treba da se nađe odgovarajuća verovatnoća.*

Zahvalnica. *Zahvalio bih se svojim mentorima dr Vesni Jevremović i mr Marku Obradović na strpljenju, pruženoj podršci i stručnoj pomoći.*

Bibliografija

- [1] **E. Jaynes**, The Well-Posed Problem, *Washington University, Missouri*, 1973
- [2] **L. Marinof**, A Resolution of Bertand's paradox, *University of British Columbia, Vancouver*, 1992
- [3] **M.G. Kendal, P.A.P. Moran**, Geometrical Probability, *University of London*, 1963
- [4] **S. Chi, R. Larson**, Bertrand's Paradox Revisited: More Lessons about that Ambiguous Word, *Random, Stanford University, Stanford*, 2009, pp. 1-16
- [5] **V. Jevremović, M. Obradović**, Bertrand's Paradox: Is there anything else?, *Springer, Qual Quant* (2012) 46, 2011, pp. 1709-1714

⁴Citirano iz rada [2]

Примена математичког модела: вишекритеријумска оптимизација у контејнерском транспорту

Радослав Рајковић

*Универзитет у Београду, Машински факултет, Краљице Марије 16, 11000 Београд, Србија
e-mail: rrajkovic@mas.bg.ac.rs*

Ђорђе Стакић

*Универзитет у Београду, Математички факултет, Студентски трг 16, 11000 Београд, Србија
e-mail: djordjes@matf.bg.ac.rs*

Апстракт. Контејнерска револуција резултирала је великим променама у међународној трговини и један је од најважнијих доприноса глобализацији светске економије. У току последњих деценија, постала је најбрже растући сегмент тржишта чинећи преко 16% глобалне поморске трговине по запремини у 2012. години достигавши вредност од 155 милиона ТЕУ и 1,58 милијарди тона.

У овом раду је анализирана интермодална транспортна мрежа са посебним освртом на увоз контејнера са Далеког Истока ка Србији. Интермодалну мрежу чине океански део на коме су контејнери транспортовани посредством највећих светских бродара и копнени део на коме су контејнери транспортовани користећи различите видове превоза.

Основни циљ овог истраживања је тражење најбољег решења из низа допустивих решења у смислу више усвојених критеријума: минимално транзитно време, најнижи транспортни трошкови и минимална емисија гасова приликом превоза контејнера од Шангаја до Београда. У студији смо развили мулти-објектни оптимизациони модел, програмиран у МАТЛАБ-у, приказујући оптимални пут за увоз контејнера у Србију. Развијени математички модел нам даје могућност посматрања читавог опсега решења, као и могућност њиховог рангирања, чијим се одабиром врши једноставна селекција групе оптималних решења, посматрајући истовремено минимизацију транзитног времена, транспортних трошкова и емисије гасова.

Модел одговара различитим захтевима купаца обзиром да неки захтевају ниже трошкове транспорта, док су други оријентисани на минимизацију и брже време испоруке, узимајући у обзир све важније питање одрживости животне средине, минимизацијом емисије гасова. Математички модел велику примену налази у пракси, чијом једноставном применом транспортне компаније могу пратити константне промене на тржишту са посебним освртом на одрживост екосистема.

Кључне речи: контејнерски транспорт; вишекритеријумска оптимизација; математички модел.

1. Увод

Интензитет и количина поморских робних токова данас су постали мерило ефикасности и корисности транспорта, укључености у међународну поделу рада и степена привредне развијености једне државе. Будући да се више од 65% укупне међународне робне размене одвија поморским путевима, интензитет, смер, структура и динамика кретања поморских робних токова релевантни су показатељи концентрације светске размене добара, који упућују на значај и позиционираност светских центара производње и потрошње, то јест центра привредног развоја.

Поморски транспорт као главни покретач трговинске размене у свету, одвија се поморским путевима који спајају велика индустријска, логистичка и трговачка чворишта и њихове луке, на којима се формирају поморски робни токови.

У току 2012. године глобална поморска трговина је забележила раст од 4,3 %. Укупна робна размена достигла је износ преко 9 милијарди тона у 2012. години, по први пут, али је и даље остала осетљива на ризике са којима се суочава светска економија. У току последњих деценија, контејнерска трговина је постала најбрже растући сегмент тржишта чинећи преко 16 % глобалне поморске трговине по запремини у 2012. достигавши вредност од 155 милиона јединица еквивалента двадесет стопа (twenty-foot equivalent unit - TEU) и 1,58 милијарди тона. Контејнерска трговина достигла је раст за 3,2 % у 2012., што је пад у односу на раст од 13,1 % у току 2010., и 7,1 % у току 2011. године [1].

Контејнерска револуција резултирала је великим променама у међународној трговини и један је од најважнијих доприноса глобализацији светске економије. Превоз генералног терета контејнерима омогућио је да се оствари концепт мултимодализма, тј. међусобног повезивања различитих облика превоза.

Велики талас у развоју контејнерске трговине може се углавном приписати повећаном продору азијских производа на развијена европска и америчка тржишта. Контејнерски трговински токови бележе највећи раст посматрајући своја три главна робна тока (Азија-Европа, Транспацифик и Трансатлантик) на релацији „исток-запад“ трговачких путева, који чине 47 % светске поморске контејнерске трговине. Конкретно, у периоду 1995-2011, контејнерска трговина је порасла за скоро 5 пута између Азије и Европе досегнувши износ од 20 милиона TEU. Између Далеког истока и Медитерана транспортовано је 4,37 милиона TEU користећи 31 различити поморски контејнерски сервис бродарских компанија у току 2012. године [1].

У овом раду је анализирана интермодална транспортна мрежа са посебним освртом на увоз контејнера од Шангаја до Београда преко медитеранских лука (Копар, Ријека, Бар, Солун, Констанца). Интермодалну мрежу чине океански део на коме су контејнери транспортовани посредством 6 највећих светских бродара (Maersk Line - MSK, Mediterranean Shipping Company - MSC, CMA CGM, Evergreen Line - EMC, China Ocean Shipping Company - COSCO и Harap-Lloyd) и копнени део на коме су контејнери транспортовани користећи три различита вида превоза (камионски, железнички и речни) [2, 3].

Проучавањем постојеће литературе, можемо закључити да је мали број истраживача посматрао интермодални транспорт истовремено узимајући у обзир транспорт на мору и копну [4, 5, 6, 7, 8]. У већини случајева су развијени модели за оптимизацију који се заснивају на минимизацији једног параметра - трошак превоза. Само неколико модела интегрисе и време транспорта као други параметар [9, 10, 11], или укључује вишеструке критеријуме оптимизације [7, 12, 13, 14]. Модели који посматрају два критеријума истовремено (дво-објектни модели) се примењују са јасним циљем одређивања „најбоље“ руте коју карактеришу минимални транспортни трошкови и минимално транзитно време.

Истраживања у погледу тестирања дво-објектне оптимизације минимизирајући транспортне трошкове и транзитно време спровели су Lam и Gu [5], посматрањем протока контејнера у извозу и увозу из Кине. Тајкође су у свој модел поред наведених увели и критеријум ограничавајућег фактора CO₂ загађења. Yang и др. [14], представили су интермодални мрежни модел за испитивање конкурентности алтернативних рута за превоз робе из Кине преко Индијског океана минимизирањем трошкова превоза и транзитног времена. Међународни интермодални проблем рутирања проучавао је и Tsung-Sheng [11], формирајући мулти-објектни проблем са минимизационим факторима трошкова и времена.

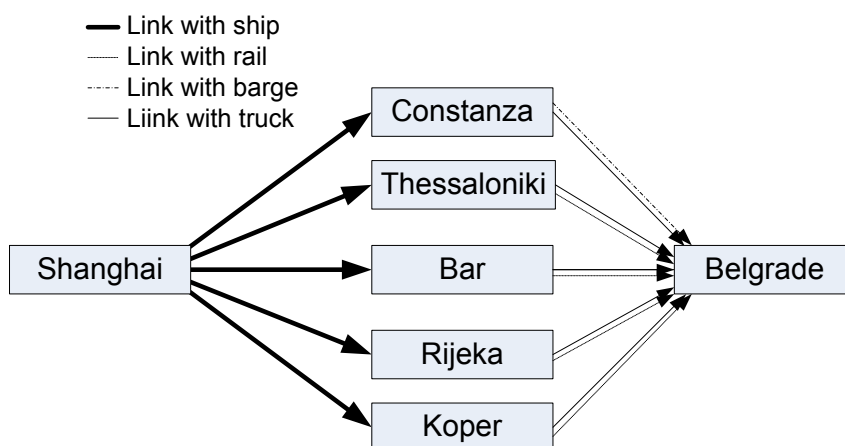
У случају једнокритеријумске оптимизације, доносилац одлуке имплицитно задржава слободу да прихвати, промени или одбаци решење добијено на основу математичког модела оптимизације. Надградња једнокритеријумске оптимизације је позната у теорији као линеарно и нелинеарно програмирање, теорија игара, динамичко програмирање итд. Наведене методе имају своју примену у пракси, али нису примењиве код многих реалних проблема где постоји избор између више алтернатива са и без више супростављених или делимично супростављених критеријума. Реални критеријуми имају неке заједничке особине као на пример одабир већег броја атрибута, различитост атрибута, неупоредиве јединице мере, итд. Решење је избор најбоље алтернативе из скупа датих тј. дефинисаних алтернатива. Методе које од самог почетка формирања математичког модела за одређени реални проблем воде рачуна о више циљева истовремено развијају се у области вишекритеријумске оптимизације (ВКО).

У овом раду је развијен вишекритеријумски математички оптимизациони модел, програмиран у MATLAB-у, који минимизира време, трошкове и емисију угљен-диоксида приликом увоза контејнера од Шангаја до Београда. Минимизирајући редомнаведене критеријуме приликом увоза контејнера од Шангаја преко медитеранских чворова утврђен је оптималан пут за увоз контејнера у Србију који је достигао број од 42 000 TEU у 2012. години.

Поглавље број 2 описује проблем рада, док је математички проблем представљен у трећем поглављу. У поглављу број 4 приказани су резултати добијени применом математичког модела. Закључак и будућа истраживања приказани су у поглављу број 5.

2. Опис проблема

Интермодалну транспортну мрежу приказану на слици 1 чине три категорије чворова: лука утовара, лука истовара и крајње место допреме контејнера и две врсте грана који повезују наведене чворове.



Слика 1. Интермодална транспортна мрежа [3]

2.1. Чворови

Сваки чвор поседује своју посебну карактеристику:

Лука утовара- Шангај је од 2005. године по укупном промету највећа морска лука на свету, а од 2010. и највећа светска контејнерска лука. У току 2012. године Шангај је имао промет од 32.529 милиона TEU. Тиме је приближно за два милиона TEU надмашио други по реду Сингапур, а затим следе Хонг Конг, Шенжен, Пусан, Нингбо, Гванжу, Кингдао, Дубаи и Тианџин, док је на 11 месту и једна Европска лука, холандска лука Ротердам, са готово три пута мањим прометом од Шангаја. У табели 1. приказан је промет контејнера у периоду од 2004. до 2012. године.

Луке истовара -Повезане су са луком утовара морима. Главна чворишта за увоз контејнера у Србију су луке: Ријека, Бар, Копар, Констанца и Солун. Табела 2. приказује укупан увоз / извоз контејнера у току 2012. године.

Rank	Port, Country	Volume (Million TEUs)								
		2012	2011	2010	2009	2008	2007	2006	2005	2004
1	Shanghai, China	32,53	31,74	29,07	25,00	27,98	26,15	21,71	18,08	14,56
2	Singapore, Singapore	31,65	29,94	28,43	25,87	29,92	27,93	24,79	23,19	21,33
3	Hong Kong, China	23,10	24,38	23,70	20,98	24,25	23,88	23,54	22,43	21,98
4	Shenzhen, China	22,94	22,57	22,51	18,25	21,41	21,10	18,47	16,20	13,62
5	Busan, South Korea	17,04	16,17	14,19	11,95	13,43	13,27	12,04	11,84	11,43
6	Ningbo-Zhoushan, China	16,83	14,72	13,14	10,50	11,23	9,35	7,07	5,21	4,01
7	Guangzhou, China	14,74	14,26	12,55	11,19	11,00	9,20	6,60	4,69	3,31
8	Qingdao, China	14,50	13,02	12,01	10,26	10,32	9,46	7,70	6,31	5,14
9	Jebel Ali, Dubai, UAE	13,30	13,01	11,60	11,12	11,83	10,65	8,92	7,62	6,43
10	Tianjin, China	12,30	11,59	10,08	8,70	8,50	7,10	5,95	4,80	3,81
11	Rotterdam, Netherlands	11,87	11,88	11,14	9,74	10,78	10,79	9,66	9,29	8,28
12	Port Kelang, Malaysia	10,00	9,60	8,87	7,31	7,97	7,12	6,33	5,54	5,24
13	Kaohsiung, Taiwan	9,78	9,64	9,18	8,58	9,68	10,26	9,78	9,47	9,71
14	Hamburg, Germany	8,86	9,04	7,91	7,01	9,74	9,89	8,86	8,09	7,00
15	Antwerp, Belgium	8,64	8,66	8,47	7,31	8,66	8,18	7,02	6,48	6,06

Табела 1. Промет контејнера у периоду од 2004. до 2012. Године

Крајње место допреме контејнера- Србија је континентална држава, док београдски регион представља највећи проценат целокупног увоза робе у Србију. Са истоварним лукама повезан је директним везама и контејнери се могу транспортовати различитим видовима превоза (железнички, друмски, речни).

2012		
Лука	TEU	%
Ријека	33.000	60,00%
Бар	16.000	29,00%
Копар	2.500	4,55%
Констанца	1.000	1,82%
Солун	1.500	2,73%
Северно-европске	1000	1,82%
Укупно TEU	55.000	

Табела 2. Укупан увоз и извоз контејнера у Србију у 2012 години

2.2. Гране

Контејнери се морским путем транспортују од луке утовара до луке истовара различитим контејнерским бродовима. У овом раду су разматрани контејнерски бродови који су у власништву 6 највећих бродарских компанија (Maersk Line - MSK, Mediterranean Shipping Company - MSC, CMA CGM, Evergreen Line - EMC, China Ocean Shipping Company - COSCO и Hapag-Lloyd). На слици 2 приказано је 20 највећих контејнерских бродских компанија.

Сваки од наведених бродова који су у власништву наведених компанија преко различитих транспортних рута (бродских сервиса) транспортују контејнере од луке Шангај до номинованих лука у Медитерану.

Rnk	Operator	TOTAL		Owned		Chartered			Orderbook		
		TEU	Ships	TEU	Ships	TEU	Ships	% Chart	TEU	Ships	% existing
1	APM-Maersk	2,656,709	569	1,483,655	249	1,173,054	320	44.2%	256,710	15	9.7%
2	Mediterranean Shg Co	2,426,655	487	1,038,181	189	1,388,474	298	57.2%	438,851	38	18.1%
3	CMA CGM Group	1,520,630	429	526,288	83	994,342	346	65.4%	373,957	37	24.6%
4	Evergreen Line	875,242	198	509,479	108	365,763	90	41.8%	290,800	24	33.2%
5	COSCO Container L.	756,291	153	400,667	93	355,624	60	47.0%	87,158	8	11.5%
6	Hapag-Lloyd	750,696	153	407,439	65	343,257	88	45.7%	13,169	1	1.8%
7	APL	628,722	117	363,343	48	265,379	69	42.2%	23,200	2	3.7%
8	CSCL	603,646	133	432,283	73	171,363	60	28.4%	155,216	11	25.7%
9	Hanjin Shipping	602,990	104	284,846	40	318,144	64	52.8%	100,720	11	16.7%
10	MOL	599,175	117	216,972	35	382,203	82	63.8%	100,000	10	16.7%
11	Hamburg Süd Group	492,384	109	253,165	43	239,219	66	48.6%	104,784	12	21.3%
12	NYK Line	475,417	106	300,513	54	174,904	52	36.8%	112,000	8	23.6%
13	OOCL	475,091	88	333,336	48	141,755	40	29.8%	48,760	5	10.3%
14	Yang Ming Marine Tran	388,965	87	224,326	46	164,639	41	42.3%	233,380	20	60.0%
15	PIL (Pacific Int. Line)	358,503	165	248,916	114	109,587	51	30.6%	46,800	12	13.1%
16	Hyundai M.M.	358,169	59	125,510	19	232,659	40	65.0%	99,300	9	27.7%
17	K Line	350,562	67	127,352	21	223,210	46	63.7%	69,350	5	19.8%
18	Zim	323,403	83	133,394	25	190,009	58	58.8%			
19	UASC	275,834	49	198,164	26	77,670	23	28.2%	281,926	19	102.2%
20	CSAV Group	248,002	50	80,889	15	167,113	35	67.4%	65,100	7	26.2%

Слика 2. Бродарске контејнерске компаније

У табели 3. приказано је учешће наведених бродара у увозу и извозу контејнера у Србију.

2012		
Бродар	TEU	%
MSC	21.000	38%
Maersk Line	16.000	29%
CMA CGM	7.000	13%
Evergreen	4.000	7%
HapagLloyd	2.000	4%
COSCO	2.000	4%
Others	3.000	5%
Укупно TEU	55.000	100%

Табела 3. Водеће бродарске контејнерске компаније за српско тржиште

Копненим везама контејнери се допремају од истоварних лука до крајње дестинације у Београду. Контејнери се могу допремити до терминала у Београду или до крајњих корисника различитим видовима превоза, железничким до железничког интегралног терминала – ЖИТ, речним до Луке Београд и друмским до крајњег корисника.

3. Математички модел

Да би се применила нека оптимизациона метода, у већини случајева је потребна математичка формализација проблема, односно математички модел. Под претпоставком да за већину одлука у конкретним ситуацијама може важити напред дефинисана варијанта процеса доношења одлука при разлагању једне одлуке на њене делове, односно на ниже одлуке, и да је одлуке потребно доносити на основу аргументованих чињеница, може се усвојити, да математички модели и оптимизационе методе имају значајну, а у неким случајевима и незаменљиву улогу у најбитнијим фазама овог процеса.

Има више разлога који утичу на то да су проблеми ВКО по природи суштински другачији у односу на проблеме једнокритеријумске оптимизације. Основни је баш у томе што се сви фактори који утичу на одлуку, односно сви исходи које би имало евентуално решење, посматрају као критеријуми чије вредности треба да буду оптималне. Дакле, треба наћи решење које је најбоље по свим разматраним критеријумима истовремено, а чињеница је да су неки од њих у скоро свим проблемима одлучивања међусобно делимично или потпуно конфликтни. Поред тога, разматрани критеријуми могу по својој природи бити веома разнородни и изражени у различитим мерним јединицама, од новчаних јединица, преко јединица физичких величина, до вероватноћа или субјективних процена датих по некој скали која се формира за конкретни проблем. Све ово указује да коначно јединствено решење не може да се одреди без учешћа доносиоца одлуке.

Укупно транзитно време које је анализирано у овом раду представља време од тренутка испловљавања контејнерског брода из луке утовара до тренутка приспећа контејнера до одговарајуће дестинације у Београду. Оно обухвата време транспорта контејнера на мору, време чекања на отпрему контејнера у луци истовара и време транспорта контејнера од луке истовара до крајње тачке у Београду.

Укупни трошкови транспорта, најчешће коришћених типова контејнера од луке Шангај до Београда у овом раду, представљају суму свих транспортних трошкова, обухватајући трошкове транспорта на морском делу од луке Шангај до лука у Медитерану, лучке трошкове, трошкове манипулација и царинских формалности у истоварним лукама и трошкове транспорта од номинованих лука до терминала у Београду користећи различите видове превоза. Превоз контејнера железницом и баржама обухватају и трошкове манипулације контејнера на терминалима у Београду и локалног развоза камионом до крајњег корисника.

Укупна емисија угљен-диоксида представља његовуукупну емисију од тренутка испловљавања контејнерског брода (конкретно се посматра јединица контејнера) из луке утовара до тренутка приспећа контејнера до одговарајуће дестинације у Београду.

Презентовани математички модел одређује оптималну путању за један задати контејнер који се превози. За његову имплементацију је изабран MATLAB у ком је могуће да се осим оптималне трасе прикажу и све остале трасе формирајући ранг листу по задатом параметру оптимизације. То ову имплементацију разликује од неких других постојећих софтвера који за задати модел генеришу само оптимално решење. Осим што се пружа могућност формирања адекватне ранг листе свих могућих решења у погледу оптимизације транзитног времена, транспортних трошкова и емисије угљен-диоксида, у имплементираним софтверу у MATLAB-у је могуће помоћу тежинских коефицијената одредити утицај сваког параметра.

Пошто су у питању параметри који се изражавају у различитим јединицама, цена, време и загађење, онда је њихово директно упоређивање било немогуће. Из тог разлога је у самој имплементацији извршено пропорционално скалирање свих вредности за дати параметар тако да је нпр. најмања цена добила вредности 100, а остале су према њој скалиране пропорционално. Слично је урађено и за време и загађење. Корисник затим при одлучивању задаје тежински коефицијент за сваки од наведених параметара. После тога програм генерише

ново оптимално решење имајућу у виду тежине за сва три параметра. По потреби програм може да генерише и целу ранг листу допустивих решења.

3.1. Параметри и променљиве

N - скуп чворова, $N = S \cup E \cup B$, где је „ S “ лука отпреме, „ E “ лука истовараи „ B “ представља крајњу тачку у Београду

A - скуп грана који повезује луку утовара са истоварним лукама

C - скуп грана који повезује луке истовара са Београдом

t_{ij} - бинарна трошковна променљива, представља контејнерски ток на морском делу повезујући одговарајућег оператора „ i “ са одговарајућом луком „ j “, $t_{ij} \in \{0,1\}$

l_{jk} - бинарна трошковна променљива, представља контејнерски ток на копненом делу повезујући одговарајућу луку „ j “ и декларишући одговарајући вид превоза „ k “ до Београда, $l_{jk} \in \{0,1\}$

tt_{ij} - бинарна временска променљива, представља контејнерски ток на морском делу повезујући одговарајућег оператора „ i “ са одговарајућом луком „ j “, $tt_{ij} \in \{0,1\}$

tl_{jk} - бинарна временска променљива, представља контејнерски ток на копненом делу повезујући одговарајућу луку „ j “ и декларишући одговарајући вид превоза „ k “ до Београда, $tl_{jk} \in \{0,1\}$

d_{ijs} - бинарна CO_2 променљива, представља контејнерски ток на морском делу повезујући одговарајућег оператора „ i “ са одговарајућом луком „ j “ у зависности од сервиса „ s “, $d_{ijs} \in \{0,1\}$

g_{jk} - бинарна CO_2 променљива, представља контејнерски ток на копненом делу повезујући одговарајућу луку „ j “ и декларишући одговарајући вид превоза „ k “ до Београда, $g_{jk} \in \{0,1\}$

i - број оператора, $i \in \{1, \dots, 6\}$, (1 - MSK, 2 - MSC, 3 - CMA CGM, 4- EMC, 5 - COSCO, 6 - Нарав Lioyd)

j - број истоварне луке, $j \in \{1, \dots, 5\}$, (1 -Констанца, 2 - Солун, 3 - Бар, 4 - Копар, 5 - Ријека)

t - тип контејнера, $t \in \{1, \dots, 3\}$, (1 - 20 DV, 2 - 40 DV, 3 - 40 HQ)

s - врста сервиса, $s \in \{1, \dots, 3\}$

k - врста транспорта на копну, $k \in \{1, \dots, 3\}$, (1 -железница, 2 - камион, 3 - река)

TSE_{ijs} - транзитно време на мору (дани)

TEB_{jk} - транзитно време на копну(дани)

CSE_{ijt} - транспортни трошкови на мору (\$)

EX - коефицијент количника валута (€ / \$)

CPC_{ijt} - лучки трошкови (€)

CEB_{jkt} - транспортни трошкови на копну (€)

CO_2SE_{ijs} - емисија угљен-диоксида на мору (кг/ТЕУ)

CO_2EB_{jk} - емисија угљен-диоксида на копну (кг/ТЕУ)

Функција циља:

Минимизација транспортних трошкова =

$$\sum_{(i,j) \in A} \left((CSE_{ij} \frac{1}{EX} + CPC_{ij}) * t_{ij} \right) + \sum_{(j,k) \in C} (CEB_{jk} * l_{kj}) \quad (1)$$

Минимизација транзитног времена =

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_s (TSE_{ijs} * tt_{ijs}) + \sum_{(j,k) \in C} (TEB_{jk} * tl_{jk}) \quad (2)$$

Минимизација угљен-диоксида =

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_s (CO_2SE_{ijs} * d_{ijs}) + \sum_{(j,k) \in C} (CO_2EB_{jk} * g_{jk}) \quad (3)$$

Ограничења:

$$\sum_{(i,j) \in A} t_{ij} = 1 \quad (4)$$

$$\sum_{(j,k) \in C} l_{jk} = 1 \quad (5)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} t_{ij} = \sum_{(j,k) \in C} l_{jk}, \quad \forall j \quad (6)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_s tt_{ijs} = 1 \quad (7)$$

$$\sum_{(j,k) \in C} tl_{jk} = 1 \quad (8)$$

$$\sum_{i,s} tt_{ijs} = \sum_k tl_{jk}, \quad \forall j \quad (9)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_s d_{ijs} = 1 \quad (10)$$

$$\sum_{(j,k) \in C} g_{jk} = 1 \quad (11)$$

$$\sum_{i,s} d_{ijs} = \sum_k g_{jk}, \quad \forall j \quad (12)$$

Одговарајућа објашњења:

Функција (1) минимизира укупне транспортне трошкове у посматраној интермодалној мрежи, приликом увоза различитих типова контејнера. Они представљају суму свих трошкова на морском делу, лучких трошкова у посматраним медитеранским лукама и транспортне трошкове камиона, железнице и барже који су ангажовани за превоз контејнера на копненом делу. Функција (2) минимизира укупно транзитно време потребно за допрему контејнера од Шангаја до Београда док функција (3) минимизира укупну емисију угљен-диоксида. Ограничења (4) и (5) дефинишу најбоље решење посматрајући групу могућих парова решења у погледу транспортних трошкова на мору и копну. Ограничење (6) врши селекцију и повезује морски и копнени део са аспекта транспортних трошкова. Ограничења (7) и (8) дефинишу најбоље решење посматрајући групу могућих парова решења у погледу транзитног времена на мору и копну. Ограничење (9) врши селекцију и повезује морски и копнени део са аспекта транзитног времена. Ограничења (10) и (11) дефинишу најбоље решење посматрајући групу могућих парова решења у погледу емисије угљен-диоксида на мору и копну. Ограничење (12) врши селекцију и повезује морски и копнени део са аспекта емисије угљен-диоксида.

4. Резултати

У овом поглављу су анализирани и приказани резултати добијени применом математичког модела, који минимизира како укупно транзитно време, транспортне трошкове и емисију угљен-диоксида приликом увоза контејнера од Шангаја до Београда. У раду су коришћени оригинални подаци за посматрани период од јула до децембра 2013. године. Табела 4 приказује различите коефицијенте који су узети за различите видове транспорта. Ови коефицијенти су добијени на основу просечне емисије угљен-диоксида дате врсте возила по километру, поделом равномерно на све присутне контејнере на том возилу. На тај начин добијене упросечене вредности коефицијената могу се користити за просечно рачунање загађења за ту

врсту возила на тој деоници, с тим што се ови коефицијенти множе растојањем у километрима и добија се емисија угљен-диоксида у килограмима.

<i>Carbon footprint factors</i>	Ship	Rail	Barge	Truck
CO₂ factor (kg/TEU-km)	0.084	0.205	0.084	0.072

извор: Technical report (Maersk Line, 2012)

Табела 4. Коефицијенти угљен-диоксида у зависности од врсте транспорта

```

Command Window
>> modelrr15
Input: 1 - cost, 2 - time, 3 - emission, 4 - cost/time, 5 - cost/emission, 6 - time/emission, 7 - multi-objective: 7
Input scalar for cost: 1
Input scalar for time: 1
Input scalar for emission: 1
Input number for rank list (1-270): 3

* * *

Type of container: TEU, Rank: 1, Rate: 1657 EUR

Transport between: SHANGHAI - BELGRADE
Port of loading: SHANGHAI
Operator: COSCO
Number of transshipments: 1
Service: ABX / AFS
Route: SHANGHAI - Ningbo - Yantian - Hong Kong - Nansha - Singapore - Suez - PIREAUS / PIREAUS - Thessaloniki - Pireaus - RIJEKA
Port of discharge: RIJEKA
Mode of transport: RAIL
Place of delivery: BELGRADE

Transit time = 31 days
Distance (see + land): 16417 km + 666 km
Emission = 1515.56 kg/TEU
* * *

Type of container: TEU, Rank: 2, Rate: 1657 EUR

Transport between: SHANGHAI - BELGRADE
Port of loading: SHANGHAI
Operator: COSCO
Number of transshipments: 1
Service: MD1 / AFS
Route: SHANGHAI - Taipei - Hong Kong - Shekou - Suez - PIREAUS / PIREAUS - Thessaloniki - Pireaus - RIJEKA
Port of discharge: RIJEKA
Mode of transport: RAIL
Place of delivery: BELGRADE

Transit time = 33 days
Distance (see + land): 16406 km + 666 km
Emission = 1514.63 kg/TEU
* * *

Type of container: TEU, Rank: 3, Rate: 1772 EUR

Transport between: SHANGHAI - BELGRADE
Port of loading: SHANGHAI
Operator: COSCO
Number of transshipments: 1
Service: ABX / AFS
Route: SHANGHAI - Ningbo - Yantian - Hong Kong - Nansha - Singapore - Suez - PIREAUS / PIREAUS - Thessaloniki - Pireaus - RIJEKA
Port of discharge: RIJEKA
Mode of transport: TRUCK
Place of delivery: BELGRADE

Transit time = 29 days
Distance (see + land): 16417 km + 550 km
Emission = 1638.63 kg/TEU

```

Слика 3. Бродарске контејнерске компаније
извор: MATLAB Mathematical model by autor

Развијен математички модел нам пружа прилику да посматрамо цео спектар могућих решења, и даје нам могућност њиховог рангирања, чијим једноставним избором долазимо до оптималног решења, посматрајући и минимизирајући истовремено више разнородних критеријума: трошкове превоза, транзитно време и емисију угљен-диоксида у зависности од изабраних коефицијента значаја. Вишекритеријумска оптимизација користи једнаке вредности

скалара. На слици 3 дат је приказ прва три најбоља решења. Можемо закључити да је као оптимално решење приликом превоза контејнера од Шангаја до Београда издвојено:

- минимални трошак превоза: 1657 €/ТЕУ
- минимално време транспорта: 31 дан
- минимална емисија угљен-диоксида: 1515,56 кг/ТЕУ

5. Закључак и будућа истраживања

Један од кључних разлога брже експанзије контејнерског транспорта је концепт интермодалног транспорта. Интермодални транспорт дефинише се као транспорт јединичног терета посредством превозних средстава више транспортних грана на начин да се максимално искористе компаративне предности сваке коришћене транспортне гране. Предности интермодалног транспорта препознате су још 80-их година прошлог века, а односе се на целу привреду, па чак и друштво у целини. Повећава се број привредних субјеката укључених у процес, побољшана је координација и управљање транспортом, омогућено је остваривање учинака економије обимау модалитету превоза, „од врата до врата“, а све је то довело до смањења трошкова и повећања добити. Корисници поморског контејнерског превоза такође су профитирали са развојем контејнеризације. Пре ере контејнерског транспорта, трошкови поморског превоза у цени производа учествовали су са 5-10 %, а након што је контејнерски превоз постао уобичајен, тај се удео смањио на 1-1,5%. Данас, контејнерски транспорт у оквиру светске глобализације привреде има веома важну улогу у превозу робе са константном тенденцијом раста.

Анализом интермодалне транспортне мреже, са посебним освртом на увоз контејнера од Шангаја до Београда преко Медитеранских лука (Копар, Ријека, Бар, Солун, Констанца), формирана је најбољарута из низа допустивих решења у смислу више усвојених разнородних критеријума.

Развијени математички модел нам даје могућност посматрања читавог опсега решења, као и могућност њиховог рангирања, чијим се одабиром врши једноставна селекција групе оптималних решења, посматрајући истовремено минимизацију транзитног времена, транспортних трошкова и емисије угљен-диоксида. Математички модел велику примену налази у пракси, чијом једноставном применом транспортне компаније могу пратити константне промене на тржишту.

Захвалница. *Студија је спроведена у оквиру Пројекта ТП - 36027, „Развој софтвера и националне базе података за стратешко управљање развојем транспортних средстава и инфраструктуре у друмском, железничком, ваздушном и водном саобраћају применом европских транспортних мрежних модела“, финансираног од стране Министарства за образовање, науку и технолошки развој Републике Србије.*

Библиографија

- [1] **Review of Maritime Transport:** UNCTAD/RMT/2013, *United National Publication Sales* no. E.13.II.D.9, ISBN 978-92-1-112872-7, e-ISBN 978-92-1-054195-4, ISSN 0566-7682.
- [2] **R. Rajkovic, N. Zrnic, Đ. Stakic, B. Mahnič.** The Costs of Container Transport Flow Between Far East and Serbia Using Different Liner Shipping Services. *Proceeding of the 11th International Conference on Logistics and Sustainable Transport, Celje, Slovenia, 2014.*
- [3] **R. Rajkovic, N. Zrnic, Đ. Stakic.** Application of Mathematical Model for Container Transport Flow of Goods: from Far East to Serbia. *Proceeding of the International Conference on Industrial Logistics, Brac, Croatia, 2014, pp. 159 - 166.*
- [4] **G. C. Teodor, H. K. Kap.** Chapter 8 Intermodal Transportation. *Handbooks in Operations Research and Management Science*, 2007, 14, 467-537.

- [5] **J. S. L. Lam, Y. Gu.** Port Hinterland Intermodal Container Flow Optimisation with Green Concerns: A Literature Review and Research Agenda. *Proceedings of International forum on Shipping, Ports and Airports: Trade, supply chain activities and transports: Contemporary logistics and Maritime issues*, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, 2013, pp. 167-179.
- [6] **D. Infante, D. Paletta, F. Vocaturo.** A Ship-truck Intermodal Transport Problem, *Maritime Economics & Logistics*, 2009, 11 (3), 247-259.
- [7] **H. J. Kim, Y. T. Chang, P. T. W. Lee, S. H. Sin, M. J. Kim.** Optimizing the Transportation of International Container Cargoes in Korea, *Maritime Policy & Management*, 2008, 35 (1), 103-122.
- [8] **J. Payman, C. L. Robert.** Long- and Short-Run supply-chain optimization models for the allocation and congestion management of containerized imports from Asia to the United States. *Transportation Research Part E*, 2011, 47, 593-608.
- [9] **A. Maurizio, M. Simona, R. Andrea.** Formulating a mathematical model for container assignment optimization on an intermodal network. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2014, 111, 1063 - 1072.
- [10] **M. G. H. Bell, X. Liu, P. Angeloudis, A. Fonzone, S. H. Hosseinloo.** A frequency- based maritime container assignment model. *Transportation Research Part B*, 2011, 45, 1152-1161.
- [11] **C. L. Robert, J. Payman.** Estimating flow times for containerized imports from Asia to the United States through the Western rail network. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2012, 48 (1), 296-309.
- [12] **K. A. N. Ksenia, J. Lu, R. K. Otieno.** A Multi-objective Optimization of Sino-Kazakh Container Flow through Dostyk-Alashankou. *International Journal of Business, Humanities and Technology*, 2013, 3 (7), 37-47.
- [13] **C. Tsung-Sheng.** Best routes selection in international intermodal networks. *Computers & Operations Research*, 2008, 35 (9), 2877-2891.
- [14] **X. Yang, J. M. W. Low, L. C. Tang.** Analysis of Intermodal Freight from China to Indian Ocean: A Goal Programming Approach, *Journal of Transport Geography*, 2011, 19 (4), 515-527.

О хемијској главној једначини и алгоритмима за симулацију стохастичке анализе са тачке гледишта практичне примене

Олга Јакшић

*Институт за хемију, технологију и металургију,
Универзитет у Београду, Његошева 12, 11000 Београд, Србија
e-mail: olga@nanosys.ihm.bg.ac.rs*

Апстракт. Овај рад је прилог тумачењу и примени резултатастохастичке анализе. На примеру процеса адсорпције описано је најпре формирање детерминистичког модела, затим су приказане методе за моделовање и испитивање кинетике флукуација: најпре аналитичке методе а након аналитичких нумеричке, потом је дат поступак којим се открива динамика флукуација у стационарном или равнотежном стању а на крају је извршена рекапитулација са посебним освртом на тумачење и објашњење резултата, што је потребно, између осталог, за истраживање и развој компонената чији рад суштински зависи од адсорпционих процеса.

Кључне речи: хемијска главна једначина; кинетика флукуација; динамика флукуација.

1. Увод

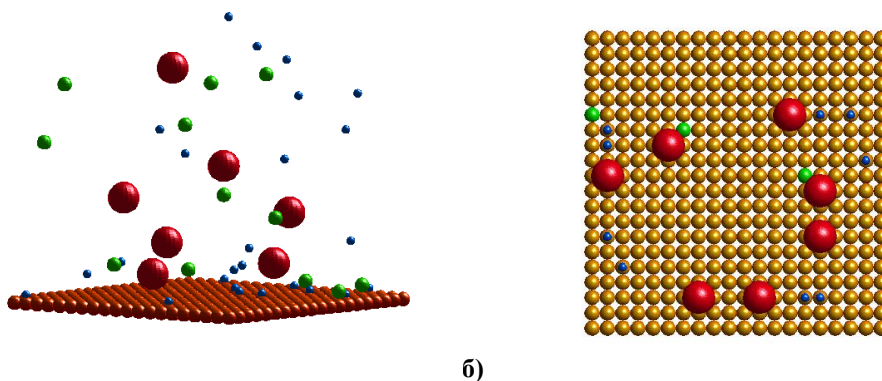
Случајни процеси су својствени како природним тако и друштвеним појавама и рад на примени резултата теорије вероватноће и математичке статистике има велики значај. Иако постоји богат избор референци које описују различите алгоритме и приступе за моделовање случајних процеса, терминологија у различитим областима примене није сасвим једнообразна, а када се догоди да различити модели исте појаве дају различите резултате, није увек очигледно како адекватно интерпретирати и применити добијене резултате у даљем истраживању. У раним фазама истраживања теоријски модели фундаменталних процеса битно утичу на ток развоја финалне компоненте а је од интереса размотрити специфичности појединих приступа. У овом раду се разматра моделовање флукуација својствених компонентама чије функционисање зависи од адсорпционо-десорпционих процеса.

Адсорпција и десорпција се појављују на граници између различитих фаза супстанце: гас-течност, течност-течност, гас-чврсто (слика 1) или течност-чврста површина. Адсорпционо десорпциони процеси су узрок промене концентрације одређене супстанце на тој граници у односу на њену концентрацију у суседним фазама.

Према основном моделу, монослојна адсорпција је реверзибилан процес у коме се слободно адсорпционо место A_f на површини супстанце у чврстој фази и честица у гасној фази A_g трансформишу у адсорбовану честицу A_a , која се након извесног времена десорпцијом поново враћа у гасну фазу при чему је константа брзине за адсорпцију k_a а константа брзине за десорпцију k_d , што се може представити једначином која има следећи облик [1]:



Систем у оквиру кога посматрамо адсорпцију, има следеће карактеристике: једно адсорпционо место не може примити више од једне честице адсорбата, али у случају великих молекула адсорбата може доћи до тога да једна честица заузме једно или више адсорпционих места. Површина се налази у атмосфери коју чине честице једне врсте гаса или мешавина гасова (у ком случају једначину (1) пишемо у векторском облику). Систем је затворен, број различитих гасова у смеси и број честица једне врсте гаса је дефинисан од почетка и константан. Сматрамо да је површина хомогена и да су све честице једне врсте гаса истих особина. Десорпциона енергија и средње време боравка свих честица истог гаса су идентични. Док су на површини, честице адсорбата чине монослојне целине, не реагују међусобно и нема дисоцијације сложених вишеатомских честица на једноставније. У гасној фази је број еластичних судара честица много чешћи од броја реактивних судара (из чега следи да је просторна расподела хомогена).



Слика 1. Адсорпција трокомпонентне смеси моноатомских гасова на чврсту површ: а) поглед са стране б) поглед одозго на адсорбоване честице (у произвољном тренутку)

Промене концентрације честица адсорбата на граници фаза постоје све од почетног тренутка, па до тренутка када се успостави динамичка равнотежа између процеса адсорпције и десорпције. Након успостављања те равнотеже, адсорпција и десорпција и даље постоје. Топологија заузетости површине адсорбатом се мења а средња концентрација адсорбованих честица на међуфазној површини остаје константна. У том стању систем може остати неограничено или док се не промени неки параметар система (притисак, температура...) што посматрамо као ново почетно стање које води ка новом успостављању неког следећег стационарног стања. За почетно стање је битно познавати почетни број адсорбованих честица на површини, укупан број адсорпционих места на површини, притисак, бројили концентрацију неадсорбованих честица, као и то да ли је систем отворен или затворен. У зависности од аспекта посматрања ове појаве, формира се математички модел. Посматрамо монослојну монокомпонентну адсорпцију у затвореном систему.

2. Једначина брзине реакције

У случају када је просторна расподела честица у гасној фази хомогена и њихов број такав да колективно дејство доминира, временску еволуцију промене броја адсорбованих честица је могуће описати обичним диференцијалним једначинама. Ако је N_f број слободних адсорпционих центара на чврстој површини, N_g број честица у гасној фази, N_0 укупан број

честица у затвореном систему а M укупан број адсорпционих центара на површини, једначини (1) би одговарала једначина:

$$\begin{aligned} \frac{dN_a}{dt} &= k_a N_g N_f - k_d N_a = k_a (N_0 - N_a)(M - N_a) - k_d N_a \\ &= k_a N_0 M - (k_a (M + N_0) + k_d) N_a + k_a N_a^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Оваква идеализација одговара ситуацији у којој решења детерминистичких једначина, уз занемаривање ефеката који су последица стохастичке природе процеса, могу послужити за процену броја адсорбованих честица током времена. При томе, од процене бројних вредностиконстанти брзина за адсорпцију идесорпцију зависе и бројне вредности резултујућих кривих и простирање нумеричких грешака [2–4]. У [5] је показано како постоје случајеви када сам модел може бити још једноставнији, тако да се временска еволуција броја адсорбованих честица може описати обичним диференцијалним једначинама првог реда. Ту су дати и критеријуми за примену апроксимативног модела. У наставку текста се број адсорбованих честица посматра као стохастичка величина која има случајну вредност из скупа $0, \dots, M$ (M је број адсорпционих места на површини). Када се посматра као случајна величина, број адсорбованих честица је означен са N уместо са N_a , ради разликовања.

3. Кинетика флукуација

Ако посматрамо промену средњег броја одиграних реакција у јединици времена онда пратимо кинетику флукуација. У [6] је детаљно изведена стохастичка анализа кинетике флукуација броја адсорбованих честица у системима чији параметри су такви да је примена апроксимативног линеарног модела размотреног у [5], оправдана. Према тим резултатима, форма функције генератрисе, која је ту изведена и дата у аналитичком облику за општи случај смеше са произвољним саставом, јасно показује зашто је детерминистичко решење за број адсорбованих честица појединачних компоненти у смеши произвољног састава истоветно са првим моментом. Додатно, на основу тих резултата се види како се сви виши моменти могу приказати преко првог момента (односно како се сви виши моменти могу приказати преко детерминистичких решења) јер у изразу за функцију генератрису (генеришућу функцију вероватноћа) фигурише израз за детерминистичко решење.

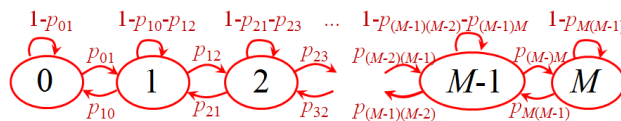
Међутим, испоставља се да то слагање не постоји у сложенијим случајевима (нпр. код реакција другог реда).

3.1. Хемијска главна једначина

Поступак стохастичке анализе који води до главне хемијске једначине користи се од 60-тих година 20-тог века и у активној је употреби све до данас [7]. У [8] је назван техника случајних променљивих, а назив хемијска главна једначина се појавио у каснијој употреби и задржао у поновним издањима некадашњих књига [9] и новијим радовима. Суштински, то је једначина Колмогорова за Марковљев процес првог реда, стационаран у ширем смислу, ергодичан, који се одвија између коначног броја дискретних стања, континуално у времену. Поступак је детаљно описан у [1,10], овде ће бити дати кључни кораци.

Случајна променљива коју посматрамо, број честица адсорбованих на површини, је дискретна случајна променљива: ако се на површ може адсорбовати максимално M честица, онда постоји $M + 1$ могућих вредности за N ($0, 1, \dots, M$). То је такође променљива континуална по времену, коју међутим посматрамо у дискретним временским тренуцима. Временски корак између два суседна тренутка, обележимо га са Δt , много је мањи од укупног времена посматрања и такав да се у времену између та два тренутка може одиграти највише једна елементарна промена: адсорпција једне честице, десорпција једне честице или ни једно од тога.

Прелази између тих стања се виде на дијаграму (слика 2). Кругови означавају стања, број у кругу означава број адсорбованих молекула тог стања а уз стрелице су назначене вероватноће прелаза.



Слика 2. Дијаграм стања са вероватноћама прелаза

Пошто се у једно стање може стићи само из суседних, вероватноћа $P_N(t + \Delta t)$ да систем у тренутку $t + \Delta t$ буде у стању N је једнака збиру вероватноћа да је систем из претходних суседних стања адсорпцијом или десорпцијом једне честице прешао у посматрано стање у току периода Δt и вероватноће да је у том стању већ био, па се током периода Δt није променио:

$$P_N(t + \Delta t) = P_{N-1}(t)p(N-1 \rightarrow N) + P_{N+1}(t)p(N+1 \rightarrow N) + P_N(t)p(N \rightarrow N) \quad (3)$$

$P_{N-1}(t)$ је вероватноћа да је систем у тренутку t био у стању $N-1$, а $P_{N+1}(t)$ је вероватноћа да је био у стању $N+1$. Вероватноћа прелаза у ново стање приликом адсорпције је једнака производу брзине адсорпције у том тренутку и времена посматрања Δt :

$$\begin{aligned} p(N-1 \rightarrow N) &= k_a [N_0 - (N-1)][M - (N-1)]\Delta t \\ p(N \rightarrow N+1) &= k_a [N_0 - N][M - N]\Delta t \end{aligned} \quad (4)$$

Вероватноћа прелаза у ново стање приликом десорпције је једнака брзини десорпције у том тренутку и времена посматрања Δt :

$$p(N+1 \rightarrow N) = k_d(N+1)\Delta t \quad p(N \rightarrow N-1) = k_d N \Delta t \quad (5)$$

Вероватноћа да не дође до прелаза (да систем остане у истом стању) је

$$p(N \rightarrow N) = 1 - k_a(N_0 - N)(M - N)\Delta t - k_d N \Delta t \quad (6)$$

Када се у (3) уврсте изрази (4) – (6), након прегруписавања чланова, посматрањем граничног случаја кад време између два узастопна тренутка посматрања система тежи нули, добије се главна једначина за стохастичку анализу монокомпонентне монослојне адсорпције.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dP_N}{dt} &= P_{N-1}(t)k_a(N_0 - (N-1))(M - (N-1)) \\ &\quad + P_{N+1}(t)k_d(N+1) \\ &\quad - P_N(t)(k_a(N_0 - N)(M - N) + k_d N) \end{aligned}} \quad (7)$$

За решавање овакве диференцијално диференце једначинесе користи функција генератриса или генеришућа функција вероватноћа, у наставку ГФВ:

$$F(s, t) = \sum_{N=0}^{\infty} P_N(t) s^N \quad |s| \leq 1 \quad (8)$$

Променљива s је бездимензиона величина која служи да обезбеди конвергенцију. На основу ГФВ могу се добити све вероватноће у сваком тренутку као и сви моменти посматране стохастичке променљиве. Нпр. први извод генеришуће функције по променљивој s у тачки $s = 1$ представља средњу тј. очекивану вредност случајне променљиве N у времену

$$\frac{\partial F(s, t)}{\partial s} = \sum_{N=0}^{\infty} N P_N(t) s^{N-1} \quad |s| \leq 1 \quad \bar{N} = E\{N(t)\} = \left. \frac{\partial F(s, t)}{\partial s} \right|_{s=1} \quad (9)$$

Други централни момент случајне променљиве се такође може добити из ГФВ [1]:

$$\left. \frac{\partial^2 F(s,t)}{\partial s^2} \right|_{s=1} = \sum_{N=0}^{\infty} N(N-1)P_N(t) = \overline{N^2} - \overline{N} \quad (10)$$

Варијанса и релативне флукуације такође [1]:

$$D\{N(t)\} = \overline{N^2} - \overline{N}^2 = \left. \frac{\partial^2 F(s,t)}{\partial s^2} \right|_{s=1} + \left. \frac{\partial F(s,t)}{\partial s} \right|_{s=1} - \left(\left. \frac{\partial F(s,t)}{\partial s} \right|_{s=1} \right)^2 \quad (11)$$

$$\delta\{N(t)\} = \sqrt{\frac{D\{N(t)\}}{E\{N(t)\}^2}} \quad (12)$$

Када се једначина Чепман-Колмогорова помножи бесконачним степеним редом променљиве s , у њој је могуће препознати блокове који се односе на ГФВ и она постаје парцијална диференцијална једначина по ГФВ. Њеним решавањем стохастичка слика процеса постаје у потпуности позната.

Када се примени описани поступак на једначину (7), користећи једнакости

$$(N-1)(N-1) = (N-1)(N-2) + (N-1) \quad N^2 = N(N-1) + N, \quad (13)$$

узимајући у обзир (8) – (10), долази се до парцијалне диференцијалне једначине по ГФВ:

$$\frac{dF(s,t)}{dt} = k_a N_0 M (s-1) F(s,t) - (s-1) (k_a (M + N_0 - 1) s + k_d) \frac{\partial F(s,t)}{\partial s} + k_a s^2 (s-1) \frac{\partial^2 F(s,t)}{\partial s^2} \quad (14)$$

У пракси је аналитичко решење парцијалне диференцијалне једначине по ГФВ могуће добити у веома малом броју случајева. Ипак, значај ове једначине је велики и у ситуацијама када није могуће наћи аналитичко решење, јер се помоћу ње понекад може доћи до момената.

3.2. Метод момената

Добијена парцијална диференцијална једначина се најпре диференцира по s :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(s,t)}{\partial s} \right) &= k_a N_0 M F(s,t) \\ &+ \left((s-1) k_a N_0 M - (2k_a (M + N_0 - 1) s + (k_d - k_a (M + N_0 - 1))) \right) \frac{\partial F(s,t)}{\partial s} \\ &+ \left[k_a s (3s-2) - (s-1) (k_a (M + N_0 - 1) s + k_d) \right] \frac{\partial^2 F(s,t)}{\partial s^2} + s^2 (s-1) \frac{\partial^3 F(s,t)}{\partial s^3} \end{aligned} \quad (15)$$

У тачки $s = 1$, ГФВ је једнака 1 (то је збир свих вероватноћа) а (15) је

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial F(s,t)}{\partial s} \right|_{s=1} = k_a N_0 M - (k_a (M + N_0 - 1) + k_d) \left. \frac{\partial F(s,t)}{\partial s} \right|_{s=1} + k_a \left. \frac{\partial^2 F(s,t)}{\partial s^2} \right|_{s=1} \quad (16)$$

Следствено дефиницијама (8) – (10), (16) је заправо

$$\frac{d\overline{N}}{dt} = k_a N_0 M - (k_a (M + N_0) + k_d) \overline{N} + \overline{N^2} \quad (17)$$

Упоредивање (2) и (17) даје информацију када односно под којим условима су детерминистичко решење и очекивање посматране стохастичке променљиве једнаки, односно када су детерминистички и стохастички приступ конзистентни, усаглашени у средњој вредности. На пример, код хемијских реакција првог реда овим поступком се добија диференцијална једначина која се поклапа са детерминистичком диференцијалном једначином: константе су исте само што је у детерминистичкој непознат број адсорбованих честица a у

диференцијалној једначини добијеној из хемијске главне једначине је једина непозната први момент односно очекивана, средња вредност броја адсорбованих честица. Код процеса који се могу представити математичким моделима хемијских реакција првог реда увек се поклапају детерминистичко решење и очекивање за концентрацију или број честица посматраних реактаната, то је показано у [10,11]. У [6] је показано како се у случају адсорпционодесорпционих процеса у плазмонским сензорима, у условима када се монослојна адсорпција може математички приказати као реакција првог реда, детерминистичко решење налази у саставу ГФВ те се и сви виши моменти могу изразити преко детерминистичког решења.

Даље диференцирање (15) по s и њихово посматрање за $s = 1$ води новим једначинама у којима фигуришу виши моменти, међутим код реакција вишег реда, а овде је монослојна адсорпција представљена једначинама као реакција другог реда, добијају се диференцијалне једначине у којима се види да су моменти међусобно повезани. У једначини (17) је за израчунавање првог момента потребно познавање другог. Диференцирање (15) по s а затим посматрање за $s = 1$ води једначини

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 F(s,t)}{\partial s^2} \right) &= 2k_a (N_0 M - (M + N_0 - 1)) \frac{\partial F(s,t)}{\partial s} + \\ &+ \left[k_a (-4(M + N_0 - 5)) + (k_a (2M + 2N_0 - 4) - 2k_d) \right] \frac{\partial^2 F(s,t)}{\partial s^2} \\ &+ 2k_a \frac{\partial^3 F(s,t)}{\partial s^3} \end{aligned} \quad (18)$$

У тачки $s = 1$ сем (9) и (10) важи и

$$\left. \frac{\partial^3 F(s,t)}{\partial s^3} \right|_{s=1} = \sum_{N=0}^{\infty} N(N-1)(N-2) P_N(t) = \overline{N^3} - 3\overline{N^2} + 2\overline{N} \quad (19)$$

Приказана преко момената, једначина (18) је сада:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\overline{N^2} - \overline{N}) &= 2k_a (N_0 M - (M + N_0 - 1)) \overline{N} + \\ &+ \left[k_a (-4(M + N_0 - 5)) + (k_a (2M + 2N_0 - 4) - 2k_d) \right] (\overline{N^2} - \overline{N}) \\ &+ 2k_a (\overline{N^3} - 3\overline{N^2} + 2\overline{N}) \end{aligned} \quad (20)$$

Видимо да је код реакција другог реда за израчунавање првог момента потребно познавање другог а за израчунавање другог момента је потребно познавање и трећег и тако редом, услед међусобне повезаности суседних момената број непознатих величина је увек за 1 већи од броја тренутно дефинисаних једначина. За неке реакције другог реда егзактна решења одговарајућих парцијалних диференцијалних једначина су дата у [12].

У недостатку егзактних аналитичких решења понекад је бржи, јефтинији и једноставнији начин доћи до решења нумеричким путем, применом SSA алгоритама за симулацију стохастичких процеса (stochastic simulation algorithms).

3.3. Нумеричке методе

Предност нумеричких алгоритама за симулацију стохастичких процеса није само у томе што њиховом применом добијамо решење у случајевима када су аналитичка решења непозната, већ и у чињеници да и за случајеве у којима аналитичка решења постоје, нумеричка

представа може да буде веродостојнија: да има урачунат ефекат просторне нехомогености и/или да има и време као случајну величину, што у системима са малим бројем молекула јесте од јако велике важности. Нумеричке методесе развијајуош од 1976. године [13] паралелно са развојем архитектуре рачунара (тако да данас постоје решења за системе са више језгара [14]) и за њима постоји све већа потреба [15]).

У алгоритму који је овде примењен прати се број честица адсорбата и садржи кораке:

1. $N(0) = 0$ (по претпоставци, у почетном тренутку на површини нема адсорбованих молекула, тај број може бити било који од физички могућих вредности $0, \dots, M$)
2. Прва могућа промена броја адсорбованих честица је услед адсорпције:
 - a) одређивање времена t_1 након ког долази до прве адсорпције
 - b) $N(t_1) = 1$.

Затим се, у петљи, докле год је број реакција или време испод неке унапред задате границе, генеришу следеће вредности за временску еволуцију броја адсорбованих честица

3. Ако је $N(t_i)=0$ (што је у стохастичком моделу могуће и након почетног тренутка) могућа је само адсорпција па се врши:
 - a) одређивање времена τ_a након ког долази до те адсорпције
 - b) $t_i = t_{i-1} + \tau_a$
 - c) $N(t_i) = N(t_{i-1}) + 1$
4. У супротном, израчунавају се два низа времена: низ τ_a средњих времена слободног хода за честице које су у гасној фази, и низ τ_d средњих времена боравка на површини за све честице које су адсорбоване на површини. Посматрају се минимуми у тим низовима
 - a) Ако је најкраће време слободног хода честица у гасној фази мање од најкраћег времена боравка на површини за честице које су адсорбоване на површини, рачунамо промену услед адсорпције: $t_i = t_{i-1} + \min(\tau_a), N(t_i) = N(t_{i-1}) + 1$
 - b) Ако су минимална времена једнака: $t_i = t_{i-1} + \min(\tau_a), N(t_i) = N(t_{i-1})$
 - c) У супротном: $t_i = t_{i-1} + \min(\tau_d), N(t_i) = N_a(t_{i-1}) - 1$

5. Поступци 3 и 4 се понављају док не буде испуњен услов за излазак из петље.

За разлику од главне хемијске једначине у којој се посматра вероватноћа да у неком тренутку буде одређени број адсорбованих честица N , у SSA алгоритмима се посматрају две случајне величине: време до следеће реакције и врста реакције (у овом примеру адсорпција или десорпција) и та два приступа (стохастичка анализа аналитичким путем и нумеричка реализација SSA алгоритмима) су усаглашена [16].

Кључна тачка у нумеричкој интерпретацији јесте моделовање времена између одигравања појединачних реакција. За то је потребно познавање одигравања процеса на молекуларном нивоу [7,17]. У алгоритму који се овде користи адсорпција и десорпција се посматрају као и остали процеси са експоненцијалним временом релаксације, време између суседних реакција има експоненцијалну расподелу, а параметар експоненцијалне расподеле се мења у времену. У радовима [13–16,18,19] се до тих времена долази посматрањем вероватноће да се у временском интервалу ширине Δt , након неког тренутка t , одигра одређена реакција (овде је то адсорпција или десорпција), и долази се до израза

$$\tau = (1/a) \ln(1/u) \quad (21)$$

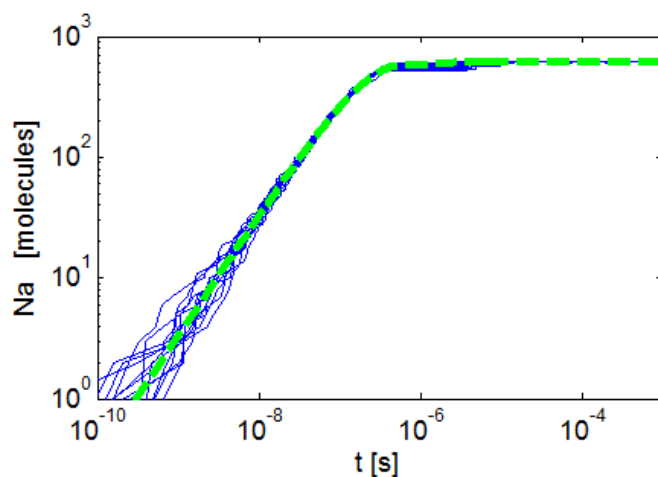
у коме је a функција тенденције да се та реакција одигра у тренутку након временског интервала ширине Δt , а u је вектор случајних вредности са униформном расподелом (његова

величина зависи од броја просторно униформно распоређених молекула који у тој реакцији могу да учествују). Са програмерске тачке гледишта, израз (21) је један од начина да се реализује генератор случајних вредности са експоненцијалном расподелом и параметром $1/a$.

При томе, тачке 2. а) и 3. а) овде примењеног алгоритма се односе на тренутак у коме је број честица у гасној фази N_0 а број слободних места на којима је адсорпција могућа M , па је функција тенденције a да се адсорпција деси у том тренутку $1/k_a N_0 M$.

Тачка 4. овде примењеног алгоритма се односи на тренутак у коме је број честица у гасној фази $N_0 - N$ а број слободних места на којима је адсорпција могућа $M - N$, па је функција тенденције a да се адсорпција деси у том тренутку једнака $1/k_a(N_0 - N)(M - N)$ а број униформно распоређених молекула који ту тенденцију могу да остваре је $M - N$. Са друге стране, функција тенденције да се у том тренутку деси десорпција је $1/k_d N$ а број молекула који ту тенденцију имају је N .

На слици 3 је дат скуп од 12 реализација временске еволуције броја адсорбованих честица добијених применом описаног алгоритма за симулацију и, ради поређења, одговарајуће детерминистичко решење. Коришћене су константе са вредностима: $N_0 = 652222$, $M = 625$, $k_a = 8.18 \text{ (molecule}\cdot\text{sec)}^{-1}$, $k_d = 1182 \text{ 1/sec}$. При коришћењу резултата са слике 3 ми прећутно подразумевамо да је процес ергодичан те да нам усредњавања по ансамблу независних реализација дају информацију о промени средње вредности током времена.



Слика 3. 12 реализација временске еволуције броја адсорбованих честица добијених применом SSA алгоритма (пуне плаве танке линије) и одговарајуће детерминистичко решење (испрекидана дебља зелена линија) за $N_0 = 652222$, $M = 625$, $k_a = 8.18 \text{ (molecule}\cdot\text{sec)}^{-1}$, $k_d = 1182 \text{ 1/sec}$.

Овакви резултати су потребни за даља истраживања појава или уређаја са којима су посматрани процеси повезани. На пример за био-хемијске сензоре чији се принцип детекције заснива на адсорпцији је важно проценити брзину рада – време одзива (а са слике 3 видимо да адсорпција може бити веома брз процес, у стационарно стање се улази за мање од једне микросекунде), одредити ниво излазног сигнала у стационарном стању (што зависи од везе излазног сигнала сензора са бројем адсорбованих молекула чија промена се може видети такође на слици 3). Међутим, недостаци резултата са слике 3 су у томе што се у временској еволуцији добијеној детерминистичким приступом не види утицај флукуација а са друге стране генерисање и усредњавање еволуција нумеричким путем захтева додатно време за накнадну обраду. Додатно, као и многи други природни процеси, адсорпционо-десорпциони

процеси су стационарни, а флукуације постоје и након прелазног стања, у стационарном стању.

За даља истраживања утицаја флукуација на рад компонената (у којима се одвијају посматрани процеси) у стационарном стању, аналитичка решења су погоднија од нумеричких. У аналитичким решењима се види које физичке величине и параметри система утичу на константе у једначинама што је погодно за оптимизације перформанси током дизајна и експлоатације развијаних компонената.

У немогућности да се до егзактноаналитичког решења дође стохастичком анализом и решавањем хемијске главне једначине, у пракси се прибегава стохастичким диференцијалним једначинама од којих је често корићена Ланжевенова хемијска једначина. Овде ће бити кратко поменуте, ради комплетности исказа.

3.4. Стохастичке диференцијалне једначине и Ланжевенова хемијска једначина

Флукуације броја адсорбованих честица су последица утицаја стохастичких промена положаја и стања појединачних честица. Стохастичка анализа која узима у обзир те појединачне утицаје спада у микроскопске методе за моделовање шума, док посматрање кумулативног ефекта без увида у појединачне доприносе јесте макроскопски који је према [17] исправније звати мезоскопским приступом. Са инжењерске тачке гледишта, апроксимативна решења често дају задовољавајуће резултате. Апроксимативна стохастичка диференцијална једначина којом се описује посматрани процес се формира тако што се у детерминистичкој диференцијалној једначини дода још један члан којим се урачунава утицај флукуација.

Додати члан у детерминистичкој једначини, којим моделујемо флукуације које генеришу тај унутрашњи шум, се процени на основу познавања макроскопског понашања процеса. Ако је средња вредност тих флукуација, обележимо их са ξ , једнака нули а варијанса облика

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = D\delta(t-t'), \quad (22)$$

што је чест случај у пракси, добија се Ланжевенова једначина. О Ланжевеновој једначини је писано, уопште или у контексту хемијских процеса, неки од извора су [20]. У овом приступу се полазне једначине као што је (2) трансформишу у

$$\frac{dN}{dt} = k_a N_0 M - (k_a (M + N_0) + k_d) N + k_a N^2 + \xi = f(N) + \xi. \quad (23)$$

У (20) се на десној страни знака једнакости први део односи на функцију која зависи само од средњих вредности а другим чланом ξ је представљен утицај првог и свих осталих момената на промену посматраног броја адсорбованих честица. У [21] је дата стохастичка анализа система код којих је утицај момената реда већег или једнаког 3 занемарљив а тако добијене апроксимативне једначине су назване једначинама које описују кинетику флукуација масе (mass fluctuation kinetics, MFK).

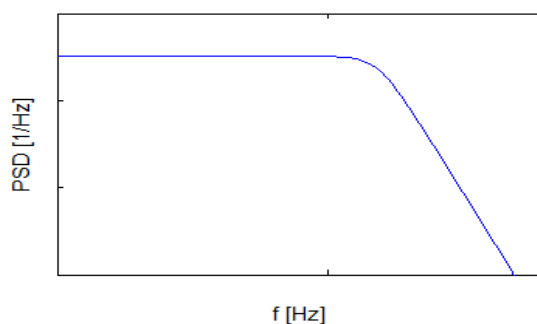
Егзактна или апроксимативна аналитичка решења добијена стохастичком анализом су за практичне примене веома значајна јер омогућавају даља истраживања динамике флукуација у равнотежним и/или стационарним стањима.

4. Динамика флукуација

Динамика флукуација стационарних случајних процеса (у ужем и ширем смислу) након уласка у стационарно стање се описује спектралном густином посматраних случајних променљивих. Општи поступак је дат у [7,17,22].

У адсорпционо-десорпционом процесу се током времена брзине адсорпције и десорпције мењају услед промене броја заузетих и слободних места (адсорпционих центара). Стационарна вредност средњег броја адсорбованих молекула се достигне кад се брзина адсорпције и брзина десорпције изједначе, успостави се динамичка равнотежа, тако да се и адсорпција и десорпција и даље одвијају али се процентуално средња прекривеност површине не мења. Те флукуације броја адсорбованих молекула око редње вредности битно утичу на рад компоненте, у случају био-хемијских сензора уносе шум у очитани сигнал. Тај шум је унутрашњи, својствен самом процесу, није га могуће избећи накнадном обрадом. Пошто су адсорпционо-десорпциони процеси брзи (слика 3), бржи од опто-електронских кола за очитавање, већина савремених сензора и не детектује прелазна стања те се радни режим односи на ту динамичку равнотежу. Да би се одредио ниво шума и минимални детектабилни сигнал у радном режиму потребно је проценити спектралну густину флукуација током те динамичке равнотеже.

Након достизања стационарне вредности средњег броја адсорбованих молекула, током динамичке равнотеже између процеса адсорпције и десорпције, одступања тренутног броја адсорбованих честица од те стационарне вредности су мала те је оправдано користити апроксимације. У случајевима када оне важе, могу да се примене Флукуационо-дисипациона теорема [23] и Теорија линеарног одзива [24]. Њиховом применом на процесе описане у овом раду се дошло до следећих резултата: спектрална густина флукуација нормализоване учестаности микро и нанорезонатора условљена флукуацијама масе услед адсорпционо-десорпционих процеса је изведена у [25,26] а у [27] је изведен израз за спектралну густину флукуација индекса преламања условљеног адсорпционо-десорпционим процесима на површини плазмонских сензора. Типичан график спектралне густине је дат на слици 4.



Слика 4. Спектрална густина флукуација (power spectral density, PSD) броја адсорбованих честица гаса.

Нас слици 4 је Лоренцова крива у логаритамској размери за x и y осу коју имају Фуријеова трансформација аутокорелационе функције флукуација броја адсорбованих молекула и све физико-хемијске величине које линеарно зависе од средњег броја адсорбованих молекула.

5. Закључак

У раду је приказана примена неких метода теорије вероватноће на истраживања везана за развој био-хемијских сензора чији принцип детекције се заснива на одвијању адсорпционо-десорпционих процеса. Формирање главне хемијске једначине и алгоритама за стохастичку анализу су дати детаљно. Ради примене датих метода на испитивање других процеса дат је шири избор литературе.

Захвалница. *Рад је финансиран од стране Министарства просвете, науке и технолошког развоја Србије у оквиру пројекта TP32008.*

Библиографија

- [1] Љ. Колар-Анић, Ж. Чупић, В. Вукојевић, С. Анић, Динамика неравнотежних процеса, *Факултет за физичку хемију, Београд*, 2011.
- [2] О. Јакшић, З. Јакшић, И. Јокић, Д. Рандјеловић, Л. Колар-Анић, Multicomponent Monolayer Gas Adsorption: the Effect of Molecular Size and the Number of Binding Sites on Sorption Rates, in: 11th Int. Conf. Fundam. Appl. Asp. Phys. Chem. Sept. 24-28, 2012 Belgrade, Serbia, 2012: pp. 669–671.
- [3] Т. Станковић, Н. Даларссон, О. Јакшић, Hands in mathematics: Appropriate use of software in teaching and research, in: Zb. Rad. IV Simp. "Matematika I Primen. 24. I 25. Maj 2013, 2014: pp. 99–108.
- [4] О.М. Јакшић, Д. В. Рандјеловић, З.С. Јакшић, Џ.Д. Чупић, Л.З. Колар-Анић, Plasmonic sensors in multi-analyte environment: Rate constants and transient analysis, *Chemical Engineering Research and Design*, 2014, 92, 91–101.
- [5] О. Јакшић, Џ. Чупић, З. Јакшић, Д. Рандјеловић, Л. Колар-Анић, Monolayer Gas Adsorption in Plasmonic Sensors: Comparative Analysis of Kinetic Models, *Russian Journal of Physical Chemistry*, 2013, 87, 2134–2139.
- [6] О.М. Јакшић, З.С. Јакшић, Џ.Д. Чупић, Д. В. Рандјеловић, Л.З. Колар-Анић, Fluctuations in transient response of adsorption-based plasmonic sensors, *Sensors and Actuators B: Chemical*, 2014, 190, 419–428.
- [7] Н.Г. ван Кампен, Stochastic processes in physics and chemistry, *Elsevier Science & Technology Books*, 2007.
- [8] Н. Бајли, The Elements of Stochastic Processes with Applications to Natural Sciences, *John Wiley & Sons: New York, New York, London*, 1964.
- [9] И. Оппенхајм, К.Е. Шулер, Г.Х. Вејс, Stochastic processes in chemical physics: The master equation, *MIT Press, London*, 1977.
- [10] Д.А. Мекварри, Stochastic Approach to Chemical Kinetics, *Journal of Applied Probability*, 1967, 4, 413–478.
- [11] Д.А. Мекварри, Kinetics of Small Systems. I, *The Journal of Chemical Physics*, 1963, 38, 433.
- [12] Д.А. Мекварри, С.Ј. Јачимовски, М.Е. Руссел, Kinetics of Small Systems. II, *The Journal of Chemical Physics*, 1964, 40, 2914.
- [13] Д.Т. Гилеспие, A general method for numerically simulating the stochastic time evolution of coupled chemical reactions, *Journal of Computational Physics*, 1976, 22, 403–434.
- [14] М.Т. Марко Алдинуци, Андреа Браццали, Пјетро Лио, Анил Соратија, StochKit-FF: Efficient systems biology on multicore architectures, in: Proc. 1st Work. High Perform. Bioinforma. Biomed., 2010.
- [15] М. Карлети, Numerical solution of stochastic differential problems in the biosciences, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2006, 185, 422–440.
- [16] Д.Т. Гилеспие, A rigorous derivation of the chemical master equation, *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 1992, 188, 404–425.
- [17] С.М. Ван Влиет, Macroscopic and microscopic methods for noise in devices, *IEEE Transactions on Electron Devices*, 1994, 41, 1902–1915.
- [18] Х. Ли, Ј. Као, Л.Р. Петзолд, Д.Т. Гилеспие, Algorithms and software for stochastic simulation of biochemical reacting systems., *Biotechnology Progress*, 2008, 24, 56–61.
- [19] Г.А. Бохаров, Ф.А. Рихан, Numerical modelling in biosciences using delay differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, 125, 183–199.
- [20] В.Т. Коффеј, Ј.П. Калмыков, The Langevin equation, *World Scientific, Singapore*, 2012.
- [21] П. Азунре, С. Гóмеј-Урибе, Г. Вергесе, Mass fluctuation kinetics: analysis and computation of equilibria and local dynamics., *IET Systems Biology*, 2011, 5, 325–35.
- [22] П. Младеновић, Вероватноћа и статистика, *Математички факултет*, 2005.
- [23] Х. Кален, Т. Велтон, Irreversibility and Generalized Noise, *Physical Review*, 1951, 83, 34–40.
- [24] С.В. Гарднер, Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences, *Springer Berlin-Heidelberg-New York*, 1985.
- [25] З. Дјурић, О. Јакшић, Д. Рандјеловић, Adsorption–desorption noise in micromechanical resonant structures, *Sensors and Actuators, A: Physical*, 2002, 96, 244–251.
- [26] З. Дјурић, И. Јокић, М. Франтловић, О. Јакшић, Fluctuations of the number of particles and mass adsorbed on the sensor surface surrounded by a mixture of an arbitrary number of gases, *Sens. Actuators, B*, 2007, 127, 625–631.
- [27] О. Јакшић, З. Јакшић, Ј. Матовић, Adsorption–desorption noise in plasmonic chemical/biological sensors for multiple analyte environment, *Microsystem Technologies*, 2010, 16, 735–743.

- [27] **O. Jakšić, Z. Jakšić, J. Matović**, Adsorption–desorption noise in plasmonic chemical/biological sensors for multiple analyte environment, *Microsystem Technologies*, 2010, 16, 735–743.

Verižni razlomci i primene

Branko Malešević

*Elektrotehnički fakultet u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73
branko.malesevic@etf.rs*

Luka Milinković

*Elektrotehnički fakultet u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73
luka.milinkovic@etf.rs*

Apstrakt. U radu će se prikazati neki elementi teorije aproksimacija realnih brojeva konačnim verižnim razlomcima. Izložiće se kratak pregled najbitnijih osobina verižnih razlomaka. Posebno će se razmatrati najbolje racionalne aproksimacije realnih brojeva prve i druge vrste. Na osnovu tih aproksimacija određiće se najbolje racionalne aproksimacije matematičkih konstanti π i e , kao i astronomske konstante sinodičkog meseca.

Ključne reči: Racionalne aproksimacije, konvergente i sekundarne konvergente, verižne i međuverižne aproksimacije

1. Uvod

U matematici *verižni razlomak* je izraz oblika

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \quad (1)$$

gde je $a_0 \in Z$ i $a_i \in N$ ($i \neq 0$). Prethodni izraz skraćeno zapisujemo

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots]. \quad (2)$$

Nas će zanimati *konačni verižni razlomci*

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}} \quad (3)$$

koji se mogu predstaviti u obliku razlomka

$$\alpha = \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]. \quad (4)$$

Posmatrajmo razlomke $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ za $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Tada na osnovu $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$ i $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$ korišćenjem rekurencija

$$\begin{aligned} p_k &= a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k &= a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2} \end{aligned} \quad (5)$$

koje važe za $k \geq 2$, dobijamo niz razlomaka $\frac{p_k}{q_k}$. Ove razlomke nazivamo *konvergentama*. Racionalne brojeve razmatrajmo kao redukovane prave razlomke (koji nisu celi brojevi). Tada, svaki racionalni

broj $\alpha = \frac{p}{q}$, za $p_n = p \in Z$ i $q_n = q \in N$, možemo napisati u obliku konačnog verižnog razlomka tako što verižne decimale $a_0 \in Z$ i $a_1, a_2, \dots, a_n \in N$ određujemo pomoću Euklidovog algoritma:

$$\begin{aligned} p &= a_0 \cdot q + r_1 \\ q &= a_1 \cdot r_1 + r_2 \\ r_1 &= a_2 \cdot r_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= a_{n-1} \cdot r_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= a_n \cdot r_n, \end{aligned} \quad (6)$$

pri tom $r_n < r_{n-1} < \dots < r_2 < r_1 < q$. Iz $r_n < r_{n-1}$ sleduje zaključak $a_n \neq 1$. Tako su verižne decimale $a_0 \in Z$ i $a_1, a_2, \dots, a_n \in N$ jedinstveno određene i poslednja verižna decimala ne može biti 1. Takav način zapisivanja verižnih decimala, tako da $a_n \neq 1$, je uobičajen i nazivamo ga *standardnom (normalnom) formom*. U literaturi se koristi i *duga forma* verižnog zapisa tako što se za $a_n \neq 1$ verižni zapis $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ razmatra u obliku $[a_0; a_1, a_2, \dots, (a_n - 1), 1]$, videti npr. [10].

Cilj našeg rada je da se navedu neka svojstva konačnih verižnih razlomaka i izdvoje neke numeričke osobine.

2. Svojstva verižnih razlomaka

Navodimo neke bitne osobine prema [1], [3]. Svi indeksi u narednim osobinama su iz skupa N_0 .

Svojstvo 1. Imenioci i brojioci p_k i $q_k, k \neq 0$, određeni formulama (5) jesu uzajamno prosti brojevi.

Svojstvo 2. Niz imenilaca $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ verižnih razlomaka, jeste strogo rastući niz prirodnih brojeva. Apsolutne razlike između verižnih razlomaka $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ i $\frac{p_n}{q_n}$, određene sa $\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n \cdot q_{n+1}}$ monotono teže ka 0.

Svojstvo 3. Svaki verižni razlomak $\frac{p_n}{q_n}$ sa neparnim indeksom n veći je od susednih verižnih razlomaka $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ i $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Svaki verižni razlomak $\frac{p_n}{q_n}$ sa parnim indeksom n manji je od susednih verižnih razlomaka $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ i $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$.

Važi:

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1} a_{n+1}}{q_{n+1} \cdot q_{n-1}}. \quad (7)$$

Svojstvo 4. Niz verižnih razlomaka sa parnim indeksom jeste niz monotono rastućih brojeva, a niz verižnih razlomaka sa neparnim indeksom jeste niz monotono opadajućih brojeva

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \alpha < \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}. \quad (8)$$

Svojstvo 5. Niz segmenata $\left[\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1} \right], \left[\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \right], \dots, \left[\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}, \frac{p_k}{q_k} \right], \dots$ jeste niz segmenata uređenih inkluzijom tako da svaki član niza sadrži sve naredne članove niza i dužina niza segmenta monotono teži ka 0.

Svojstvo 6.

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2} \quad (9)$$

Kvalitet aproksimacije realnog broja razlomkom navodimo prema knjizi A.Я. Хинчин-а [1]. Racionalni broj $\frac{p}{q}$ jeste najbolja racionalna aproksimacija prve vrste realnog broja α ako važi:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \left| \alpha - \frac{r}{s} \right| \quad (10)$$

za sve razlomke $\frac{r}{s} \neq \frac{p}{q}$ takve da $0 < s \leq q$.

Racionalni broj $\frac{p}{q}$ jeste najbolja racionalna aproksimacija druge vrste realnog broja α ako važi:

$$|q\alpha - p| < |s\alpha - r| \quad (11)$$

za sve razlomke $\frac{r}{s} \neq \frac{p}{q}$ takve da $0 < s \leq q$.

Sekundarne konvergente broja α za dve uzastopne konvergente p_k/q_k i p_{k+1}/q_{k+1} , definisane su nizovima:

$$\frac{p_{k,j}}{q_{k,j}} = \frac{j \cdot p_{k+1} + p_k}{j \cdot q_{k+1} + q_k}, \quad (12)$$

gde $j \in \{1, 2, \dots, a_{k+2} - 1\}$.

Svojstvo 7. Svaka najbolja racionalna aproksimacija prve vrste broja α je konvergenta ili neka sekundarna konvergenta tog broja.

Svojstvo 8. Svaka najbolja racionalna aproksimacija druge vrste broja α je konvergenta. Obrnuto, svaka konvergenta je najbolja racionalna aproksimacija druge vrste broja α , izuzev izolovanog slučaja $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$ i $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$.

Najbolja racionalna aproksimacija druge vrste jeste najbolja racionalna aproksimacija prve vrste. Obrnuto ne važi. U nizu najboljih aproksimacija prve vrste se nalaze sve konvergente posmatranog broja i te konvergente takođe nazivamo *verižnim aproksimacijama*. U nizu najboljih aproksimacija prve vrste se mogu naći i neke sekundarne konvergente posmatranog broja i sve takve sekundarne konvergente nazivamo *međuverižnim aproksimacijama*. Saglasno prethodnim nazivima važi:

Svojstvo 9. Racionalan broj $\frac{p}{q}$ ($q > 2$) je najbolja racionalna aproksimacija prve vrste broja α ako i samo ako je verižna ili međuverižna aproksimacija tog broja.

Za dve uzastopne verižne aproksimacije

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}] \quad (13)$$

i

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n], \quad (14)$$

neka je $a'_n < a_n$ najmanji prirodan broj sa osobinom da je razlomak

$$\frac{p'_n}{q'_n} = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a'_n], \quad (15)$$

međuverižna aproksimacija. Tada $\frac{p'_n}{q'_n}$ nazivamo *prva međuverižna aproksimacija*, a a'_n *prva međuverižna cifra*.

Svojstvo 10. [3] Neka su za realan broj α date dve uzastopne verižne aproksimacije $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}]$ i $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]$. Ako postoji prva međuverižna aproksimacija $\frac{p'_n}{q'_n} = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a'_n]$ sa prvom međuverižnom cifrom $0 < a'_n < a_n$ i ako postoji $a''_n \in [a'_n + 1, \dots, a_n - 1]$ tada je razlomak:

$$\frac{p''_n}{q''_n} = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a''_n] \quad (16)$$

bolja aproksimacija od $\frac{p'_n}{q'_n}$.

3. Određivanje verižnih i međuverižnih aproksimacija

U ovom delu koristimo algoritam iz rada [3] da bi odredili za izabrane realne konstante verižne i međuverižne aproksimacije. Razmotrićemo konkretno određivanje verižnih i međuverižnih aproksimacija na primeru dve matematičke konstante i jedne astronomske konstante.

3.1. Matematičke konstante

Od matematičkih konstanti razmotrićemo brojeve π i e .

3.1.1. Broj π

U tabeli 1 su prikazane najbolje racionalne aproksimacije prve vrste broja π sa svojim verižnim, odnosno međuverižnim ciframa. Verižne aproksimacije su označene zvezdicom (*). U trećoj koloni su prikazana i odstupanja od tačne vrednosti broja π . Može se videti da su odstupanja međuverižnih aproksimacija istog znaka, kao i odstupanje odgovarajućih verižnih aproksimacija.

Aproksimacije	Verižne cifre	Odstupanje
3/1	= [3] *	0,1415926535898
13/4	= [3; 4]	- 0,1084073464102
16/5	= [3; 5]	- 0,0584073464102
19/6	= [3; 6]	- 0,0250740130769
22/7	= [3; 7] *	- 0,0012644892674
179/57	= [3; 7, 8]	0,0012417763968
201/64	= [3; 7, 9]	0,0009676535898
223/71	= [3; 7, 10]	0,0007475831673
245/78	= [3; 7, 11]	0,0005670125641
267/85	= [3; 7, 12]	0,0004161830016
289/92	= [3; 7, 13]	0,0002883057637
311/99	= [3; 7, 14]	0,0001785121756
333/106	= [3; 7, 15] *	0,0000832196275
355/113	= [3; 7, 16] *	- 0,0000002667642
52163/16604	= [3; 7, 15, 1, 146]	0,0000002662133
52518/16717	= [3; 7, 15, 1, 147]	0,0000002626106
⋮	⋮	⋮
103638/32989	= [3; 7, 15, 1, 291]	0,0000000014936
103993/33102	= [3; 7, 15, 1, 292] *	0,0000000005779
104348/33215	= [3; 7, 15, 1, 293] *	- 0,0000000003316
208341/66317	= [3; 7, 15, 1, 292, 2] *	0,0000000001224
312689/99532	= [3; 7, 15, 1, 292, 1, 2] *	- 0,0000000000291
⋮		

Tabela 1. Verižni zapisi najboljih racionalnih aproksimacija prve vrste broja π

Verižne i međuverižne aproksimacije se prirodno javljaju u aproksimiranju realnih konstanti. Interesantno je da Arhimed koristeći pravilne poligone sa 6, 12, 24, 48 i 96 strana upisane u krug ili opisane oko njega našao procenu broja π upravo između međuverižne i verižne aproksimacije [3]:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} (*) \quad (17)$$

3.1.2. Broj e

Broj e ima karakterističan verižni zapis sa određenim pravilom. Naime, svaka treća cifra, krenuvši od druge, je veća za dva od treće pre nje [3]. Sve ostale cifre, osim nulte (koja je 2) su jedinice

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10 \dots]. \quad (18)$$

Zbog postojanja jedinica, najbolje racionalne aproksimacije se mogu pisati na dva načina, preko standardne forme, tabela 2, i preko duge forme, tabela 3. Ako se pogleda tabela 2, može se primetiti da postoje dve najbolje racionalne aproksimacije koje sadrže samo nultu cifru $e=[2]$ i $e=[3]$, a nijedna koja sadrži i nultu i prvu cifru. Sledeća najbolja racionalna aproksimacija sadrži tri cifre $e=[2; 1, 2]$. Zato se često dešava da se kao prva najbolja racionalna aproksimacija navodi $e=[3]$.

Aproksimacije	Verižne cifre
2/1	= [2] *
3/1	= [3] *
5/2	= [2; 2]
8/3	= [2; 1, 2] *
11/4	= [2; 1, 3] *
19/7	= [2; 1, 2, 2] *
49/18	= [2; 1, 2, 1, 1, 2]
68/25	= [2; 1, 2, 1, 1, 3]
87/32	= [2; 1, 2, 1, 1, 4] *
⋮	

Tabela 2. Verižni zapisi najboljih racionalnih aproksimacija prve vrste broja e u standardnoj formi

Do navedenih zaključaka se dolazi upotrebom standardne forme verižnog zapisa. Ipak, preko duge forme verižnog zapisa, kada se verižni niz može završiti sa brojem 1, jasno se vidi da postoji uvek jedna i samo jedna najbolja racionalna aproksimacija prve vrste sastavljena od verižnih cifara, tabela 3. Tako je $e=[2;1]=[3]$ najbolja racionalna aproksimacija prve vrste sa dve verižne cifre. Standardna forma zapisa se primenjuje samo zato što je prema postupku formiranja verižnih razlomaka prva verižna cifra 1.

Aproksimacije	Verižne cifre
2/1	= [2] *
3/1	= [2; 1] *
5/2	= [2; 1, 1]
8/3	= [2; 1, 2] *
11/4	= [2; 1, 2, 1] *
19/7	= [2; 1, 2, 1, 1] *
49/18	= [2; 1, 2, 1, 1, 2]
68/25	= [2; 1, 2, 1, 1, 3]
87/32	= [2; 1, 2, 1, 1, 4] *
⋮	

Tabela 3. Verižni zapisi najboljih racionalnih aproksimacija prve vrste broja e u dugoj formi

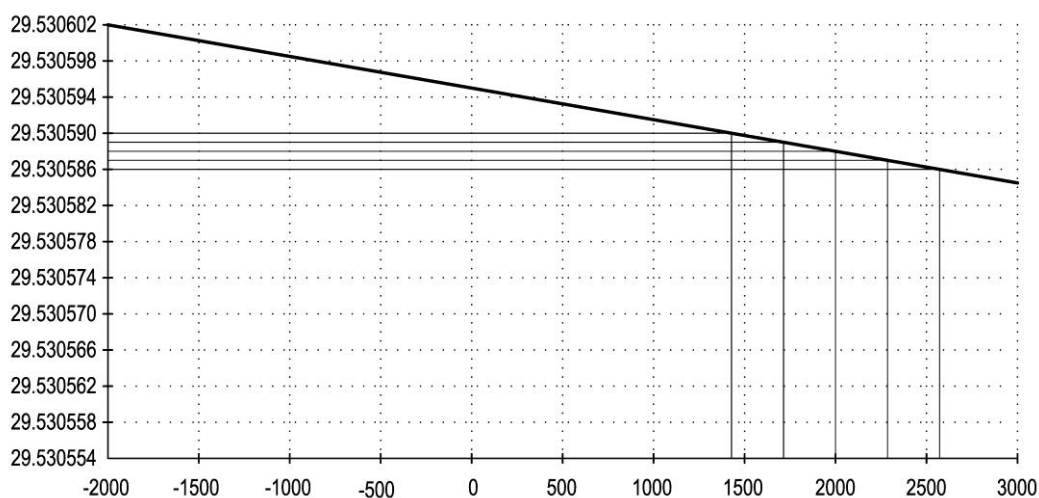
3.2. Astronomske konstante

Na osnovu dobro poznate činjenice iz astronomije prosečna dužina zemaljske godine se menja sa vremenom prema Laskarovoj formuli [2]. Ta promena utiče na sve povezane astronomske konstante poput sinodičkog meseca [5], [7], [9], [11] što će biti detaljnije objašnjeno u narednoj podsekciji.

3.2.1. Sinodički mesec

Mesec da bi prošao kroz sve faze lunacije (osvetljenosti od strane Sunca) potrebno je od 29,26 do oko 29,80 dana. Varijacije se javljaju usled Zemljine i Mesečeve orbite. Srednje vreme sinodičkog meseca iznosi 29,530588 dana ($29^d12^h44^m03^s$) računato za 1. januar 2000. [7]. U nekim radovima poput [9] navodi se za srednje vreme sinodičkog meseca broj 29,5305879814815 i to bez preciznog referisanja vremenskog trenutka. Na primeru sinodičkog meseca pokazaćemo da se račun sa najboljim racionalnim aproksimacijama prve vrste mora vezati za tačnost astronomskih konstanti u nekom vremenskom intervalu. Upoređivanjem verižnih razvoja za više vremenskih momenata možemo odrediti koje su verižne i međuverižne cifre iste i samo se takve cifre mogu smatrati korektne u vremenskom intervalu gde se razmatra primena. Ovim se koriguju rezultati rada [9] da se na osnovu jednog vremenskog trenutka za neku astronomsku konstantu, koja zavisi od vremena, bez dodatnih analiza izvode zaključci o primenama u izuzetno dugim vremenskim periodima.

Na slici 1 su prikazane promene vrednosti konstante sinodičkog meseca prema [5] (str. 194).



Slika 1. Promene vrednosti sinodičkog meseca [5] sa izabranim vrednostima s_i ($i=1..5$)

Izaberimo vrednosti $s_1=29,530590$, $s_2=29,530589$, $s_3=29,530588$, $s_4=29,530587$, $s_5=29,530586$ sinodičkog meseca uz približno određivanje vremenskog trenutka na Slici 1. Odredimo za s_i ($i=1..5$) najbolje racionalne aproksimacije prve vrste, sa odgovarajućim verižnim i međuverižnim ciframa, sa ciljem da ustanovimo one koje su zajedničke za navedenih 5 vrednosti konstanti. U tabeli 4 su prikazane najbolje racionalne aproksimacije prve vrste koje su zajedničke za svih 5 navedenih konstanti.

Aproksimacije	Verižne cifre	
	Standardna forma zapisa	Duga forma zapisa
29/1	= [29] *	= [29] *
30/1	= [30] *	= [29; 1] *
59/2	= [29; 2] *	= [29; 1, 1] *
266/9	= [29; 1, 1, 4]	= [29; 1, 1, 4]
325/11	= [29; 1, 1, 5]	= [29; 1, 1, 5]
384/13	= [29; 1, 1, 6]	= [29; 1, 1, 6]
443/15	= [29; 1, 1, 7] *	= [29; 1, 1, 7] *
502/17	= [29; 1, 1, 8] *	= [29; 1, 1, 7, 1] *
945/32	= [29; 1, 1, 7, 2]	= [29; 1, 1, 7, 1, 1]
1447/49	= [29; 1, 1, 7, 1, 2] *	= [29; 1, 1, 7, 1, 2] *

Tabela 4. Verižni zapisi zajedničkih najboljih racionalnih aproksimacija prve vrste konstanti sinodičkog meseca s_1, s_2, s_3, s_4, s_5

U tabeli 5 su prikazane neke najbolje racionalne aproksimacije prve vrste koje nisu zajedničke za svih 5 navedenih konstanti.

	Aproksimacije	Verižne cifre	
		Standardna forma zapisa	Duga forma zapisa
s_1	12078/409	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 8]	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 8]
	13525/458	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 9]	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 9]
	⋮	⋮	⋮
	20760/703	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 14]	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 14]
	22207/752	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 15] *	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 15] *
	23654/801	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16] *	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 15, 1] *
s_2	12078/409	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 8]	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 8]
	13525/458	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 9]	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 9]
	⋮	⋮	⋮
	22207/752	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 15]	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 15]
	23654/801	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16] *	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16] *
	96063/3253	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16, 4]	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16, 4]
	119717/4054	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16, 5]	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16, 5]
143371/4855	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16, 6] *	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16, 6] *	
s_3	13525/458	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 9]	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 9]
	14972/507	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 10]	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 10]
	⋮	⋮	⋮
	22207/752	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 15]	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 15]
	23654/801	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16] *	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16] *
25101/850	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 17] *	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16, 1] *	
s_4	13525/458	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 9]	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 9]
	14972/507	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 10]	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 10]
	⋮	⋮	⋮
	23654/801	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16]	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16]
	25101/850	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 17] *	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 17] *
26548/899	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 18] *	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 17, 1] *	
s_5	14972/507	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 10]	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 10]
	16419/556	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 11]	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 11]
	⋮	⋮	⋮
	25101/850	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 17]	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 17]
	26548/899	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 18] *	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 18] *
54543/1847	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 18, 2] *	= [29; 1, 1, 7, 1, 2, 18, 2] *	

Tabela 5. Verižni zapisi najboljih racionalnih aproksimacija prve vrste konstanti sinodičkog meseca s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 koje nisu zajedničke

Verižni zapisi navedenih konstanti sinodičkog meseca su

$$s_1 = [29; 1, 1, 7, 1, 2, 15, 1, 1, 10, 1, 1, 2, 2, 2], \quad (19)$$

$$s_2 = [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16, 6, 1, 1, 1, 1, 2, 14], \quad (20)$$

$$s_3 = [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16, 1, 4, 1, 15, 1, 2], \quad (21)$$

$$s_4 = [29; 1, 1, 7, 1, 2, 17, 1, 1, 3, 26, 1, 5], \quad (22)$$

$$s_5 = [29; 1, 1, 7, 1, 2, 18, 2, 1, 1, 1, 13]. \quad (23)$$

Na osnovu prethodnog zaključujemo da za vremenski interval naznačen na slici 1 korektna su samo zaključivanja na osnovu verižne aproksimacije [29; 1, 1, 7, 1, 2].

U radu [9] vrednost verižne aproksimacije [29; 1, 1, 7, 1, 2, 34] se navodi kao najbolja racionalna aproksimacija sinodičkog meseca 29,5305879814815, kao i praktična primena zasnovana na toj aproksimaciji. U vezi toga možemo reći da je ta aproksimacija prihvatljiva samo za izuzetno kratak vremenski period koji je mnogo kraći od navedenog u [9] od preko 6000 godina.

4. Zaključak

Istraživanje u ovom radu je nastavak rada [3] sa ciljem da se upotpuni i proširi analiza primene verižnih i međuverižnih aproksimacija u oblastima koji su autori razmatrali u referencama [3], [6], [8]. Na primeru konstanti π i e ilustrovana je jedna primena verižnih razlomaka u aproksimaciji iracionalnih brojeva. Na primeru par konkretnih racionalnih aproksimacija astronomske konstante sinodičkog meseca ilustrovana je jedna primena verižnih razlomaka u aproksimaciji racionalnih brojeva. Na osnovu niza verižnih aproksimacija konstante sinodičkog meseca izvršena je procena do koje mere je moguće, u razmatranom vremenskom intervalu, korektno aproksimirati konstantu sinodičkog meseca sa odgovarajućim verižnim razlomkom. U budućim istraživanjima razmotiće se primene izložene teorije verižnih razlomaka u oblasti akustike i teorije mehanizama.

Zahvalnica. Rad je napisan kao rezultat projekta III44006 koji se realizuje u okviru MI SANU.

Bibliografija

- [1] **Александр Яковлевич Хинчин.** Цепные дроби, *Государственное издательство технико – теоретической литературы*, Москва 1935.
- [2] **Jacques Laskar:** Secular terms of classical planetary theories using the results of general theory, *Astronomy and Astrophysics*, Vol. 157, no. 1, March 1986, p. 59-70.
- [3] **Бранко Малешевић:** Рационалне апроксимације реалних бројева и неке примене, *Настава математике*, XLIII, 3, 1998., стр. 20–31.
- [4] **Jean Meeus:** *Astronomical Algorithms*, Second edition, *Willmann Bell, Inc.* Publ., 1999.
- [5] **Nachum Dershowitz, Edward M. Reingold:** *Calendrical Calculations*, Third edition, *Cambridge press*, 2001.
- [6] **Бранко Малешевић:** Истраживање помоћу рачунара у математици, циклус Математика и рачунарство – како рачунари помажу у математичким истраживањима, *Коларац* – Београд 18. XII 2008. <http://static.astronomija.co.rs/>
- [7] Phases of the Moon: 2011 to 2030 <http://astropixels.com/ephemeris/moon/phases2011mst.html>
- [8] **Luka Milinković, Branko Malešević:** Pseudo-Random Number Generator Analysis Based on the Set of Quadratic Irrationals, *Proceedings of 20-th TELFOR conference*, pp. 536-539, Beograd 2012.
- [9] **Branislav Popkonstantinović, Ratko Obradović, Zorana Jeli, Slobodan Mišić:** Synthesis, solid modeling and working simulation of moon phase clock mechanism, *Proceedings of 4-th International Scientific Conference on Geometry and Graphics, moNGeometrija 2014*, Vol. 1, pp. 141-156, Vlasina 2014.
- [10] **Allan Cortzen:** Continued fractions and semiconvergents as approximations to rational numbers, preprint 2015. http://lanco.host22.com/web_documents/contfrac.ver.4.pdf
- [11] Phases of the Moon 2015 <http://www.astropixels.com/ephemeris/astrocal/astrocal2015cst.html>

Zaštita integriteta podataka u praksi

Dragan Vidaković

Gimnazija Ivanjica

dragan.vidakovic@open.telekom.rs

Duško Parezanović

Gimnazija Ivanjica

ivanjickagimnazija@open.telekom.rs

Apstrakt. Integritet i tajnost podataka se najbolje štite sopstvenim alatima. Da bi alati bili kvalitetniji potrebno je pospešiti interes za kriptografiju. Kodiranje kriptografskih algoritama može biti dobar korak u tom pravcu. To je i razlog što će u ovom radu biti prikazan digitalni potpis poruke.

RSA i Elliptic Curve Cryptography (ECC) su vodeći kriptosistemi javnog ključa. U osnovi RSA je problem faktorisanja velikog celog broja koji je proizvod dva prosta broja. Kako postoji subekspencijalni algoritam koji ga rešava potrebno je, zbog veće sigurnosti, generisati što veći broj. To zahteva veću upotrebu svih resursa (energija, memorija, ...) što ne odgovara modernim telekomunikacijama (bežičnim (senzorskim) mrežama, ...).

ECC se zasniva na teško rešivom problemu nalaženja diskretnog logaritma na tačkama eliptične krive. Pošto ne postoji subekspencijalni algoritam koji ga rešava, a zahteva i značajno manje svih resursa, National Security Agency (NSA) je preporučila zamenu RSA sa ECC [1].

Pored prikaza efektivnog potpisivanja poruke, biće upoređena i vremena potrebna za postizanje ekvivalentnog nivoa sigurnosti. Takođe će se ukazati i na načine mogućeg skraćivanja vremena potrebnog za generisanje velikog (verovatno) prostog broja što je od velikog značaja za oba kriptosistema. Pošto se ne potpisuje poruka već njen 160 - bitni sažetak (*hash value*) u dodatku će biti priložen izvorni kod za SHA-1 što može biti inspirativno za one koji žele da počnu da se bave kriptografijom.

Ključne reči: Kriptosistemi javnog ključa; Digitalni potpis; Poređenje

1. Uvod

Imajući u vidu da su algoritmi za faktorisanje celog broja sve brži i efikasniji, da su procesori sve jači a memorije sve moćnije, sasvim je očigledno da je generisanje sve većih prostih brojeva jedini način očuvanja tajnosti i integriteta podataka korišćenjem RSA mehanizama. To je razlog što je NSA još 2009. upozorila da su 1024 - bitni RSA i DH parametri sigurni samo do 2010., te da je potrebno, gde god je to moguće, RSA zameniti sa ECC mehanizmima.

Razmere disproporcije resursa potrebnih za RSA i ECC mehanizme najbolje ilustruje Tabela1, koja predstavlja preporuku NSA za broj bita potrebnih za zaštitu ključeva korišćenjem konvencionalnih algoritama za šifrovanje (npr. DES i AES), zatim RSA, DH i ECC, sa ciljem da se obezbedi ekvivalentna sigurnost.

Tabela 1. Poređenje broja bita za postizanje ekvivalentne sigurnosti

Simetričan ključ- u bitima	RSA i DH ključ- u bitima	ECC ključ- u bitima
80	1024	160
112	2048	224
128	3072	256
192	7680	384
256	15360	521

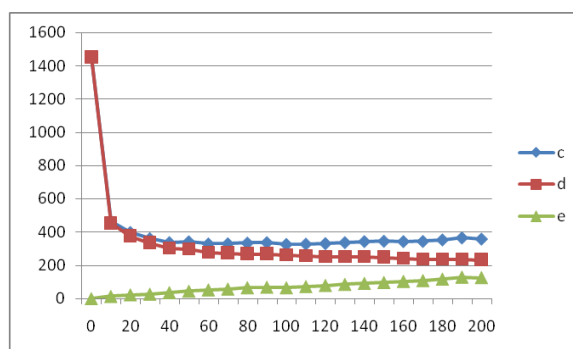
Da bi se lakše shvatilo o čemu se radi, u ovom radu će se prikazati kako u stvarnosti izgleda ECC i RSA digitalni potpis iste poruke, a zatim će se izmeriti i uporediti vremena potrebna za njihovu realizaciju.

2. Ubrzanje detekcije prostih brojeva

U osnovi kriptografije javnog ključa se nalaze veliki, verovatno prosti brojevi. Testiranje na primalitet se vrši, veoma zahtevnim, Miler Rabinovim algoritmom [2], [3], zbog čega je generisanje prostog broja dug i resursno veoma zahtevan postupak. Osnovni interes je da se on što ređe primenjuje. U radu će se prikazati dva pristupa čijom se kombinacijom može skratiti vreme detekcije prostog broja, što će se potvrditi merenjem.

2.1. Deljenje sa prvim prostim brojevima

Za potrebe ovog rada generisani su prosti brojevi od 512 binarnih cifara. Osnovni interes pri tome je da se što ređe primenjuje Miler - Rabinov algoritam (MR). Pošto su najčešći prosti faktori celih brojeva prosti brojevi 3,5,7,..., tim redom, najlogičnije je da se broj koji se testira na primalitet prethodno podeli sa prvih nekoliko desetina prostih brojeva. Ako taj broj nije deljiv ni sa jednim od tih prostih faktora tek tada se propušta tri puta kroz MR [3]. Pogrešno bi bilo uverenje da bi bilo korisno deljenje sa neograničenom listom prostih brojeva pošto takav postupak u jednom trenutku postaje kontraproduktivan. U [3] je predloženo da se razmotri odnos vremena utrošenih na deljenje i testiranje sa (MR). U tom cilju se eksperimentalno, za potrebe ovog rada, došlo do rezultata da je najbolje 512 – bitni binaran broj, pre testiranja MR, podeliti sa 60 do 80 prvih prostih brojeva u šta se moguće uveriti posmatranjem sledeće slike 1.



Slika 1. Vreme detekcije prostog broja

Podele na apscisi ukazuju sa koliko je prostih brojeva deljen dati broj. Na ordinati je vreme u sekundama. Slovo (c) označava ukupno vreme generisanja prostog broja, slovo (d) označava vreme potrošeno na testiranje (MR), dok slovo (e) označava vreme utrošeno na deljenje sa prvih nekoliko desetina prostih brojeva.

2.2. Prednost izbora početnog broja

Bez ikakve pretenzije da se nešto dokazuje, uopštava ili tvrdi, u radu će se ukazati samo na jedan interesantan rezultat do koga se došlo eksperimentom, nezavisno od drugih, koji može da pomogne u nastojanjima da se skрати vreme detekcije prostog broja. Jednostavno merenje pokazuje da je u potragu za prostim brojevima bolje započeti od broja 2^{*n-3} nego od broja 2^{*n+1} .

Recimo, traži se prvi prost broj, ako se startuje od parnog broja $2^{*k} = n[511]:=1, n[100]:=1$, tj. od broja 2^{*k+1} (*¹), ili broja 2^{*k-3} (*²), zatim se njemu sledeći paran broj uveća za 2^{12} i ponovi postupak traženja novog prostog broja, i tako dalje. Merenjem se dobija, recimo, da se u slučaju (*¹) 190 prostih brojeva detektuje za isto vreme od devet časova i tri minuta koliko je potrebno da se detektuje 200 brojeva u postupku (*²).

Ako se startuje od broja 2^{*k} : $n[1023]:=1$, tj. od broja 2^{*k+1} (*¹), ili broja 2^{*k-3} (*²) i traži se prvi prost broj, zatim se njemu sledeći paran broj uvećava za 2^{12} i postupak ponavlja traženjem novog prostog broja, i tako dalje. Merenjem se dobija, recimo, da se u slučaju (*¹) 30 prostih brojeva detektuje za 18h 48', dok je u slučaju (*²) za 30 prostih brojeva potrebno 16h 38'.

Objašnjenje razlike bi se moglo potražiti u Goldbahovoj hipotezi koja kaže da je svaki paran broj veći od četiri suma dva prosta broja. Iz tog razloga se polazi od broja 2^k-3 . Da postupak ima smisla ukazuje sledeća tabela koja pokazuje broj Goldbahovih parova (p,q) (G), gde su p i q prosti i $p+q=2^k$, pri čemu je $p < k$ i $q > k$.

Tabela 2. Broj parova koji zadovoljavaju Goldbahovu hipotezu

I	II	III	IV
2^{20}	4244	43458	9.77%
2^{21}	7492	82125	9.12%
2^{22}	13717	155759	8.81%
2^{23}	24978	296148	8.44%
2^{24}	45752	564437	8.11%
2^{25}	83543	1078257	7.75%
2^{26}	153881	2064123	7.45%
2^{27}	283830	3958400	7.17%

U koloni **I** je paran broj. U koloni **II** broj Goldbahovih parova (G). U koloni **III** broj parova (p, q) pri čemu je p prost (manji od k) broj a q neparan veći od k (G^*). Iako su parni brojevi mali ipak je jasno da postoji neka šansa da paran broj bude jednak zbiru dva prosta broja što ukazuje kolona **IV**, koja označava procenat (G) u (G^*).

3. Zadatak i cilj

Novi načini čuvanja, obrade i prenosa informacija doneli su teškoću koja u klasičnom postupku nije ni približno imala takav značaj. Prekranje podataka koji se čuvaju u elektronskoj formi je moguće u takvoj meri da bi se bez alata za očuvanje integriteta podataka bilo kakva ozbiljnija komunikacija mogla pokazati besmislenom.

Brojni su primeri za to počev od najjednostavnijih poruka (ali nimalo bezazlenih) tipa: Isplatiti entitetu **A** \$100, gde se može promeniti i ime i valuta i iznos, pa sve do emitovanja poruka iz zemalja koje ne dozvoljavaju šifrovani saobraćaj, u cilju nadgledanja svih komunikacija.

Upečatljiv je primer iz doba "hladnog rata" kada su posmatrači SAD i SSSR svoje izveštaje o seizmičkim aktivnostima (problem otkrivanja podzemnih nuklearnih proba) morali da šalju u nešifrovanom obliku. Bilo kakva promena teksta je mogla da ima dalekosežne posledice po bezbednost čitavog sveta. Vrlo je važno dakle sačuvati integritet podataka - svojstvo koje obezbeđuje detekciju neautorizovane promene izvora podataka kao i samih podataka.

Digitalni potpis je mehanizam koji omogućava zaštitu integriteta poruke. U ovom radu osnovni zadatak je potpisivanje poruke: *Elektrotehnicki fakultet u Beogradu.*, koristeći se RSA i ECC mehanizmima. Umesto da se potpiše poruka, potpisuje se njena sažeta – heš (*hash* - engl.) - vrednost (**m**) (videti dodatak).

(**m**): 3f1ca247bba33f43cfb186374908a13724e0b436 ili binarno

001111110001110010100010010001111011101110100011001111110100001111001111101100011000011000
1101110100100100001000101000010011011100100100111000001011010000110110, ili heksadecimalno

3.1. RSA Digitalni potpis

Generisanje ključa za RSA (šifrovanje i digitalni potpis).
Svaki entitet kreira RSA javni i odgovarajući privatni ključ.

- [2] Vidakovic D., “Analysis and implementation of asymmetric algorithms for data secrecy and integrity protection”, Master Thesis (mentor Jovan Golic), Faculty of Electrical Engineering, Belgrade, Serbia, 1999.
- [3] Menezes A., van Oorschot P. C., Vanstone S., Handbook of Applied Cryptography, CRC Press, New York, (pristup 18. 08. 2015. g.) dostupno na <http://cacr.uwaterloo.ca/hac/>
- [4] Koblitz N., “Elliptic Curve Cryptosystems”, Mathematics of Computation, 48, pp. 203-209, 1987.
- [5] Miller V., “Uses of elliptic curves in cryptography”, Advances in Cryptology: proceedings of Crypto ‘85, Lecture Notes in Computer Science, vol. 218. New York: Springer-Verlag, 1986., pp 417-426.
- [6] Johnson D., Menezes A. and Vanstone S., “The Elliptic Curve Digital Signature Algorithm (ECDSA)”, Certicom Research, Canada, (pristup 18. 08. 2015. g.), dostupno na <http://cs.ucsb.edu/~koc/ccs130h/notes/ecdsa-cert.pdf>
- [7] Kohen H., Frey G., Handbook of Elliptic and Hyperelliptic Curve Cryptography, Chapman & Hall, New York 2006.
- [8] Sato H., Schepers, & Takagi T., *Exact analysis of Montgomery multiplication*, Progress in Cryptology – Indocrypt 2004, vol. 3348, Springer-Verlag, Berlin, 2004, 290–304.
- [9] Hankerson D., Menezes A., & Vanstone S., Guide to Elliptic Curve Cryptography, Springer –Verlag, New York, 2004.

Učenje matematike kroz vizuelne i fizičke modele: nekoliko primera

Ksenija Simić-Muller

Pacific Lutheran University, United States of America
e-mail: simicmka@plu.edu

Apstrakt. Znanje matematike pre svega podrazumeva konceptualno razumevanje sadržaja. Ako učenici ne razumeju značenje ideja koje uče, biće im otežano i korišćenje procedura koje iz tih ideja proizilaze, a i dalje napredovanje u matematici. Da bi stekli konceptualno razumevanje, učenicima treba pružiti priliku da sami konstruišu matematičko znanje pre nego što nauče procedure. Pristup koji je često zastupljen u Sjedinjenim Američkim Državama je korišćenje modela, bilo vizuelnih ili fizičkih, koji se lako mogu nacrtati ili napraviti, ali koji takođe postoje u elektronskim verzijama. Jedan od resursa dostupnih korisnicima bilo gde u svetu je veb stranica pod imenom *National Library of Virtual Manipulatives*, koja sadrži modele i propratne aktivnosti za sve nivoe i oblasti školske matematike. U ovom radu biće predstavljene mogućnosti koje ovaj resurs pruža kroz primere primerene osnovnoj i srednjoj školi, od sabiranja decimalnih brojeva, do rešavanja linearnih jednačina i rastavljanja polinoma na činioce. U svim primerima će se posebna pažnja pokloniti konceptualnom razumevanju koje vizuelni i fizički modeli omogućavaju.

Ključne reči: matematičko obrazovanje; konceptualno razumevanje; vizuelni modeli; fizički modeli.

1. Uvod

Učenje matematike iskustveno i putem pomagala sve je češća pojava, kako u svetu tako i u Republici Srbiji. Ovakav pristup nastavi matematike zasnovan je na teorijama konstruktivizma, po kojima mi svako znanje sami konstruišemo na osnovu interakcije sa svetom oko nas. Korišćenjem pomagala kojima sami mogu da manipulišu, učenici stvaraju znanja o matematici koja su dublja i višestranija od onih koja bi stekli samo slušajući predavanje ili čitajući udžbenik.

U Sjedinjenim Američkim Državama, gde autorka radi s učiteljima i nastavnicima matematike, i onima koji će to tek postati, veliki značaj se pridaje različitim reprezentacijama matematičkih pojmova, a naročito se insistira na vizuelnoj reprezentaciji. Fizički modeli, pomagala, ili *manipulatives* kako se na engleskom zovu, se sve više koriste i u starijim razredima za složenije matematičke teme, a ne samo za osnovne ideje kao što su brojenje i sabiranje. Pored toga što se u pedagoškoj teoriji ovaj pristup podržava i preporučuje, autorka je takođe iz sopstvene prakse stekla uverenje da su učenici i studenti više motivisani i bolje savladavaju gradivo putem pomagala.

Cilj ovog rada je da predstavi neke od modela koji se koriste u američkim osnovnim i srednjim školama, a posebno da predstavi te modele putem veb stranice po imenu *National Library of Virtual Manipulatives*¹, koja je svima dostupna i na kojoj se nalazi preko stotinu modela, pomagala i matematičkih igara za sve nivoe, od predškolskog do kraja srednje škole. Stranica je organizovana tako da se materijali mogu tražiti po nivou, po oblasti matematike, ili istovremeno po oba kriterijuma. Većina modela ima propratne zadatke ili objašnjenja. Mi ćemo se upoznati s ovom stranicom i njenim mogućnostima putem četiri matematičke teme: sabiranja decimalnih brojeva, oduzimanja celih brojeva, rešavanja jednačina i razlaganja binoma na činioce. Ove su teme izabrane zbog čestih grešaka koje učenici prave u korišćenju algoritama vezanih za njih, i zbog zgodnih i slikovitih načina kako se ove teme mogu predstaviti putem modela. Pre upoznavanja s modelima, ukratko ćemo se bliže upoznati s konstruktivizmom i teorijom korišćenja modela u učenju matematike.

2. Teorija

2.1. Aktivno učenje

Teorija konstruktivizma se najvećim delom zasniva na radu francuskog filozofa Žana Pijažea, koji je razvio svoje teorije tridesetih godina 20. veka. Po njemu, svi mi kreiramo znanje i razumevanje, putem alata (koji uključuje naše ideje i prethodno znanje), materijala (bilo šta što vidimo, čujemo ili dodirujemo, kao i naše misli

¹<http://nlvm.usu.edu>

i ideje), i truda ([12]). Drugim rečima, mi nismo pasivni primaoci znanja, već njegovi aktivni stvaraoci. Kako to izgleda na času matematike? Pre svega, učenici su aktivni. Na primer, umesto da nastavnik stoji pred tablom dajući definicije, dokazujući teoreme i rešavajući zadatke, učenici vrše usmerena istraživanja o temi koju uče. Ne primer, učenici mogu da iseku kvadrate konstruisane nad katetama i probaju da ih preurede u kvadrat konstruisan nad hipotenuzom da bi formulisali Pitagorinu teoremu. Kasnije mogu i da je dokažu, uz pomoć nastavnika, putem jednog od mnogih postojećih vizuelnih dokaza ove teoreme dostupnih nematematičarima. O ma kojoj temi da se radi, zasnovano na prethodnom znanju i uz pomoć materijala, bilo da su to papir i olovka ili kompjuterski programi, učenici mogu da počnu da otkrivaju (ili čak otkriju u potpunosti) teoreme i svojstva o kojima uče. Pokazano je da je ovaj pristup nastavi matematike zaista efektivan i da učenici ne samo imaju bolje konceptualno razumevanje nego i bolje rezultate na standardizovanim testovima ([1, 2, 4, 8]).

2.2. Pomagala u učenju

Pomagala u učenju, koje ćemo ovde još nazivati i modelima, spadaju u materijale koji se koriste radi konstruisanja znanja. To su fizički objekti koje učenici i studenti mogu da koriste da bi ilustrovali i otkrili matematičke pojmove ([12]). U novije vreme fizički objekti se sve više zamenjuju virtuelnim, koji funkcionišu na isti način, ali se njima manipuliše uz pomoć računara.

Pomagala su korisna jer pomažu učenicima da vide ili probaju nešto novo putem drugačije reprezentacije od reči i simbola, i na taj način apstraktno pretvore u konkretno ([4]). Pomagala se naročito koriste s mlađim učenicima i s decom koja imaju smetnje u razvoju, međutim pokazano je da pomažu svim učenicima, čak i kod apstraktnijih grana matematike kao što je algebra ([4]).

Postoje neka opšta pravila za rad s pomagalima na časovima matematike. Kao prvo, ako se materijali koriste na času, bitno je dati jasna uputstva učenicima o tome šta se od njih očekuje, treba im dati vremena da se „igraju” s materijalima pre nego što počnu s radom ([12]), i u slučaju fizičkih modela, odmah ih treba skloniti po korišćenju jer inače mogu da odvlače pažnju pri nastavi. Zatim, modeli se ne smeju koristiti bez razumevanja. Umesto da im nastavnici govore kako da ih koriste, učenici treba sami da istražuju mogućnosti i način korišćenja datih pomagala ([12]). Umesto da pokazuju, nastavnici treba da podstiču razmišljanje o tome *zašto* se radi to što se radi, i kako se generalizuje.

Takođe je bitno napomenuti čemu pomagala *ne* služe: ona se ne koriste kao poštapalice i njihovo korišćenje ne znači da učenici ne moraju da uče pravila. Kao što proceduralno razumevanje nema smisla bez konceptualnog, tako i konceptualno znanje bez prakse nema prevelike koristi. Preporučuje se da se pomagala koriste dok učenici ne otkriju pravila i ne naviknu se na njihovo korišćenje. Onda se prelazi na računanje bez pomagala, osim kod onih učenika koji kasne u razvoju i razumevanju gradiva.

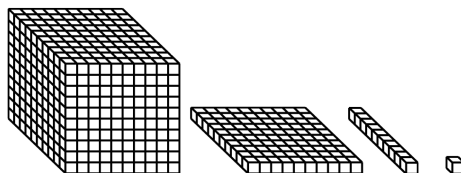
Modeli su korisni ne samo za učenički rad, već i za nastavnike, ne bi li se upoznali s različitim reprezentacijama istog gradiva. Za to su naročito pogodni virtuelni modeli poput onih predstavljenog ovde, jer je lako manipulirati njima, i može da se koristi bilo gde i bilo kad. Za učenike su virtuelna pomagala dvostruko korisna: mogu da ih koriste kod kuće a ne samo u školi, a osim toga im je prirodno privlačan rad s tehnologijom. Međutim, iako su mladi u današnje vreme jako spretni s kompjuterima i tabletima, ta spretnost se najčešće ne odnosi na edukativne tehnologije, i zato ne treba podrazumevati da će učenici znati kako da koriste virtuelna pomagala bez prethodne poduke.

3. Primeri

3.1. Sabiranje decimalnih brojeva

Rad s decimalnim brojevima učenicima nije nimalo jednostavan. Oni najčešće prave greške u njihovom poređenju, kao i u sabiranju i oduzimanju ([11]). Naučna istraživanja su pokazala da učenici greše u radu s decimalnim brojevima jer na njih pogrešno primenjuju svojstva prirodnih brojeva, kao na primer kad dobiju rezultate $2,45 + 3,6 = 2,81$ (jer je $245 + 36 = 281$), ili $0,4 + 0,7 = 0,11$ (jer je $4 + 7 = 11$) ([6], [9]). Izvor grešaka kao što su malopre navedene je nerazumevanje brojevnog sistema u kome se odvija sva matematika: naime, učenici, a često i nastavnici, poseduju slabo razumevanje pozicionog brojnog sistema ([9]). Ovakve greške se javljaju na svim nivoima obrazovanja: mlađi učenici ne razumeju da broj 10 zapravo predstavlja jednu desetinu i nula jedinica, a nešto stariji učenici pogrešno izvršavaju računске operacije kako na celim, tako i decimalnim brojevima, praveći greške u „prenošenju” i „pozajmljivanju”. Smatra se da bi učenici imali mnogo manje problema s decimalnim brojevima kad bi stekli bolje razumevanje pozicionog brojnog sistema u mlađim razredima ([9]).

Da bi se greške s decimalnim brojevima ispravile i učenici bolje upoznali s principima rada pozicionog brojevnog sistema, korisne su takozvane *matematičke kocke*, koje se u američkim učionicama koriste od prvog razreda, prvo za brojanje i operacije na celim brojevima, a kasnije i za decimalne brojeve. Princip po kome rade je jednostavan. U slučaju celih brojeva, na Slici 1 s leva na desno su predstavljeni brojevi 1000, 100, 10, i na kraju 1. Kako se ove kocke koriste i za rad s decimalnim brojevima, u kom slučaju dobijaju druge vrednosti, na engleskom jeziku imaju imena koja su nevezana za broj jediničnih kocki iz kojih se sastoje: najmanja kocka se zove „unit,” ili jedinična, sledeća po veličini je „long” ili dugačka kocka, zatim „flat,” što bi možda bilo dobro prevesti kao kvadrat, i na kraju „big cube,” ili velika kocka.



Slika 1. Dekadne kocke²

Ako radimo s celim brojevima, možemo videti da deset jedinica čine jednu deseticu, da deset desetica čine jednu stotinu, i deset stotina čine jednu hiljadu. Ako recimo sabiramo $4 + 7$ i dobijemo 11 jedinica, razмениćemo deset jedinica za jednu deseticu, pa je naš rezultat $10 + 1$, što naravno pišemo kao 11. Kad deca uče sabiranje, i uče prenošenje, ovi blokovi pomažu razumevanju procesa koji se zapravo događa, to jest da je u pitanju samo pregrupisanje brojeva: deset jedinica se menja za jednu deseticu, deset desetica za jednu stotinu, i tako dalje. Kod oduzimanja je obratno, pošto se kod pozajmljivanja jedna desetica pretvara u deset jedinica, jedna stotina u deset desetica, i tako dalje. Na *National Library of Virtual Manipulatives* stranici postoji nekoliko virtuelnih modela za rad s celim brojevima³ i jedan za rad s decimalnim brojevima, koji ćemo mi ovde da razmatramo⁴. Kod svih je moguće dinamički pretvarati deset kocki na jednom decimalnom mestu u jednu kocku na sledećem i obratno, a zatim pomerati na odgovarajući položaj u broju.

Kod decimala je proces malo složeniji, pošto nije unapred određeno koja će kocka imati vrednost 1. U ovom slučaju postoji više opcija. Mi ćemo za sabiranje $0,4 + 0,7$ zadatak predstaviti tako što će desetine biti jedinične kocke. Da sabiramo brojeve s dve decimale, onda bi stotine bile predstavljene jediničnim kockama, a desetine dugačkim.⁵



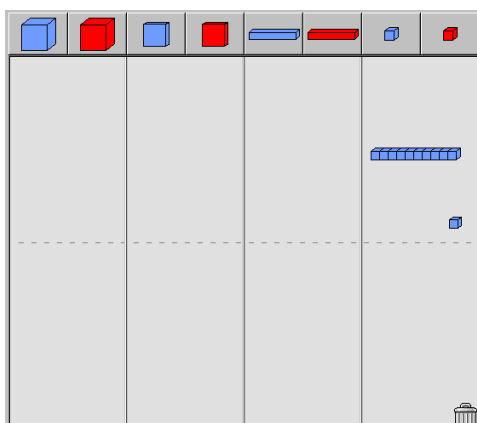
Slika 2. Predstavljanje zadatka $0,4 + 0,7$

³http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_152_g_3_t_1.html?from=category_g_3_t_1.html,
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_154_g_3_t_1.html?from=category_g_3_t_1.html,
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_155_g_3_t_1.html?from=category_g_3_t_1.html

⁴http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_264_g_3_t_1.html?from=category_g_3_t_1.html

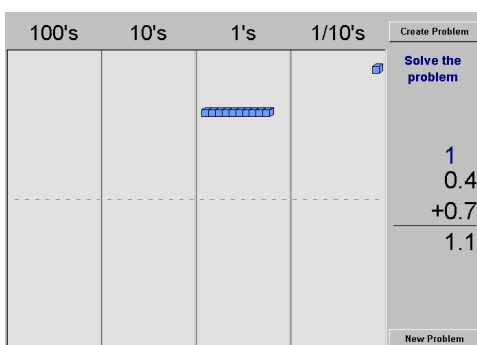
⁵U SAD se zarez i tačka koriste suprotno nego u Republici Srbiji u pisanju brojeva: tačka se koristi za odvajanje celog od decimalnog dela, a zarez za odvajanje hiljada, miliona, i tako dalje.

Pošto radimo u decimalnom sistemu, isto pravilo uvek važi: deset individualnih kocki se menjaju za jednu dugačku. Zato je vizuelni odgovor sledeći:



Slika 3. Spajanje u sledeću brojnu vrednost

Ovo naravno nije kraj, jer treba dugačku kocku prebaciti na njeno pravo mesto. Naša greška od malopre može se ovde jasno videti, pošto učenici zaborave ovaj korak, ili ne shvataju da je nemoguće imati na mestu desetina odgovor 11, usled osobina našeg brojnog sistema:



Slika 4. Pregrupisanje i konačno rešenje

Na kraju, odgovor je 1, 1.

Ovaj model je koristan jer jasno predstavlja odnos između pozicija u brojevnom sistemu. Učenicima treba pružiti mogućnost da s njim rade kad tek počinju da uče sabiranje i oduzimanje decimalnih brojeva, jer otklanja greške tipa one koju smo upravo predstavili, kao i greške koje nastaju kod sabiranja brojeva s različitim brojem decimala. Čitaoci mogu sami da probaju da saberu $2,45 + 3,6$ uz pomoć modela i da vide kako on pomaže u otklanjanju učeničkih grešaka kod ovog i sličnih zadataka.

3.2. Oduzimanje celih brojeva

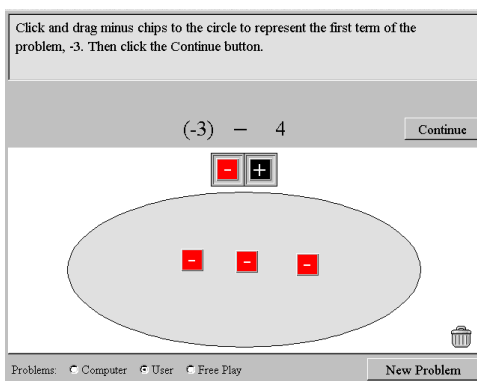
Pristup nastavi kod celih brojeva je često proceduralan i sastoji se od učenja pravila bez razumevanja, što dovodi do njihovog pogrešnog korišćenja. Na primer, pravilo je kod oduzimanja da minus i minus daju plus, ali učenici koji uče bez razumevanja će ovo pravilo da pogrešno zapamte i želeće da ga primenjuju i kad mu nije mesto, na primer pri sabiranju dva negativna broja, pa će tako reći da je $-3 + (-5) = 8$, „zato što dva minusa daju plus.”

Ono što je pogotovo problematično kod nastave celih brojeva je upravo ono što je u vezi s njima bilo problematično i kroz istoriju matematike – to da su negativni brojevi „fiktivni” ([10]), i da ih je teško predstaviti fizičkim modelima. Ipak, mada komplikovano, to nije i nemoguće. Postoje dva modela koja se u američkim ško-

lama koriste. Jedan od njih je brojna linija, koja pomaže u rešavanju individualnih zadataka, ali ne doprinosi generalizaciji ili razumevanju pravila ([5]). Drugi model koristi žetone u dve boje, tipično crvenu za negativne brojeve i crnu za pozitivne. Na primer, broj 3 može da se predstavi s tri crna žetona, a broj -3 može da se predstavi s tri crvena žetona. Kako je jedna od najvećih prepreka u učenju negativnih brojeva ta što se razlikuju od prirodnih brojeva ([6]), ovaj model je zgodan, jer nadograđuje ideje koje su učenicima od ranije poznate u vezi sa prirodnim brojevima. Na primer, ako sabiramo $3 + 4$, to predstavljamo tako što prvo postavimo tri predmeta (recimo žetona), pa onda dodamo još 4, i spojimo te dve grupe u jednu od 7 žetona. Slično je i sa oduzimanjem, na primer $7 - 4$ se predstavlja tako što se postavlja sedam žetona, onda sklanja (oduzima) 4, i ostaje 3. Sabiranje i oduzimanje celih brojeva može da se uvede na sličan način. Jedina je razlika što sad dolazi do interakcije između pozitivnih i negativnih brojeva, tj. crnih i crvenih žetona.

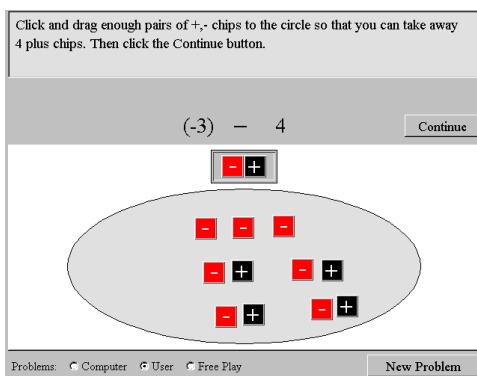
Lako je videti se po jedan crni i crveni žeton potiru, kao što je na primer slučaj kod naelektrisanja protona i elektrona: crni žeton može da se predstavi kao proton, a crveni kao elektron. U tom slučaju, ako na primer sabiramo $3 + (-4)$, onda predstavimo sabiranje kao spajanje, u ovom slučaju tri crna i četiri crvena žetona. Kako se svaki crni i crveni žeton potiru (kao naelektrisanje protona i elektrona), sklonimo tri crveno-crna para čiji je zbir 0, i ostaje nam jedan crveni žeton, što znači zbir -1 .

Oduzimanje je komplikovanije, i njemu ćemo posvetiti više pažnje putem našeg virtuelnog modela.⁶ Ako želimo da i dalje razumemo oduzimanje kao sklanjanje onog što se oduzima, kako onda shvatiti zadatak kao što je na primer $-3 - 4$? Preveden na jezik žetona, on glasi ovako: imamo 3 crvena žetona i želimo da sklonimo 4 crna. Ali, kako je to moguće, kad nemamo crvenih žetona za sklanjanje?



Slika 5. Predstavljanje -3

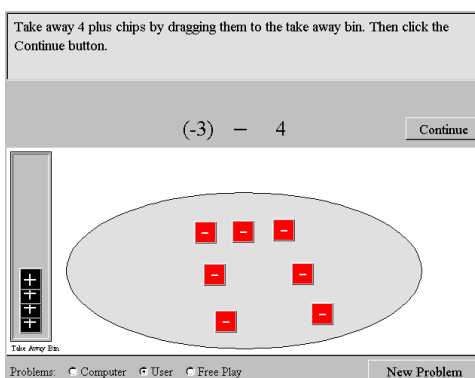
Ovde koristimo osobinu da se svaki crni i crveni žeton potiru. U tom slučaju je lako „stvoriti” četiri crna žetona: jednostavno dodamo još po četiri crna i četiri crvena, pri čemu predstavljeni broj i dalje ostaje -3 .



Slika 6. Dodavanje 4 crvena i 4 crna žetona

⁶http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_162_g_3_t_1.html?from=category_g_3_t_1.html

Sada možemo da sklonimo 4, tj. četiri crna, što znači da ostaje sedam crvenih žetona, pa je odgovor -7 (konačno rešenje nije predstavljeno, ali se jasno vidi sa slike).



Slika 7. Sklanjanje 4 crna žetona

U slučaju oduzimanja negativnog broja, koji je učenicima često naročito težak, pogotovo konceptualno ([3]), važi isti princip: ako hoćemo na primer da oduzmemo $3 - (-4)$, onda počnemo s 3 crna žetona, pravimo četiri crno-crvena para, sklanjamo 4 crvena žetona, što znači da nam ostaje ukupno 7 crnih, pa je odgovor isti kao i da smo sabrali 3 i 4.

Zašto je to tako? Odgovor sledi iz postupka: kad oduzimamo -4 , prvo dodamo 4 i -4 . Onda, kad otklonimo -4 , ostavljamo 4 koji se dodaje prethodnom broju. Ovaj postupak se generalizuje: kad se oduzima negativan broj, prvo se stvaraju pozitivno-negativni parovi, pa kad se negativni članovi tih parova otklone (tj. oduzmu negativni brojevi), za njima ostaju njihovi pozitivni parovi (tj. pozitivni brojevi). Znači, oduzimanje negativnog broja isto je kao i sabiranje pozitivnog.

Korišćenje žetona na prvi pogled može da deluje komplikovano. I zaista, treba vremena da bi se naviklo na pravljenje parova pozitivnih i negativnih brojeva. Ovaj model, kao i ostali modeli i pristupi nastavi celih brojeva ima mana i ne garantuje potpuno razumevanje ([4], [10]). Međutim, bitno je napomenuti njegove prednosti. Kao prvo, njime se na možda najjednostavniji način objašnjava zašto je oduzimanje negativnog broja isto kao i sabiranje pozitivnog. Drugo, za učenike kojima je teško da pravilno zapamte pravila, ovaj pristup obezbeđuje sigurnu tehniku sabiranja i oduzimanja celih brojeva, koju mogu da koriste dok bolje ne savladaju proceduru. Treće, način na koji se njime uvodi sabiranje i oduzimanje celih brojeva nimalo se ne razlikuje od tog na koji su se brojevi sabirali i oduzimali u 1. razredu osnovne škole. Na ovaj način se podvlači činjenica da celi brojevi nisu potpuno novi, već su samo proširenje prirodnih brojeva, i to se odnosi ne samo na same brojeve nego i na operacije na njima.

3.3. Rešavanje jednačina

Još jedna oblast matematike u kojoj učenici često greše, pogotovo kad tek počinju da je uče, jeste rešavanje jednačina. Na primer, često se može videti sledeći postupak:

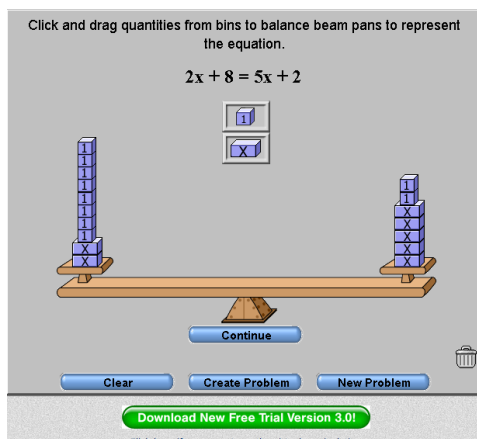
$$\begin{aligned}
 2x + 8 &= 5x + 2 \\
 2x + 8 - 2 &= 5x + 2 - 2 \\
 8 &= 5x \\
 8/5 &= x
 \end{aligned}$$

Ovde je problem u tome što učenik/-ca u prelazu iz drugog u treći red obavlja sledeću operaciju: $2x - 2 = 0$, kombinujući broj i promenljivu, verovatno jer ne razume razliku između njih.

Postoji više izvora grešaka i nerazumevanja u slučaju jednačina. Kao prvo, učenici često ne razumeju značenje promenljivih. Zbunjuju ih pre svega slova, jer su navikli da koriste brojeve u matematici. Naročito ih zbunjuje to što kod rešavanja jednačina slovo predstavlja samo jedan broj, rešenje te jednačine, a kod izraza kao što je $3x + 5$, x može da predstavlja bilo koji broj ([12]). Osim toga, razumevanje znaka jednakosti je problematično, a

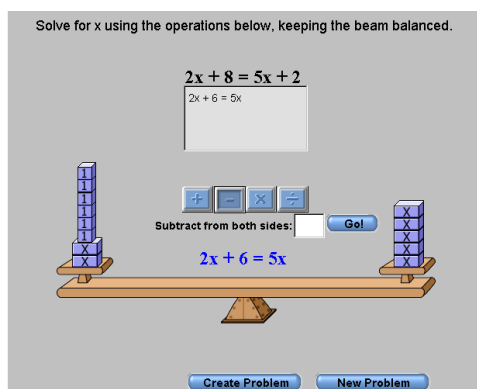
pogotovu je otežano korišćenjem kalkulatora, koji znak = tretiraju kao proces, a ne relaciju ([12]). U rešavanju jednačina ključno je razumevanje jednakosti, jer je bitno da dve strane jednačine budu u ravnoteži tokom celog procesa. Zato je razumljivo što je čest model za rešavanje jednačina upravo vaga⁷, čije dve strane predstavljaju dve strane jednačine, i koje moraju da se održavaju u ravnoteži dok se pojednostavljaju obe strane.

Da ilustrujemo korišćenje modela, pogledaćemo jednačinu od malopre, $2x + 8 = 5x + 2$. Ona se predstavlja na sledeći način:



Slika 8. Predstavljanje jednačine

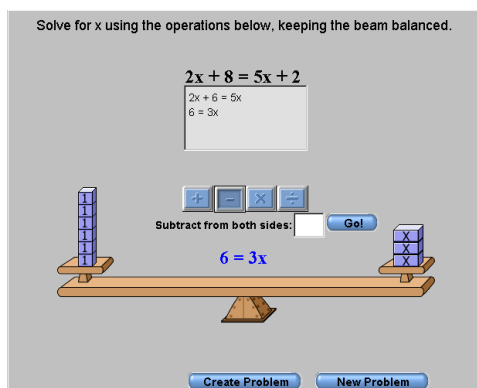
Postoji više načina da se ova jednačina reši; bitno je samo da se obavljaju iste operacije, na primer da se otklanjaju iste količine s obe strane. Prvo možemo da otklonimo dve jedinice s obe strane:



Slika 9. Oduzimanje 2 s obe strane

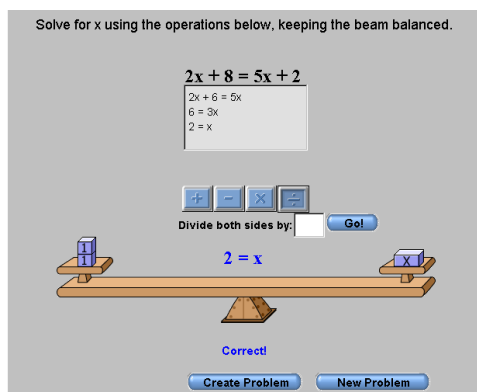
Takođe je zajedničko obema stranama $2x$, pa i to otklanjamo:

⁷http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_201_g_3_t_2.html?open=instructions&from=category_g_3_t_2.html



Slika 10. Oduzimanje $2x$

Na kraju više nemamo ništa zajedničko, ali možemo da vidimo da svakom od tri x -a odgovaraju dve jedinice, što predstavljamo deljenjem sa 3:



Slika 11. Deljenje s 3 i konačno rešenje

Rezultat je $x = 2$.

Zbog načina na koji je model napravljen, nemoguće je kombinovati brojeve i promenljive, pa se na taj način uči da su brojevi i promenljive različiti. Takođe vaga podseća da dve strane jednačine uvek moraju biti istih vrednosti, i da se uvek iste operacije obavljaju na obe strane jednačine. Ako učenici tek uče da rešavaju jednačine, nije bitno da ih reše na najbrži mogući način. Tako će oni ovu jednačinu možda rešiti u više koraka, na primer tako što će na primer oduzimati 1 s obe strane više puta, tj.

$$2x + 8 = 5x + 2 \Leftrightarrow 2x + 7 = 5x + 1 \Leftrightarrow 2x + 6 = 5x,$$

i onda će oduzimati x s obe strane:

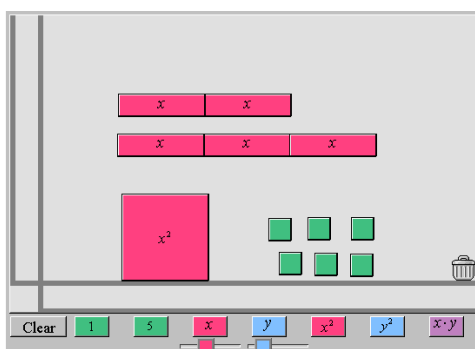
$$2x + 6 = 5x \Leftrightarrow x + 6 = 4x \Leftrightarrow 6 = 3x,$$

da bi na kraju deljenjem dobili rešenje $2 = x$. Posle nekoliko interakcija s modelom, učenici će otkriti prečice, i otkriti da zadatak može da se reši na način koji smo malopre opisali.

3.4. Rastavljanje kvadratnih trinoma na činioce

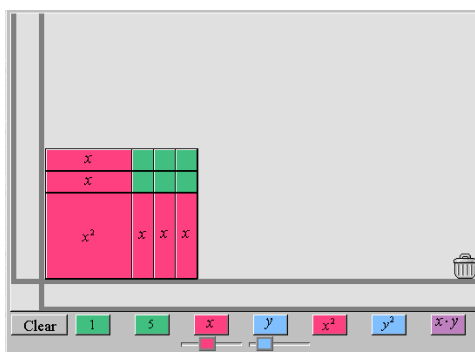
Rastavljanje trinoma na činioce je još jedan algoritamski proces koji je lako zapamtiti, ali ga je lako i zabaviti ili pogrešno upotrebiti. Da bi ga bolje zapamtili, bilo bi korisno za učenike da razumeju šta zapravo znači rastaviti polinom na činioce i zašto je trinom $ax^2 + bx + c$ rastavljen na činioce jednak $a(x - x_1)(x - x_2)$, gde je $x_1 + x_2 = -b/a$ i $x_1x_2 = c/a$ (za $a \neq 0$). U tome pomaže geometrijski model, koji se zasniva na ideji

da se proizvod može predstaviti putem površine pravouganika. Materijali na kojima je virtuelni model zasnovan zovu se *algebra tiles*, ili bukvalno prevedeno, algebarske pločice, i mogu se koristiti i za rešavanje jednačina⁸. Rastavljanje kvadratnih trinoma na činioce ekvivalentno je preuređivanju pločica koje predstavljaju dati binom u pravougaonik. Pogledajmo na primer $x^2 + 5x + 6$. Prvo postavimo sve odgovarajuće pločice:



Slika 12. Predstavljanje trinoma

Posle možda jednog ili dva pokušaja, dolazimo do zaključka da je pravougaonik moguće napraviti kad podelimo pet pločica s vrednošću x na dve i tri, jer u tom slučaju nam tačno nedostaje 6 jediničnih pločica da bismo dobili pravougaonik, čije su dimenzije $x + 2$ i $x + 3$. Znači, $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$, jer i jedan i drugi izraz predstavljaju površinu pravougaonika.



Slika 13. Razloženi binom

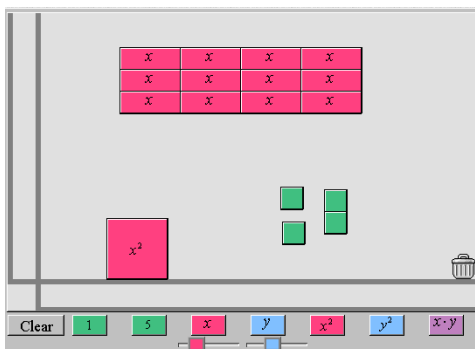
Ovaj slučaj se može generalizovati na opšti binom oblika $x^2 + bx + c$: jedini način da se napravi pravougaonik je u slučaju kad jedinične pločice (kojih ima c) mogu da se rasporede u pravougaonik, zbir čijih dimenzija mora biti jednak ukupnom broju x pločica (koji je b). Znači, ako su dimenzije malog pravougaonika u i v , onda je $uv = c$ jer je to ukupan broj jediničnih pločica, $u + v = b$ jer je to ukupan broj x pločica, a $x^2 + bx + c = (x + u)(x + v)$, jer je to površina velikog pravougaonika. Praksa je da kvadratne trinome rastavljamo na činioce kao $(x - x_1)(x - x_2)$, gde su x_1 i x_2 nule tog binoma, što znači da je $u = -x_1$, $v = -x_2$, odnosno $x_1x_2 = (-v)(-v) = c$, a $x_1 + x_2 = (-u) + (-v) = -b$. Komplikovanije je raditi s opštim slučajem $ax^2 + bx + c$, međutim ideja je ista, jer treba napraviti pravougaonik i očitati njegove dimenzije. Čitaocima ostavljamo ovaj slučaj za vežbu.

Mana našeg modela je ta što dozvoljava samo sabiranje a ne i oduzimanje, i nemoguće je predstaviti $-x$ ili $-x^2$. Taj problem bi se rešio fizičkim umesto virtuelnim modelom ili dijagramima, tako što bi se uvele dve strane pločica u različitim bojama, gde bi jedna predstavljala pozitivne a druga negativne monome. U tom slučaju bismo morali, kao i kod celih brojeva, da razmišljamo o pozitivno-negativnim parovima pločica. Takođe je moguće i

⁸http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_189_g_3_t_2.html?open=activities&from=category_g_3_t_2.html

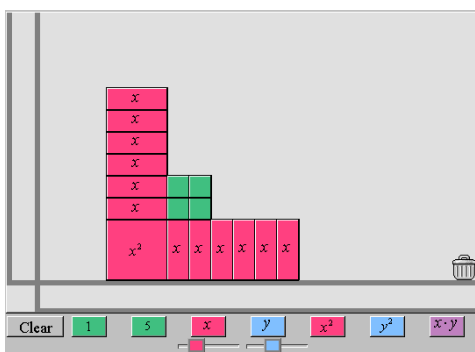
koristiti model samo u početnoj fazi učenja o rastavljanju polinoma na činioce, i koristiti samo jednostavnije primere. Kad se napravi veza između algoritma i modela, onda model nije više neophodan.

Ovaj model je koristan i za dopunu kvadrata. Tu se opet učenicima daje pravilo teško za pamćenje: ako imamo $x^2 + bx + c$, da bismo dopunili kvadrat, moramo da izračunamo $b/2$, da bismo dobili $(x + b/2)^2 + (c - b^2/4)$. Učenicima verovatno nije jasno zašto se srednji sabirak deli na pola i onda kvadrira. Pogledajmo kako to izgleda na modelu, recimo na $x^2 + 12x + 4$. U tom slučaju želimo da napravimo kvadrat od ponuđenih delova. Da bismo dobili kvadrat, moramo $12x$ da rasporedimo jednako, što znači da moramo da podelimo $12/2$ da bismo dobili $6x$ s obe strane.



Slika 14. Binom koji treba dopuniti do kvadrata

Ostalo je lako, da bismo dobili kvadrat, moramo da dodamo 36 jediničnih kvadratića, odnosno 32 preko toga što već imamo (nije pokazano na slici).



Slika 15. Nedopunjen kvadrat

Znači,

$$(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 4 + 32,$$

ili

$$x^2 + 12x + 4 = (x + 6)^2 - 32.$$

Iz ovog primera se vidi da je dopuna kvadrata geometrijski bukvalno to: dopuna kvadrata. Da bismo dobili geometrijski kvadrat, moramo da podelimo ukupan broj x pločica (kojih je b) na dva jednaka dela. Otuda dolazi $b/2$ iz formule. Taj kvadrat bi imao dimenzije $x + b/2$, pa bi mu površina bila $x^2 + bx + (b/2)^2$. Mi imamo $x^2 + bx + c$, odnosno $(x + b/2)^2 + (c - b^2/4)$, što i formula kaže.

4. Zaključak

Učenje matematike uz pomoć vizuelnih i fizičkih modela pomaže boljem i dubljem razumevanju matematičkih pojmova, u svim granama matematike i na svim nivoima.

Učenicima treba pružiti priliku da sami otkrivaju matematičke ideje, formule i algoritme. Ovo se može postići uz pomoć kompjuterskih programa kao što je ovaj koji smo upravo imali priliku da vidimo, ali i uz pomoć crteža, kao i papira, kartona, makaza, i raznih drugih svima dostupnih materijala.

Bibliografija

- [1] **D. J. Briars, L. B. Resnick.** Standards, assessments and what else? The essential elements of standards-based school improvement. *Technical report, Los Angeles: Center for the Study of Evaluation, Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing, California University, 2000.*
- [2] **W. M. Carroll.** Results of third-grade students in a reform curriculum on the Illinois State Mathematics Test. *Journal for Research in Mathematics Education, 1997, 28, 237 - 242.*
- [3] **C. Y. Charalambous, H. C. Hill, R. N. Mitchell.** Two negatives don't always make a positive: Exploring how limitations in teacher knowledge and the curriculum contribute to instructional quality. *Journal of Curriculum Studies, 2012, 44, 489 - 513.*
- [4] **Freer Weiss, D. M.** Keeping It real: the rationale for using manipulatives in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School, 2005, 11, 238 - 242.*
- [5] **J. Gregg, D. U. Gregg.** A context for integer computation. *Mathematics Teaching in the Middle School, 2007, 13, 46 -50.*
- [6] **G. A. Ponce.** It's all in the cards: adding and subtracting integers. *Mathematics Teaching in the Middle School, 2007, 13, 10 -17.*
- [7] **L. B. Resnick, P. Nesher, F. Leonard, M. Magone, S. Omanson, I. Peled.** Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 1989, 20, 8 - 27.*
- [8] **J. Riordan, P. Noyce.** The impact of two standards-based mathematics curricula on student achievement in Massachusetts. *Journal for Research in Mathematics Education, 1997, 28, 368-398.*
- [9] **J. Sowder.** Place value as the key to teaching decimal operations. *Teaching Children Mathematics, 1997, 3, 448-453.*
- [10] **M. Stephan, D. Akyuz.** A proposed instructional theory for integer addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 2012, 43, 428 - 464.*
- [11] **B. Ubuz, B. Yayan.** Primary teachers' subject matter knowledge: decimals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2010, 41, 787 - 804.*
- [12] **J. A. Van de Walle, K. S. Karp, J. M. Bay-Williams, J. Wray, N. Rigelman.** Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally: The Professional Development Edition for Mathematics Coaches and Other Teacher Leaders, Eighth Edition. *Pearson, Boston, MA, 2013.*

Potencijal jednog zadatka izveden na temelju Talesovog teorema o proporcionalnim dužinama

Nives Baranović

Filozofski fakultet u Splitu

e-mail: njozic@ffst.hr

Apstrakt. Talesov teorem o proporcionalnim dužinama u nastavi matematike uvodi se pred kraj osnovne škole, najčešće tako da se do formalnog zapisa dolazi intuitivno na temelju mjerenja i uspostavljanja odgovarajućih proporcija, bez strogo dokazivanja, a zatim se primjena teorema uvježbava na odgovarajućim, ali vrlo sličnim zadacima. Nakon toga, ovisno o vrsti srednje škole, Talesov teorem i njegov obrat uvode se (u 1. razredu) formalno, ali na različite načine te se formalno i dokazuje.

Međutim, Talesov teorem iako naočigled jasan, učenicima ostaje nejasan te iako važan, vrlo brzo ga zasjene teoremi o sličnosti trokuta, koji postaju dominantno sredstvo u rješavanju brojnih zadataka. Događa se da pojedini učenici i Talesov teorem dokazuju primjenom sličnosti te se brzo nađu u začaranom krugu razmišljanja Talesovog teorema i teorema o sličnosti trokuta.

Pri rješavanju brojnih zadataka često se naglasak stavlja na određivanje neke veličine iz postavljene proporcije, a zatim se nižu slični zadaci u svrhu uvježbavanja istog. Umjesto da se, kada je jedan zadatak već riješen, sagledavaju i druge mogućnosti istog zadatka, kao i zadavanje istog zadatka na općenitijoj razini kako bi se crpilo što više njegovih potencijala, a time različita znanja povezivala u funkcionalnu cjelinu.

Cilj ovog rada je ukazati na određene nejasnoće koje se javljaju pri obradi Talesovog teorema te usmjeriti pozornost na mogućnost višestrukog iscrpljivanja jednog zadatka.

Ključne riječi: Talesov teorem; obrat Talesovog teorema; Euklidov dokaz; potencijal zadatka.

1. Uvod

Neosporna je činjenica da učenici Talesov teorem o proporcionalnim dužinama (dalje u radu Talesov teorem) i njegov obrat ne usvajaju na potrebnoj razini razumijevanja. No, jeste li se zapitali (vjerujem da jeste) zašto mnogi učenici bolje savladaju i u zadacima vještije primjenjuju teoreme o sličnosti trokuta u odnosu na Talesov teorem, a teoremi o sličnosti trokuta dokazuju se upravo na temelju Talesovog teorema i njegovog obrata?

Mnogi nastavnici smatraju da je Talesov teorem o proporcionalnim dužinama i njegov obrat učenicima toliko apstraktan da ga oni ne mogu u potpunosti razumjeti u dobi kada se obrađuje u nastavi matematike. Polazeći od te pretpostavke, neki nastavnici se manje zadržavaju na obradi Talesovog teorema, a ima i onih

kojima učenicima prvo obrade teoreme o sličnosti trokuta, a zatim se kratko osvrnu na Talesov teorem¹. No, zašto je to tako?

Da bi uopće mogli raspravljati o Talesovom teoremu i pri tome se međusobno razumjeti, prvo treba razjasniti o čemu govori taj teorem i kako on glasi. Naime, iskazivanje teorema dopušta određenu slobodu, a kada se isti teorem iskazuje u različitim kontekstima onda on poprima i novo ruho, a ponekad se mijenjaju i određeni uvjeti kao i njihove posljedice.

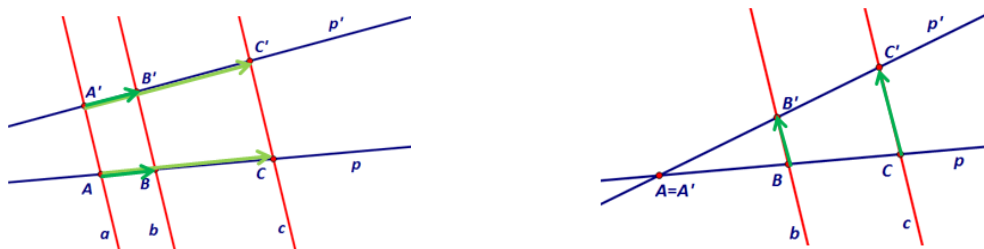
Povijesno gledano, postoje preklapanja ali i neslaganja različitih povjesničara matematike oko postignuća koja se pripisuju grčkom matematičaru Talesu iz Mileta. S vremenom, važni teoremi dobivaju i ime po njemu upravo radi naglašavanja važnosti tog teorema, ali i zbog potrebe referiranja na povijesne okolnosti u kojima je taj teorem nastao. Iz istih razloga, tek krajem 19. st., teorem o proporcionalnim dužinama prvi put se pojavljuje pod nazivom Talesov teorem u udžbenicima iz geometrije, ali u nešto drugačijem ruhu od izvornog zbog razvoja projektivne geometrije (vidjeti [8]).

Različiti konteksti unutar kojih se uvodi Talesov teorem usmjeravaju na različite pristupe obradi tog teorema što se odražava i na različite načine primjene tog teorema pri rješavanju zadataka (vidjeti [6]). Stoga je cilj ovog rada bio istražiti u kojim se sve oblicima u različitim udžbenicima javlja iskaz Talesovog teorema, u kojoj mjeri se mijenja originalni teorem koji se naziva tim imenom te moguće uzroke nejasnoća i nedovoljne primjenjivosti tog teorema pri rješavanju zadataka.

2. O čemu govori i kako glasi Talesov teorem?

Pojednostavljeno rečeno, Talesov teorem i njegov obrat povezuju paralelnost pravaca i omjer dužina, tj. Talesov teorem omogućava provjeravanje proporcionalnosti određenih dužina na temelju paralelnosti određenih pravaca (ili dužina), a njegov obrat omogućava provjeravanje paralelnosti pravaca (ili dužina) na temelju proporcionalnosti određenih dužina. Pregledavanjem nekoliko vrsta različitih udžbenika ovisno o uzrastu i vrsti škole (vidjeti [1], [2], [3], [5], [7], [9]), uočeno je da se iskaz Talesovog teorema i njegovog obrata javlja u različitim oblicima: u formi vektora, paralelne projekcije, pramena pravaca, kuta ili trokuta, ali ipak najčešće u formi kuta. Razmotrit ćemo ukratko bitne karakteristike svakog od navedenih oblika, uz napomenu da iskazi navedeni u daljnjem radu nisu preuzeti doslovno već su stilski ujednačeni radi lakšeg praćenja i uspoređivanja.

Talesov teorem u formi vektora (u polju racionalnih brojeva, \mathbb{Q}): Ako različite komplanarne pravce a, b i c , $a \parallel b$, sijeku različiti pravci p i p' redom u točkama A, B, C i A', B', C' te ako za neki $k \in \mathbb{Q}$ vrijedi $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$, onda vrijedi ekvivalencija: $b \parallel c \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{A'C'}$ (slika 1, lijevo).



Slika 1. Talesov teorem u formi vektora

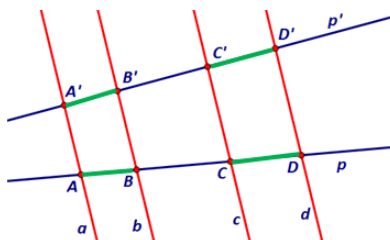
¹Zaključak donesen na temelju višegodišnjeg razgovora sanastavnicima matematike u Hrvatskoj, Sloveniji i Srbiji.

Ako je uz prethodni $A = A'$, onda iz $b \parallel c$ ili $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{A'C'}$ slijedi $\overline{BB'} = k \cdot \overline{CC'}$ (slika 1, desno). Za prelazak na polje realnih brojeva, \mathbb{R} , potreban je još i aksiom neprekidnosti (radi množenja vektora bilo kojim realnim brojem).

Pojednostavljeno, Talesov teorem u ovoj formi govori da paralelnost pravaca čuva kolineranost vektora i obratno, ako imamo dva para kolinearnih vektora s istim koeficijentom kolinearosti, onda su pravci određeni njihovim krajnjim točkama paralelni. Dakle, ulogu proporcionalnosti dužina ovdje preuzima kolinearost vektora te se umjesto rada s proporcijama dužina operira s vektorima, što je sasvim drugačije matematičko okruženje. Iskaz je dan u obliku ekvivalencije.

Uočimo da se kolinearost vektora u općem slučaju (slika 1, lijevo) razmatra samo na jednom pravcu, dok se u posebnom slučaju, tj. kada se pravci p i p' sijeku (slika 1, desno) kolinearnost može razmatrati i na paralelnim pravcima, a kolinearost vektora na različitim pravcima p i p' nije moguće razmatrati, osim u slučaju kada su i oni paralelni. Nadalje, u općem slučaju, obrat teorema je osiguran polaznim uvjetom da je $a \parallel b$ jer da tog uvjeta nema, onda obrat teorema ne bi vrijedio. Konačno, u dokazu ovog teorema koriste se svojstva zbrajanja vektora, množenja vektora racionalnim (realnim) brojem te svojstvo da se paralelnim projiciranjem jednaki vektori preslikavaju u jednake vektore.

Talesov teorem u formi paralelne projekcije: Ako su A, B, C, D različite točke na pravcu p , a A', B', C', D' odgovarajuće točke na pravcu p' dobivene paralelnom projekcijom, onda je: $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}$ (slika 2).



Slika 2. Talesov teorem u formi paralelne projekcije

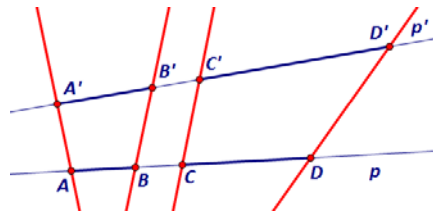
Zamjenom unutarnjih članova proporcije dobiva se $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|}$ (slika 2). Drugim riječima, paralelna projekcija čuva omjere dužina.

Uočimo da su omjeri dužina dani za disjunktne dužine koje se nalaze na istom pravcu te se zbog svojstava razmjera, mogu promatrati i odgovarajuće dužine na različitim pravcima, no odsječci na paralelnim pravcima se ne razmatraju (osim kada su pravci p i p' paralelni). Dokaz ovako iskazanog Talesovog teorema provodi se najprije za disjunktne dužine, a ukoliko dužine nisu disjunktne, uvijek se može naći dužina koja je s njima disjunktna pa se na temelju svojstva tranzitivnosti izvodi polazni oblik.

Ova forma teorema naziva se još i opći Talesov teorem jer nema nikakvih uvjeta na pravce p i p' te **obrat** ovako postavljenog teorema **ne vrijedi**. Naime, na temelju kontra primjera jednostavno se provjerava da

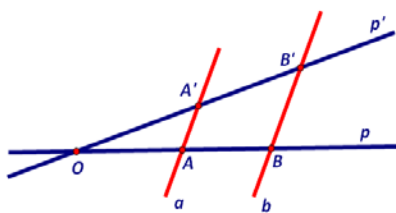
jednakost omjera dužina ne garantira paralelnost pravaca koji su određeni njihovim krajnjim točkama. Na primjer ako za opisane dužine uzmemo dužine čije suduljine: $|AB| = 2\text{cm}$, $|CD| = 4\text{cm}$ te $|A'B'| = 3\text{cm}$, $|C'D'| = 6\text{cm}$, vidljivo je da se radi o proporcionalnim dužinama, tj. vrijedi: $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}$.

Međutim, ako ove dužine smjestimo na pravce p i p' , onda pravci određeni krajnjim točkama tih dužina ne moraju biti paralelni (slika 3). No, ako su prva dva pravca paralelna, onda će biti i svi ostali. Iz tog razloga je u prethodno iskazanoj formulaciji postavljen uvjet $a \parallel b$ kako bi se mogla razmatrati ekvivalencija.



Slika 3. Obrat Talesovog teorema u formi paralelne projekcije

Talesov teorem u formi pramena pravaca: Neka su p i p' dva pravca ravnine koji se sijeku u točki O . Ako su oni presječeni paralelnim pravcima a i b kao na slici 4, onda vrijedi:



$$(1) \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OB'|},$$

$$(2) \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|},$$

$$(3) \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}.$$

Slika 4. Talesov teorem u formi pramena pravaca

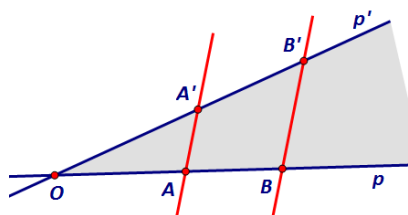
Pojednostavljeno, paralelni pravci na pravcima nekog pramena odsijecaju proporcionalne dužine (u ovom slučaju promatramo dva pravca pramena). Uočimo da relacija (1) govori o omjerima dužina na istom pravcu počevši od točke O , relacija (2) govori o omjerima odsječaka na istom pravcu, a relacija (3) govori o omjerima odsječaka koji nastaju na paralelnim pravcima. Posebno je važno uočiti da se paralelni pravci mogu nalaziti s različite strane točke O te će relacije i dalje vrijediti.

Dokaz teorema provodi se na temelju svojstva paralelograma te svojstva paralela, tj. ako paralelni pravci na jednom pravcu pramena odsijecaju sukladne dužine, onda te paralele odsijecaju sukladne dužine i na svim drugim pravcima istog pramena.

Obrat teorema: Neka su p i p' dva pravca ravnine koji se sijeku u točki O . Ako ih pravci a i b sijeku redom u točkama A, A', B, B' (slika 4) tako da vrijedi (1), (2) i (3), onda su pravci a i b paralelni.

Obrat teorema je istinit, a dokazuje se najčešće primjenom upravo Talesovog teorema. No, iako je obrat teorema istinit, vrlo rijetko se ove dvije implikacije navode u obliku ekvivalencije, što bi bilo prikladno navesti nakon što se obje implikacije temeljito obrade i dokažu. Naime, nastavna praksa pokazuje da učenici nepravilno koriste ekvivalenciju u primjenama teorema te se često umjesto na obrat pozivaju na polaznu implikaciju.

Talesov teorem u formi kuta: Paralelni pravci a i b na krakovima kuta $\angle pOp'$ odsijecaju proporcionalne dužine (slika 5), tj. vrijedi:



$$(1) \quad \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OB'|},$$

$$(2) \quad \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|},$$

$$(3) \quad \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}.$$

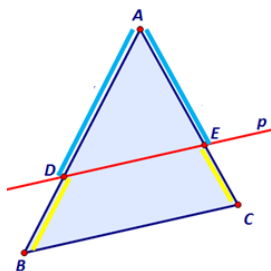
Slika 5. Talesov teorem u formi kuta

Obrat teorema: Ako pravci a i b na krakovima kuta $\angle pOp'$ odsijecaju proporcionalne dužine (slika 5), tj. ako vrijede relacije (1), (2) i (3), onda su ti pravci paralelni.

Primijetimo da se i relacije i slika (posebno ako nije obojana nutrina promatranog kuta) podudaraju sa onima u iskazu danom u formi pramena pravaca koji se sijeku. No, bez obzira na to, kontekst razmatranja je drugačiji pa se ipak radi o različitim formulacijama.

S obzirom da se u tekstu navodi da *paralelni pravci na krakovima kuta odsijecaju proporcionalne dužine*, prirodno bi bilo u ovoj formulaciji promatrati samo omjere iskazane u relaciji (2), posebno što se ostale relacije mogu izvesti iz ove tvrdnje. Osim toga, dužine koje se razmatraju u relaciji (3) uopće nisu sadržane u krakovima kuta pa je ovako postavljena formulacija neprecizna.

Talesov teorem u formi trokuta: Pravac paralelan jednoj stranici trokuta dijeli druge dvije stranice trokuta na proporcionalne dijelove (slika 6), tj. vrijedi: $p \parallel BC \Rightarrow \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$.



Slika 6. Talesov teorem u formi trokuta

Obrat teorema: Pravac koji dijeli dvije stranice trokuta na proporcionalne dijelove paralelan je s trećom stranicom, tj. $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|} \Rightarrow p \parallel BC$.

U ovoj formi teorema ističu se omjeri samo onih dijelova (dužina) koji nastaju kada pravac p presiječe stranice: na stranici \overline{AB} dobiveni dijelovi su dužine \overline{AD} , \overline{DB} , a na stranici \overline{AC} dobiveni dijelovi su dužine \overline{AE} , \overline{EC} pa je prirodno razmatrati omjere tih dužina. Ostale proporcije (izvedene u sljedećoj temi) slijede neposredno, pa ih nije niti dobro niti potrebno isticati istodobno. Naprotiv, tek kada se shvati koncept ovog iskaza, njegov smisao i dublje razumijevanje može se temeljiti na izvođenju ostalih proporcija. Uvođenje

više različitih proporcija istodobno može stvoriti konfuziju i nesigurnost učenika što potencijalno stvara nerazumijevanje te nemogućnosti pravilne primjene ovog teorema i njegovog obrata u rješavanju zadataka.

Dokaz ovog teorema najčešće se izvodi na temelju sukladnosti trokuta, pri čemu se dobiveni odsječci dijele na određeni broj dužina jednakih duljina, a dokaz obrata teorema najčešće se izvodi primjenom Talesovog teorema. S obzirom da su obje implikacije istinite, iskazi se mogu formulirati u obliku ekvivalencije: *Pravac dijeli dvije stranice trokuta na proporcionalne dijelove ako i samo ako je paralelan s trećom stranicom*, tj.

$$p \parallel BC \Leftrightarrow \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}. \text{ Ova forma teorema se rijetko javlja u vektorskom obliku.}$$

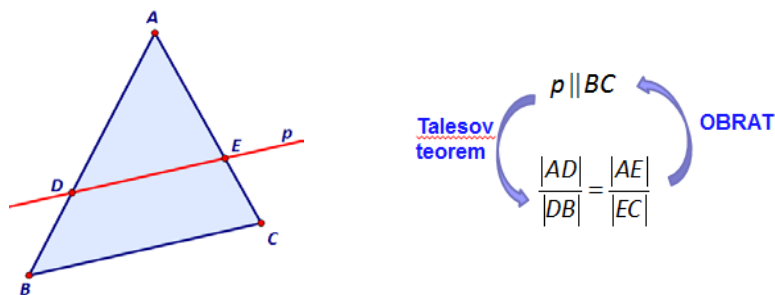
Zadnja forma teorema je bitno drugačija od prethodnih formi: u njoj je temeljna figura trokut, koja je statična i omeđena, dok su u ostalim formama temeljne figure pravci (polupravci), koji su neomeđeni. U svim iskazima razmatraju se omjeri dužina (kolinearnost vektora) na istom pravcu dok se ostale proporcije razmatraju ovisno o odabranom kontekstu. Kada se razmatraju omjeri stranica polaznog trokuta i odgovarajućih stranica manjeg trokuta onda se proporcija može graditi na temelju homotetičnosti tih trokuta pa se za ovaj pristup koristi naziv *homotetični pristup*. Kada se razmatraju omjeri dužina sa različitih stranica (pravaca), a te dužine su nastale paralelnim projiciranjem, onda se za taj pristup koristi naziv *projektivni pristup* (vidjeti [6]).

Iskaz u formi trokuta najbliži je izvornom iskazu teorema o proporcionalnim dužinama (slijedi u nastavku) koji se pripisuje Talesu i mogli bismo reći da je samo stilski dotjeran.

3. Originalni teorem o proporcionalnim dužinama

Tijekom povijesti, teorem o proporcionalnim dužinama javljao se u različitim oblicima, a oni su uvjetovani različitim matematičkim okruženjem u kojem se teorem opisivao. Najraniji zapis koji nam je dostupan o ovom teoremu nalazi se u Euklidovim *Elementima* (Knjiga VI., propozicija 2, vidjeti [2]). Iako ne postoje sačuvani originalni dokumenti po kojima bi se ovaj teorem pripisao grčkom matematičaru Talesu, na temelju zapisa matematičara koji su živjeli nakon njega, ističe se da je Tales bio najzaslužniji pa se u modernom (posebno od sredine 19. st.) ovaj teorem ustalio pod nazivom Talesov teorem (vidjeti [4], [8]). Iskaz izvornog teorema ovdje se ne prenosi doslovno već u duhu današnjeg jezika, kojim se služimo, ali tako da se smisao izrečenog ne mijenja.

Originalni Talesov teorem: Ako je u trokutu povučen pravac paralelno jednoj od stranica, taj pravac siječe ostale stranice proporcionalno; i ako su stranice trokuta presječene proporcionalno, pravac koji spaja točke sjecišta paralelan je preostaloj stranici trokuta (slika 7).



Slika 7. Originalni Talesov teorem

Dakle, izvorni teorem daje samo jednu proporciju, koja se razmatra u dvije implikacije (ne u obliku ekvivalencije). Uspoređujući ovu formu sa svim ostalim formama teorema, koje su prikazane iznad, može se uočiti sljedeće:

- U izvornom iskazu, temeljna figura koja se koristi je trokut, a ne pravci čime se indirektno sugerira da se točka D nalazi između točaka A i B , a točka E između točaka A i C . Pri korištenju pravaca to ne mora nužno biti tako.
- U postavljenoj proporciji razmatraju se samo dužine koje prirodno nastaju kao odsječci na jednoj stranici trokuta, a sve ostalo se izvodi poslije na temelju te relacije i svojstava razmjera. Za razliku od toga, u današnjim udžbenicima često se navodi više relacija istodobno čime se nepotrebno stvaraju nejasnoće i otežava razumijevanje.

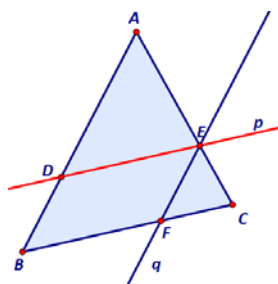
U starogrčkoj matematici, u doba Talesa, Pitagore i Euklida rad sa razlomcima, omjerima i proporcionalnim veličinama bio je dosta zastupljen te su s njima vješto operirali. Čak se za Pitagorejce veže misao kako *omjeri upravljaju svemirom*. Stoga je prirodno da su iz postavljene implikacije razmatrali koja sve svojstva mogu izvesti. Ako u polaznoj proporciji $p \parallel BC \Rightarrow \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$ zamijenimo unutarnje članove dobiva

se druga proporcija: $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|} \Leftrightarrow \frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|DB|}{|EC|}$, čime se dobiva omjer odsječenih dužina na različitim

stranicama. Ako pak polaznu proporciju zapišemo drugim redoslijedom (gledajući od vrhova B i C) te lijevoj i desnoj strani jednakosti dodamo 1, dobiva se treća proporcija:

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|} \Leftrightarrow \frac{|BD|}{|DA|} = \frac{|CE|}{|EA|} \Leftrightarrow \frac{|BD|}{|DA|} + 1 = \frac{|CE|}{|EA|} + 1 \Leftrightarrow \frac{|BA|}{|DA|} = \frac{|CA|}{|EA|},$$

čime se dobiva omjer stranica trokuta ABC i dobivenog trokuta ADE . Ako točkom E postavimo pravac q paralelan sa stranicom \overline{AB} , koji siječe stranicu \overline{BC} u točki F , dobiva se paralelogram $BFED$ u kojem vrijedi: $|BF| = |DE|$, $|BD| = |FE|$ (slika 8).



Slika 8. Trokut s paralelom q

S obzirom da se točka E nalazi između točaka A i C , treću proporciju malo transformiramo:

$$\frac{|BA|}{|DA|} = \frac{|CA|}{|EA|} \Leftrightarrow \frac{|BA|}{|DA|} = \frac{|CE| + |EA|}{|EA|} \Leftrightarrow \frac{|BA|}{|DA|} = \frac{|CE|}{|EA|} + 1$$

te primjenom Talesovog teorema s obzirom na paralelu q , dobivamo četvrtu proporciju:

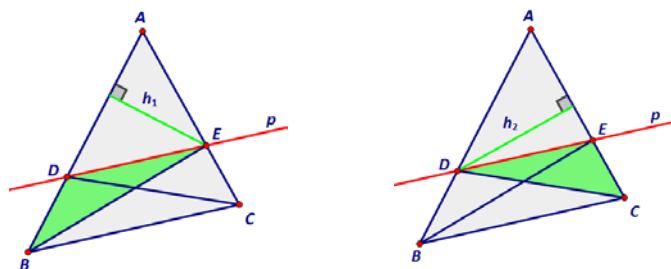
$$\frac{|BA|}{|DA|} = \frac{|CE|}{|EA|} + 1 \Leftrightarrow \frac{|BA|}{|DA|} = \frac{|CF|}{|FB|} + 1 \Leftrightarrow \frac{|BA|}{|DA|} = \frac{|CB|}{|FB|} \Leftrightarrow \frac{|BA|}{|DA|} = \frac{|CB|}{|ED|},$$

čime se dobiva omjer paralelnih stranica trokuta ABC i dobivenog trokuta ADE . Iz navedenog se vidi da je dovoljno postaviti samo prvu proporciju jer se iz nje mogu izvesti sve ostale proporcije. No, kada se izvedu sve ostale proporcije onda se ravnopravno mogu koristiti u rješavanju zadataka ili dokazivanju nekih drugih tvrdnji.

Dakle, izvorni teorem o proporcionalnim dužinama, danas već uvriježeno poznat pod nazivom Talesov teorem, govori samo o omjerima odsječenih dužina na stranicama trokuta, i to onih dužina koje se nalaze na istoj stranici, a sve ostale proporcije su različite varijante na temu. Kada se iskaz tog teorema formuliра unutar drugog matematičkog okruženja onda se prilagođava sadržajima tog okruženja što neminovno uvjetuje različite načine dokazivanja i primjenu izvedenog.

3.1. Euklidov dokaz Talesovog teorema i njegovog obrata

Euklidov dokaz Talesovog teorema temelji se na činjenici da se površine trokuta jednakih visina odnose kao i pripadne osnovice. Dakle, neka je dan trokut ABC i pravac $p \parallel \overline{BC}$ (slika 9).

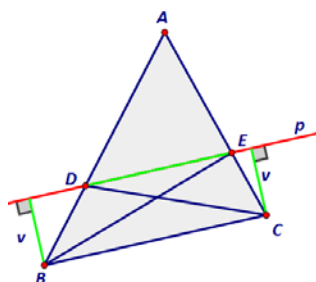


Slika 9. Jednake površine u trokutu ABC

Površine trokuta BED i ADE odnose se kao i njihove osnovice jer imaju jednake visine (h_1): $\frac{P_{\Delta BED}}{P_{\Delta AED}} = \frac{|BD|}{|DA|}$

(slika 9, lijevo). Također se i površine trokuta CED i ADE odnose kao njihove osnovice jer imaju jednake visine (h_2): $\frac{P_{\Delta CED}}{P_{\Delta AED}} = \frac{|CE|}{|EA|}$. Nadalje, trokuti BED i CED imaju jednake osnovice i visine na te osnovice

(visine se nalaze između paralelnih pravaca pa su jednake, slika 10) pa imaju jednake i površine, tj. $P_{\Delta BED} = P_{\Delta CED}$.



Slika 10. Jednake površine u trokutu ABC

Sve zajedno daje: $\frac{|BD|}{|DA|} = \frac{P_{\Delta BED}}{P_{\Delta AED}} = \frac{P_{\Delta CED}}{P_{\Delta AED}} = \frac{|CE|}{|EA|}$, tj. dužine odsječene pravcem p su proporcionalne. ■

Euklidov dokaz obrata Talesovog teorema zasniva se također na metodi površina i činjenici da se trokuti jednakih površina i jednakih osnovica nalaze između paralelnih pravaca. Dakle, neka je dan trokut ΔABC i pravac p koji siječe stranice \overline{AB} i \overline{AC} u točkama D i E tako da vrijedi proporcija $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$.

Uz isto zaključivanje o površinama trokuta BED i ADE (slika 9, lijevo) te trokuta CED i ADE (slika 9,

desno) imamo: $\frac{P_{\triangle BED}}{P_{\triangle AED}} = \frac{|BD|}{|DA|}$, $\frac{P_{\triangle CED}}{P_{\triangle AED}} = \frac{|CE|}{|EA|}$, a kako su omjeri dužina s desne strane jednakosti prema polaznoj pretpostavci jednaki onda su i omjeri površina jednaki (jer omjeri koji su jednaki istom omjeru i sami su međusobno jednaki), tj. $\frac{P_{\triangle BED}}{P_{\triangle AED}} = \frac{P_{\triangle CED}}{P_{\triangle AED}}$. Iz jednakosti omjera površina slijedi jednakost površina trokuta BED i CED , tj. $P_{\triangle BED} = P_{\triangle CED}$. Konačno, trokuti jednake površine sa istom osnovicom (slika 10) nalaze se između paralelnih pravaca pa je $p \parallel \overline{BC}$. ■

Metoda površine koju Euklid koristi pri dokazivanju Talesovog teorema i njegovog obrata danas je vrlo rijetko zastupljena u udžbenicima matematike. Za doba u kojem je teorem formuliran i dokazivan uporaba metode površine je razumljivijer se tom metodom izbjegavao rad sa iracionalnim brojevima, koji su tada bili gotovo zabranjeni. No, iako ova metoda ima i svoju didaktičku vrijednost jer objedinjuje sadržaje koji su učenicima već poznati i nisu teško razumljivi, ipak je utjecaj projektivne geometrije geometrije zasnovane na transformacijama tijekom 19. st. bio toliko dominantan da se metoda površine i uporaba trokuta kao temeljne figure do danas gotovo izgubila (vidjeti [3], [6]).

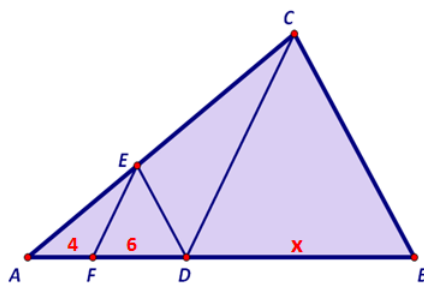
4. Primjena Talesovog teorema

Ovisno o kontekstu i formi iskaza Talesovog teorema, moguće su različite primjene. No, kako je u nastavi matematike najzastupljeniji iskaz u formi kuta, Talesov teorem se najčešće primjenjuje pri podjeli zadane dužine na jednake dijelove ili na dijelove u zadanom omjeru, pri konstrukciji ili numeričkom određivanju četvrtetproporcionalne te uz svojstvo simetrale unutrašnjeg kuta trokuta, iako ne nužno tim redoslijedom. Nakon toga izvode se i dokazuju teoremi o sličnostitrokuta. No, jednom kada se obrade teoremi o sličnosti trokuta, učenici gotovo kao da zaborave na Talesov teorem te u određenoj situaciji prvo ispituju jesu li trokuti slični kako bi postavili proporciju, umjesto da proporciju postave pozivajući se direktno na Talesov teorem.

Zadaci koji se rješavaju neposredno nakon obrade Talesovog teorema odnose se uglavnom na određivanje nepoznate veličine iz proporcije te se vještina primjene Talesovog teorema razvija proceduralnim rješavanjem brojnih sličnih zadataka u kojima samo variraju duljine veličina iz proporcija. Za početak takvi zadaci su nužni, ali ne dovoljni jer nemaju veliku intelektualnu korist. Korisnije bi bilo povremeno zadržati se na nekom već riješenom zadatku te vidjeti može li se taj zadatak još nekako iskoristiti, može li se formulirati u nekoj drugoj formi ili poopćiti (vidjeti [10]).

Primjer: U trokutu ABC na stranici \overline{AB} odabrane su točke D i F , a na stranici \overline{AC} točka E tako da je: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ i $\overline{FE} \parallel \overline{DC}$. Ako je $|AF| = 4$, a $|FD| = 6$ odredite duljinu dužine \overline{DB} .

Pri rješavanju ovog zadatka, neki učenici imaju problema i sa samim skiciranjem odgovarajuće slike što nije začuđujuće jer skice izbjegavaju crtati kad god mogu, smatrajući crtanje skica nepotrebnim gubitkom vremena. Nakon što je slika zadatka skicirana, gotovo svi učenici najprije pokazuju da su određeni trokuti slični, a tek onda postavljaju odgovarajuće proporcije umjesto da na temelju Talesovog teoremaproporcije postave direktno. Nije pogrešno ispitati sličnost trokuta pa postaviti proporcije, ali je upravo to nepotreban gubitak vremena pri rješavanju ovog zadatka. Neka je skica zadatka kao na slici 11.



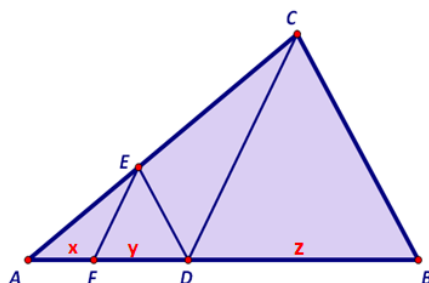
Slika 11. Trokut ABC i zadani elementi

U trokutu ABC , prema Talesovom teoremu vrijedi: $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|} \Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{|AE|}{|EC|}$. U

trokutu ADC , prema Talesovom teoremu vrijedi: $FE \parallel DC \Rightarrow \frac{|AF|}{|FD|} = \frac{|AE|}{|EC|} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{|AE|}{|EC|}$.

Omjeri koji su jednaki istom omjeru i međusobno su jednaki pa imamo: $\frac{10}{x} = \frac{4}{6} \Rightarrow x = 15$, odnosno $|DB| = 15$.

Dakle, ovo je jedan od standardnih zadataka u kojemu se primjenom Talesovog teorema (a ne teorema o sličnosti trokuta) dolazi do traženog rješenja. No, umjesto da odmah pređemo na drugi, njemu sličan zadatak, zadržimo se još malo na ovom zadatku. Činjenica je da se mnogi učenici bolje snalaze u zadacima koji koriste konkretne brojeve, a nerado rješavaju zadatke zadane u općem obliku pa je dobro sada isti ovaj zadatak razmatrati i riješiti u općem obliku. Dakle, ako uzmemo da je $|AF| = x$, a $|FD| = y$ treba odrediti duljinu dužine \overline{DB} . Koristeći se analogijom na temelju prikazanog rješenja, dobivamo (slika 12):



Slika 12. Trokut ABC i opći brojevi

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|} \Rightarrow \frac{x+y}{z} = \frac{|AE|}{|EC|}, \quad FE \parallel DC \Rightarrow \frac{|AF|}{|FD|} = \frac{|AE|}{|EC|} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{|AE|}{|EC|},$$

odnosno

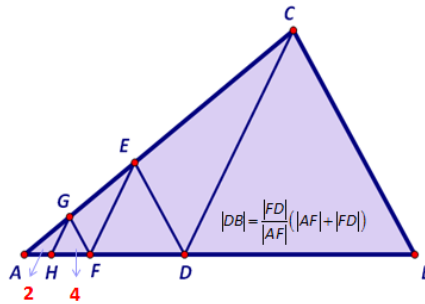
$$\frac{x+y}{z} = \frac{x}{y} \Rightarrow z = \frac{y}{x}(x+y), \text{ tj. } |DB| = \frac{y}{x}(x+y).$$

Nakon ovoga, može se pokazati da se radi o istom zadatku ako ga formuliramo i na sljedeći način: U trokutu ABC na stranici \overline{AB} odabrane su točke D i F , a na stranici \overline{AC} točka E tako da je: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ i $\overline{FE} \parallel \overline{DC}$. Duljinu dužine \overline{DB} iskažite u ovisnosti o duljinama $|AF|$ i $|FD|$. Pri rješavanju se mogu uvesti duljine dužina kao u prethodnom ili se prikazati u obliku:

$$|DB| = \frac{|FD|}{|AF|} (|AF| + |FD|).$$

Radeći na ovaj način učenicima olakšavamo prijelaz sa konkretnog na apstraktno, jačamo samopouzdanje pri rješavanju složenijih zadataka i umanjujemo postojeći strah od apstraktnih zapisa.

Zadržimo se još malo na ovom zadatku te ga još malo proširimo tako da nastavimo dijeljenje dužine \overline{AB} sa dvije nove točke: odaberite još dvije nove točke: H na stranici \overline{AB} i G na stranici \overline{AC} , tako da je $\overline{FG} \parallel \overline{DE}$, a $\overline{HG} \parallel \overline{FE}$. Ako je $|AH| = 2$, a $|HF| = 4$ odredite duljinu dužine \overline{DB} (slika 13).



Slika 13. Trokut ABC i dvije nove točke

Primjenimo prethodni rezultat na trokute ADE i AFE pa najprije izračunamo duljinu $|FD|$ u trokutu ADE : $|FD| = \frac{4}{2}(2+4) = 12$, a zatim iskoristimo duljine $|AF| = 6$, $|FD| = 12$ u trokutu ABC

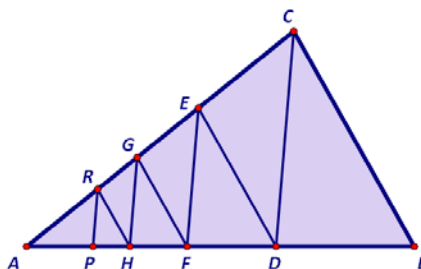
kako bi odredili traženu duljinu: $|DB| = \frac{12}{6} \cdot (6+12) = 36$.

Proučavanje zadatka nastavljamo koristeći opći zapis: ako je $|AH| = x$, a $|HF| = y$ odredite duljinu dužine \overline{DB} . Koristeći se opet analogijom prethodnoga, imamo: $|AF| = x + y$, $|FD| = \frac{y}{x}(x + y)$,

$|AD| = |AF| + |FD| = (x + y) + \frac{y}{x}(x + y) = (x + y) \left(1 + \frac{y}{x}\right) = \frac{(x + y)^2}{x}$ te je konačno

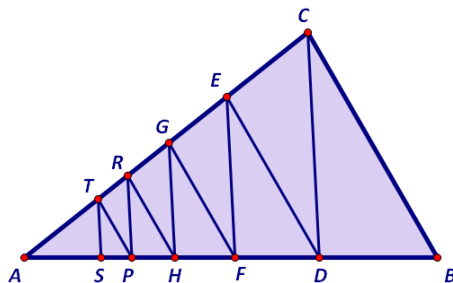
$|DB| = \frac{\frac{y}{x}(x + y)}{x + y} \cdot \frac{(x + y)^2}{x}$, odnosno $|DB| = \frac{y}{x^2} \cdot (x + y)^2$.

Prirodno je zapitati se može li se proces dijeljenja nastaviti sa još dvije točke te odrediti duljinu dužine \overline{DB} u ovisnosti o novim duljinama. Uvođenjem novih točaka P i R (slika 14), uz oznake $|AP| = x$ i $|PH| = y$ dobiva se: $|DB| = \frac{y}{x^3} \cdot (x + y)^3$.



Slika 14. Trokut ABC i četiri nove točke

Sada se pomalo naslućuje određena pravilnost i pokušaj postavljanja općeg pravila. Uočimo da je točka P bila četvrta točka na dužini \overline{AB} . To znači, ako bi uveli još dvije nove točke S i T (slika 15), točka S će biti peta točka na dužini \overline{AB} te bi se uz oznake $|AS| = x$ i $|SP| = y$ dobilo: $|DB| = \frac{y}{x^4} \cdot (x + y)^4$.



Slika 15. Trokut ABC i šest novih točaka

Postavljamo opću tvrdnju: uvođenjem $(k + 1)$. točke K uz oznake $|AK| = x$ i $|KK'| = y$, gdje je točka K' uvedena neposredno prije točke K , imamo: $|DB| = \frac{y}{x^k} \cdot (x + y)^k$. S obzirom da se radi o generalnoj tvrdnji, potrebno je provesti dokaz. U ovom slučaju, mogao bi nam poslužiti aksiom matematičke indukcije.

Promislimo samo koliko nepotrebnog vremena i posla bi se potrošilo kada bi u svakom prethodno opisanom koraku dokazivali sličnost odgovarajućih trokuta prije postavljanja proporcija dok je direktna primjena Talesovog teorema u ovom zadatku daleko ekonomičnija. Iako ovdje završavamo misao o iscrpljivanju ovog primjera, ovdje ne mora biti kraj. Imate li ideju kako bi se ovaj zadatak još mogao iskoristiti?

Ovo je samo jedan od brojnih primjera koji su plodno tlo za proučavanje raznih mogućnosti, uvježbavanje primjene Talesovog teorema te ujedno povezivanje različitih matematičkih sadržaja. Osim proučavanja raznih mogućnosti jednog te istog zadatka, dobro je isti zadatak riješiti na više različitih načina jer se jedino tako učenicima može ukazati na ekonomičnost određenog pristupa, u ovom slučaju primjene Talesovog teorema ispred teorema o sličnosti trokuta.

5. Zaključak

U radu je prikazan izvorni oblik teorema o proporcionalnim dužinama i nekoliko drugih formi istog teorema oblikovanih u različitim matematičkim okruženjima i na različite načine što je najčešće odraz različitih (kulturoloških) uvjeta koji dominiraju unutar matematičkog obrazovanja jedne zemlje (vidjeti [6] i [8]). Imenovanje ovog teorema Talesovim teoremom ustaljuje se tek od 19. st., čime se postiže važnost samog teorema, ali i potreba za barem kratkom povijesnom pričom pri njegovoj obradi (vidjeti [8]).

Sve forme Talesovog teorema obrađuju se u nastavi matematike osnovne i srednje škole, ali najčešće na jednoj razini samo jedna od formi. No, svi bi učenici svakako trebali biti upoznati sa izvornim oblikom Talesovog teorema, a kad god je moguće povezivati i uspoređivati iskaze u različitim kontekstima. Svi iskazi Talesovog teorema o proporcionalnim dužinama su vrijedni korištenja posebno što se korištenjem različitih formulacija povezuju različiti matematički sadržaji u jednu funkcionalnu cjelinu. A, čitanjem različite literature bez povezivanja učenici mogu steći dojam da se radi o različitim teoremima koji nose isto ime.

Pri rješavanju zadataka korisno je, osim proceduralnog uvježbavanja primjene obrađenih teorema, proučavati što je ekonomičnije rješavanjem istog zadatka na različite načine. No, možda još korisnije je

proučavanje istog zadatka na različitim razinama, od onih u kojima su podaci zadani konkretnim brojevima do onih koji su zadani u općoj formi. S obzirom na korisnost navedenog, bilo bi poželjno izdvojiti određeno vrijeme unutar nastave matematike (redovite ili dodatne) za takav način učenja s učenicima.

Bibliografija

- [1] **B. Dakić, N. Elezović.** Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazije. *Element, Zagreb*, 2006.
- [2] Euklidovi Elementi: <http://poincare.matf.bg.ac.rs/nastavno/zlucic/> (posjećeno 2.9.2014.)
- [3] **A. M. Legendre.** Elementi geometrije. *Element, Zagreb*, 2010.
- [4] **Z. Lučić.** Oglеди iz istorije antičke geometrije. *Službeni glasnik, Beograd*, 2009.
- [5] **M. Mitrović, M. Veljković, S. Ognjanović, Lj. Petković, N. Lazarević.** Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazije. *Krug, Beograd*, 2006.
- [6] **S. Mrabet.** The development of Thales theorem throughout history. *11th International Congress on Mathematical Education*. Mexico, 2008. Preuzeto sa <http://tsg.icme11.org/document/get/570>(posjećeno 2.9.2014.)
- [7] **Ž. Orčić, R. Svedrec, N. Sarapa.** Matematika, udžbenik sa zbirkom zadataka za 7. razred. *Školska knjiga, Zagreb*, 2009.
- [8] **D. Patsopoulos, T. Patronus.** The Theorem of Thales: A Study of the Naming of Theorems in School Geometry Textbooks, *The International Journal for the History of Mathematics Education*, Vol. 1, No. 1, str. 57 - 68, 2006. Preuzeto sa: <http://www.comap.com/historyjournal/pdf/Vol1No1.pdf> (posjećeno 3. 9. 2014.)
- [9] **B. Pavković, D. Veljan.** Elementarna matematika 1, *Školska knjiga, Zagreb*, 2004.
- [10] **A. S. Posamentier, C. T. Salkind.** Challenging Problems in Geometry. *The Macmillan Company, New York*, 1996.

Coding and decoding crocheting patterns of Regular Polygons

Ivana Đokić

*Fifth School of Economics "Rakovica", Belgrade
e-mail: ivana.binary.three@gmail.com*

Milena Životić Ilić

*Fifth School of Economics "Rakovica", Belgrade
e-mail: milena.zivotic@gmail.com*

Lilian Wieser

*University of Applied Arts, Vienna, Austria
e-mail: lilian.wieser@uni-ak.ac.at*

Abstract. Crocheting patterns have algorithms in its core. During our exploration of algorithms for crocheting Regular Polygon Shapes we realized that crocheting could be good educational tool for visualizing geometrical shapes, since it includes imagination and drawing. In this paper we are using example of crocheted square to explain how coding and decoding crocheting patterns of regular polygons could be done. We made a general formula for crocheting perfect regular polygon with n sides. Using Processing programming language, we made an animation of making a square polygon, iteration by iteration. It serves as help for students for perceiving sort of tessellation, since one can see the polygons spreading through a plane in a special, concentric form. And, it helps them to understand concept of programming and making mathematical models. Since each moment of the process of making crocheted model is important we are showing the importance of manual work and handcraft from different perspectives - cognitive, psychological and physiological.

Keywords: crocheting, algorithms, Processing Programming Language, fine-motor skills, problem-solving

1. Introduction

Correlation between subjects in primary and high school are of a great importance nowadays. An interdisciplinary link, which gathers art, math and handcraft together, is bringing learning to a more comprehensive level. Using crocheting we are working on understanding textile art through mathematics and computer science. Also, we are showing how mathematical concepts and programming could be more easily learned through an art (crocheting). Process of making mathematical model for crocheted model includes knowledge of crocheting. Writing a code assumes good mathematical model that leads to good algorithm. On other hand, algorithm that describes steps of crocheting geometrical model can help in learning and understanding crocheting.

We developed formula for crocheting circle and square, as a great educational tool for developing algorithmic thinking [1]. (Proof for formula for crocheting a square is in Appendix 1). Based on that, we developed generalized formula for crocheting regular polygons (Table 1). Using pseudo-codes and algorithms, we are making animations by programming in Processing Programming Language.





Polygon	No. iteration	1	2	3	4 ...	k	
	Size of a side	1	3	5	7 ...	$2 \cdot k - 1$	
		number of meshes added in each iteration					
	triangle	1	6	12	18	$6 \cdot (k-1)$	
	square	1	8	16	24	$8 \cdot (k-1)$	
	pentagon	1	10	20	30	$10 \cdot (k-1)$	
	n-sided polygon	1	$2 \cdot n$	$4 \cdot n$	$6 \cdot n \dots$	$2 \cdot n \cdot (k-1)$	

Table 1. Table of formulas for crocheting regular polygons

2. Crocheting Regular Polygon Based on Example of Crocheting Square

Crocheted mathematical model of a square is based on crocheting from the center, and by adding elements (meshes) one-by-one on the edge of previous square we are developing bigger model (Figure1). It is sort of tessellation. Each mesh in crocheting is approximation of a unite square. Meshes are basic elements in crocheting. Mesh is made of a yarn. Out of meshes crocheter makes a chain, which is other important element in crocheting.

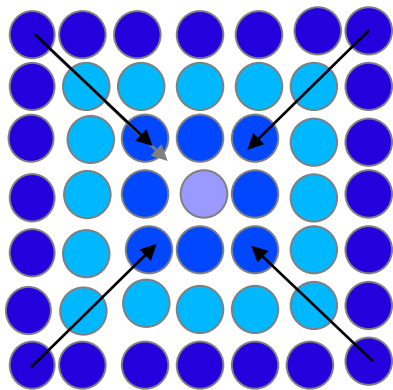


Figure1. Square



Figure2. Crocheted square

Figure 1 represents a drawing that helps us to make an algorithm for crocheting a square. First we are building a chain. Chain is represented with a circle that is in the center. Using a chain, we are making 8 meshes around it. In next iteration there are 16 meshes. We could get it by making 3 new meshes at every second mesh in a previous circle. After that, there are 24 meshes, which we will get analog to previous, but using every third mesh.

Using Table1 and explanation how a square could be crocheted we are able to write a Pseudo-code for crocheting Regular Polygon with n-sides:

Step 0: build a chain of 2 or 3 meshes

Step 1: build a polygon using the chain from it 0

Step 2: make a polygon which perimeter is equal $2n$ meshes (initial term of arithmetic progression; further in text "a polygon which perimeter is equal" will be written as "a polygon with")

Step 3: make a polygon with $2n + 2n = 4n$ meshes, by making 3 meshes in every $(2n)/(2n)=1$ st mesh of a previous polygon

Step 4: make a polygon with $4n + 2n = 6n$ meshes, by making 3 meshes in every $(4n)/(2n)=2$ nd mesh of a previous polygon

....

Step k: make a polygon with $2n(k - 1)$ meshes, by making 3 meshes in every $2n(k - 2)/(2n)=(k-2)$ th mesh of a previous polygon

3. Animation in Processing Programming Language

One of the most important steps of making a code is visualization. We decided to add animations of crocheting as a helpful tool in this process. It can be used, or rebuilt by the student. In the animation, unit polygons are used for building a model. We were using Processing programming language [2], as a simple but helpful tool for drawing and animating.

The Processing language is a text programming language specifically designed to generate and modify images. Processing was created to teach fundamentals of computer programming within a visual context. It brings together a programming language, development environment, and teaching methodology. Processing helps artists to understand programming concepts, and also gives opportunity to technical oriented students to learn more about art concepts. Processing syntax is based on Java programming language. Because of that it is good fundamental for learning other programming language.

Since in this work we are also presenting correlation between school subjects, Processing Programming Language is more than a good choice to make connection between mathematics, fiber art and computer science.

Let us consider an animation of a square. In the animation, unit polygons (squares) are used for building a model. Number of iterations depends on how big crocheted model we would like to make. We are giving an example based on five iterations. According to given algorithm for crocheting a square, in each new iteration there are 8 new polygons i.e. meshes more than in the previous one. The main task is to discover how those new polygons should be added. The underlying idea is to put 3 new meshes in each vertex, and on the all other places to add only one mesh (Figure3).

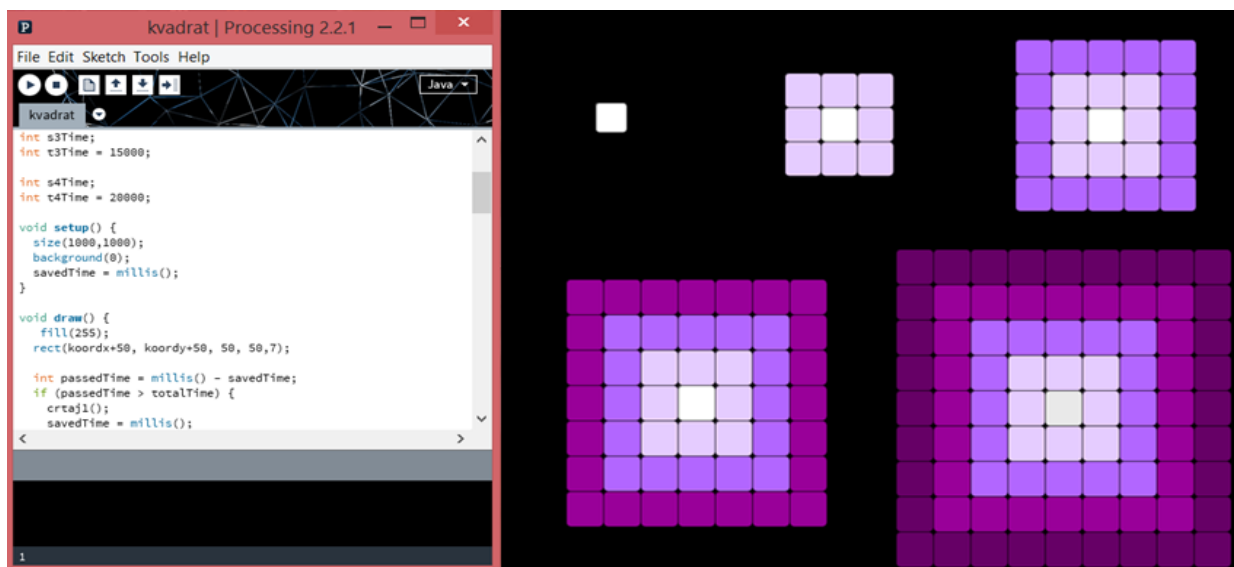


Figure3. Animation of crocheting a square

4. The Importance of Manual Work

William Lee invented knitting machine in 1589. Some sorts of mechanical looms were invented between 1750 – 1850 by Edmund Cartwright and Joseph Marie Jacquard. First knitting machines were using frames or, later on, punchcards. In the most modern machines, nowadays, punchcards have been replaced by computer control. But, even that, manual work is still important.

There are studies that are suggesting that manual work and use of sense of touch is quite important for development of the brain in childhood [4] and also later on, especially through art therapy for patients with brain injuries [5]. Manual work is developing synapses, quieting the mind and expanding awareness of a process of making and the physical product itself.

Manual work develops fine-motor skills and according to [6] fine motor skills are strong predictor of later math and reading achievement and attention.

Using crocheting at elementary or even at high school classes could improve fine-motor skills among students.

5. Conclusion

Through modelling and making pseudo-codes for crocheting regular polygons students are encouraged to develop their mental processes which will lead them to succeed in problem-solving. This sort of teaching could be usable for students with different cognitive learning styles - visual, auditory, and kinaesthetic/ tactile[7] Both experimental and tactile approach is giving not different point of view, but rather more acceptable way of gaining knowledge about the geometry and mathematical concepts. It is leading to a process of learning by using mind and body mutually. [7]

Applying this approach at math and computer science classes at Fifth School of Economics “Rakovica” we noticed that students are looking at this educational tool like inspiring and technologically challenging. According to results of quering that with did, 81% of them think that this approach helped them to develop their personal motivation more then before.

Working with preschool and elementary school pupils during workshops that we are holding once per a month, we noticed that preschool pupils have much more developed fine-motor skills then elementary school children (pupils from 11 to 14 years old). Because of that they are much better in gaining crochet skill then elementary school children. This implies to proposal of research that could be done among preschool children (from 4 to 6 years old) and younger elementary pupils (from 7 to 10 years old) by testing their math skills from time to time during a year, while they would learn crochet skills (using needle or fingers, depending on their age) and do crocheting at least 30minutes per a day. The results could be compared with [6] and we could measure the improving of pupils math skills.

References

- [1] **M. Životić Ilić, I. Đokić, L. Wieser**, Developing Algorithmic Thinking using Crocheting Patterns as Educational Tool. *VisMath*, 2014, 56
- [2] **C. Reas, B. Fry**, Processing: A Programming Handbook for Visual Designers and Artists, *The Mit Press, Cambridge*, 2007
- [3] **B. Fry**, Visualizing Data, *O'Reilly, Inc.* 2007
- [4] **E. Volane**. Methodological Techniques for Promoting Development of the Elementary School Pupils During the Process of Folding Paper, *Rural environment. Education. Personality, Jelgava*, 2003
- [5] **V.B. Lusebrink**. Art therapy and the Brain: An Attempt to Understand the Underlying Processes of Art Expression in Therapy. *Art Therapy: Journal of the American Art Therapy Association*, 2004, pp. 125-135
- [6] **D. Grismer, K.J. Grimm, S.M. Aiyer, W.M. Murrah, J.S. Steele**, Fine-motor skills and early comprehension of the words: Two new school readiness indicators, *Development Psychology*, Vol46(5), Sep 2010, 1008-1017
- [7] **SM. Belcastro, C. Yackel**, Making Mathematics with Needlework, *CRC Press*, 2007

Appendix 1.

Theorem 1. For crocheted square with odd size of a side, for k -th iteration in crocheting, $k \geq 2$, size of a side is $S(k) = 2k - 1$, and the number of meshes added is $M(k) = 8(k-1)$

Proof 1.

For $k = 2$ size of a side of a square is $S(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ and number of meshes added in 2th iteration is $M(2) = 8(2-1) = 8$. So, the statements hold for $k=2$.

If it holds for k , for $(k+1)$ th iteration we have, since sides are odd numbers:

$$S(k+1) = S(k) + 2 = 2k - 1 + 2 = 2(k+1) - 1$$

So, indeed hypothesis holds for $k+1$:

$$M(k+1) = 4(2k-1) + 4 = 8k - 4 + 4 = 8k + 8 - 8 = 8((k+1) - 1)$$

Thereby, hypothesis holds for $k+1$

Učenje po Poljinim principima u GeoGebra okruženju

Valentina Kostić

Gimnazija Pirot, Srpskih vladara 128, Pirot

e-mail: 22mathgim@gmail.com

Tanja Sekulić

Visoka tehnička škola strukovnih studija, Dordža Stratimirovića 23, Zrenjanin

e-mail: tsekulicvts@gmail.com

Apstrakt. GeoGebra je softver koji se sve više primenjuje u nastavi i učenju matematike. Zbog dvostrukog prikaza matematičkih objekata, algebarskog i geometrijskog, GeoGebra je moćan kognitivno-vizuelni alat. Njeno vizuelno, dinamično i interaktivno okruženje pruža široki spektar mogućnosti u objašnjavanju, istraživanju i modeliranju matematičkih koncepata i njihovih međusobnih odnosa. Poljin model rešavanja problema i principi heurističke nastave mogu se realizovati uz pomoć GeoGebre. Primenom ovog edukativnog softvera, uz adekvatna didaktičko-metodička rešenja, nastavnik može da kreira okolinu za učenje koja podstiče i usmerava učenike da istražuju, otkrivaju i kroz sopstveno iskustvo dolaze do novih saznanja. U radu je prikazana mogućnost didaktičkog oblikovanja koncepta lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije u GeoGebri, po Poljinim principima.

Ključne reči: GeoGebra; vizuelizacija; Poljin model rešavanja problema; ekstremne vrednosti.

1. Uvod

Savremeni trendovi u obrazovanju, kao prioritete, sve više ističu pristup usmeren na učenje i unapređivanje veština učenja. Osnovne smernice za savremenu školsku praksu koja je usmerena na učenje proističu iz činjenice da je učenje procesu kome su učenici aktivni subjekti izgradnje sopstvenih znanja i veština i da tim procesom rukovodi nastavnik. Glavni profesionalni zadatak nastavnika je usmeravanje, praćenje i podrška procesu učenja, kako bi učenicima omogućio, da svojom aktivnošću i na osnovu svojih sposobnosti, izgrade nove strukture znanja. Težište nastavnog procesa treba preneti sa statične koncepcije nastavnih sadržaja na dinamičnu kombinaciju znanja, veština i stavova učenika. U kognitivno-konstruktivnom učenju, znanje nastaje aktivnošću učenika, pa je uloga nastavnika kao izvora informacija znatno smanjena u odnosu na ulogu nastavnika koji će voditi i usmeravati učenike na putu sticanja novih znanja.

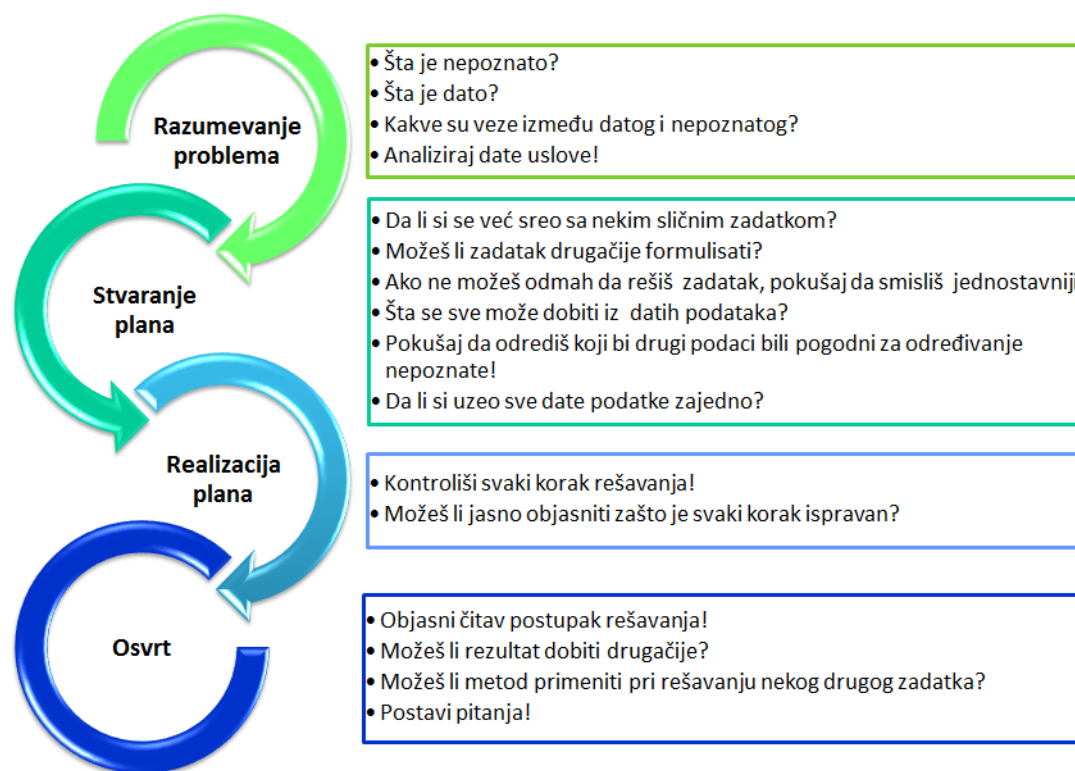
Veoma je značajna uloga nastavnika u kreiranju okoline za učenje koja podstiče i usmerava učenike da samostalno istražuju, otkrivaju i kroz sopstveno iskustvo dolaze do novih saznanja. Nema univerzalnog modela koji nastavnici mogu primenjivati u svakodnevnoj školskoj praksi. Nastavnik planira, osmišljava i realizuje aktivnosti u procesu učenja i nastave uzimajući u obzir: nastavne sadržaje, posebne metode učenja vezane za predmet, dostupne materijale i opremu, mogućnosti koje pruža sredina za učenje, itd.

Zahtevi savremene nastave matematike mogu se ostvariti adekvatnim izborom nastavnih oblika i metoda. Vrlo efikasnim se pokazuju upravo one metode i strategije koje učenika dovode u situaciju da samostalno otkriva znanje, kao što su: problemska i heuristička nastava, metoda učenja otkrivanjem ili

istraživački usmerena nastava. Njihove implikacije su: razvijanje sposobnosti učenika da rešavaju probleme, formiranje navike saznajne delatnosti i razvijanje samostalnosti u učenju.

2. Poljin model rešavanja problema

Đerđ Polja (*György Pólya*, 1887-1985.), uvaženi matematičar svog vremena, bavio se i problematikom rešavanja problema. Dela u kojima je Polja razmatrao heuristiku rešavanja problema su: „*Kako rešiti matematički zadatak*” („*How to Solve it*”, 1945.), „*Matematičko otkriće*” („*Mathematical Discovery*”, 1965.), „*Matematika i prihvatljivo rezonovanje*” („*Mathematics and Plausible Reasoning*”), „*Indukcija i analogija u matematici*” („*Induction and Analogy in Mathematics*”) [10]. Za nastavu i učenje matematike, od svih Poljinih dela najznačajnija knjiga je „*Kako rešiti matematički zadatak*”. U tom delu Polja izlaže opšte metode koje ljudi koriste u rešavanju problema svih tipova, ne samo matematičkih i na primerima objašnjava kako osposobiti učenike da uspešno rešavaju probleme. U metodičko-didaktičkoj literaturi, Poljin model rešavanja problema se ističe kao osnovni metodski postupak od koga se polazi u procesu saznavanja i rešavanja problema. Na Slici 1 je prikazan prilagođen i preveden Poljin model rešavanja problema preuzet iz[7].



Slika 1. Poljin model rešavanja problema (preuzeto i prilagođeno iz [7])

3. Primena Poljinih principa u nastavnoj praksi

Polja se zalagao za heuristički pristup učenju i apostrofirao da postoji umeće otkrića, da ga je moguće naučiti i „Najbolji način da se nešto nauči jeste da to sami otkrijete” [8]. On preporučuje nastavnicima da stvaraju raznovrsne nastavne situacije u kojima učenicima ne prenose gotova znanja, već navode učenike da, u određenoj meri, samostalno otkrivaju nastavne sadržaje. U takvim situacijama učenici maksimalno angažuju svoje kognitivne sposobnosti (razumevanje, shvatanje, osmišljavanje, uvid), prethodna znanja i iskustva. Cilj takvog pristupa je da se učenici postepeno osamostale i nauče kako sami mogu učiti, a Poljin model rešavanja problema nudi odgovor kako to mogu da realizuju u praksi.

Nastavnik treba da obezbedi učenicima instrumente (načine) za proces „traganja za otkrićima”, podstiče ih da samostalno, svojim naporima dolaze do određenih saznanja i pruža odgovarajuću pomoć. Pomoć koju nastavnik pruža učeniku treba da bude pravovremena i po obimu odmerena reakcija. „Učitelj treba da pomogne, ali ne premalo i ne previše, tako da učenik ima jedan razuman deo da uradi sam” [7].

Poljin model rešavanja problema i njegovi heuristički principi su široko primenljivi u heurističkom poučavanju, problemskoj nastavi, učenju otkrivanjem ili istraživački usmerenoj nastavi. U zavisnosti od prirode nastavnih sadržaja, sposobnosti učenika i uz odgovarajuću pripremu, nastavnik može da primeni neku od navedenih metoda. Dobrobiti ovih metoda su: aktivna uloga učenika, povećanje sposobnosti rešavanja problema, razvijaju se kognitivne sposobnosti, znanjasu trajnija i sa višim stepenom transfera, rešavanje problema ili izvršenje uspešnog istraživanja povećava motivaciju i interesovanje učenika za predmet.

Problemska nastava i učenje otkrivanjem zahtevaju obimnije pripreme nastavnika, potrebno je više vremena za njihovu realizaciju relativno su teže učenicima [15]. U nastavnoj praksi je najprimenljivija varijanta učenje vođenim otkrivanjem, odnosno istraživački usmerena nastava. Sastoji se u tome da učenici dobijuprecizna uputstva od nastavnika: dobro definisan problem, usmeravajuća pitanja za postavljanje hipoteza i direktna uputstva za njihovu proveru. Osnovne etape u saznavno-istraživačkom procesu su: 1) definisanje problema, 2) prikupljanje podataka i formulisanje hipoteze, 3) analiza podataka i 4) izvođenje zaključka. Može se uočiti da se one uklapaju redom u odgovarajuće etape Poljinog modela rešavanja problema prikazanog na Slici 1 [13].

4. Učenje po Poljinim principima u GeoGebri

Informaciono-komunikacione tehnologije imaju značajan uticaj na unapređenje matematičkog obrazovanja. Primena računara u nastavi i učenju pruža nastavnicima široki spektar mogućnosti za metodičko i didaktičko oblikovanje nastavnih sadržaja. Uz odgovarajuće računarske programe, nastavnik može da kreira okolinu za učenje koja podstiče i usmerava učenike da samostalno istražuju, otkrivaju i kroz sopstveno iskustvo dolaze do novih saznanja. Jedan od programa koji se primenjuje u nastavi i učenju matematike je *GeoGebra*.

GeoGebra je besplatan softver otvorenog koda, dizajniran specijalno za obrazovne svrhe. Prevedena je na srpski jezik, intuitivna i jednostavna za korišćenje. Zajednica njenih korisnika na internetu je brojna i izuzetno aktivna na GeoGebra forumu [5] i servisu GeoGebra Tube [6] na kome se nalazi veliki broj gotovih materijala koji se mogu koristiti u nastavi. Ovaj program postaje sve popularniji za nastavu i učenje matematike i može da se koristi od najranijeg osnovnoškolskog uzrasta, pa do fakulteta.

GeoGebra je dinamički matematički softver koji proširuje koncept dinamične geometrije na polja algebre i matematičke analize. Matematički objekti su višestruko prikazani: grafički (geometrijski), algebarski i tablično. Dinamički povezane algebarske i geometrijske prezentacije objekata, u interaktivnom okruženju, mogu da prikažu razne položaje i odnose matematičkih objekata, kao i primere matematičkih procesa. Zbog ovih performansi GeoGebra predstavlja moćan alat za vizuelizaciju i animaciju koji podstiče vizuelno razumevanje i mišljenje kao i povezivanje vizuelnih shvatanja učenika sa formalno-simboličnim jezikom matematike.

GeoGebra kao kognitivni alat može se koristiti u nastavi u tri različite situacije: pri objašnjavanju, za istraživanje i za modeliranje matematičkih koncepata i njihovih međusobnih odnosa. Karadag i McDougall su Poljin model rešavanja problema ugradili u dinamično i interaktivno okruženje GeoGebre. Sva tri modela primene GeoGebre u nastavi su razradili, sledeći Poljine principe heurističke nastave i prikazali ih u obliku tabele (Tabela 1) [14].

	Objašnjavanje	Istraživanje	Modeliranje
Razumevanje problema	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Opisati zadate podatke. ▪ Šta je nepoznato? 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Osigurati radni materijal za učenike. ▪ Navesti učenike da istraže problem. ▪ Voditi učenike da utvrde šta je nepoznato. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Ponuditi problem koji treba istražiti. ▪ Utvrditi koji su ulazni podaci. ▪ Opisati nepoznato.
Stvaranje plana	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Postoji li veza između zadatih podataka? ▪ Izložiti strategiju. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Pitati učenike za vezu između matematičkih objekata. ▪ Voditi učenike u kreiranju strategije. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Kreirati matematičke objekte. ▪ Analizirati veze između objekata.
Realizacija plana	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Manipulišući matematičkim objektima doći do novih podataka koji vode do rešenja. ▪ Postaviti pitanja koja usmeravaju učenike. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Voditi učenike kroz interakciju matematičkih objekata da dobiju nove podatke. ▪ Voditi učenike da uoče zakonitosti na osnovu dobijenih podataka. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Manipulisati objektima kako bi proverili valjanost modela. ▪ Postaviti pretpostavku. ▪ Testirati pretpostavku.
Osvrt	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Ponoviti postupak. ▪ Postaviti pitanja šta-ako. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Podsticati učenike da menjaju početni problem. ▪ Podsticati učenike da postavljaju šta-ako pitanja. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Promeniti ulazne podatke. ▪ Osmisliti problem koji opisuje trenutno stanje. ▪ Postaviti novi problem.

Tabela 1. Tri načina korišćenja GeoGebre po Poljinim principima (preuzeto i prevedeno iz [14])

5. Teškoće u učenju sadržaja matematičke analize

Sa osnovnim konceptima matematičke analize učenici se prvi put susreću u četvrtom razredu srednje škole. Sadržaji matematičke analize zahtevaju od učenika da osim odličnog poznavanja elementarne matematike, formiraju novi način mišljenja koji je zasnovan na formalnim definicijama, aksiomama i teoremama, pri čemu se primenjuje logičko-deduktivno zaključivanje (tzv. „*napredno matematičko mišljenje*”). Prelazak na apstraktniji nivo mišljenja može da uzrokuje poteškoće, nerazumevanje i relativno slaba postignuća kod izvesnog broja učenika [1, 2, 12]. Udžbenici koji su pisani strogo formalistički, nizanjem definicija, formulacija teorema i njihovih dokaza, većini učenika ne olakšavaju složen proces prelaska na viši nivo matematičkog mišljenja. Na osnovu koncepcije udžbenika nastavnici mogu da izgrade sličan pristup poučavanju, pa je česta nastavna praksa da učenici zapišu definicije, teoreme (sa ili bez dokaza) i nakon toga se prelazi na rešavanje zadataka u kojima se one primenjuju.

Uloga nastavnika u procesu prelaska učenika sa elementarnog na napredno mišljenje je veoma značajna. Pri usvajanju novih pojmova bolje je ići od konkretnog i jednostavnijeg ka apstraktnijem i složenijem. Postojeće predstave koje učenici imaju o određenim pojmovima treba povezati i na toj osnovi izgraditi nove pojmove [4]. Učenicima može da se olakša učenje ako se nastavni sadržaji vizuelizuju zato što svoja vizuelna shvatanja mogu da primene i povežu sa formalno-simboličnim jezikom matematičke analize [3]. Moćni alati za vizuelizaciju matematičkih koncepata i procesa su dinamički geometrijski softveri [9]. Metodičko oblikovanje nastavnih sadržaja i učenje pomoću računarskih tehnologija doprinose poboljšanju postignuća učenika [11].

6. Lokalni ekstremi u GeoGebra okruženju

GeoGebra obezbeđuje alate i uslove za vizuelizaciju, animaciju i istraživačku delatnost i pruža veliki broj mogućnosti za didaktičko-metodičko oblikovanje nastavnih sadržaja koji se odnose na oblast matematičke analize. U ovom radu prikazujemo GeoGebra dinamički radni list čije je kreiranje zasnovano na povezivanju algebarske i geometrijske interpretacije koncepta lokalnih ekstremnih

vrednosti funkcije i koji je didaktički oblikovan za primenu Poljinog modela rešavanja problema u istraživački usmerenoj nastavi. GeoGebra radni list je korišćen u nastavi sa učenicima Gimnazije Piroto (dva odeljenja prirodno-matematičkog smera) i studentima prve godine Visoke tehničke škole strukovnih studija u Zrenjaninu, studijski program tehnološko inženjerstvo (73 studenta) u okviru predmeta Matematika 2, školske 2012/2013. godine. Časovi su realizovani u informatičkim učionicama gde su po dva ili tri učenika/studenta koristila jedan računar.

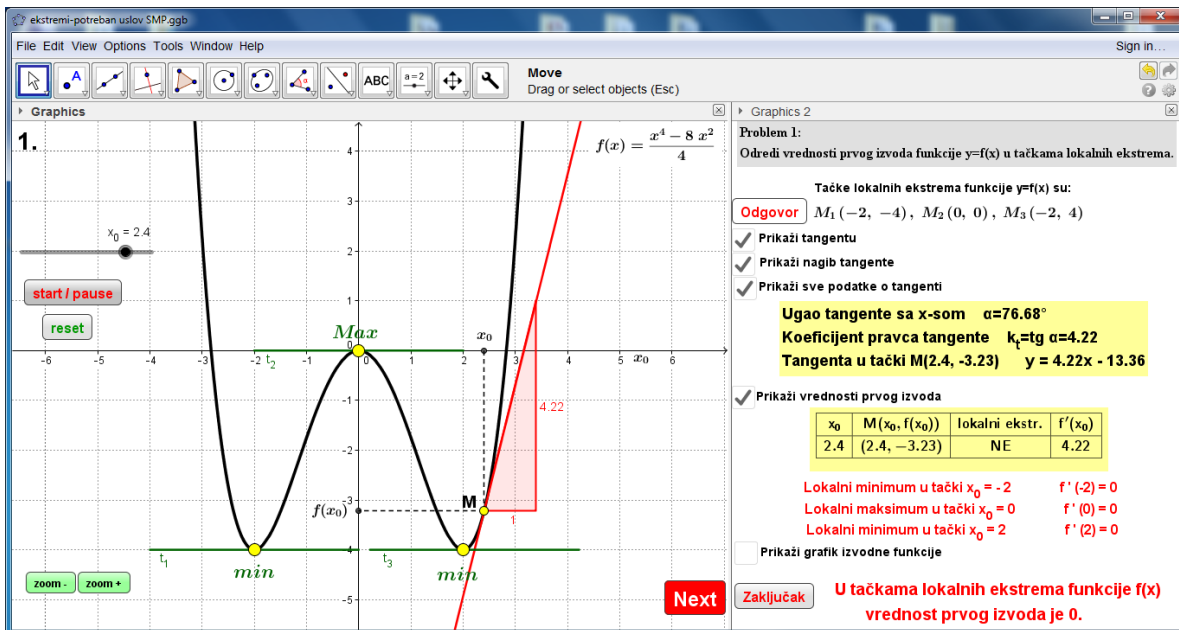
Koncept lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije se u udžbenicima i u nastavi najčešće prezentuje tako što se navode: definicije lokalnog maksimuma (minimuma) i kritičnih tačaka funkcije (tačke u kojima je prvi izvod jednak nuli ili nije definisan), teoreme o neophodnom i dovoljnom uslovu ekstremuma (sa ili bez dokaza) i nekoliko grafičkih primera koji ilustruju značenje teorema. Nakon toga slede zadaci u kojima se primenjuju navedene teoreme. Pristup konceptu lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije, koji smo primenili, ima drugačiji redosled etapa i sproveden je na sledeći način:

- 1) Priprema nastavnog materijala koji sadrži dva GeoGebra dinamička radna lista (za teoremu o neophodnom i za teoremu o dovoljnom uslovu) i prateće odštampane radne listove sa uputstvima za istraživanje u GeoGebri.
- 2) Istraživanje učenika u GeoGebri za teoremu o neophodnom uslovu lokalnih ekstrema. Učenicima je postavljen problem da na osnovu grafika funkcije odrede vrednost prvog izvoda u tačkama lokalnih ekstrema. Ovo istraživanje je vođeno uputstvima koja su data u radnom listu. Ukoliko postoji potreba, nastavnik može učenicima pružiti dodatna uputstva. Očekivani ishod je da učenici induktivnim razmišljanjem izvedu zaključak: „U tačkama lokalnih ekstrema funkcije, prvi izvod je 0 ili nije definisan”. Dakle, učenici istraživanjem dolaze do formulacije teoreme o potrebnom uslovu lokalnih ekstrema.
- 3) Nastavnik izvodi formalno-deduktivni dokaz teoreme.
- 4) Sprovođenje istog postupka za teoremu o dovoljnom uslovu lokalnih ekstrema.
- 5) Učenici, uz pomoć nastavnika, sastavljaju algoritam za određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije i zapisuju ga u vidu šeme.
- 6) Rešavanje zadataka.

GeoGebra dinamički radni listovi mogu da se koriste kada se nastava izvodi u računarskoj učionici gde učenici rade samostalno ili u paru, kao i u učionici sa jednim računarom i projektorom (nastavnik ili učenik demonstrira rad sa GeoGebrom). Takođe, učenici mogu da ih koriste za samostalno učenje kod kuće. U daljem radu prikazujemo nastavni materijal koji smo pripremili za teoremu o neophodnom uslovu za postojanje lokalnih ekstrema funkcije.

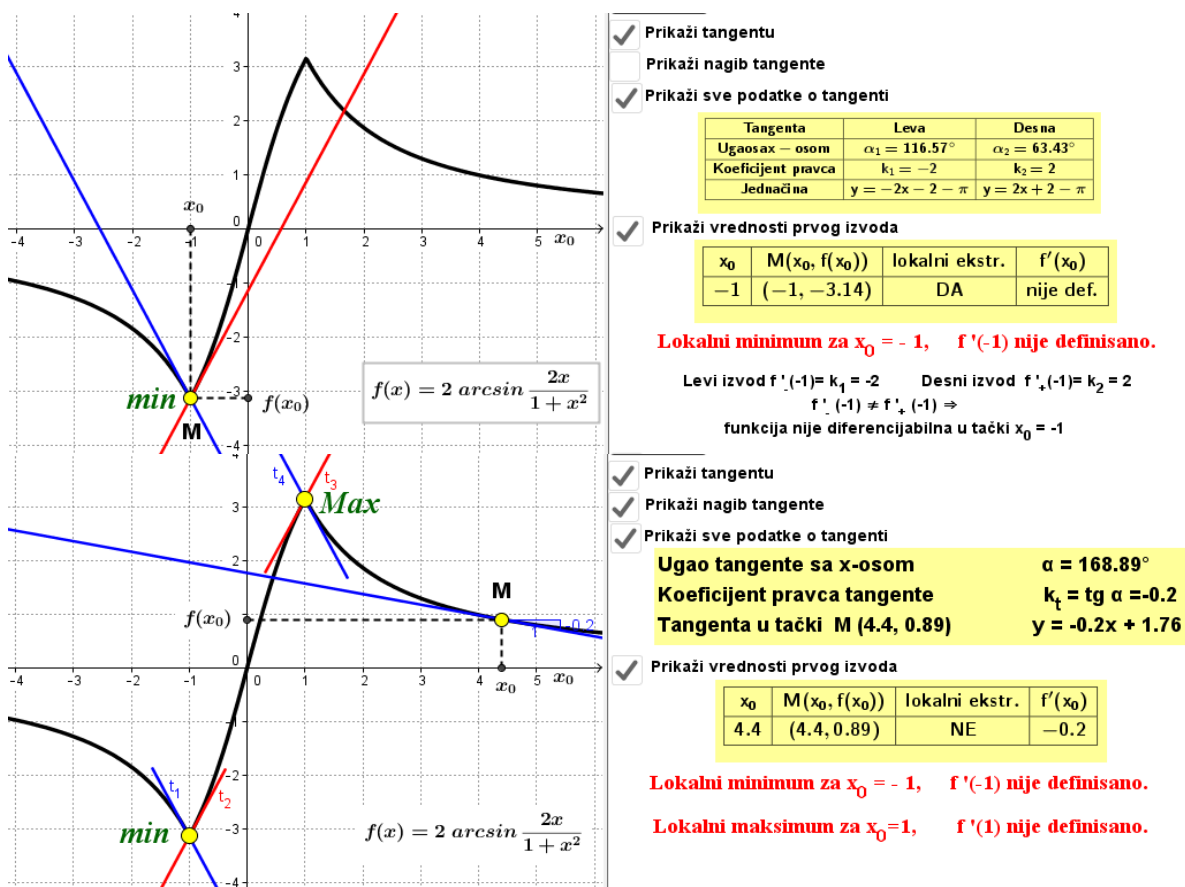
Dizajn GeoGebra dinamičkog radnog lista:

- U GeoGebri su prikazana tri karakteristična slučaja za tačku lokalnog ekstrema: vrednost prvog izvoda u tački je 0, prvi izvod nije definisan zato štolevi i desni izvod nisu jednaki i prvi izvod nije definisan jer teži beskonačnosti. U prvom problemu prikazan je grafik funkcije $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2}{4}$, u drugom $f(x) = 2 \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ i u trećem $f(x) = 2 \sqrt[3]{(x+1)^2} - 2$. Promena funkcije (problema) se vršiklikom na dugme „Next” ili „Back”.
- Učenik može da proveri tačnost svojih odgovora ili zaključaka pomoću odgovarajućeg dugmeta.
- Pomoć koju učenici mogu da dobiju se prikazuje izborom odgovarajućeg poljapored koga se nalazi i kratak opis: prikaži tangentu, prikaži nagib tangente, prikaži sve podatke o tangenti, prikaži vrednosti prvog izvoda (Slika 2).
- Izborom polja za prikazivanje tangente i nagiba tangente učenici dobijaju pomoć vizuelne prirode. Pomeranjem klizača x_0 mogu vizuelno da prate promene položaja tangente i njenog nagiba, koji je prikazan pravouglim trouglom.
- Pomoć „prikaži sve podatke o tangenti” je numeričke i algebarske prirode i pruža informacije o uglu tangente sa x -osom, koeficijentu pravca tangente i jednačini tangente. Svi podaci se dinamički menjaju kada se pomera klizač.



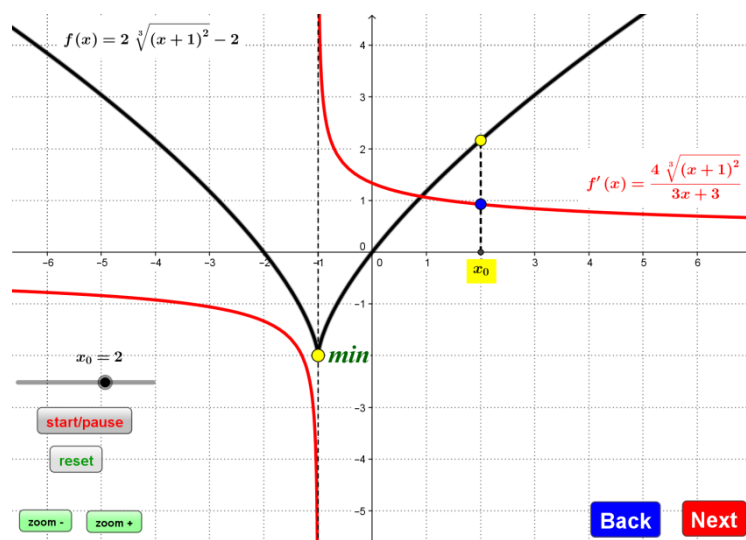
Slika 2. Izgled dinamičkog radnog lista sa svim vrstama pomoći koje mogu da se koriste

- Izborom pomoći „prikaži vrednosti prvog izvoda” pojavljuje se tabela u kojoj su prikazani numerički podaci o funkciji i njenoj izvodnoj funkciji. Kada tačka $M(x_0, f(x_0))$ „dode” u položaj tačke lokalnog ekstrema funkcije, pojavljuje se tekstualno polje kojim se ističe zaključak o tački lokalnog ekstrema i vrednosti prvog izvoda u toj tački. On ostaje vidljiv za sve vrednosti x_0 koje su veće od apscise tačke lokalnog ekstrema (Slika3).



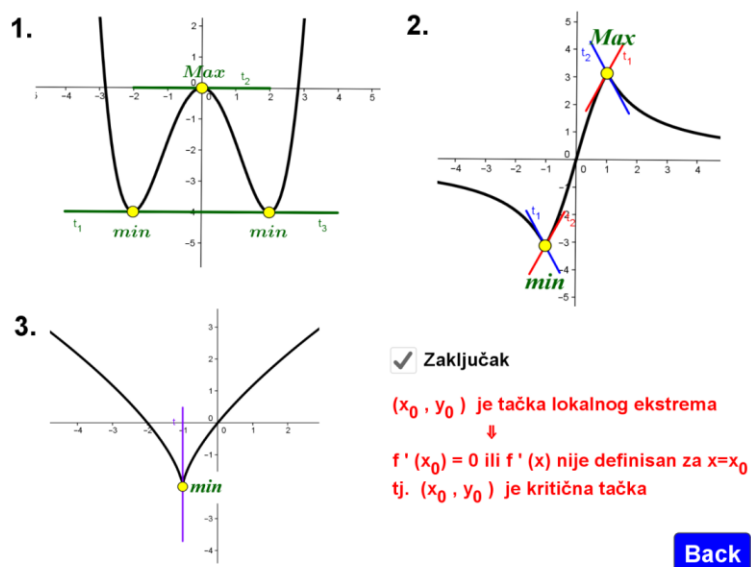
Slika 3. Dinamička promena podataka u grafičkom i algebarskom delu radnog lista

▪ Izborom polja prikaži grafik izvodne funkcije, u levom delu ekrana se pojavljuju grafik funkcije i grafik izvodne funkcije (Slika 4). Posmatranjem tačke koja pripada grafiku funkcije i odgovarajuće tačke (sa istom apscisom) koja pripada grafiku izvodne funkcije, uz pomeranje klizača x_0 , učenici mogu da odrede vrednost izvodne funkcije u tački lokalnog ekstrema funkcije $f(x)$ ili da izvedu zaključak da izvodna funkcija u toj tački nije definisana.



Slika 4. Pomoć „Prikaži grafik izvodne funkcije”

▪ Nakon pojedinačnog istraživanja navedenih funkcija, pritiskom na dugme Next, učenik prelazi na deo radnog lista sa slikama za sva tri problema na kojima su prikazani grafici funkcija i tangente u njihovim tačkama lokalnih ekstrema (Slika 5). Na osnovu izvedenih zaključaka o svakoj funkciji pojedinačno, učenici mogu uopštavanjem doći do zaključka da za funkcije koje su istraživali u GeoGebri važi: u tačkama lokalnih ekstrema funkcije, vrednost prvog izvoda je 0 ili prvi izvod nije definisan.



Slika 5. Deo radnog lista za izvođenje zaključka za sve tri funkcije

▪ Korisniku GeoGebra radnog lista dostupne su sledeće opcije: pokretanje ili zaustavljanje animacije klizača (start/pause), vraćanje klizača na početnu vrednost (reset), povećavanje ili smanjivanje grafičkog prikaza (zoom+, zoom-), kretanje po radnim listovima (Next, Back), provera tačnosti odgovora ili zaključaka (Odgovor, Zaključak), koje se aktiviraju izborom odgovarajućeg polja ili dugmeta.

Prikazani GeoGebra dinamički radni list omogućava učenicima/studentima da samostalno kreiraju put kojim dolaze do saznanja, koriste ponuđenu pomoć u skladu sa svojim individualnim sposobnostima i da uče vlastitim tempom.

Za istraživanje problema učenici i studenti su dobili prateći radni list:

Problem: Na osnovu grafika funkcije $y = f(x)$, odredi vrednosti prvog izvoda u tačkama lokalnih ekstrema funkcije.

1) $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2}{4}$

Plan:

Pomoć: Koja je geometrijska interpretacija prvog izvoda?

Prvi izvod funkcije u tački x_0 je _____.

Ukratko zapiši svoj plan.

Realizacija plana:

Na osnovu grafika funkcije $y = f(x)$ odredi tačke lokalnih ekstrema.

Funkcija $y = f(x)$ ima lokalne ekstreme u tačkama: _____.

Da bi odredio vrednosti prvog izvoda u tačkama lokalnih ekstrema funkcije možeš da izabereš neku od ponuđenih vrsta pomoći.

Najpre izaberi pomoć „prikaži tangentu”. Pomeraj klizač x_0 i posmatraj kako se tačka $M(x_0, f(x_0))$ „kreće” po grafiku. Posmatraj promenu položaja tangente grafika u tački M . Zaustavi klizač kada je M tačka lokalnog ekstrema funkcije. Posmatraj tangentu i odredi njen koeficijent pravca. Odredi vrednost prvog izvoda funkcije u tački lokalnog ekstrema. Pokreni klizač x_0 i ponovi postupak za ostale tačke u kojima funkcija ima lokalne ekstreme.

Ako su ti potrebna detaljnija objašnjenja, na raspolaganju su ti i druge vrste pomoći: prikaz nagiba tangente, prikaz svih podataka o tangenti i prikaz vrednosti prvog izvoda. Nakon izbora pomoći pomeraj klizač x_0 , prati promene u grafičkom delu prozora i u polju izabраниh pomoći, kako bi došao do potrebnih podataka. Popuni tabelu:

Tačka lokalnog ekstrema	$x_0 =$	$x_0 =$	$x_0 =$
Koeficijent pravca tangente	$k =$	$k =$	$k =$
Prvi izvod funkcije u tački lokalnog ekstrema	$f' () =$	$f' () =$	$f' () =$
Nacrtaј deo grafika funkcije $y = f(x)$ u okolini tačke lokalnog ekstrema i tangentu u toј tački.			

Zaključak:

Vrednost prvog izvoda funkcije $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2}{4}$ u tačkama lokalnih ekstrema je _____.

Izaberi polje „prikaži grafik izvodne funkcije”. Na osnovu grafika funkcije $f(x)$ i grafika njene izvodne funkcije, pomeranjem klizača, odredi vrednosti prvog izvoda u tačkama lokalnih ekstrema. Da li si došao do istog zaključka?

Proveri svoje rešenje korišćenjem analitičkog zapisa za izvodnu funkciju $f'(x)$.

Dugme „Next” te vodi na sledeći problem. Sprovedi istraživanje, sastavi tabelu i zapiši zaključak.

Trudi se da manje koristiš pomoć!

2) $f(x) = 2 \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

3) $f(x) = 2 \sqrt[3]{(x+1)^2} - 2$

Zapiši zaključak koji se odnosi na sva tri primera.

U tačkama lokalnih ekstrema funkcije $f(x)$, prvi izvod _____.

7. Zaključak

Edukativni softver GeoGebra pruža široki spektar mogućnosti za pripremu digitalnih materijala koji su prilagođeni potrebama samostalnog učenja pomoću računara. Nastavni sadržaji koji su adekvatno didaktički i metodički oblikovani, omogućavaju učenicima da u saznavnom procesu primene Poljin model rešavanja problema i da se vremenom osposobe za samostalno učenje.

Primena prikazanog pristupa konceptu lokalnih ekstrema funkcije je dala pozitivne efekte na postignuća učenika i studenata. Nakon provere znanja iz oblasti primene izvoda na određivanje lokalnih ekstrema funkcije utvrđeno je da je većina učenika/studenata usvojila koncept lokalnih ekstrema i stekla neophodna proceduralna znanja za njihovo analitičko određivanje. Rezultati koje su oni ostvarili na proveru znanja su bili bolji od rezultata učenika/studenata prethodnih generacija koji su ove nastavne sadržaje obrađivali primenom tradicionalnih metodskih pristupa.

Utisci i zapažanja učenika i studenata o časovima na kojima su koristili GeoGebra, u istraživački usmerenoj nastavi, ukazuju na njihovo zadovoljstvo i pozitivan stav prema primeni računara i realizaciji nastave i procesa učenja primenom prikazanog metodskog pristupa. Takođe su istakli da je dinamičko-vizuelno okruženje podstaklo njihovo aktivnije učešće u procesu nastave i zainteresovanost za samostalno rešavanje problema i izvođenje zaključaka. Kao nedostatak ove metode učenici i studenti navode njenu zahtevnost, u smislu njihovog intezivnog angažovanja na času za koje su smatrali da je naporno.

Priprema nastavnih materijala, realizacija nastave i učenje po Poljinim principima zahtevaju više vremena i truda od nastavnika i učenika, ali imaju i veću pedagošku vrednost.

Bibliografija

- [1] **A. Orton**. Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 1983, 14(3), 235-250.
- [2] **D. Tall**. Students' difficulties in calculus. In: *C. Gaulin (ed.) et al., Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME 7, Quebec, Canada*, 1993, pp. 13-28.
- [3] **D. Tall**. Intuition and Rigour: The Role of Visualization in the Calculus. In: *W. Zimmerman and S. Cunningham (eds.), Visualization in Teaching & Learning Mathematics, Washington, DC: Mathematical Association of America*, 1991, pp. 1-7.
- [4] **Đ. Takači, D. Pešić, M. Milutinović**. Usvajanje pojma neprekidnosti funkcije. *Pedagoška stvarnost*, 2005, 51 (5-6), 387-397.
- [5] **GeoGebra Forum**. <http://forum.geogebra.org/>
- [6] **GeoGebra Tube**. <http://tube.geogebra.org/>
- [7] **G. Polya**. Kako ću riješiti matematički zadatak. *Školska knjiga, Zagreb*, 1966.
- [8] **Г. Поля**. Математическое открытие. *Наука, Москва*, 1976, pp. 305–306.
- [9] **I. Biza, D. Diakoumopoulos, A. Souyoul**. Teaching analysis in dynamic geometry environments. *Proceedings of the 5th Conference of European Research in Mathematics Education, Larnaca, Cyprus*, 2007, pp. 1359-1368.
- [10] **J. Milovanović**. Primena poljinog algoritma u rešavanju matematičkih zadataka sa obeležjem standarda problemskog tipa. *Pedagogija*, 2010, 65(3), 482-493.
- [11] **Q. Li and X. Ma**. A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review*, 2010, 22(3), 215-243
- [12] **T. Eisenberg**. Functions and associated learning difficulties. In: *D. Tall (ed.), Advanced mathematical thinking, Springer Netherlands* 1991, pp. 140-152.
- [13] **Ž. B. Dijanić**. Učenje matematike otkrivanjem uz pomoć programa dinamičke geometrije GeoGebra–Akcijsko istraživanje. *The Third International Scientific Colloquium "Mathematics and Children" – The Math Teacher, Osijek*, 2011, pp. 491-504.
- [14] **Z. Karadag, D. McDougall**. Dynamic worksheets: visual learning with guidance of Polya. *MSOR Connections*, 2009, 9(2), 13-16.
- [15] **Z. Kurnik**. Istraživačka nastava. *Matematika i škola*, 2008, 10(47), 52-59.

Семинар „ГеоГебром кроз свет математике“ – сврха и утицај на наставу

Јована Јездимировић

ГеоГебра Центар Београд

e-mail: jezdimitrovic.jovana@gmail.com

Славиша Радовић

ГеоГебра Центар Београд

e-mail: radovic.slavisa@gmail.com

Мирослав Марић

Математички факултет, Универзитет у Београду

e-mail: maricm@matf.bg.ac.rs

Апстракт. У овом раду ће бити приказани резултати истраживања о ставовима и компетенцијама наставника математике за коришћење информационо-комуникационих технологија (ИКТ) у наставном процесу. Спроведено је квалитативно испитивање везано за улогу наставника у традиционалној и е-настави као и употребу ИКТ-а и програмског пакета ГеоГебра на часовима математике. Истраживање је имало за циљ да покаже да ли су разлике у коришћењу традиционалних и/или савремених ИКТ наставних материјала међусобно повезане са индивидуалним разликама у ставовима, радном искуству и професионалним вештинама наставника математике.

Кључне речи: ГеоГебра; ИКТ; наставници математике.

1. Увод

Многи аутори наводе да је занимање наставника стресно, као и да је стрес један од главних проблема савременог образовања (Milstein & Golaszewski, 1985; Vandenberghe & Huberman, 1999; Younghusband, Garlie & Church, 2003).

Широк спектар фактора је наведен као узрок појаве стреса код наставника од којих је најчешћи коришћење ИКТ-а како у учионици, тако и ван ње. Штавише, извршена су многа истраживања у циљу ближег описа природе стреса коју наставници доживљавају (Lazarus & Folkman, 1984; French, 1982, Al-Fudail, & Harvey Mellar, 2008), а због посебних промена које изазива у понашању, физичком и психичком смислу, многи аутори га посебно истичу и називају технострес – стрес изазван коришћењем информационо-комуникационих технологија (Al-Fudail, & Harvey Mellar, 2008; Weil, & Rosen, 1997). Истовремено, ови аутори, узрок техностреса доводе у директну везу са: недостатком професионалних вештина наставника у коришћењу ИКТ-а, неинформисаности о примерима добре електронске наставне праксе и непостајању адекватних обука за коришћење програмских пакета корисних у настави.

Систематска истраживања наставе уз помоћ рачунара сугеришу да постоје мали, али позитивни ефекти у односу на традиционалну наставу (Blok, Oostdam, Otter, & Overmaat, 2002; Torgerson & Elbourne, 2002). Међутим, и поред повећања доступности и потенцијалне предности учења применом рачунара, истраживања показују да су рачунари недовољно искоришћени у многим школама и да се потенцијали рачунарске технологије не реализују (Abrami, 2001).

2. О стручном семинару

У међународном истраживању наставе и учења ТАЛИС (ОЕСД, 2014) се наводи да нема довољно корисних интернет страна и програма на српском језику који би били корисни као допунски педагошки алат; да наставници немају одговарајућу обуку за коришћење таквих алатки, чак и ако их има довољно на располагању – и поред усавршавања наставника кроз разне програме Завода за унапређење образовања и васпитања. Образовни систем у Србији је такав да је, на основу истог међународног истраживања, само мали број наставника у Србији завршило неки од програма стручног усавршавања за наставнике, који је значајно испод просека за ТАЛИС земље.

У сврху превазилажења проблема ниске интеграције ИКТ-а у наставном процесу математике (Abrami, 2001; ОЕСД, 2014; Jezdimirović, 2014), Завод за унапређење образовања и васпитања, ГеоГебра Центар Београд и Регионални Центар за професионални развој запослених у образовању Чачак су подржали стручни семинар под називом „ГеоГебром кроз свет математике“.

Основни циљ семинара за наставнике математике из основних и средњих школа у Србији био је обука у коришћењу ИКТ-а и програмског пакета ГеоГебра путем интерактивних радионица и активног учествовања наставника у коришћењу и креирању електронских наставних материјала.

Планирано је да се одржи више семинара за све заинтересоване наставнике током две школске године (2014-2016) током којих би се кроз једнообразни облик стручног усавршавања презентовали: постојећи мултимедијални наставни материјали на српском језику; софтверске могућности за креирање наставних јединица и истовремено размењивала искуства наставника из различитих школа и нивоа образовања.

Планирано је да овај стручни скуп, током своје двогодишње акредитације, омогући обуку наставника математике у коришћењу ИКТ-а, идентификује могуће постојање техностреса у Србији, као и ставове наставника о коришћењу електронских материјала и технологије на часовима математике, али и да одговори на питања о успешности пружене обуке.

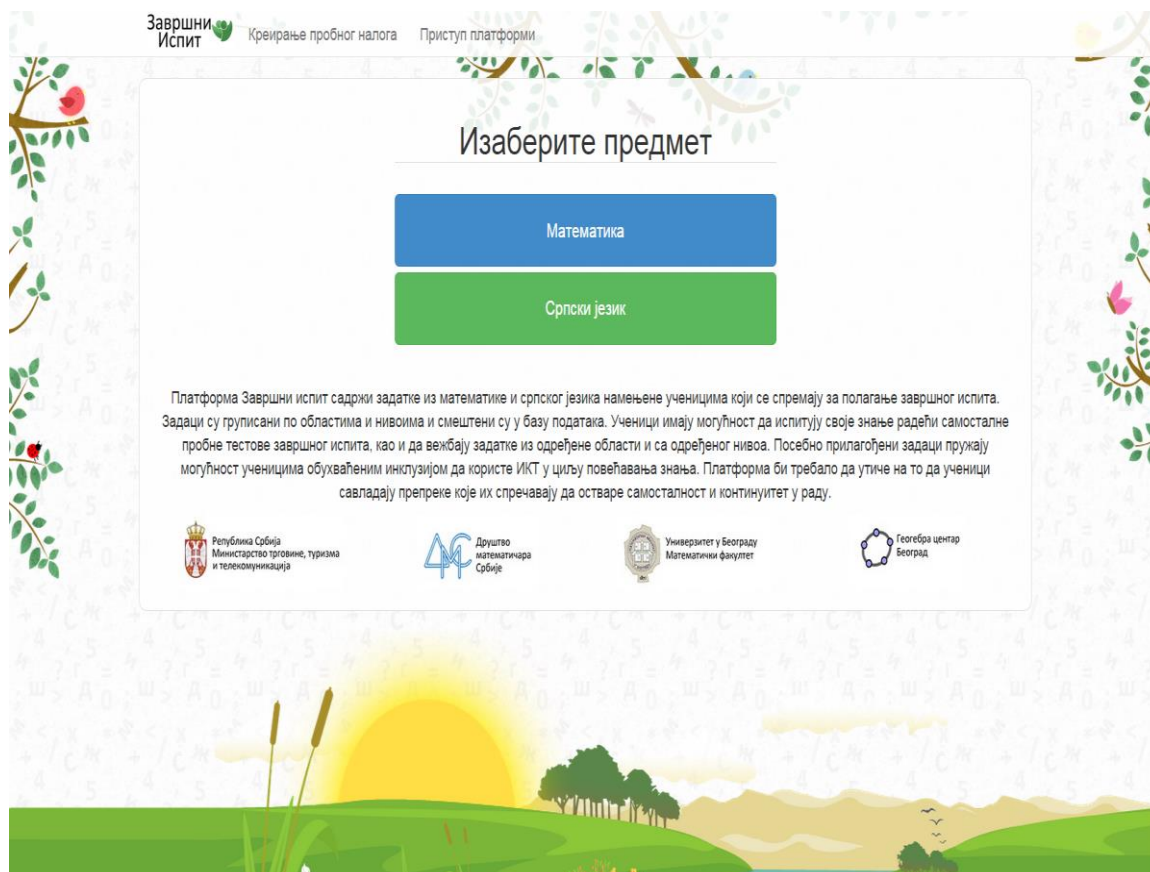
Технологије које су коришћене на стручном скупу су укључивале: лаптоп, пројектор, рачунаре за учеснике и одговарајући програмски пакет у сарадњи са школама учесницама. Истовремено, радионице у оквиру семинара су обрађивале теме као што су интегрисање Веб ресурса у лекцијама (нпр. употреба ГеоГебре у циљу омогућавања динамичке манипулације једначинама, визуализацију геометрије, алгебре, анализе итд), као и оспособљавање наставника за употребу и креирање сопствених наставних материјала помоћу програмског пакета ГеоГебра. Техничка и педагошка помоћ је пружена наставницима на семинару у непосредној комуникацији – у облику размене идеја, сугестија и примера добре наставне праксе али и омогућена након завршеног стручног скупа помоћу електронске поште и друштвених мрежа.

Постоји велики број различитих образовних софтвера који доприносе лакшем усвајању знања из математике код ученика (Hohenwarter & Fuchs, 2004; Radović & Marić, 2013), нарочито када је реч о софтверима за динамичку геометрију. Један од њих је и ГеоГебра који представља вишејезични програмски пакет намењен изучавању Еуклидске геометрије, алгебре, анализе, статистике и других математичких области као и повезивању математичких модела са другим природним наукама. Са свим објектима и функцијама које поседује, овај софтвер јача математичке вештине и визуелизацију различитих апстрактних појмова. Из поменутих разлога је програмски пакет ГеоГебра изабран за обуку наставника у креирању е-материјала, као и превазилажење стреса при коришћењу ИКТ-а у савременој настави математике.

У сврху упознавања наставника са постојећим едукативним платформама – образовним технологијама које омогућавају лаку интеграцију ИКТ-а у наставни процес, али пре свега повећавају интересовање ученика за учење математике (Hohenwarter & Fuchs, 2004; Radović & Marić, 2013), приказани су бројни е-материјали међу којима и едукативна платформа „Завршни испит“, на

Слици 1, коју су осим Министарства трговине, туризма и телекомуникација, подржали и Друштво математичара Србије, Математички факултет Универзитета у Београду као и ГеоГебра Центар Београд.

Циљеви презентације овог али и сличних електронских наставних материјала су бројни: пружање подршке наставницима у интеграцији ИКТ-а са посебним освртом на индивидуализовану наставу; едукација о доступним наставним материјалима који би омогућили припреме за завршни испит, али и повећање квалитета логичког мишљења код ученика, разумевања прочитаног и с тим у вези боље коришћење стеченог математичког знања.



Слика 1. Едукативна платформа „Завршни испит“

3. Методологија

Истраживање о вези између коришћења традиционалних и/или савремених ИКТ наставних материјала са индивидуалним разликама у ставовима, радном искуству и професионалним вештинама наставника математике је спроведено током једнодневног стручног скупа октобра 2014. год. у Регионалном центру за професионални развој запослених у образовању у Чачку. Испитанике је чинила хетерогена група од 29 наставника из основних и средњих школа, са различитим бројем година радног искуства. Већина испитаника била је женског пола (27 женског и 2 мушког пола), при чему је највише било наставника предметне наставе у основној школи (26 наставника математике из основне школе, 1 наставник разредне наставе из основне школе и 2 наставника опште образовних предмета из средњих школа). Просечан број година радног искуства испитаника је 8,56, при чему је највећи број испитаника са радним искуством од 0-7 година (14 испитаника), а најмањи са 26-35 година стажа (1 испитаник).

Сви испитаници су били високог образовања.

Индивидуалне разлике, професионалне компетенције у коришћењу ИКТ-а и ефикасност пружене обуке наставницима су истражени помоћу података добијених из анкете, упитника и интервјуа на које су одговарали сви испитаници.

Испитаници су пре почетка ИКТ обуке одговарали на анкету коју су чинила питања затвореног типа. Анкета је дизајнирана тако да одговори на питања о: полу наставника, годинама радног стажа, ставу о употреби ИКТ-а у настави математике, компетенцијама за коришћење ИКТ-а, мишљењу о бројности доступних интерактивних материјала из математике на српском језику, начину примене електронских материјала у настави, итд.

Наставници су током семинара у индивидуалним интервјуима износили своје ставове о коришћењу мултимедијалних наставних средстава, потреби за ИКТ обуком или другим обликом усавршавања, о мерама које је неопходно предузети да би информационо-комуникационе технологије лакше и успешније нашле место у традиционалној настави математике.

Евалуација пружене обуке садржала је упитник по узору на Ликертову скалу процене (Потпуно се слажем 4, Углавном се слажем 3, Делимично се слажем 2, Углавном се не слажем 1, Уопште се не слажем 0) и састојао се од десет питања као на *Слици 2*. Обзиром да је главни циљ упитника био да пружи веродостојну оцену пружене обуке, испитаници су на њега одговарали тек након завршеног семинара.

4. Резултати

Резултати спроведеног истраживања указују да би, и поред нерепрезентативног узорка испитаника, наставници математике могли имати позитиван став према коришћењу ИКТ-а у настави, без обзира на број година радног искуства и пол. У том смислу, сви испитаници сматрају да је пожељно користити иновативне наставне материјале, при чему неки од њих оцењују да је употреба ИКТ-а чак неопходна у настави математике. Већина наставника сматра да им је усавршавање у коришћењу ИКТ-а потребно и наводе да су током школовања, самостално, од колега као и на семинарима имали прилике да унапреде своје компетенције из ове области. Интервјуи са испитаницима сведоче о томе да су неке од мера које је неопходно предузети да би информационо-комуникационе технологије лакше и успешније нашле место у традиционалној настави математике била усавршавања у: “Методици на савремен начин, е-учењу, кроз семинаре, радионице, коришћењу рачунара у настави, итд“.

Испитаници не наводе да им је коришћење мултимедијалних наставних средстава стресно, са друге стране, сви наставници математике већ поседују већину потребних вештина и знања у раду са рачунарима због организоване ИКТ обуке током школовања на факултету. Истовремено, испитаници исказују потребу за даљим усавршавањем у овој области. Са тим у вези би се могло поставити питање да ли би наставницима других предмета (историја, биологија, ликовно,...) у савладавњу техностреса (Al-Fudail, & Harvey Mellar, 2008; Weil, & Rosen, 1997) помогла организована ИКТ обука током школовања на факултету?

Наставници такође наводе да до информација о организованом усавршавању најчешће долазе од установе у којој раде, а нешто ређе од центра за стручно усавршавање, од колега и из каталога о акредитованим стручним скуповима. Спремност и мотивацију за даље усавршавање у овој области на одржаном стручном скупу показали су углавном наставници из основних школа, у односу на наставнике математике у средњим школама. Репрезентативни узорак испитаника би у даљој студији помогао у разјашњењу да ли се наставници математике више усавршавају од својих колега из средњих школа као и могуће разлоге за ову појаву.

Већина испитаника се слаже са тврдњом да не постоји адекватан број едукативних материјала за наставу математике на српском језику, али са друге стране предлажу интерактивну таблу, ГеоГебра сајт, ГеоГебра програмски пакет и активно коришћење рачунара у свакодневној настави математике.

Евалуација пружене обуке дата је на *Слици 2* и показује корисност пружене ИКТ обуке. Испитаници су оценили семинар са просечном оценом 3,765 од 4. Иако је већина испитаника била, по својој оцени, на средњем ступњу компетенција за коришћење ИКТ-а у настави, на крају једнодневне обуке креиран је велики број наставних јединица: омотач коцке, омотач купе, симетрија, графичко представљање система једначина, пресек кружница, итд. Штавише, испитаници су наставили са ширењем стечених знања и након стручног скупа објављивањем креираних наставних материјала на сопственим сајтовима, блоговима, друштвеним мрежама итд.



Слика 2. Евалуација семинара

5. Закључак

Циљ иновација у настави у смислу начина преношења и стицања знања кроз интеграцију ИКТ-а у наставни процес има за сврху мотивисање ученика за стицање компетенција неопходних у савременом друштву. Истовремено, иновативне методе коришћења ИКТ-а у настави се неретко срећу једино у облику Power Point презентација одређене наставне јединице (OECD, 2014) и да се због тога не реализују потенцијали рачунарске технологије (Abrami, 2001). Оваква наставна пракса показује да је и поред бројних и дугогодишњих трибина Завода за унапређење образовања и васпитања, наставницима и даље најпотребнији професионални развој у употреби нових технологија на радном месту.

Емпиријски подаци изведене студије показују да би стратегије за промену традиционалног стила наставе биле ефикасније када би постојала организована и детаљна обука наставника пре употребе информационо-комуникационих технологија у едукативном процесу. Репрезентативан узорак испитаника могао би током будућег истраживања дати поуздан одговор на питање о разликама у ИКТ компетенцијама и спремности за даље усавршавање у овој области између наставника математике из

основних и средњих школа, разликама у полу, радном стажу, идентификацији техностреса итд. У том циљу је даље праћење утицаја и потенцијала стручног семинара „ГеоГибром кроз свет математике“ кроз студије, које би са репрезентативним узорком испитаника, требало да обезбеде одговоре на сва релевантна питања о његовим ефектима на наставни процес.

Библиографија

- [1] **Abrami, P. C.** Understanding and promoting complex learning using technology. *Educational Research and Evaluation*, 2001, 7, 113–136.
- [2] **Al-Fudail, M., Mellar H.** Investigating teacher stress when using technology. *Computers and Education*, 2008
- [3] **Blok, H., Oostdam, R., Otter, M. E., & Overmaat, M.** Computer-assisted instruction in support of beginning reading instruction: A review. *Review of Educational Research*, 2002, 72, 101–130.
- [4] **French, J. R. P., Caplan, R. D., & Harrison, R. V.** The mechanisms of job stress and strain. Chichester: *Wiley*, 1982.
- [5] **Hohenwarter, M., & Fuchs, K.** Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. Proceedings of Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference, 2004
- [6] **Jezdimirović, J.** Visual Methods in Computer-Assisted Instruction. GeoGebra software, e-materials and teachers training. *VisMath Journal Publisher: Mathematical Institute SASA, Belgrade*, 2014, 16_2.
- [7] **Lazarus, R. S., & Folkman, S.** Stress, appraisal, and coping. New York: *Springer*, 1984.
- [8] **Milstein, M., & Golaszewski, T.** Effect of organizationally based and individually based stress management efforts in elementary school settings. *Urban Education*, 1985, 19(4), 389–409.
- [9] **OECD**, New Insights from TALIS 2013: Teaching and Learning in Primary and Upper Secondary Education, *OECD Publishing*, 2014. <http://www.oecd.org/edu/school/TALIS-2013-country-note-Serbia.pdf> Приступљено 01.02.14.
- [10] **Radović, S., & Marić, M.** Uloga domaćih zadataka u obrazovanju. New York: *John Wiley and Sons, Inc.*, 2013.
- [11] **Torgerson, C. J., & Elbourne, D.** A systematic review and meta-analysis of the effectiveness of information and communication Technology (ICT) on the teaching of spelling. *Journal of Research in Reading*, 2002, 25, 129–143.
- [12] **Vandenberghe, R., & Huberman, A. M.** Understanding and preventing teacher burnout: a sourcebook of international research and practice. Cambridge: *Cambridge UP*, 1999.
- [13] **Weil, M. M., & Rosen, L.** Technostress coping with technology @ work @ home @ play. New York: *John Wiley and Sons, Inc.*, 1997 .
- [14] **Younghusband, L., Garlie, N. and Church, E.** High school teacher stress in Newfoundland, Canada, In: International conference on education, Hawaii, 2003. http://www.hiceducation.org/Edu_Proceedings/Lynda%20Younghusband.pdf Приступљено 09.01.13.

Појам елипсе у средњошколској настави математике

Игор Баџац

Београдска пословна школа, Краљице Марије 73, Београд

Апстракт. Појам елипсе је стандардни део гимназијског програма у Србији. И поред тога, искуство говори да у пракси постоје многобројни проблеми, што је дошло до изражаја и на овогодишњем Државном такмичењу из математике. Међу проблемима је и то што велики број ученика појам елипсе не види као геометријски појам, а приликом покушаја геометријског размишљања често се на основу податка да ли тврђење важи за круг закључује аналогно и за елипсу. Овај проблем није везан само за ученике гимназија, пошто се задаци који садрже појам елипсе често јављају и на пријемним испитима за факултете у Србији. Међутим, и ти задаци се обично свде на познавање и примену једне формуле, те је са становишта ученика често и пожељно да елипсу не посматрају као геометријски објекат. Циљ рада је да укаже на овај проблем и представи тврђења која је аутор користио да подстакне ученике да у овој области размишљају и геометријски и алгебарски, као и да им укаже на сличности и разлике круга и елипсе.

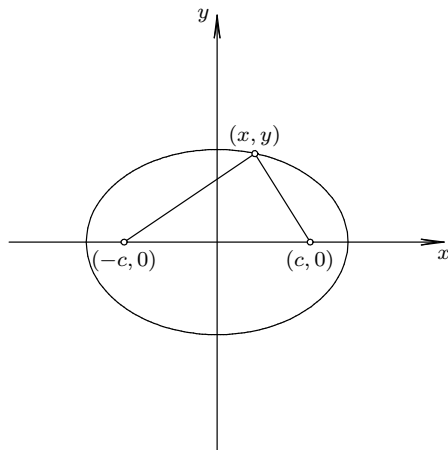
Кључне речи: елипса, круг, целобројна решетка

1. Увод

Круг је појам који је био познат од самих почетака људског бављења математиком. Са овим појмом се и деца срећу доста рано. Још у основној школи ђаци су упознати са конструкцијом круга, па им је и сама дефиниција разумљива. Особине круга су прихватљиве већини ученика, па је овај појам приступачан и у геометријском и у алгебарском смислу.

Са друге стране, појам елипсе се у школовању уводи доста касније, а приликом тога се обично инсистира на њеним алгебарским особинама (заинтересовани читалац може наћи типичан избор задатака који се у школи раде из ове области у, на пример, [3]). Велики број ђака на помен елипсе помисли само на неку једначину, без икакве представе о томе да је то геометријски објекат познат још од старих Грка. На то их прилично наводи и облик задатака који се захтевају од њих, као што су задаци који се јављају на пријемним испитима за факултете у Србији, где се задаци из ове области свде на примену неколико формула. И поред тога што ученици увежбавају овакав облик задатака, искуство аутора говори да добар део њих не уме да изведе чак ни канонски облик једначине елипсе, а велики број не види да овакви задаци имају икакве везе са геометријом.

Услед наведених проблема и зарад потпуности приче, у овом делу наведено је извођење канонског облика једначине елипсе.



Слика 1. Елипса

Лема 1. Нека су $a, c \in \mathbb{R}$, $a > c > 0$ и $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Скуп тачака у xOy равни чији је збир растојања од тачака $(-c, 0)$ и $(c, 0)$ једнак $2a$ (слика 1) једнак је скупу решења једначине $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Доказ. За тачку првопоменутог скупа важи $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, па се квадрирањем добија $x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$, што је даљим сређивањем еквивалентно са $4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4(a^2 - xc)$, одакле је, квадрирањем, $16(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = 16(a^4 - 2a^2xc + x^2c^2) \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Leftrightarrow a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$, односно $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Са друге стране, ако је $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, онда је $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, па је $(x-c)^2 + y^2 \leq 2(x^2 + c^2) + y^2 \leq 2(a^2 + a^2 - b^2) + b^2 \leq 4a^2 - b^2 \leq (2a)^2$, односно $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \leq 2a$ и $|xc| \leq ac \leq a^2$, па су горња квадрирања и еквиваленције (обе стране одговарајућих једнакости су ненегативне). \square

Претходно тврђење Ђацима се може илустровати помоћу два ексера забодена у две тачке – жиже $(-c, 0)$ и $(c, 0)$ и канапа чија је дужина $2a$, која је већа од њиховог међусобног растојања.

Иако је ово директно уопштење одговарајућег примера за конструкцију круга, искуство говори да велики број деце препознаје начин конструкције круга, али не препознаје начин конструкције елипсе. Један од разлога за то може бити што велики број наставника избегава да помиње овај поступак зато што им делује сувише неозбиљно, упркос томе што је Ђацима веома јасан.

Напоменимо и да терминологија која је тренутно заступљена код нас није у потпуности усаглашена и негде се под елипсом сматра линија ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$), негде ограничена површ одређена овом линијом ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$), а најчешће оба, а од ученика се очекује да из контекста сам закључи које је значење.

2. Разлике између круга и елипсе

Приликом упознавања са елипсом, уколико се прави аналогија са кругом, пожељно је нагласити које су особине исте, а које се разликују код круга и елипсе. Притом, не мали проценат ученика прави грешку, сматрајући да су „једноставне” особине исте, а „компликоване” нису. (Међутим, на питање шта је „просто”, а шта „компликовано” не знају да одговоре.) Стога су у овом раду представљене неке особине које су заједничке и неке по којима се разликују круг и елипса. У раду су дата и нека тврђења која могу да допринесу бољем познавању елипсе.

Лема 2.a. Дужине тангентних дужи на круг из тачке ван круга су међусобно једнаке.

Ово је скоро свим ученицима позната чињеница и овом приликом је изостављен њен доказ. Поставља се питање да ли аналогно тврђење важи и за елипсу.

Лема 2.b. Дужине тангентних дужи елипсе из тачке ван ње не морају бити међусобно једнаке.

Доказ. Нека је елипса дата једначином $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Тангенте из тачке (a, b) се налазе на правама $x = a$ и $y = b$, а њихови одсечци су дужина b и a , редом. Дакле, ако елипса није круг, одсечци могу бити различитих дужина. \square

На питања колико се кругова може описати кроз две тачке или колико се кругова може описати кроз три неколинеарне тачке, тачан одговор даје већина ученика, док за слично питање о елипси обично настане проблем. Довољан показатељ за то је овогодишње Државно такмичење из математике, на ком је био задатак који има везе са елипсом (задаци са овог такмичења могу се наћи, на пример, у [4]). Питање је било колико се елипси може описати око једнакостраничног троугла.

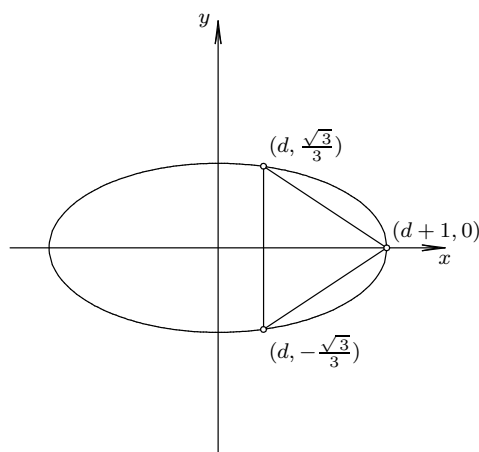
Од 48 ђака, који су решавали овај задатак, само троје је имало више од 8 поена (од могућих 20), а просек освојених поена на овом задатку износио ја само 2,5. Притом треба нагласити да је ниво математичког знања ученика који су се пласирали на ово такмичење знатно изнад просечног нивоа знања ученика у Србији.

Одговор на ово питање приказаћемо у следећем тврђењу.

Лема 3. Око једнакостраничног троугла се може описати бесконачно много елипси.

Доказ. Без умањења општости, нека висина троугла износи 1, па је дужина странице $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Нека је $d > 0$ произвољан број и нека је троугао смештен у координатну равн, тако да једно теме има координате $(d+1, 0)$, а страница наспрам овог темена је паралелна y -оси (слика 2). Онда су координате преостала два темена $(d, \frac{\sqrt{3}}{3})$ и $(d, -\frac{\sqrt{3}}{3})$. Докажимо да око овог троугла можемо описати елипсу чији је центар координатни почетак, а полуосе a и b припадају координатним осама. Нека је $a = d+1$. Овом претпоставком је обезбеђено да се једно теме троугла налази на елипси. Како елипса описана око једнакостраничног троугла мора садржати и преостале две тачке, тада мора бити испуњен и услов

$$\frac{d^2}{a^2} + \frac{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}{b^2} = 1 \quad \text{за неко } b > 0.$$



Слика 2. Елипса описана око једнакостраничног троугла

Како је ова једнакост еквивалентна са

$$b = \frac{d+1}{\sqrt{3(2ad+1)}},$$

слиди да постоји $b > 0$ које задовољава овај услов, а самим тим и елипса описана око уоченог једнакостраничног троугла. Конструисали смо елипсу са траженом особином, а елипси добијених на овај начин има бесконачно много. \square

3. Сличности између круга и елипсе

Претходни примери показују да се круг и елипса прилично разликују. Међутим, они имају и сличне особине, тако да морамо бити јако пажљиви када желимо да пренесемо особине круга на елипсу. Велики је број примера који истичу да круг и елипса имају сличне особине (на пример у пројективној геометрији). Овде наводимо пример који код великог броја ученика често изазове изненађење.

Лема 4.а. Без обзира како је позициониран, круг довољно великог полупречника сигурно покрива бар једну тачку целобројне решетке, а круг довољно малог полупречника не мора да садржи тачку целобројне решетке.

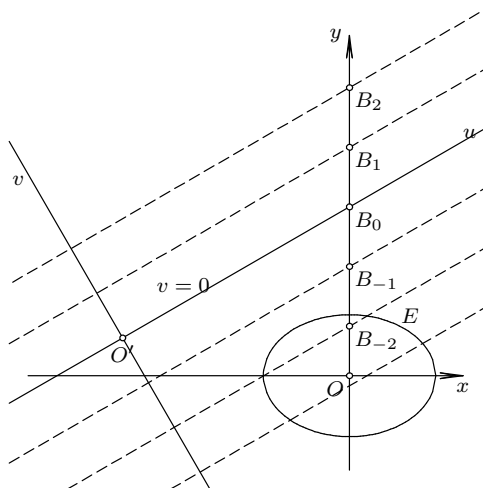
Доказ. С обзиром да је свака тачка равни удаљена не више од $\frac{\sqrt{2}}{2}$ од неке тачке решетке, без обзира на то где се налази центар круга полупречника не мањег од $\frac{\sqrt{2}}{2}$, тај круг ће покривати бар једну тачку решетке (тако да у овој леми довољно велики полупречник значи било који полупречник не мањи од $\frac{\sqrt{2}}{2}$). Са друге стране круг полупречника мањег од $\frac{\sqrt{2}}{2}$, са центром у $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, не садржи ниједну тачку решетке (тако да у овој леми довољно мали полупречник значи било који полупречник мањи од $\frac{\sqrt{2}}{2}$). \square

Аналогно претходном тврђењу за круг, намеће се природно питање да ли исто тврђење важи и за елипсу. Међутим, кругови су међусобно хомотетичне фигуре, док елипсе то не морају бити. Ако су a и b полуосе елипсе, $\frac{a}{b}$ може бити било који позитиван реалан број, односно постоји бесконачно много елипси које се не могу хомотетијом преликати једна на другу, па морамо пажљиво прецизирати тврђење које би било аналогон претходног за елипсу. Искуство из Леме 2.b. показује да се не преносе сва тврђења на општију ситуацију, тако да морамо бити веома опрезни приликом уопштавања. Упркос томе што постоји бесконачно много нехомотетичних елипси, испоставља се да се разматрања из претходног пасуса могу пренети и на елипсу (без обзира на вредност израза $\frac{a}{b}$).

Лема 4.b. Елипса са полуосама a и b мора да садржи бар једну тачку целобројне решетке ако и само ако је $a^2 + b^2 \leq 4a^2b^2$.

Пре доказа, пожељно је са ученицима навести да услов који је дат у леми геометријски значи да тачка $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ припада елипси (унутрашњости) чија је једначина у канонском облику и полуосе a и b ($\frac{(\frac{1}{2})^2}{a^2} + \frac{(\frac{1}{2})^2}{b^2} \leq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 4a^2b^2$). Треба рећи да ова лема превазилази стандардни ниво средњошколских задатака, али да га бољи ученици (са или без сугестије) могу урадити (не захтева се знање технике која није средњошколска), а напоменимо да је ова лема била саставни део рада [1], па се овакви задаци могу искористити за прве покушаје увођења ученика у научни рад. Заинтересовани могу наћи још оваквих проблема нпр. у [2].

Доказ. Нека је E елипса чија је једначина канонска, полуоса a и b , и нека не садржи тачку $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Онда елипса E' , добијена translацијом елипсе E за вектор $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ не садржи тачку $(0, 0)$, а због симетрије ни тачке $(0, 1)$, $(1, 1)$ и $(1, 0)$. Ако би E' садржала тачку (m, n) , (за неке $m, n \in \mathbb{Z}$), због симетрије у односу на праве $x = \frac{1}{2}$ и $y = \frac{1}{2}$, елипси припадају и тачке $(1-m, n)$, $(m, 1-n)$ и $(1-m, 1-n)$, а због конвексности елипсе и све тачке решетке које припадају правоугаонику одређеног са ове четири тачке, па и тачка $(0, 0)$, што је контрадикција. Дакле, E' не садржи ниједну тачку решетке, односно, услов је потребан.



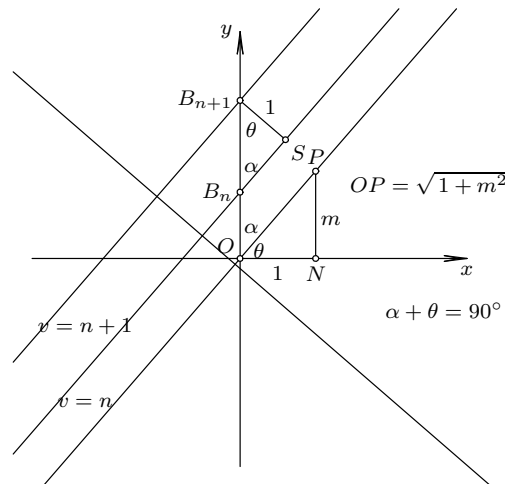
Слика 3. Елипса и координатни системи

Нека за полуосе елипсе важи $a^2 + b^2 \leq 4a^2b^2$. У равн елипсе увешћемо два правоугла координатна система:

- целобројну решетку L тачака (u, v) која је одређена осамом u и v ;
- правоугли координатни систем xOy у ком се елипса налази у стандардној позицији, тј. дата је једначином $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

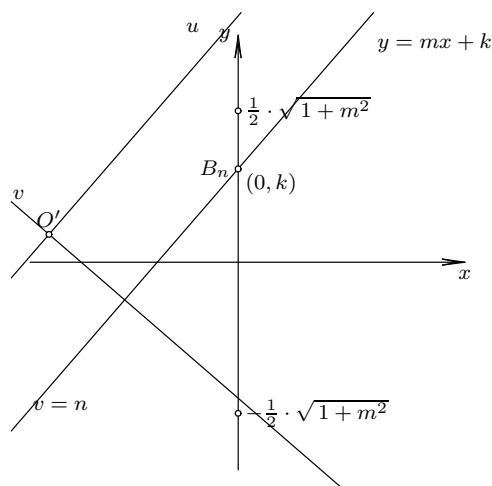
Осе решетке L секу осе координатног система xOy под неким углом и нека је m нагиб осе решетке у односу на x -осу координатног система xOy . Праве $v = n$ решетке (за $n \in \mathbb{Z}$) представљају скуп правих које су на међусобно једнаком растојању. Нека је B_n скуп тачака пресека правих $v = n$ са y -осом (слика 3).

Одредимо прво растојање $B_n B_{n+1}$ између два узастопна пресека са y -осом (праве $v = n$ и $v = n + 1$, за $n \in \mathbb{Z}$, су паралелне и једнако удаљене, па ово растојање не зависи од n).



Слика 4. Однос координатних система

Нека је t права паралелна u -оси решетке L која садржи тачку O , координатни почетак координатног система xOy (слика 4). Нека је P тачка ове праве чија је x координата 1, N подножје нормале из P на x -осу и $\angle PON = \theta$. Како је $\frac{PN}{ON} = m$, следи $PN = m$ и $OP = \sqrt{1 + m^2}$. Нека је S подножје нормале из тачке B_{n+1} на праву $v = n$. Како је $\angle B_{n+1}B_nS = \angle B_nOP = 90^\circ - \theta$, следи $\angle SB_{n+1}B_n = \angle PON = \theta$, тј. $\triangle B_{n+1}B_nS$ и $\triangle PON$ су слични, а како је $SB_{n+1} = ON = 1$, следи и $\triangle B_{n+1}B_nS \cong \triangle PON$, па је $B_{n+1}B_n = OP = \sqrt{1 + m^2}$.



Слика 5. Растојање између две узастопне пресечне тачке

Дакле, ако је B_n тачка из скупа $\{B_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ која је најближа тачки O (ако су две тачке овог скупа најближе, изаберимо за B_n тачку чија је y координата позитивна) и $(0, k)$

координате ове тачке у xOy координатном систему, важи

$$-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+m^2} < k \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+m^2},$$

а једначина праве $v = n$ у xOy координатном систему је $y = mx + k$ (слика 5).

Права $y = mx + k$ сече елипсу E ако и само ако скуп решења система $y = kx + n$, $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2y^2$ није празан. Решавањем овог система следи $b^2x^2 + a^2(mx + k)^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow (a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mkx + a^2(k^2 - b^2) = 0$, па је

$$x = \frac{-a^2mk \pm ab\sqrt{a^2m^2 + b^2 - k^2}}{a^2m^2 + b^2}, \quad (\dagger)$$

ако је $a^2m^2 + b^2 - k^2 \geq 0$ (иначе систем нема решења).

Како је $a^2 + b^2 \leq 4a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \leq 4$, па је $\frac{1}{a^2} < 4$ и $\frac{1}{b^2} < 4$, односно $a^2 > \frac{1}{4}$ и $b^2 > \frac{1}{4}$, па следи

$$k^2 \leq \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+m^2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot (1+m^2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot m^2 < b^2 + a^2m^2.$$

Следи да је $a^2m^2 + b^2 - k^2 > 0$, па једначина (\dagger) има два реална решења, тј. права $y = mx + k$ сече E у две тачке, тј. пресек ове праве и унутрашњости елипсе је дуж. Нека је дужина те дужи d .

Да би доказали да се макар једна тачка решетке L налази унутар E , довољно је доказати да је $d \geq 1$. Ако су x_1 и x_2 , решења једначине (\dagger) , решења система (која су координате крајева ове дужи) су $(x_1, mx_1 + k)$ и $(x_2, mx_2 + k)$, па је

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (mx_2 - mx_1)^2 = (x_2 - x_1)^2(1 + m^2).$$

На основу (\dagger) је

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 &= \left(\frac{2ab\sqrt{a^2m^2 + b^2 - k^2}}{a^2m^2 + b^2}\right)^2 = \frac{4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - k^2)}{(a^2m^2 + b^2)^2}, \\ \text{па је } d^2 &= \frac{4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - k^2)(1 + m^2)}{(a^2m^2 + b^2)^2}, \text{ одакле је} \\ d^2(a^2m^2 + b^2)^2 &= 4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - k^2)(1 + m^2) \\ \Leftrightarrow (d^2 - 1)(a^2m^2 + b^2)^2 &= 4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - k^2)(1 + m^2) - (a^2m^2 + b^2)^2, \end{aligned}$$

тј. довољно је доказати

$$4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - k^2)(1 + m^2) - (a^2m^2 + b^2)^2 \geq 0. \quad (\ddagger)$$

Како је $4a^2b^2 \geq a^2 + b^2 \geq 2ab$ и $a, b > 0$, следи $a^2 + b^2 \geq 2ab \geq 1$, а како је и $k^2 \leq \frac{1+m^2}{4}$, следи $4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - k^2)(1 + m^2) - (a^2m^2 + b^2)^2 \geq 4a^2b^2\left(a^2m^2 + b^2 - \frac{1+m^2}{4}\right)(1 + m^2) - (a^2m^2 + b^2)^2 = a^2(4a^2b^2 - a^2 - b^2)m^4 + \left(4a^2b^2\left(b^2 - \frac{1}{4}\right) + \left(a^2 - \frac{1}{4}\right) - 2a^2b^2\right)m^2 + b^2(4a^2b^2 - a^2 - b^2) = (a^2m^4 + b^2)(4a^2b^2 - a^2 - b^2) + 4a^2b^2m^2(a^2 + b^2 - 1) \geq 0$, односно важи (\ddagger) , тј. услов $a^2 + b^2 \leq 4a^2b^2$ је и довољан. \square

4. Закључак

Аутор је приликом предавања у школи имао прилично лоша искуства са ученицима при прихватању појма елипсе. У овом раду су илустровани неки од примера које је користио у жељи да ученици тај појам боље прихвате. Аутор се нада да је овим радом бар донекле

указао на ове проблеме и да ће приказани примери помоћи да се ученицима приближи појам елипсе, као и да боље уоче њене сличности и разлике са кругом.

Библиографија

- [1] **I. Niven, H. S. Zuckerman.** Lattice Point Coverings by Plane Figures. *American Mathematical Monthly*, 1967, Vol 74, No. 4, 353 - 362.
- [2] **R. Honsberger.** Mathematical Morsels. *The Mathematical Association of America*, 1978.
- [3] **J. Кечкић.** Математика (са збирком задатака) за 3. разред средње школе. *Завод за уџбенике и наставна средства, Београд*, 2010.
- [4] Математичка такмичења средњошколаца у Србији 2013/14, билтен. *Друштво математичара Србије*, 2014.

Трагом једног задатка о векторима

Петар Мелентијевић

Математички факултет, Београд, Студентски трг 16

e-mail: petarmel@matf.bg.ac.rs

Милан Живановић

Висока школа струковних студија за образовање васпитача, Крушевац

e-mail: mzivanovic@vaspks.edu.rs

Апстракт. Метода решавања проблема на више начина је једна од најпродуктивнијих метода учења математике. О њеном значају афирмативно се изјашњавао и један од најутицајнијих аутора из области наставе математике прошлог века Ђерђ Поја. Поред изузетног утицаја на развој мисаоних операција и математичког мишљења, ова метода је корисна и због откривања веза између различитих математичких области. Знања добијена на тај начин су трајнија и лакше се увиђа њихова применљивост у другим ситуацијама. У овом раду поменуто методу ћемо обогатити још једним конкретним примером из теорије вектора у средњошколској настави.

Кључне речи: вектори; правилан петоугао; решавање проблема на више начина.

1. Увод

Са основним елементима теорије вектора у нашем образовном систему се ученици упознају у првим разредима средњих школа. Као интерпретација вектора се посматра усмерена дуж или уређени пар бројева који представља координате вектора у равни. У том узрасту се од операција са векторима обрађују сабирање, одузимање и множење вектора скаларом. Изучавају се још особине колинеарности и компланарности вектора. Истиче се примена векторског рачуна у елегантном доказивању неких геометријских проблема.

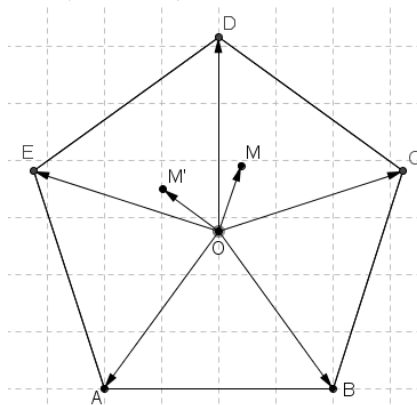
2. Решавање проблема на више начина

У овом тексту ћемо решити један проблем са векторима на више начина. У самим поступцима најпре ће бити кориштене основне особине операција са векторима, особина колинеарности и неки геометријски ставови, а у каснијим и друге напредније интерпретације и особине вектора. Тиме ћемо методу решавања проблема на више начина обогатити још једним конкретним примером из средњошколске праксе.

Задатак: Нека је дат правилан петоугао $ABCDE$ и нека је O центар описане кружнице тог петоугла. Доказати да је:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{0}. \quad (1)$$

Прво решење: Претпоставимо супротно, да је $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} \neq \vec{0}$. Тада у равни петоугла постоји тачка M различита од O , тако да је $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{OM}$ (Слика 1.).



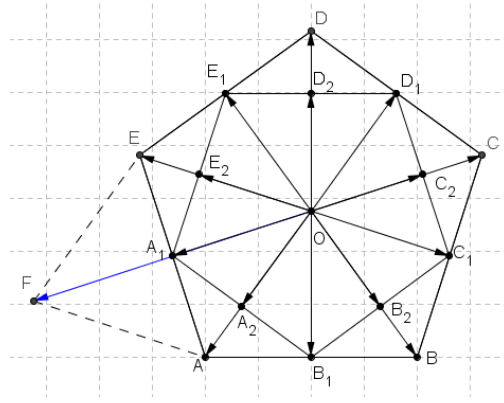
Слика 1. Уз прво решење

Ротацијом петоугла око тачке O за 72° у позитивном математичком смеру сваки од вектора из збира са леве стране се такође ротира за исти угао, те се и резултирајући вектор ротира за исти угао у вектор \vec{OM}' . Међутим, у збиру вектора на левој страни једнакости, после ротације, добијамо исте векторе као и пре ротације, само у другачијем распореду. Стога њихов збир на основу комутативности сабирања, остаје непромењен, тј. мора такође бити једнак вектору \vec{OM} . Како два неколинеарна вектора не могу бити једнака, следи да су \vec{OM} и \vec{OM}' нула вектори. Дакле, закључујемо да је $O \equiv M \equiv M'$, односно $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{0}$.

Друго решење: Нека су A_1, B_1, C_1, D_1 и E_1 редом средишта страница петоугла као на слици 2.

Одредимо векторе: $\vec{OA}_1 = \frac{1}{2}(\vec{OE} + \vec{OA})$, $\vec{OB}_1 = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$, $\vec{OC}_1 = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC})$,

$\vec{OD}_1 = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD})$ и $\vec{OE}_1 = \frac{1}{2}(\vec{OD} + \vec{OE})$. Сабирањем ових једнакости добија се:



Слика 2. Уз друго решење

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OE_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})$$

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OE_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}. \quad (2)$$

Сада посматрајмо петоугао $A_1B_1C_1D_1E_1$ и средишта његових страна A_2, B_2, C_2, D_2 и E_2 . По аналогији са претходним поступком закључујемо да је

$$\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2} + \overrightarrow{OD_2} + \overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OE_1}. \quad (3)$$

На основу транзитивности једнакости из (1) и (2) следи да је:

$$\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2} + \overrightarrow{OD_2} + \overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}. \quad (4)$$

Како су одговарајући парови вектора колинеарни имамо да је:

$$\frac{\overrightarrow{OA_2}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB_2}}{\overrightarrow{OB}} = \frac{\overrightarrow{OC_2}}{\overrightarrow{OC}} = \frac{\overrightarrow{OD_2}}{\overrightarrow{OD}} = \frac{\overrightarrow{OE_2}}{\overrightarrow{OE}} = \lambda \neq 1. \quad (5)$$

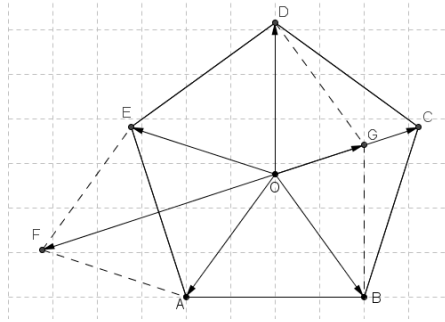
Из (4) и (5) добијамо да је:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \lambda(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})$$

тј. $(1 - \lambda)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) = \vec{0}$. Собзиром да је $\lambda \neq 1$ добија се тврђење

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}.$$

Треће решење: Одредимо прво вектор \overrightarrow{OF} збир вектора \overrightarrow{OA} и \overrightarrow{OE} као на слици 3. На основу особина правилног петоугла закључујемо да је тај вектор колинеаран са вектором \overrightarrow{OC} . Исто закључујемо и за вектор \overrightarrow{OG} , који је једнак збиру вектора \overrightarrow{OB} и \overrightarrow{OD} .

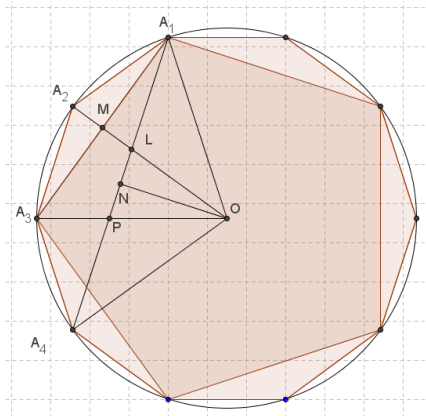


Слика 3. Уз треће решење

На основу свега изложеног закључујемо да је збир $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE}$ колинеаран са вектором \vec{OC} . На аналоган начин се може закључити да је $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE}$ колинеарно и са векторима \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OD} и \vec{OE} . Из свега следи да је то једино могуће ако је $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{0}$.

Четврто решење: На основу претходног решења имамо да је

$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{OF} + \vec{OG} + \vec{OC}$. Полазна једнакост се може доказати директним израчунавањем интензитета вектора са десне стране последње једнакости. Ти вектори су колинеарни и \vec{OF} је супротног смера од вектора \vec{OG} и \vec{OC} . Интензитети тих вектора представљају дужине одговарајућих дужи. За њихово одређивање послужићемо се сликом 4. на којој је дат правилан десетоугао $A_1A_2\dots A_{10}$, а $A_1A_3A_5A_7A_9$ правилан петоугао. Нека је r полупречник кружнице описане око та два многоугла.



Слика 4. Уз четврто решење

Четвороугао $A_1A_2A_3O$ је делтоид те, је пресечна тачка његових дијагонала M средиште краће дијагонале A_1A_3 . Обележимо са L пресек дужи OA_2 и A_1A_4 . Тада су углови $A_2A_1A_3$ и $A_4A_1A_3$ једнаки као периферијски над једнаким тетивама, па су и троуглови A_2A_1M и LA_1M подударни јер су правоугли и имају заједничку катету AM . Стога је и страница десетоугла $a_{10} = A_1A_2 = A_1L$. Имамо даље да је троугао A_1LO једнакокраки $A_1L = OL$ (доказ препуштамо читаоцу), односно $LO = a_{10}$. Такође је дијагонала десетоугла A_1A_4 паралелна

страници A_2A_3 те она од једнакокраког троугла A_2A_3O одсеца једнакокраки троугао LPO . Закључујемо и да је $OP = a_{10}$, а то је заправо интезитет вектора \overrightarrow{OG} .

С друге стране израчунавањем углова у троуглу OLA_4 добије се да је тај троугао једнакокраки те да је $LA_4 = OA_4 = r$. Даље из сличности троуглова A_1OL и A_1A_4O добијамо пропорцију $LO : OA_1 = OA_4 : A_1A_4$, или $a_{10} : r = r : (r + a_{10})$. Решавањем ове пропорције добија се страница десетоугла у функцији полупречника описане кружнице $a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Дакле, $|\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OC}| = r + \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1)$.

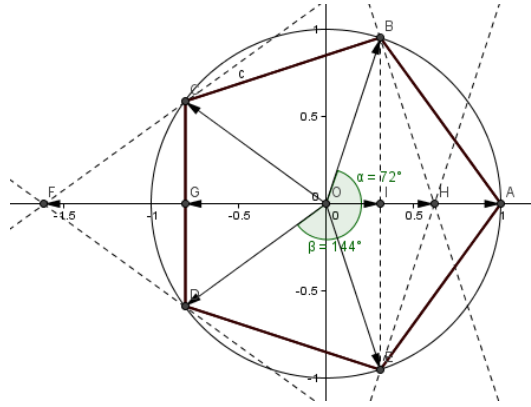
Ако са a_5 обележимо страницу петоугла, може се доказати и једнакост $a_5^2 = a_{10}^2 + r^2$ (Еуклид, Елементи XIII.10¹). На основу тога добијамо да је $a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. Сада применом Питагорине теореме на троугао OEA_1 са слике 2. израчунамо да је $OA_1 = \frac{r}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$. Односно интензитет $|\overrightarrow{OF}| = 2 \cdot OA_1 = \frac{r}{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$. На крају ирационални део трансформишемо

Лагранжевим идентитетом $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$ и добијамо $|\overrightarrow{OF}| = \frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Вектори \overrightarrow{OF} и $\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OC}$ су истог правца, супротног смера и једнаког интензитета те је њихов збир $\vec{0}$. Стога је $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

Пето решење: У другом разреду средње школе одређивање интензитета вектора OF и OG значајно је олакшано применом тригонометријских функција. Интензитет \overrightarrow{OG} се добија применом синусне теореме на троугао ODG а интензитет \overrightarrow{OF} применом косинусне теореме на троугао OEF . За одређивање потребних вредности тригонометријских функција полазимо од очигледне једнакости $\cos(3 \cdot 18^\circ) = \sin(2 \cdot 18^\circ)$ одакле је $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ итд.

Шесто решење: Методом аналитичке геометрије једнакост се доказује представљањем вектора помоћу координата у Декартовом правоуглом координатном систему.

¹Доказ тврђења се може наћи и у књигама [1] и [3] наведене литературе

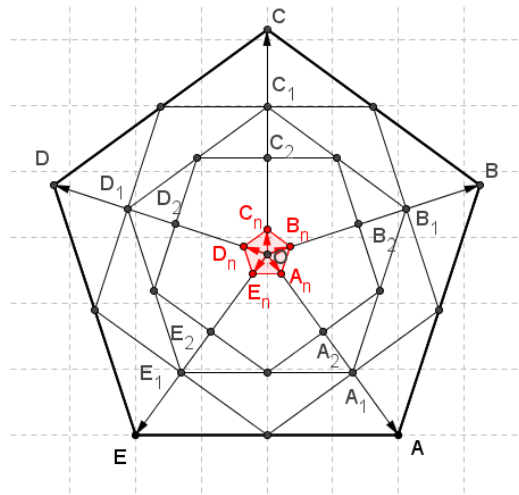


Слика 5. Уз шесто решење

Поставимо центар петоугла у координатни почетак као на слици 5. Лако се уочава да је збир y координата датих вектора једнак 0. Доказ да је и збир x - координата једнак 0 аналаган је доказу из претходног решења. Стога важи и једнакост (1).

Седмо решење: Из теорије комплексних бројева је познато да n -ти корени јединице односно решења једначине $z^n - 1 = 0$ представљају темена правилног n -тоугла са центром у комплексној нули и једним теменом у тачки $z = 1$. На основу тога сва решења једначине $z^5 - 1 = 0$ су $z_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ па су то темена правилног петоугла као на слици 5. На основу Виетових правила је $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 0$, па је и збир вектора положаја тих темена једнак $\vec{0}$.

Осмо решење: Једнакост се може показати и помоћу математичке анализе коришћењем идеје из решења 2. Конструиримо низ петоуглова $A_n B_n C_n D_n E_n$ као на слици 6.



Слика 6. Уз осмо решење

На основу другог решења имамо да је:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{OA_n} + \vec{OB_n} + \vec{OC_n} + \vec{OD_n} + \vec{OE_n}.$$

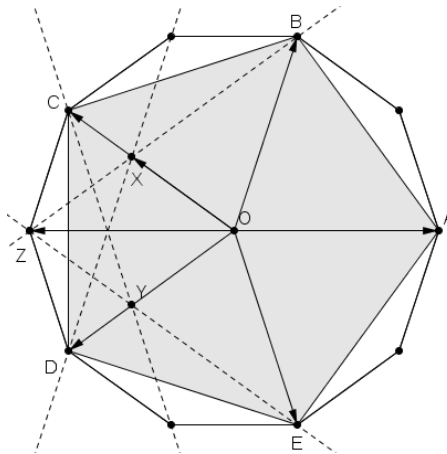
Низови $|\vec{OA}_n|, |\vec{OB}_n|, |\vec{OC}_n|, |\vec{OD}_n|, |\vec{OE}_n|, n \in \mathbb{N}$ су конвергентни као геометријски са количником $q = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{8} \in (0,1)$, те теже нули.

$$\begin{aligned} \text{Отуда је: } |\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE}| &= |\vec{OA}_n + \vec{OB}_n + \vec{OC}_n + \vec{OD}_n + \vec{OE}_n| \\ &\leq |\vec{OA}_n| + |\vec{OB}_n| + |\vec{OC}_n| + |\vec{OD}_n| + |\vec{OE}_n| = 0. \end{aligned}$$

Закључујемо да је једнакост (1) тачна.

Девето решење: На основу особина десетоугла и петоугла, доказаним у четвртом решењу, а према слици 7. важи и следећи низ релација:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OC} + \vec{OE} = \vec{OA} + \vec{OX} + \vec{OY} = \vec{OA} + \vec{OZ} = \vec{0}.$$



Слика 7. Уз девето решење

НАПОМЕНА: Већи број решења се може применити и на друге правилне многоуглове са непарним бројем страница. У том смислу посебно ефикасна су прво, треће и седмо решење.

Библиографија

- [1] З. Лучић. *Огледи из историје античке геометрије*, Службени гласник, Београд, 2009.
- [2] В. Стојановић. *Математископ 3*, Математископ, Београд, 1997.
- [3] Ђ. Паунић. *Правилни полигони*, ДМС, Београд, 2006.

OER obrazovni sadržaji kao spona između akademskog i preduzetničkog znanja

Ivan Obradović

Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet, Dušina 7, 11000, Beograd

e-mail: ivan.obradovic@rgf.bg.ac.rs

Ranka Stanković

Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet, Dušina 7, 11000, Beograd

e-mail: ranka.stankovic@rgf.bg.ac.rs

Marija Radojičić

Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet, Dušina 7, 11000, Beograd

e-mail: marija.radojicic@rgf.bg.ac.rs

Apstrakt. Cilj ovog rada je da ukaže na mogućnosti i prednosti koje nude slobodni obrazovni materijali, kao i da ponudi koncept sistema koji omogućava njihovo kreiranje, publikovanje i pretraživanje. Koncept se razvija u okviru Tempus projekta u koji je uključeno šest univerziteta sa Zapadnog Balkana, tri iz Evropske unije i dve vodeće privredne kompanije. Jedan od osnovnih zadataka projekta je da se kreira međuuniverzitetska mreža repozitorijuma koji će sadržati različite vidove slobodno dostupnih obrazovnih sadržaja u elektronskoj formi, poput elektronskih kurseva, prezentacija, udžbenika, skripti, video obrazovnih sadržaja i drugih obrazovnih resursa. U radu je predstavljena iedX platforma koja omogućava kreiranje ovakvih sadržaja sa posebnim osvrtom na didaktičke zahteve koji se postavljaju pred kreatore obrazovnih materijala. Svi obrazovni sadržaji u okviru mreže opisani su pomoću metapodataka, a njihovo pretraživanje omogućeno je na portalu projekta. U radu će biti opisani i neki drugi značajni ciljevi projekta kao što su korišćenje pomenutog koncepta za uspostavljanje veze između teorije i prakse, osavremenjivanje i prilagođavanje nastavnih sadržaja, kao i saradnju između visokoobrazovnih institucija i kompanija iz privrede.

Ključne reči: OER, elektronski obrazovni materijali, edX, elektronsko učenje.

1. Uvod

Široka rasprostranjenost informacionih tehnologija kao i neprestani tehnološki razvoj podstakli su pedagošku javnost na inoviranje procesa učenja primenom otvorenih obrazovnih resursa (OpenEducationalResources - OER). Pod OER sadržajima podrazumevaju se sadržaji kojima je moguće besplatno pristupiti, koji su licencirani slobodnim licencama, a koji su namenjeni za učenje, nastavu ili pak istraživački rad. OER sadržaji ne moraju biti striktno u skladu sa nastavnim planom i programom obrazovnih institucija već mogu biti kreirani na različite obrazovne teme [1]. Takođe pod OER sadržajima podrazumevaju se sadržaji kreirani u različitim formama, od kratkih lekcija, videa, skripti u elektronskoj formi do čitavih kurseva u okviru kojih se mogu naći animacije, video, pitanja i testovi. Značajan podsticaj za razvoj OER sadržaja predstavlja razvoj Web 2.0 kao i široka primena YouTube nakon 2006. godine [2],[3]. Samom promenom tehnološkog okruženja dolazi do razvoja različitih resursa za učenje u elektronskoj formi kao i trenda kreiranja i primene otvorenih obrazovnih

resursa. Veliku pažnju svetske obrazovne javnosti izazvala je inicijativa MIT-a (Massachusetts Institute of Technology) koji je 2000. godine otvorio veliki broj svojih kurseva. Čitav proces odvijao se pod nazivom OpenCourseWare i do 2007. bilo je više od 1800 otvorenih kurseva MIT-a. Inicijativa MIT-a i čitav trend koji se širio podstakao je UNESCO (United Nation Educational Scientific and Cultural Organisation) da 2002. zvanično prihvati i definiše OER sadržaje. Nešto kasnije, 2007. godine, OECD (Organisation for Economic Cooperation and Development) je objavio studiju o upotrebi i širenju OER sadržaja [4], a formiran je i Konzorcijum za otvoreno obrazovanje (OCW Consortium) kao svetska mreža institucija koje podržavaju ovu inicijativu¹.

Kada je reč o Evropi jedan od značajnih projekata je Otvoreni univerzitet (Open University) osnovan u Ujedinjenom Kraljevstvu koji predstavlja bazu otvorenih obrazovnih resursa. Za dalji razvoj OER sadržaja neophodno je bilo i definisanje pojma obrazovnih objekata (Learning Object - LO), odnosno samostalnih materijala za učenje opisanih metapodacima, koji omogućavaju njihovo pretraživanje, prosleđivanje i ponovnu upotrebu. Sa sve većim brojem LO, počela je njihova organizacija u takozvane repozitorijume obrazovnih objekata (Learning Object Repositories- LOR) [5], [6]. Jedan od najpoznatijih i najvećih OER repozitorijuma je OpenLearn repozitorijum² koji predstavlja sastavni deo Open University projekta. Sličan ovom projektu je i projekat HumBox razvijen 2013. godine u okviru JISC³ OER programa, koji ima za cilj kreiranje elektronske baze obrazovnih materijala iz oblasti humanističkih nauka [7], [3].

Pored kreiranja repozitorijuma, od 2008. godine počinje i razvoj masovnih onlajn otvorenih kurseva poznatih kao MOOC (Massive Online Open Courseware). Na ideju Džordža Simensa i Martina Daunza kreiraju se prvi MOOC kursevi koji su imali preko 2000 korisnika. Međutim do šire primene MOOC dolazi nakon 2012. godine, sa razvojem obrazovnih platformi koje omogućavaju kreiranje kurseva, poput edX, Udacity, Coursware i sličnih platformi [8]. Ovaj rad ima za cilj da ukaže na prednosti OER sadržaja kao i da predstavi jedan specifično okruženje za kreiranje i publikovanje OER sadržaja. Sistem se razvija u okviru Tempus projekta BAEKTEL (Blending Academic and Entrepreneurial Knowledge in Technology Enhanced Learning - Spajanje akademskog i preduzetničkog znanja kroz tehnološki potpomognuto učenje)⁴, čiji je jedan od ciljeva kreiranje baze OER sadržaja koji će pospešiti vezu između akademskog i preduzetničkog znanja. Na projektu učestvuju šest univerziteta Zapadnog Balkana, tri iz Evropske unije kao i dve vodeće privredne kompanije. Pored pomenutog uspostavljanja okruženja koje će omogućiti tehnološki podržano učenje putem OER sadržaja kao i stvaranje uslova za celoživotno obrazovanje, ciljevi projekta su i kreiranje samih OER sadržaja, kao i održavanje treninga i obuka za njihovo kreiranje i publikovanje zaodabrane predstavnike obrazovnih ustanova i kompanija. Konačno, jedan od ciljeva je i da se razviju i primene procedure i uputstva za kreiranje OER sadržaja kojima će se obezbediti kvalitetan obrazovni materijal. Za početak predviđeno je kreiranje OER sadržaja iz oblasti informacionih tehnologija, geoinformatike, rudarstva i zaštite životne sredine. Takođe predviđeno je kreiranje obrazovanih sadržaja na više jezika, u više različitih formi, poput teksta, videa, animacija, audio-vizuelnih sadržaja i sl. Podsticanjem razmene znanja između akademskih ustanova i privrednih kompanija dodatno se jačaju njihove međusobne veze i saradnja. Fokus projekta je na podsticanju aktivnog učenja i bolje motivacije kao i stvaranju pogodne sredine za celoživotno obrazovanje.

¹www.ocwconsortium.org

²<http://www.open.edu/openlearn/>

³<http://webarchive.nationalarchives.gov.uk/20140702233839/http://www.jisc.ac.uk/about>

⁴<http://www.baektel.eu/index.php>

2. Osnovne karakteristike OER sadržaja

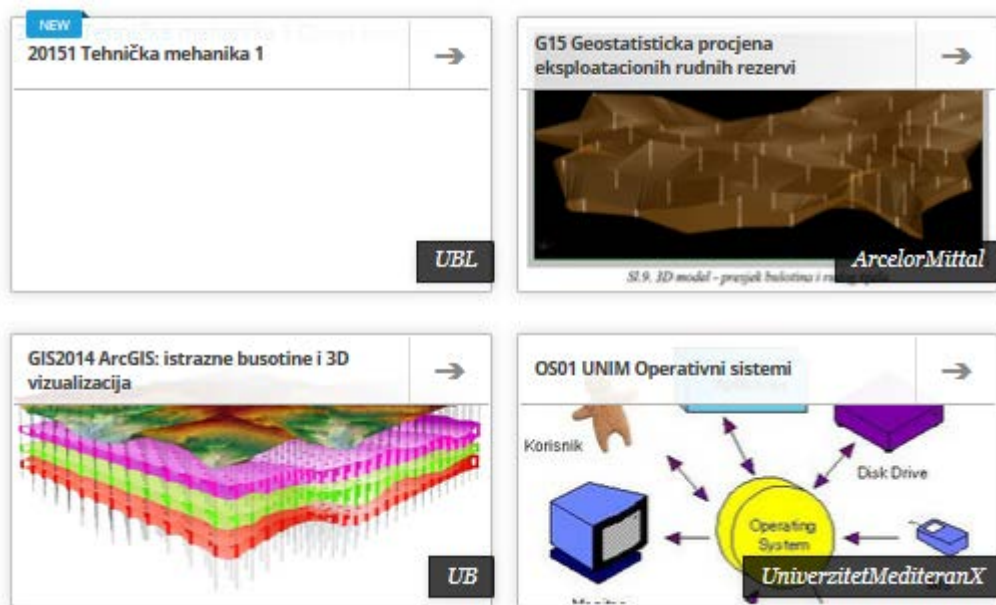
Prednosti OER sadržaja možemo posmatrati iz tri ugla: studentskog, kreatora obrazovnih materijala-edukatora i obrazovnih institucija. Kada je reč o studentima ključna prednost je mogućnost besplatnog pristupa obrazovnim materijalima bez vremenskog ograničenja. To znači da krajnji korisnici mogu pristupiti obrazovnim materijalima u bilo koje vreme i sa bilo kog mesta, a jedini zahtev koji mora biti ispunjen je obezbeđen pristup internetu. Pri tome je moguće preuzimanje, distribuiranje i ponovna upotreba kreiranih materijala pod odgovarajućim slobodnim licencama. Kao pozitivnu karakteristiku korisnici navode mogućnost kombinovanja OER sadržaja sa standardnim sadržajem kurseva obrazovnih institucija [9]. Zagovornici primene OER sadržaja tvrde i da primena OER sadržaja ima izuzetno pozitivne efekte kada je reč o visokom obrazovanju ističući brzinu povratne informacije kao i bolju komunikaciju između studenata i profesora kao i studenata međusobno [10]. Oni takođe ističu da se širokom primenom ovog vida učenja postiže demokratizacija znanja i da se na taj način znanje širi u najvećoj mogućoj meri [11]. Kao još jednu od prednosti OER sadržaja korisnici vide mogućnost da se posvete sadržajima koji ih u datom trenutku interesuju, koji im mogu poslužiti da obnove već naučeno gradivo ili pak da steknu dodatna znanja koja su im potrebna za posao kojim se bave [12], [13], [14]. Takođe, studenti navode i mogućnost preuzimanja sadržaja sa najprestižnijih obrazovnih ustanova kao i mogućnost da uče zajedno sa velikim brojem studenata iz različitih zemalja koji koriste te sadržaje [15], [16]. Sa druge strane OER sadržaji mogu biti korisni i za kreatore obrazovnih materijala. Kreatori materijala mogu koristiti i već kreirane obrazovane materijale svojih kolega koje će dodatno unaprediti i prilagoditi ciljnoj grupi kojoj su namenjeni. To znači da kolege iz iste oblasti mogu raditi na zajedničkim materijalima i na taj način štedeti vreme i resurse. Pored ovih prednosti, u studijama vezanim za OER se ukazuje i na određene izazove sa kojima su suočeni edukatori. Kao problem navodi se strah edukatora od iznošenja svog obrazovnog materijala u javnost, odnosno zaziranje od kritika i komentara kolega iz iste naučne oblasti [17]. Takođe, često se postavlja pitanje zašto bi edukatori delili sopstvenu intelektualnu svojinu. Kao najčešći odgovor na to navodi se altruizam nastavnika. Međutim, u mnogo studija konstatovano je da je neophodna institucionalna podrška kako bi ideja kreiranja OER sadržaja bila održiva. Kada je reč o obrazovnim institucijama, primena i publikovanje OER sadržaja svakako doprinosi popularizaciji obrazovne ustanove. Takođe, baza akademskih znanja se širi, a nastavno osoblje se upućuje na primenu informacionih tehnologija i timski rad i saradnju. Sveukupno gledano, primena i kreiranje OER sadržaja može imati višestruke koristi kako za studente i edukatore tako i za obrazovne institucije.

3. Prednosti OpenedX platforme

Kao što je pomenuto u uvodu OER sadržaji mogu biti u različitim formama, međutim najčešća i najpopularnija forma OER sadržaja je elektronski kurs. Za kreiranje i publikovanje OER sadržaja u okviru BAEKTEL projekta razmatrane su različite otvorene obrazovne platforme poput OpenedX, Coursera, Udacity-a. Prilikom odabira platforme posebna pažnja posvećena je didaktičkim kriterijumima na kojima se temelje otvoreni obrazovni kursevi. U skladu sa tim posmatrane su mogućnosti platformi, odnosno analizirano je u kojoj meri mogu odgovoriti na najveći broj didaktičkih principa. OpenedX platforma je ocenjena kao najpogodnija platforma za kreiranje kurseva na osnovu postavljenih kriterijuma. Ova platforma se razvila iz projekta edX, zajedničkog projekta MIT-a i Harvarda iz 2012. godine za kreiranje i postavljanje otvorenih kurseva koji će biti dostupni javnosti, besplatni, sa sadržajem iz najrazličitijih oblasti, a koji su raspoloživi pod licencama koje omogućavaju slobodan pristup i korišćenje sadržaja, kao što su Creative Commons licence⁵. Uvidevši veoma brzo

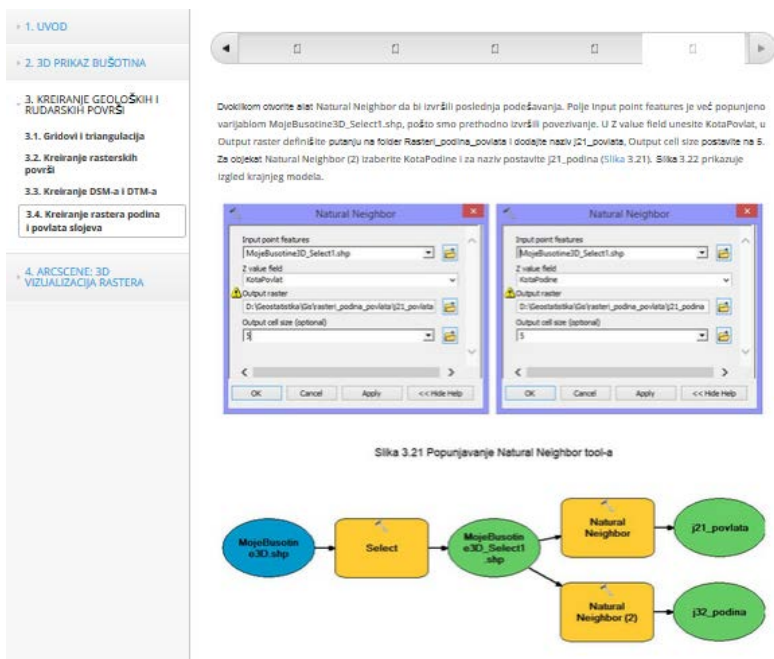
⁵<https://creativecommons.org/licenses/>

značaj i potencijal edX inicijative, MIT i Harvard u saradnji sa univerzitetima Stanford, Berkeley i Kvinslend kao i kompanijom Gugl, od juna 2013. nude potpuno besplatno platformu OpenedX koja je takođe zasnovana na principima slobodnog pristupa sadržajima i namenjena je obrazovnim ustanovama širom sveta koje žele da započnu kreiranje otvorenih obrazovnih resursa. EdX danas ima preko tri miliona korisnika koji pohađaju više od 300 različitih kurseva. OpenedX platforma se odlikuje visokim stepenom jednostavnosti kao i širokim spektrom mogućnosti. Ovoj platformi mogu pristupiti svi zainteresovani bez ikakvih ograničenja i koristiti sve raspoložive resurse platforme. Na početnoj strani OpenedX platforme moguće je videti dostupne kurseve kao i njihov logo, link ka kursu i kratko objašnjenje kursa (Slika 1). Kursovima OpenedX platforme projekta BAEKTEL moguće je pristupiti na adresi: edx.baektel.eu/.



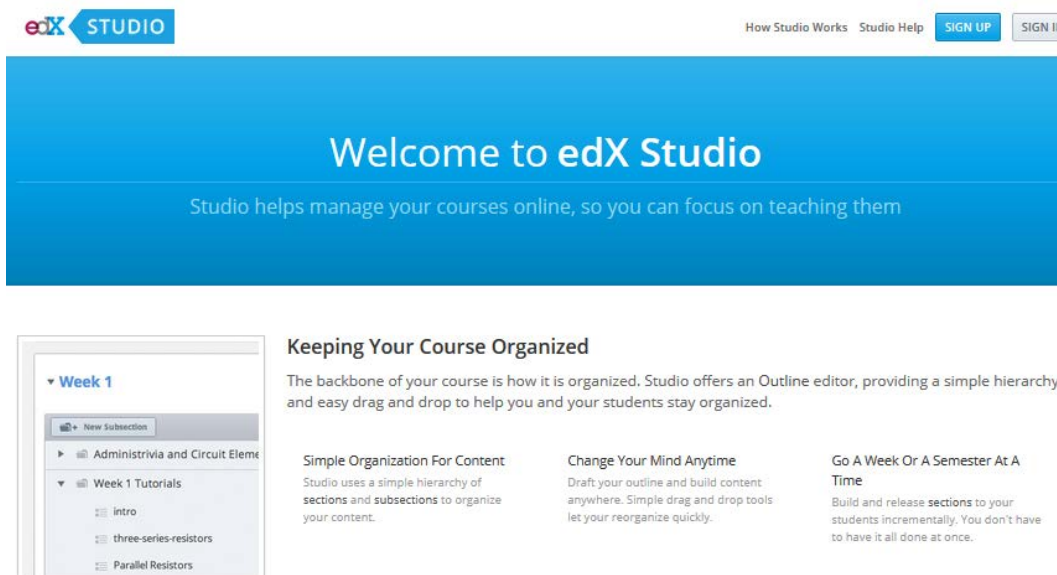
Slika 1. Dostupni kursevi na edX platformi

Nakon postupka registracije i prijave korisnik se upisuje na željeni edX kurs. Pre upisa na kurs korisnicima je omogućeno da pročitaju osnovne informacije o ciljevima kursa, potrebnim predznanjima, tempu kursa kao i o autorima i obrazovnim institucijama koje stoje iza odabranog kursa. Sadržaj kursa podeljen je u poglavlja, poglavlja u odeljke, odeljci u lekcije. Lekcije se odlikuju jasnom strukturom i dobrom organizacijom i navigacijom kroz sadržaj. Veliki broj lekcija sadrži obrazovni video što može biti korisno krajnjim korisnicima kako po pitanju sadržaja tako i u motivacionom smislu. OpenEdX platforma nudi širok izbor različitih formi pitanja, što sadržaj čini značajno interesantnijim. Platforma omogućava i kreiranje diskusionih grupa u okviru svakog kursa putem kojih je moguća komunikacija sa autorima kursa kao i sa svim polaznicima tog kursa.



Slika 2. Izgled edX kursa

Kada je reč o kreiranju kurseva primenom OpenedX platforme, može se reći da ova platforma ne zahteva visok stepen računarskih veština. Sam postupak kreiranja kursa je relativno jednostavan, a postoji i on line podrška u vidu tutorijala. Da bi korisnik kreirao edX kurs u okviru BAEKTEL projekta neophodno je da pristupi web adresi: <http://edx.baektel.eu:18010>, gde će se registrovati i prijaviti za kreiranje kurseva (Slika 3).

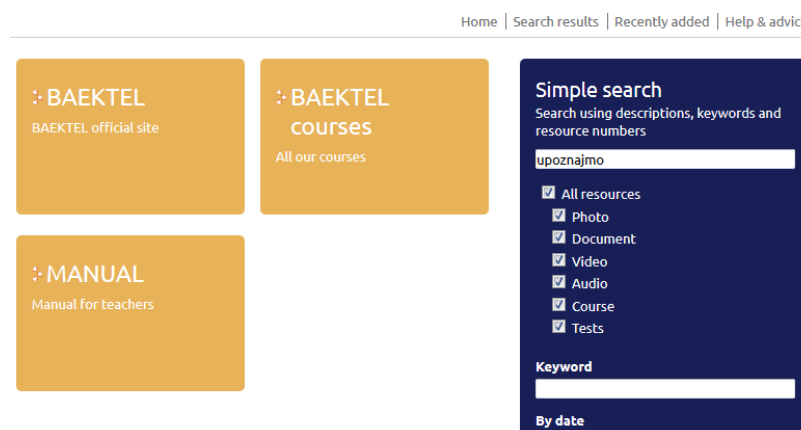


Slika 3. Početna strana OpenedXstudia

4. Pretraživanje OER sadržaja

U okviru projekta BAEKTEL uspostavljen je sistem platformi koji pored toga što omogućava kreiranje i publikovanje OER sadržaja, omogućava i njihovo opisivanje i pretraživanje. Za opis i pretragu kreiranih OER sadržaja koji se mogu kretati od najjednostavnijih datoteka do kompletnih

kurseva koristi se platforma ResourceSpace (Slika 4), koja pruža mogućnost postavljanja, opisivanja i pretrage kreiranih OER sadržaja. Za opis OER sadržaja razvijen je skupmetapodataka. Da bi neko od kreatora kursa opisao određeni OER sadržaj neophodno je da se registruje i sa tako kreiranim nalogom pristupi platformi za metapodatke. Popunjavanjem jednostavnog formulara vrši se opis određenog OER sadržaja.



Slika 4. ResourceSpace-platforma za opis, publikovanje i pretraživanje OER sadržaja

Za pretragu OER sadržaja nije potrebno kreiranje naloga, već je dovoljno pristupiti platformi putem veb adrese i u ponuđenoj formi uneti ključne reči sadržaja koji se traži. Platformi ResourceSpace se može pristupiti na sledećoj adresi <http://meta.baektel.eu>.

5. Didaktički kriterijumi

Kako je proces obrazovanja složena i delikatna delatnost, očekivano je da su u didaktici definisani principi na kojima bi trebalo zasnivati nastavu i nastavne sadržaje kako bi se postigao što bolji uspeh [18]. Didaktički principi se odnose na svaki deo nastavnog procesa pa je neophodno razmotriti njihov značaj i kada je reč o OER sadržajima. U ovom radu izdvajamo neke od didaktičkih principa iz jedne od ponuđenih klasifikacija [19], koje ćemo analizirati iz ugla OER sadržaja.

Princip naučnosti se odnosi na odabir prezentovanog sadržaja i pedagoške metode i tehnike kojima se taj sadržaj predstavlja. S obzirom na brzinu razvoja pojedinih nauka kao i na širinu sadržaja pojedinih nastavnih tema neophodno je kvalitetno odabrati nastavni sadržaj koji će se zasnivati na opštim znanjima koja će učenicima obezbediti dobru osnovu za dalju nadogradnju znanja. Bez obzira da li je reč o klasičnim nastavnim sadržajima ili OER sadržajima kvalitet materijala je u najvećoj meri određen samim sadržajem, što ukazuje na važnu ulogu kreatora kursa. Tako Vili ističe da pojedinci koji kreiraju OER sadržaje moraju preuzeti odgovornost za prezentovani sadržaj, kao i da se bez ozbiljnog pristupa kreiranju OER sadržaja ne može doprineti poboljšanju kvaliteta obrazovanja [20]. S obzirom da edX platforma omogućava kombinovanje različitih sadržaja poput teksta, videa, animacija i različitih formi pitanja, pred edukatorima je širok spektar mogućnosti pomoću da na kvalitetan i svrsishodan način predstave odabrani sadržaj.

Još jedan od važnih principa je i princip sistematičnosti i postupnosti u nastavi. Pod sistematičnošću se podrazumeva pregledno i logično raščlanjavanje nastavnog gradiva i izdvajanje onoga što je u njemu bitno, dok se pod postupnošću podrazumeva didaktički redosled sadržaja. Jasno je da se pojmovi sistematičnosti i postupnosti prepliću i kao celina predstavljaju značajan didaktički princip [18]. U tom kontekstu, OpenedX platforma omogućava kreatorima kursa kreiranje sadržaja koje se organizuje kroz poglavlja, odeljke i lekcije. Svaka lekcija može sadržati više komponenti, tako da se na vrlo jednostavan način može realizovati uvodni, središnji i završni deo lekcije. Takođe, OpenedX platforma se odlikuje vrlo jednostavnom i jasnom navigacijom kroz materijale što dodatno olakšava krajnjim korisnicima uvid u strukturu i organizaciju sadržaja.

Kada je reč o OER sadržajima preporuka je da se kreiraju sadržaji na takav način da zahtevaju aktivno angažovanje učenika, što predstavlja još jedan didaktički princip. Ovim principom ističe se aktivna uloga učenika u funkciji subjekta, a ne pasivnog slušaoca u procesu učenja. OpenEdX platforma to omogućava kroz kreiranje velikog broja različitih tipova pitanja koja mogu doprineti aktivnom uključivanju krajnjih korisnika. Platforma je po pojedinim svojim svojstvima u skladu i sa principom individualizacije koji podrazumeva uzimanje u obzir različitih stilova učenja, interesovanja i tempa učenja krajnjih korisnika. S tim u vezi platforma omogućava korisnicima prilagođavanje tempa učenja sopstvenim potrebama, a kreatorima kurseva postavljanje različitih formi sadržaja koji mogu biti prilagodljivi i pogodni za različite stilove učenja.

Jedan od ciljeva projekta BAEKTEL je i povezivanje teorije i prakse tj. uspostavljanje spone između akademskih i preduzetničkih znanja. Kako su u projekat uključene vodeće privredne kompanije Nis Gasprom Njeft i ArcelorMittal Prjedor, kao i ustanove visokog obrazovanja, stvoreni su uslovi za kreiranje sadržaja koji se mogu odlikovati uspostavljenom vezom između teorijskih i praktičnih znanja. Gledano iz ugla didaktike, princip povezanosti teorije i prakse je veoma važan, ali edukatori ističu da nije često zastupljen. Projekat BAEKTEL i slični projekti mogu doprineti uspostavljanju čvršće veze između teorijskih i praktičnih znanja.

5. Zaključak

Premda se ideja otvorenih obrazovnih resursa veoma brzo širi u svetskoj pedagoškoj javnosti kao i na vodećim svetskim univerzitetima, u zemljama Zapadnog Balkana ideja OER sadržaja je relativno nova. Ovim radom želeli smo da ukažemo na prednosti OER sadržaja, na njihovu svrsishodnost i značaj. Cilj projekta u okviru koga se razvijaju OER sadržaji je da se oformi baza kurseva koji će učiniti znanje iz pojedinih oblasti javno dostupnim. Ideja je da zemlje Zapadnog Balkana kreiraju sadržaje na maternjim jezicima, prevazilazeći na taj način kritike da su OER sadržaji dostupni samo za „velike jezike“. Poseban naglasak stavljen je na uspostavljanje akademske i preduzetničke saradnje sa ciljem da se kreiraju sadržaji koji će biti korisni kako za studente koji se obrazuju na institucijama visokog obrazovanja, tako i za zaposlene u privrednim kompanijama, ali i za entuzijaste i druge zainteresovane za predstavljene teme. Takođe, ideja je da se osposobi jedan broj nastavnog osoblja za kreiranje i publikovanje OER sadržaja. U tom cilju održavaju se radionice na kojima se nastavno osoblje upoznaje sa edX platformom i načinima kreiranja i publikovanja OER sadržaja. Popularizacija otvorenih obrazovnih resursa je još jedna od važnih karika u procesu primene i kreiranja ovog vida nastavnog sadržaja. S tim u vezi projekat BAEKTEL je prezentovan na velikom broju okruglih stolova, seminara i konferencija na temu obrazovanja. Želja je da broj OER kurseva iz

godine u godinu raste, kao i popularnost projekta, da projekat nastavi svoj život i nakon svog formalnog završetka.

Bibliografija

- [1] **N. Butcher.** A Basic Guide to Open Educational Resources(OER). *In: theCommonwealth of Learning*, 2011.
- [2] **C.J. Bonk.** The world is open: How web technology is revolutionizing education, *Wiley*, 2009.
- [3] **D. Millard, K. Borthwick, Y. Howard, P. McSweeny, C. Hargood.** The HumBox: Changing educational practice around a learning resource repository. *In: Computers & Education* 69, 2013, 287–302.
- [4] **Organization for Economic Cooperation and Development [OECD].** (Giving knowledge for free: The emergence of open educational resources. Retrieved from. <http://www.oecd.org/edu/ceeri/38654317.pdf>, 2007.
- [5] **F. Neven, E. Duval.** Reusable learning objects: a survey of LOM-based repositories. *In Proceedings of the tenth ACM international conference on multimedia*. 2002, 291–294, New York, NY: ACM.
- [6] **S. Downes.** Learning objects: resources for distance education worldwide. *The International Review of Research in Open and Distance Learning* 2(1), 2001.
- [7] **P. McAndrew, A. Santos, S. Godwin.** Opening up for OpenLearn: issues in providing open educational resources. *In Proceedings of CAL07: Development, disruption and debate – D3*, 2007, Dublin, Ireland.
- [8] **A. Margaryan, M. Bianco, A. Littlejohn.** Instructional quality of Massive Open Online Courses (MOOCs). *In: Computers & Education* 80, 2015, 77-83.
- [9] **M. S. Smith.** Opening education. *American Association for the Advancement of Science*, 2015. Retrieved from: <http://www.jstor.org/stable/20177128>
- [10] **A. Bissell.** Permission granted: Open licensing for educational resources. *Open Learning. The Journal of Open, Distance, and e-Learning* 24(1), 2009, 97–106.
- [11] **A.J. Jacobs.** Two cheers for Web U! *New York Times*, 162(56113), 2013, 1–7.
- [12] **A. Agarwal.** ‘Circuits and Electronics’. Mix. *Chronicle of Higher Education*, 59(6), 2012, B10.
- [13] **M. Allon.** ‘Operations Management’, UdeMy. *Chronicle of Higher Education*, 59(6), 2012, B10–11.
- [14] **J. Rice.** What I learned in MOOC. *College Composition and Communication*, 64(4), 2013, 695–703.
- [15] **Y. Belanger, J. Thornton.** Bioelectricity: quantitative approach. Retrieved on May 7 from http://dukespace.lib.duke.edu/dspace/bitstream/handle/10161/6216/Duke_Bioelectricity_MOOC_Fall201
- [16] **J. R. Young.** What professors can learn from ‘hard core’ MOOC students. *Chronicle of Higher Education*, 59(37), 2013, A4.
- [17] **D. Wiley.** Open source, openness, end higher education. *Innovative Journal of Online Education*, 3(1), 2006.
- [18] **Ž. Papić, V. Aleksić.** Metodika nastave tehničkog i informatičkog obrazovanja. *Tehnički fakultet Čačak*. 2012, 84..
- [19] **N. Trnavac, J. Đorđević.** Pedagogija. *Beograd: Naučna knjiga nova*, 2003.
- [20] **D. Wiley.** On Quality and OER. Retrieved from: <http://opencontent.org/blog/archives/2947>

Determining of the solution of the boundary value problem for the operator Sturm-Liouville type with two constant delays

Biljana Vojvodić

*Ministry of science and technology of the Republic of Srpska
Banja Luka, Republic of Srpska, Bosnia and Hercegovina
e-mail: b.vojvodic@mnk.vladars.net*

Milenko Pikula

*University of East Sarajevo, Faculty of Philosophy
East Sarajevo, Republic of Srpska, Bosnia and Hercegovina
e-mail: mpikula@paleol.net*

Vladimir Vladičić

*University of East Sarajevo, Faculty of Philosophy
East Sarajevo, Republic of Srpska, Bosnia and Hercegovina
e-mail:vladimirfoca1982@yahoo.com*

Abstract. This paper deals with the boundary value problem for the operator Sturm-Liouville type with two constant delays, $L = L(q_1(x), q_2(x), \tau_2, \tau_1)$:

$$-y''(x) + q_1(x)(x - \tau_1) + q_2(x)(x - \tau_2) = \lambda y(x), y(x - \tau_1) \equiv 0, x \in [0, \tau_1].$$

The solution of the boundary value problem for Sturm-Liouville operators with two constant delays are known for τ_1 and τ_2 under the condition that $\tau_1 = k_0 \tau_2$. The construction of the solution in general case (for arbitrary τ_1 and τ_2) is more complex due to complexity of relations between linear combinations of τ_1 and τ_2 delays and their relations around π . By the method of successive approximation we firstly construct the solution in the case when τ_1 and τ_2 fulfill the condition $\tau_1 = k_0 \tau_2 + \delta$, $\delta \in (0, \frac{\tau_2}{l_0 + 1})$, $l_0 \tau_1 \leq \pi < (l_0 + 1) \tau_1$. Using this result, we construct the solution the boundary value problem for arbitrary τ_1 and τ_2 and get a generalization of results in the case that $\tau_1 = k_0 \tau_2$.

Keywords: the boundary value problem; constant delay; construction of the solution

1. Introduction

Inverse spectral problems for classical Sturm-Liouville operators have been studied completely, while the inverse problems for the differential operators with delays have not been studied enough. Some of the main methods in the inverse problem theory for classical Sturm-Liouville operators, such as transformation operator method and method of spectral mappings, are not suitable for differential operators with delay. The main results for classical Sturm-Liouville operators are presented in [1]–[3], while some of the results for differential operators with delay can be found in [4]–[7] and other works. The class of operators with two delays is least studied, but some of the results for this class of operators are presented in [8] and [9].

It is known that the differential equation with one delay

$$-y''(x) + q(x)(x - \tau) = \lambda y(x), \quad x \in [0, \pi], \quad \lambda = z^2 \quad (1)$$

under the initial condition $y(0) = 0$, is equivalent to the integral equation

$$y(x, z) = \operatorname{sinz}x + \frac{1}{z} \int_0^x q(t) \operatorname{sinz}(x-t) y(t-\tau, z) dt. \quad (2)$$

The solution of the integral equation (2) on the interval $(k_0\tau, \pi]$ ($k_0\tau \leq \pi < (k_0+1)\tau$) is determined by the method of steps and it has the following form:

$$y(x, z) = \operatorname{sinz}x + \frac{1}{z} \int_{\tau}^x q(t) \operatorname{sinz}(x-t) \operatorname{sinz}(t-\tau) dt + \sum_{k=2}^{k_0} \frac{1}{z^k} \int_{k\tau}^x \int_{(k-1)\tau}^{t-\tau} \cdots \int_{\tau}^{t_{k-2}-\tau} q(t) q(t_1) q(t_2) \cdots q(t_{k-1}) \operatorname{sinz}(x-t) \operatorname{sinz}(t_{k-1}-\tau) \operatorname{sinz}(t-\tau-t_1) \operatorname{sinz}(t_1-\tau-t_2) \cdots \operatorname{sinz}(t_{k-2}-\tau-t_{k-1}) dt_{k-1} \cdots dt_1 dt \quad (3)$$

The solution (3) on the interval $(0, \pi]$ can be presented by the recurrent formula

$$y_k(x, z) = \frac{1}{z} \int_{k\tau}^x q(t) \operatorname{sinz}(x-t) y_{k-1}(t-\tau) dt, x \geq k\tau, \quad (4)$$

$$y_k(x, z) = 0, x < k\tau, y_0(x, z) = \operatorname{sinz}x, x \geq 0$$

in the form

$$y(x, z) = y_0(x, z) + y_1(x, z) + \cdots + y_{k_0}(x, z). \quad (5)$$

The solution of the differential equation (1) under the initial conditions $y(0) = 0, y'(0) = 1$ is determined in [7] by the method of successive approximations and has the form (5), where

$$y_k(x, z) = \frac{1}{z} \int_{k\tau}^x q(t) \operatorname{sinz}(x-t) y_{k-1}(t-\tau) dt, x \geq k\tau,$$

$$y_k(x, z) = 0, x < k\tau, y_0(x, z) = \frac{1}{z} \operatorname{sinz}x, x \geq 0.$$

The boundary value problem for the differential operator with two constant delays τ_1 and τ_2 under the condition $\tau_1 = 2\tau_2, k_0 = 2$ is studied in [8], while the differential operator with two constant delays under the condition $\tau_1 = k_0\tau_2$ is presented in [9].

The construction of the solution of the boundary value problem for the differential operator with two constant τ_1 and τ_2 delays in general case (for arbitrary τ_1 and τ_2) is more complex, due to complexity of relations between linear combinations of τ_1 and τ_2 delays and their relations around π . Taking into account that the order of linear combinations of delays for arbitrary τ_1 and τ_2 is not known, the method of steps cannot be used for the construction of the solutions. Then, we construct the solution of the boundary value problem by the method of successive approximations.

In Section 2. we firstly construct the solution of the boundary value problem with two constant delays in a case when τ_1 and τ_2 fulfill the condition $\tau_1 = k_0\tau_2 + \delta, \delta \in (0, \frac{\tau_2}{l_0+1}), l_0\tau_1 \leq \pi < (l_0+1)\tau_1$. Using this result, in Section 3. we will construct the solution of the boundary value problem for arbitrary τ_1 and τ_2 and get a generalization of results in the case that $\tau_1 = k_0\tau_2$.

2. The construction of the solution under the condition that $\tau_1 = k_0\tau_2 + \delta, \delta \in (0, \frac{\tau_2}{l_0+1})$

We deal with the boundary value problem:

$$-y''(x) + q_1(x)(x-\tau_1) + q_2(x)(x-\tau_2) = \lambda y(x), x \in (0, \pi], \lambda = z^2 \quad (6)$$

$$y(x-\tau_1) \equiv 0, x \in [0, \tau_1] \quad (7)$$

where

$$\tau_1 = k_0\tau_2 + \delta, \delta \in \left(0, \frac{\tau_2}{l_0+1}\right), l_0\tau_1 \leq \pi < (l_0+1)\tau_1 \quad (8)$$

$$k_0, l_0 \in \mathbb{N}, q_1, q_2 \in L_1[0, \pi].$$

We deal with delays under the condition (8) because the order of linear combination of delays on any interval that belongs to $(0, \pi]$ is completely determined by (8). That is important for defining

recurrent formula and for noticing of the form of the solution. Also, in this case, we can construct the solution by the method of steps.

Firstly, we determine the integral equation equivalent to the boundary value problem (6)-(7). By the method of variation of constants, one can easily show the following lemma.

Lemma1. *The boundary value problem (6)-(7) is equivalent to the integral equation*

$$y(x, z) = \sin z x + \frac{1}{z} \int_0^x q_1(t_1) \sin z(x - t_1) y(t_1 - \tau_1, z) dt_1 + \frac{1}{z} \int_0^x q_2(t_1) \sin z(x - t_1) y(t_1 - \tau_2, z) dt_1. \quad (9)$$

Now, using the condition (8) we will determine the order of linear combinations on any interval that belongs to $(0, \pi]$.

Lemma 2. *If τ_1 and τ_2 fulfill the condition (8), then*

$$a) \quad nk_0\tau_2 < n\tau_1 < (nk_0 + 1)\tau_2, \quad (10)$$

$$b) \quad (nk_0 + i)\tau_2 < \tau_1 + ((n - 1)k_0 + i)\tau_2 < 2\tau_1 + ((n - 2)k_0 + i)\tau_2 < \dots < n\tau_1 + i\tau_2 < (nk_0 + i + 1)\tau_2, \quad (11)$$

$$n = 1, 2, \dots, l_0 + 1, \quad i = 0, 1 \dots k_0 - 1,$$

Proof. a) It follows from (8) that

$$nk_0\tau_2 < n\tau_1 = nk_0\tau_2 + n\delta \leq nk_0\tau_2 + (l_0 + 1)\delta < nk_0\tau_2 + \tau_2 = (nk_0 + 1)\tau_2, \quad n = 1, 2, \dots, l_0 + 1,$$

thus proving (10).

b) Obviously

$$(nk_0 + i)\tau_2 = k_0\tau_2 + ((n - 1)k_0 + i)\tau_2 < \tau_1 + ((n - 1)k_0 + i)\tau_2 < 2\tau_1 + ((n - 2)k_0 + i)\tau_2 < \dots < (n - 1)\tau_1 + (k_0 + i)\tau_2 < n\tau_1 + i\tau_2.$$

Since $n\delta \leq (l_0 + 1)\delta < \tau_2$, we have

$$n\tau_1 + i\tau_2 = nk_0\tau_2 + n\delta + i\tau_2 < nk_0\tau_2 + \tau_2 + i\tau_2,$$

thus proving (11).□

It follows from Lemma 2. that a new combination of delays in the form $n\tau_1$ appears on each interval $(nk_0\tau_2, (nk_0 + 1)\tau_2]$, $n = 1, \dots, l_0 + 1$. Moreover, these combinations of delays continue to appear with step τ_2 , i.e. in the form $n\tau_1 + i\tau_2$, until π .

Now we will consider the order of linear combinations of delays in relation to π . The position of $n\tau_1$ delays is determined by (8), and it remains to determine positions of $i\tau_2$ and $n\tau_1 + i\tau_2$ delays $l = 1, 2, \dots, l_0$. In order to determine the interval $[k\tau_2, (k + 1)\tau_2)$ such that $\pi \in [k\tau_2, (k + 1)\tau_2)$, firstly from (10) we have

$$l_0k_0\tau_2 < l_0\tau_1 < (l_0k_0 + 1)\tau_2 < (l_0k_0 + 2)\tau_2 < \dots < (l_0 + 1)k_0\tau_2 < (l_0 + 1)\tau_1 < ((l_0 + 1)k_0 + 1)\tau_2, \quad (12)$$

and since $l_0\tau_1 \leq \pi < (l_0 + 1)\tau_1$, there is m_0 ($0 \leq m_0 \leq k_0$) in (12) such that

$$(l_0k_0 + m_0)\tau_2 \leq \pi < (l_0k_0 + m_0 + 1)\tau_2. \quad (13)$$

It follows from (13) that

$$m_0 = \left[\frac{\pi}{\tau_2} \right] - l_0k_0. \quad (14)$$

Further, from (11) we have

$$(l_0k_0 + m_0)\tau_2 < \tau_1 + ((l_0 - 1)k_0 + m_0)\tau_2 < \dots <$$

$$l_0\tau_1 + m_0\tau_2 < (l_0k_0 + m_0 + 1)\tau_2 \quad (15)$$

and there is n_0 ($0 \leq n_0 \leq l_0$) in (15) such that

$$n_0\tau_1 + ((l_0 - n_0)k_0 + m_0)\tau_2 \leq \pi < (n_0 + 1)\tau_1 + ((l_0 - n_0 - 1)k_0 + m_0)\tau_2 \quad (16)$$

From (16) we obtain that there are not any linear combinations of delays between $n_0\tau_1 + ((l_0 - n_0)k_0 + m_0)\tau_2$ and π , i.e. $n_0\tau_1 + ((l_0 - n_0)k_0 + m_0)\tau_2$ is the linear combination of delays which is the nearest to π .

Let us for $i, j = 1, 2$ introduce the following:

$$\begin{aligned} b_{s^2}^{(i)}(x, z) &= \int_{\tau_i}^x q_i(t_1) \text{sinz}(x - t_1) \text{sinz}(t_1 - \tau_i) dt_1, \\ b_{s^{l+1}}^{(2)}(x, z) &= \int_{l\tau_2}^x q_2(t_1) \text{sinz}(x - t_1) b_{s^l}^{(2)}(t_1 - \tau_2, z) dt_1, \quad l = 2, 3, \dots, l_0k_0 + m_0 \\ b_{s^{l+1}}^{(1)}(x, z) &= \int_{l\tau_1}^x q_1(t_1) \text{sinz}(x - t_1) b_{s^l}^{(1)}(t_1 - \tau_1, z) dt_1, \quad l = 2, 3, \dots, l_0 \\ b_{s^3}^{(i,j)}(x, z) &= \int_{\tau_1 + \tau_2}^x q_i(t_1) \text{sinz}(x - t_1) b_{s^2}^{(j)}(t_1 - \tau_i, z) dt_1, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (17)$$

Let $S_{k+l}(k, l)$ denote a set of all permutations with k elements of one and l elements of two, and $S_{k+l}^{(i)}(k, l)$ denote a subset of $S_{k+l}(k, l)$ of permutations beginning with $i, i = 1, 2$.

Let us also introduce:

$$b_{s^{l+1}}^P(x, z) \Big|_{P \in S^{(i)}_{k+l}(k, l)} = \int_{k\tau_1 + l\tau_2}^x q_i(t_1) \text{sinz}(x - t_1) b_{s^l}^P(t_1 - \tau_i, z) dt_1. \quad (18)$$

The permutation P in $b_{s^{l+1}}^P(x, z) \Big|_{P \in S^{(i)}_{k+l}(k, l)}$ in (18) is formed by adding i at the beginning of the permutation P in $b_{s^l}^P(x, z)$, where

$$b_{s^l}^{(i)}(x, z) = b_{s^l}^P(x, z), P = \underbrace{(i, i, \dots, i)}_{(l-1)\text{-times}}, l = \begin{cases} 2, \dots, l_0, & \text{if } i = 1 \\ 2, \dots, l_0k_0 + m_0, & \text{if } i = 2 \end{cases}$$

Theorem 1. Let $\tau_1 = k_0\tau_2 + \delta$, $\delta \in (0, \frac{\tau_2}{l_0+1})$, $l_0\tau_1 \leq \pi < (l_0 + 1)\tau_1$, $q_1, q_2 \in L_1[0, \pi]$ and let m_0 and n_0 are defined by (14) and (16), respectively. Then the solution of the boundary value problem (6)-(7) on the interval $(n_0\tau_1 + ((l_0 - n_0)k_0 + m_0)\tau_2, \pi]$ has the following form:

$$\begin{aligned} y(x, z) &= \text{sinz}x + \sum_{k=1}^{l_0k_0+m_0} \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(2)}(x, z) + \sum_{k=1}^{l_0} \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(1)}(x, z) + \\ &\sum_{k=1}^{n_0} \sum_{i=1}^{(l_0-k)k_0+m_0} \frac{1}{z^{k+i}} \sum_{P \in S_{k+i}(k, i)} b_{s^{k+i+1}}^P(x, z) + \\ &\sum_{k=n_0+1}^{l_0} \sum_{i=1}^{(l_0-k)k_0+m_0-1} \frac{1}{z^{k+i}} \sum_{P \in S_{k+i}(k, i)} b_{s^{k+i+1}}^P(x, z). \end{aligned} \quad (19)$$

Proof. By virtue of Lemma 2. and relations (13)-(16), we define the recurrent formula for solving the integral equation (9), as following:

$$y_{kk_0+i}^{(k)}(x, z) = \frac{1}{z} \int_{k\tau_1 + i\tau_2}^x q_2(t_1) \text{sinz}(x - t_1) y_{kk_0+i-1}^{(k)}(t_1 - \tau_2, z) dt_1 +$$

¹ If $m_0 = k_0$, then $(l_0 + 1)\tau_1$ appears in (15), since $l_0\tau_1 + k_0\tau_2 < (l_0 + 1)\tau_1 < ((l_0 + 1)k_0 + 1)\tau_2$. However, that does not change the order of linear combinations because $(l_0 + 1)\tau_1 > \pi$.

² If $n_0 = l_0$, then on the right side in (16) we have $(l_0 + 1)\tau_1 + (m_0 - k_0)\tau_2$. Since $(l_0 + 1)\tau_1 + (m_0 - k_0)\tau_2 < (l_0k_0 + m_0 + 1)\tau_2$ we get $l_0\tau_1 + m_0\tau_2 \leq \pi < (l_0k_0 + m_0 + 1)\tau_2$. If $n_0 = l_0, m_0 = k_0$ then $l_0\tau_1 + k_0\tau_2 \leq \pi < (l_0 + 1)\tau_2$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z} \int_{k\tau_1+i\tau_2}^x q_1(t_1) \operatorname{sinz}(x-t_1) y_{(k-1)k_0+i}^{(k-1)}(t_1-\tau_1, z) dt_1, \quad x > k\tau_1 + i\tau_2 \quad (20) \\ & y_{kk_0+i}^{(k)}(x, z) = \mathbf{0} \text{ for } x \leq k\tau_1 + i\tau_2, \quad y_0(x, z) = \operatorname{sinz}x, x \geq 0, \\ & k = 0, 1, \dots, l_0, \quad i = 0, 1, 2 \dots l_0 k_0 + m_0, \\ & y_i^{(0)}(x, z) = y_i(x, z), y_{(k-1)k_0+i}^{(k-1)}(x, z) = \mathbf{0} \text{ for } k = 0, y_{kk_0-1}^{(k)} = \mathbf{0} \text{ for } k = 1, 2, \dots, l_0. \end{aligned}$$

It follows from (20) that for any $k\tau_1 + i\tau_2$ linear combination of delays, there is one function $y_{kk_0+i}^{(k)}(x, z)$ defined by the recurrent formula. Functions $y_{kk_0+i}^{(k)}(x, z)$ for $k \neq 0$ and $i \neq 0$ are determined by previous linear combinations with both delays, τ_2 and τ_1 . Functions $y_i(x, z)$ (for $k = 0$) are determined by previous linear combinations with a delay τ_2 only, so $y_{(k-1)k_0+i}^{(k-1)}(x, z) = 0$. Functions $y_{kk_0}^{(k)}(x, z)$ (for $i = 0$) are determined by previous linear combinations with a delay τ_1 only, so $y_{kk_0-1}^{(k)} = 0, k = 1, 2, \dots, l_0$.

Moreover, it follows from (20) that for $k = 0$ we get the solution of the integral equation on the intervals $(i\tau_2, (i+1)\tau_2], i = 0, 1, \dots, k_0 - 1$. For $k = 0, 1$ we get the solution on the intervals which belong to $((k_0 + i)\tau_2, (k_0 + i + 1)\tau_2], i = 0, 1, 2, \dots, k_0 - 1$. Analogously, for $k = 0, 1, \dots, n$, we get the solution of the integral equation on the intervals which belong to $(nk_0\tau_2, (n+1)k_0\tau_2], n = 2, 3 \dots, l_0$. Precisely, it follows from (20) that the solution of the integral equation on any interval that belongs to $(0, \pi]$, is determined by functions $y_{kk_0+i}^{(k)}(x, z)$ such that $k\tau_1 + i\tau_2$ is less than the upper limit of the observed interval.⁴

Consequently, the solution of the boundary value problem on the interval $(n_0\tau_1 + ((l_0 - n_0)k_0 + m_0)\tau_2, \pi]$ has the following form:

$$\begin{aligned} y(x, z) = & \sum_{k=0}^{l_0 k_0 + m_0} y_k(x, z) + \sum_{k=1}^{l_0} y_{kk_0}^{(k)}(x, z) + \sum_{k=1}^{n_0} \sum_{l=1}^{(l_0-k)k_0+m_0} y_{kk_0+l}^{(k)}(x, z) + \\ & \sum_{k=n_0+1}^{l_0} \sum_{l=1}^{(l_0-k)k_0+m_0-1} y_{kk_0+l}^{(k)}(x, z) \end{aligned} \quad (21)$$

It remains to determine functions $y_{kk_0+i}^{(k)}(x, z)$ from recurrent formula (20).

1. For $k = 0$ from (20) we have

³In order to simplify, hereinafter we will write the values of the functions from the recurrent formula (20) only for $x > k\tau_1 + i\tau_2$, assuming that their values are equal to zero for $x \leq k\tau_1 + i\tau_2$.

⁴For example, the order to determine the solution on the interval $(2\tau_1 + ((n-2)k_0 + j)\tau_2, 3\tau_1 + ((n-3)k_0 + j)\tau_2], n = 1, 2, \dots, l_0 - 1, j = 1, 2, \dots, k_0 - 1$, we have

$$\begin{aligned} & 3\tau_1 + ((n-3)k_0 + j - 1)\tau_2 < \dots < n\tau_1 + (k_0 + j - 1)\tau_2 < (nk_0 + j)\tau_2 < \dots < \\ & \tau_1 + ((n-1)k_0 + j)\tau_2 < 2\tau_1 + ((n-2)k_0 + j)\tau_2 < 3\tau_1 + ((n-3)k_0 + j)\tau_2, \end{aligned}$$

then the solution on that interval has the form:

$$\begin{aligned} y(x, z) = & \sum_{k=0}^{nk_0+j} y_k(x, z) + \sum_{k=1}^n y_{kk_0}^{(k)}(x, z) + \sum_{i=1}^{(n-1)k_0+j} y_{k_0+i}^{(1)}(x, z) + \\ & \sum_{i=1}^{(n-2)k_0+j} y_{2k_0+i}^{(2)}(x, z) + \sum_{i=1}^{(n-3)k_0+j-1} y_{3k_0+i}^{(3)}(x, z) + \dots + \sum_{i=1}^{k_0+j-1} y_{nk_0+i}^{(n)}(x, z) = \\ & \sum_{k=0}^{nk_0+j} y_k(x, z) + \sum_{k=1}^n y_{kk_0}^{(k)}(x, z) + \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{(n-k)k_0+j} y_{kk_0+l}^{(k)}(x, z) + \sum_{k=3}^n \sum_{l=1}^{(n-k)k_0+j-1} y_{kk_0+l}^{(k)}(x, z). \end{aligned}$$

$$y_1(x, z) = \frac{1}{z} \int_{\tau_2}^x q_2(t_1) \text{sinz}(x - t_1) y_0(t_1 - \tau_2, z) dt_1 =$$

$$\frac{1}{z} \int_{\tau_2}^x q_2(t_1) \text{sinz}(x - t_1) \text{sinz}(t_1 - \tau_2, z) dt_1 = \frac{1}{z} b_{s^2}^{(2)}(x, z), \quad x > \tau_2.$$

One can easily show that functions $y_k(x, z)$ have the form:

$$y_k(x, z) = \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(2)}(x, z), \quad x > k\tau_2, \quad k = 1, 2 \dots l_0 k_0 + m_0 \quad (22)$$

2. From (20) for $k = 1$ and $i = 0$ we get

$$y_{k_0}^{(1)}(x, z) = \frac{1}{z} \int_{\tau_1}^x q_1(t_1) \text{sinz}(x - t_1) y_0(t_1 - \tau_1, z) dt_1 =$$

$$\frac{1}{z} \int_{\tau_1}^x q_1(t_1) \text{sinz}(x - t_1) \text{sinz}(t_1 - \tau_1) dt_1 = \frac{1}{z} b_{s^2}^{(1)}(x, z), \quad x > \tau_1$$

and

$$y_{k_0+1}^{(1)}(x, z) = \frac{1}{z} \int_{\tau_1+\tau_2}^x q_2(t_1) \text{sinz}(x - t_1) y_{k_0}^{(1)}(t_1 - \tau_2, z) dt_1 +$$

$$\frac{1}{z} \int_{\tau_1+\tau_2}^x q_1(t_1) \text{sinz}(x - t_1) y_1(t_1 - \tau_1, z) dt_1 =$$

$$\frac{1}{z} \int_{\tau_1+\tau_2}^x q_2(t_1) \text{sinz}(x - t_1) \frac{1}{z} b_{s^2}^{(1)}(t_1 - \tau_2, z) dt_1 +$$

$$\frac{1}{z} \int_{\tau_1+\tau_2}^x q_1(t_1) \text{sinz}(x - t_1) \frac{1}{z} b_{s^2}^{(2)}(t_1 - \tau_1, z) dt_1 =$$

$$\frac{1}{z^2} b_{s^3}^{(2,1)}(x, z) + \frac{1}{z^2} b_{s^3}^{(1,2)}(x, z) = \frac{1}{z^2} \sum_{P \in S_2(1,1)} b_{s^3}^P(x, z), \quad x > \tau_1 + \tau_2. \quad (23)$$

Analogously, for $x > \tau_1 + 2\tau_2$ we get

$$y_{k_0+2}^{(1)}(x, z) = \frac{1}{z} \int_{\tau_1+2\tau_2}^x q_2(t_1) \text{sinz}(x - t_1) y_{k_0+1}^{(1)}(t_1 - \tau_2, z) dt_1 +$$

$$\frac{1}{z} \int_{\tau_1+2\tau_2}^x q_1(t_1) \text{sinz}(x - t_1) y_2(t_1 - \tau_1, z) dt_1 =$$

$$\frac{1}{z} \int_{\tau_1+2\tau_2}^x q_2(t_1) \text{sinz}(x - t_1) \left(\frac{1}{z^2} b_{s^3}^{(2,1)}(t_1 - \tau_2, z) + \frac{1}{z^2} b_{s^3}^{(1,2)}(t_1 - \tau_2, z) \right) dt_1 +$$

$$\frac{1}{z} \int_{\tau_1+2\tau_2}^x q_1(t_1) \text{sinz}(x - t_1) \frac{1}{z^2} b_{s^3}^{(2)}(t_1 - \tau_1, z) dt_1 =$$

$$\frac{1}{z^3} \left(b_{s^4}^{(2,2,1)}(x, z) + b_{s^4}^{(2,1,2)}(x, z) + b_{s^4}^{(1,2,2)}(x, z) \right) = \frac{1}{z^3} \sum_{P \in S_3(1,2)} b_{s^4}^P(x, z).$$

Now, by induction we will prove that functions $y_{k_0+n}^{(1)}(x, z)$ have the form:

$$y_{k_0+n}^{(1)}(x, z) = \frac{1}{z^{n+1}} \sum_{P \in S_{n+1}(1,n)} b_{s^{n+2}}^P(x, z), \quad x > \tau_1 + n\tau_2, \quad n = 2, \dots, (l_0 - 1)k_0 + m_0. \quad (24)$$

From (23) we obtain that (24) is correct for $n = 1$. For $y_{k_0+n+1}^{(1)}(x, z)$ we have

$$y_{k_0+n+1}^{(1)}(x, z) = \frac{1}{z} \int_{\tau_1+(n+1)\tau_2}^x q_2(t_1) \text{sinz}(x - t_1) y_{k_0+n}^{(1)}(t_1 - \tau_2, z) dt_1 +$$

$$\frac{1}{z} \int_{\tau_1+(n+1)\tau_2}^x q_1(t_1) \text{sinz}(x - t_1) y_{n+1}(t_1 - \tau_1, z) dt_1 =$$

$$\frac{1}{z} \int_{\tau_1+(n+1)\tau_2}^x q_2(t_1) \text{sinz}(x - t_1) \left(\frac{1}{z^{n+1}} \sum_{P \in S_{n+1}(1,n)} b_{s^{n+2}}^P(t_1 - \tau_2, z) \right) dt_1 +$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z} \int_{\tau_1+(n+1)\tau_2}^x q_1(t_1) \text{sinz}(x-t_1) \frac{1}{z^{n+1}} b_{s^{n+2}}^{(2)}(t_1-\tau_1, z) dt_1 = \\ & \frac{1}{z^{n+2}} \sum_{P \in \mathcal{S}_{n+2}^{(2)}(1, n+1)} b_{s^{n+3}}^P(x, z) + \frac{1}{z^{n+2}} b_{s^{n+3}}^P \Big|_{P \in \mathcal{S}_{n+2}^{(1)}(1, n+1)}(x, z) = \\ & \frac{1}{z^{n+2}} \sum_{P \in \mathcal{S}_{n+2}^{(1, n+1)}} b_{s^{n+3}}^P(x, z), \quad x > \tau_1 + (n+1)\tau_2, \end{aligned}$$

then, (24) is correct for $n+1$, i.e. functions $y_{k_0+n}^{(1)}(x, z)$ have the form (24).

3. For $k=2$ and $i=0$ from (20) we get

$$\begin{aligned} y_{2k_0}^{(2)}(x, z) &= \frac{1}{z} \int_{2\tau_1}^x q_1(t_1) \text{sinz}(x-t_1) y_{k_0}^{(1)}(t_1-\tau_1, z) dt_1 = \\ & \frac{1}{z} \int_{\tau_1}^x q_1(t_1) \text{sinz}(x-t_1) \frac{1}{z} b_{s^2}^{(1)}(t_1-\tau_1, z) dt_1 = \frac{1}{z^2} b_{s^3}^{(1)}(x, z), \quad x > 2\tau_1, \end{aligned}$$

and one can easily show by inductions that

$$y_{2k_0+n}^{(2)}(x, z) = \frac{1}{z^{n+2}} \sum_{P \in \mathcal{S}_{n+2}^{(2, n)}} b_{s^{n+3}}^P(x, z), \quad x > 2\tau_1 + n\tau_2, \quad n = 1, \dots, (l_0 - 2)k_0 + m_0 \quad (25)$$

4. Also, from (20) we obtain that

$$y_{kk_0}^{(k)}(x, z) = \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(1)}(x, z), \quad x > k\tau_1, \quad k = 1, 2, \dots, l_0. \quad (26)$$

5. Now, we will prove by induction that functions $y_{kk_0+n}^{(k)}(x, z)$, $x > k\tau_1 + n\tau_2$ for each $k = 1, 2, \dots, l_0$, have the form:

$$y_{kk_0+n}^{(k)}(x, z) = \frac{1}{z^{n+k}} \sum_{P \in \mathcal{S}_{n+k}^{(k, n)}} b_{s^{n+k+1}}^P(x, z), \quad n = 1, 2, \dots, (l_0 - k)k_0 + m_0 \quad (27)$$

Let us assume that (27) is valid for $k \leq K-1$, $n = 1, 2, \dots, (l_0 - k)k_0 + m_0$ and for $k = K$, $n \leq N < (l_0 - K)k_0 + m_0$. We will show that (27) is correct for $k = K$, $n = N+1$. Using (27) for $k = K-1$, $n = N+1$ and $k = K$, $n = N$, we have

$$\begin{aligned} y_{Kk_0+N+1}^{(K)}(x, z) &= \frac{1}{z} \int_{K\tau_1+(N+1)\tau_2}^x q_2(t_1) \text{sinz}(x-t_1) y_{Kk_0+N}^{(K)}(t_1-\tau_2, z) dt_1 + \\ & \frac{1}{z} \int_{K\tau_1+(N+1)\tau_2}^x q_1(t_1) \text{sinz}(x-t_1) y_{(K-1)k_0+N+1}^{(K-1)}(t_1-\tau_1, z) dt_1 = \\ & \frac{1}{z} \int_{K\tau_1+(N+1)\tau_2}^x q_2(t_1) \text{sinz}(x-t_1) \left(\frac{1}{z^{N+K}} \sum_{P \in \mathcal{S}_{N+K}^{(K, N)}} b_{s^{N+K+1}}^P(t_1-\tau_2, z) \right) dt_1 + \\ & \frac{1}{z} \int_{K\tau_1+(N+1)\tau_2}^x q_1(t_1) \text{sinz}(x-t_1) \left(\frac{1}{z^{N+K}} \sum_{P \in \mathcal{S}_{N+K}^{(K-1, N+1)}} b_{s^{N+K+1}}^P(t_1-\tau_2, z) \right) dt_1 \\ &= \frac{1}{z^{N+K+1}} \sum_{P \in \mathcal{S}_{N+K+1}^{(2)}(K, N+1)} b_{s^{N+K+2}}^P(x, z) + \frac{1}{z^{N+K+1}} \sum_{P \in \mathcal{S}_{N+K+1}^{(1)}(K, N+1)} b_{s^{N+K+2}}^P(x, z) \\ &= y_{Kk_0+N+1}^{(K)}(x, z) = \frac{1}{z^{N+K+1}} \sum_{P \in \mathcal{S}_{N+K+1}^{(K, N+1)}} b_{s^{N+K+2}}^P(x, z), \quad x > K\tau_1 + (N+1)\tau_2, \end{aligned}$$

thus proving that (27) is correct for $k = K$, $n = N+1$.

6. Substituting functions $y_{kk_0+n}^{(k)}(x, z)$ into (21) we get the solution of the boundary value problem on the interval $(n_0\tau_1 + ((l_0 - n_0)k_0 + m_0)\tau_2, \pi]$ in the form (19), thus proving the theorem. \square

Remark 1. Taking into account that under the condition (8), the order of linear combinations of delays is known, we can determine the solution by the method of steps. Let us assume that we obtained the solution on the intervals $(i\tau_2, (i+1)\tau_2]$, $i = 1, 2, \dots, k_0 - 1$ by the method of steps, in the form of:

$$y(x, z) = \sin z x + \sum_{k=1}^i \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(2)}(x, z),$$

and on the interval $(k_0\tau_2, \tau_1]$ in the following form:

$$y(x, z) = \sin z x + \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(2)}(x, z).$$

Therefore, for $x \in (\tau_1, (k_0 + 1)\tau_2)$ we have

$$\begin{aligned} y(x, z) &= \sin z x + \sum_{i=1}^{k_0-1} \frac{1}{z} \int_{i\tau_2}^{(i+1)\tau_2} q_2(t_1) \sin z(x - t_1) y(t_1 - \tau_2, z) dt_1 + \\ &\quad + \frac{1}{z} \int_{k_0\tau_2}^{\tau_1} q_2(t_1) \sin z(x - t_1) y(t_1 - \tau_2, z) dt_1 \\ &\quad + \frac{1}{z} \int_{\tau_1}^x q_2(t_1) \sin z(x - t_1) y(t_1 - \tau_2, z) dt_1 + \\ &\quad + \frac{1}{z} \int_{\tau_1}^x q_1(t_1) \sin z(x - t_1) y(t_1 - \tau_1, z) dt_1 = \sin z x + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k_0-1} \frac{1}{z} \int_{i\tau_2}^{(i+1)\tau_2} q_2(t_1) \sin z(x - t_1) (\sin z(t_1 - \tau_2) + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(2)}(t_1 - \tau_2, z)) dt_1 + \\ &\quad + \frac{1}{z} \int_{k_0\tau_2}^{\tau_1} q_2(t_1) \sin z(x - t_1) (\sin z(t_1 - \tau_2) + \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(2)}(t_1 - \tau_2, z)) dt_1 \\ &\quad + \frac{1}{z} \int_{\tau_1}^x q_2(t_1) \sin z(x - t_1) (\sin z(t_1 - \tau_2) + \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(2)}(t_1 - \tau_2, z)) dt_1 + \\ &\quad + \frac{1}{z} \int_{\tau_1}^x q_1(t_1) \sin z(x - t_1) \sin z(t_1 - \tau_1) dt_1 = \sin z x + \\ &\quad + \frac{1}{z} \int_{\tau_2}^x q_2(t_1) \sin z(x - t_1) \sin z(t_1 - \tau_2) dt_1 + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k_0} \frac{1}{z} \int_{i\tau_2}^x q_2(t_1) \sin z(x - t_1) \frac{1}{z^{i-1}} b_{s^i}^{(2)}(t_1 - \tau_2, z) dt_1 + \\ &\quad + \frac{1}{z} \int_{\tau_1}^x q_1(t_1) \sin z(x - t_1) \sin z(t_1 - \tau_1) dt_1 = \\ &\quad \sin z x + \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(2)}(x, z) + \frac{1}{z} b_{s^2}^{(1)}(x, z). \end{aligned}$$

Determining of the solution exposed above shows complexity of the method of steps for differential operators with two delays. If we continue in the same way, we could obtain the solution (19), but it would be very complicated. The method of successive approximations is not just simpler but it can also be used in general.

Example 1: Let us consider the boundary value problem (6)-(7) such that $\tau_2 = 0,1$ and $\tau_1 = 0,41$. Then $k_0 = 4$, $\delta = 0,01$ and $l_0 = 7$. Since $\delta = 0,01 < \frac{0,1}{8} = 0,0125$ the condition (8) is fulfilled and the solution has the form (19). We obtain $m_0 = \left\lfloor \frac{\pi}{\tau_2} \right\rfloor - l_0 k_0 = 3$, and since $4\tau_1 + 15\tau_2 < \pi < 5\tau_1 + 11\tau_2$, we have $n_0 = 4$. Then, the solution on the interval $(4\tau_1 + 15\tau_2, \pi]$ is

$$y(x, z) = \sin z x + \sum_{k=1}^{31} \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(2)}(x, z) + \sum_{k=1}^7 \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(1)}(x, z) + \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^{4(7-k)+3} \frac{1}{z^{k+i}} \sum_{P \in S_{k+i}(k,i)} b_{s^{k+i+1}}^P(x, z) + \sum_{k=5}^7 \sum_{i=1}^{4(7-k)+2} \frac{1}{z^{k+i}} \sum_{P \in S_{k+i}(k,i)} b_{s^{k+i+1}}^P(x, z)$$

3. The construction of the solution for arbitrary τ_1 and τ_2

In Section 1. we proved that the order of linear combinations of delays is completely determined by the condition $\delta \in \left(0, \frac{\tau_2}{l_0+1}\right)$. If $\delta \in \left[\frac{\tau_2}{l_0+1}, \tau_2\right)$, it is necessary to consider different cases of relations between δ and the order of linear combinations of delays.⁵ However, in order to determine the characteristic function and further considerations of inverse spectral problems, it is enough to determine the solution on the interval containing π . Hence, we will not deal with determining the order of linear combinations of delays within any interval that belongs to $[0, \pi]$, but we will consider the order of linear combinations of delays just around π . We will show that the solution of the boundary value problem in general, i.e. for $\delta \in (0, \tau_2)$, is also equal to the sum of functions defined by the recurrent formula (20).

Theorem 2. Let $\tau_1 = k_0\tau_2 + \delta$, $\delta \in (0, \tau_2)$, $l_0\tau_1 \leq \pi < (l_0 + 1)\tau_1$ and $q_1, q_2 \in L_1[0, \pi]$. Let m_1, n_k and N are defined by

$$m_1 = \left\lfloor \frac{\pi}{\tau_2} \right\rfloor, n_k = \left\lfloor \frac{\pi - k\tau_1}{\tau_2} \right\rfloor, N = \max_k \{m_1\tau_2, k\tau_1 + n_k\tau_2\}, k = 1, 2, \dots, l_0 \quad (28)$$

Then the solution of the boundary value problem (6)-(7) on the interval $(N, \pi]$ has the following form

$$y(x, z) = \sin z x + \sum_{k=1}^{m_1} \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(2)}(x, z) + \sum_{k=1}^{l_0} \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(1)}(x, z) + \sum_{k=1}^{l_0} \sum_{i=1}^{n_k} \frac{1}{z^{k+i}} \sum_{P \in S_{k+i}(k,i)} b_{s^{k+i+1}}^P(x, z) \quad (29)$$

Proof. We can conclude from the recurrent formula (20) that for each $\delta \in (0, \tau_2)$ the solution of the integral equation (9) on any interval I , is equal to the sum of functions $y_{kk_0+i}^{(k)}(x, z)$, such that $k\tau_1 + i\tau_2$ is less than the upper limit of the interval I . Therefore, we should determine linear combinations of delays which are the nearest to π . For the $l\tau_1$ delays, the nearest delay is $l_0\tau_1$. From (28) we get that $m_1\tau_2$ is the linear combinations of $i\tau_2$ delays which is the nearest to π , and also $k\tau_1 + n_k\tau_2$ is the linear combinations of $k\tau_1 + i\tau_2$ delays which is the nearest to π . Since $N = \max_k \{m_1\tau_2, k\tau_1 + n_k\tau_2\}$, there are not any linear combinations of delays between N and π . Hence, the solution on the interval $(N, \pi]$ is equal to the sum of functions $y_{kk_0+i}^{(k)}(x, z)$ which are determined by delays $k\tau_1$, $k = 1, 2, \dots, l_0$, $k\tau_2$, $k = 1, 2, \dots, m_1$, and $l\tau_1 + k\tau_2$, $l = 1, 2, \dots, l_0$, $k = 1, 2, \dots, n_k$. Then, the solution of the boundary value problem has the form (29), thus proving the theorem. \square

⁵For example, if the condition (10) is fulfilled for $n = 1, 2, \dots, l_0$ and instead of (10) for $n = l_0 + 1$ the condition $((l_0 + 1)k_0 + 1\tau_2 < l_0 + 1\tau_1 \leq l_0 + 1k_0 + 2$ is fulfilled, then $\delta \in (\tau_2/l_0, \tau_2/l_0 + 1]$.

Remark 2. From (29) we get the solution (19) for $N = (n_0\tau_1 + ((l_0 - n_0)k_0 + m_0)\tau_2)$, $m_1 = l_0k_0 + m_0$ and

$$n_k = \begin{cases} (l_0 - k)k_0 + m_0 - 1, & k = 1, 2, \dots, n_0 \\ (l_0 - k)k_0 + m_0, & k = n_0 + 1, \dots, l_0. \end{cases}$$

Corollary 1: Comparing the solution (29) and the solution under the condition that $\tau_1 = k_0\tau_2$ ([9]), we can notice that there is a difference between those solutions just on the interval $(l_0\tau_1, \pi]$. It is expected because in the case that $\tau_1 = k_0\tau_2$ there are not linear combinations of delays between $l_0\tau_1$ and π , i.e. there are not functions defined by (20) between $l_0\tau_1$ and π . The solution under the condition that $\tau_1 = k_0\tau_2$ we can obtain from (29) for $N = l_0k_0\tau_2 = l_0\tau_1$, $m_1 = l_0k_0$, $n_k = (l_0 - k)k_0$ and $n_{l_0} = 0$. Hence we get that the solution of the boundary value problem (6)-(7) has the form (29) for any $\delta \in [0, \tau_2)$, i.e. we get a generalization of the result from [9].

Example 2: Let us consider the boundary value problem (6)-(7) such that $\tau_2 = 0,1$ and $\tau_1 = 0,48$. Then $k_0 = 4$, $\delta = 0,08$ and $l_0 = 6$. We have $\delta = 0,08 > 0,07 = \frac{\tau_2}{l_0+1}$ and the solution has the form (29). Further, we have $m_0 = \left[\frac{\pi}{0,1} \right] = 31$, $n_1 = \left[\frac{\pi-0,48}{0,1} \right] = 26$, $n_2 = \left[\frac{\pi-0,96}{0,1} \right] = 21$, $n_3 = \left[\frac{\pi-1,44}{0,1} \right] = 17$, $n_4 = \left[\frac{\pi-1,92}{0,1} \right] = 12$, $n_5 = \left[\frac{\pi-2,4}{0,1} \right] = 7$, $n_6 = \left[\frac{\pi-2,88}{0,1} \right] = 2$. Now from $n_0 = \max_k \{m_0\tau_2, k\tau_1 + n_k\tau_2\} = 3,14$ we get the solution on the interval $(3\tau_1 + 17\tau_2, \pi]$:

$$\begin{aligned} y(x, z) = & \sin zx + \sum_{k=1}^{31} \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(2)}(x, z) + \sum_{k=1}^6 \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}^{(1)}(x, z) + \\ & \sum_{i=1}^{26} \frac{1}{z^{1+i}} \sum_{P \in S_{1+i}(1,i)} b_{s^{i+2}}^P(x, z) + \sum_{i=1}^{21} \frac{1}{z^{2+i}} \sum_{P \in S_{2+i}(2,i)} b_{s^{i+3}}^P(x, z) + \\ & \sum_{i=1}^{17} \frac{1}{z^{3+i}} \sum_{P \in S_{3+i}(3,i)} b_{s^{i+4}}^P(x, z) + \sum_{i=1}^{12} \frac{1}{z^{4+i}} \sum_{P \in S_{4+i}(4,i)} b_{s^{i+5}}^P(x, z) \\ & \sum_{i=1}^{17} \frac{1}{z^{3+i}} \sum_{P \in S_{3+i}(3,i)} b_{s^{i+4}}^P(x, z) + \sum_{i=1}^{12} \frac{1}{z^{4+i}} \sum_{P \in S_{4+i}(4,i)} b_{s^{i+5}}^P(x, z) \\ & + \sum_{i=1}^7 \frac{1}{z^{5+i}} \sum_{P \in S_{5+i}(5,i)} b_{s^{i+6}}^P(x, z) + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{z^{6+i}} \sum_{P \in S_{6+i}(6,i)} b_{s^{i+7}}^P(x, z) \quad \Delta \end{aligned}$$

References

- [1] **B.M. Levitan.** Inverse Sturm–Liouville Problems. *Nauka*, Moscow, 1984.
- [2] **V.A. Marchenko.** Sturm–Liouville Operators and Applications. *Operator Theory: Advances and Applications*, English transl., Birkhäuser, 22, 1986.
- [3] **G. Freiling, V.A. Yurko.** Inverse Sturm–Liouville Problems and their Applications. *Nova Science Publishers*, New York, 2001.
- [4] **M. Pikula.** Determination of a Sturm–Liouville-type differential operator with delay argument from two spectra. *Mat. vesnik*, 43 (3-4) (1991) 159-171
- [5] **M. Pikula, T. Marjanović.** The regulation independent of the potential symmetrical to the center $[\tau, \pi]$ for Sturm–Liouville operator with a constant delay. *Facta Universitatis, Ser. Math. Infor.* 14, 1999, 21-29

- [6] **M. Pikula, V. Vladičić, O. Marković.** A solution to the inverse problem for Sturm-Liouville-type equation with a delay. *Filomat*, 27:7, 2013, 1237-1245
- [7] **G. Freiling, V. A. Yurko.** Inverse Sturm-Liouville differential operators with a constant delay. *Appl. Math. Letters*, 25 2012, 1999-2004
- [8] **M. Pikula, N. Pavlović.** Construction of the solution of the boundary value problem with two constant delays and asymptotic of eigenvalues. *Proceedings, Third Mathematical Conference of the Republic Srpska, Vol.1, 2014, pp.83-91*
- [9] **M. Pikula, N. Pavlović, B. Vojvodić.** First regularized trace on the limit assignment of Sturm-Liouville type with two constant delays. *Conference Analysis, Topology and Applications 2014 (ATA2014)*, Vrnjačka Banja, 2014,
- [10] **R. Lazović.** PhD Thesis, University of Belgrade, Faculty of Mathematics, 1998.
- [11] **V. Vladičić.** PhD Thesis, University of East Sarajevo, Faculty of Philosophy, 2012.

Оцена грешке Гаус-Лобато квадратурних формула у односу на Чебишевљеве тежинске функције друге, треће и четврте врсте

Љубица Михаић

Математички факултет, Београд
Висока технолошка школа струковних студија, Шабац
e-mail: maticljubica@gmail.com

Александар Пејчев

Машински факултет, Београд
e-mail: apejcev@mas.bg.ac.rs

Апстракт. У овом раду разматрамо квадратурну формулу за апроксимацију интеграла функције аналитичке у области комплексне равни ограничене елипсом са фокусима ∓ 1 , у односу на Чебишевљеве тежинске функције друге, треће и четврте врсте и са двоструким чвором у крајњим тачкама ∓ 1 . Испитује се максимум модула језгра датог у интегралној репрезентацији остатка Гаус-Лобато квадратурне формуле. Гаучи и Ли у раду [1] експлицитно формулишу комплексна језгра као функције три променљиве у односу на сваку од четири Чебишевљеве тежине при чему је детаљно проучено понашање модула језгра само у случају прве тежине, док су за остале три постављане хипотезе засноване на нумеричким резултатима. Користећи методе сличне онима које су приказане у раду [2], на елипс је могуће одредити тачан положај максимума модула језгара у случају осталих тежинских функција.

Кључне речи: Гаус-Лобато квадратурне формуле; Чебишевљеве тежинске функције; Оцена грешке; Остатак квадратурне формуле.

1. Увод

Анализирамо остатак Гаус-Лобато квадратурне формуле са крајњим тачкама ∓ 1 вишеструкости r

$$\int_{-1}^1 f(t)\omega(t) dt = \sum_{\rho=0}^{r-1} \kappa_{\rho}^L f^{(\rho)}(-1) + \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu}^L f(\tau_{\nu}^L) + \sum_{\rho=0}^{r-1} \mu_{\rho}^L f^{(\rho)}(1) + R_{n,r}^L(f), \quad (1.1)$$

где су τ_{ν}^L нуле ортогоналног полинома $\pi_n(\cdot; \omega^L)$ на интервалу $[-1, 1]$, у односу на тежинске функције

$$\omega^L(t) = (t^2 - 1)^r \omega(t).$$

Такође, $R_{n,r}^L(f) = 0$ за све $f \in \mathbb{P}_{2n+2r-1}$ (полиноми степена $\leq 2n + 2r - 1$).

Нека је Γ проста затворена крива у комплексној равни која окружује интервал $[-1, 1]$ и $\mathcal{D} = \text{int}\Gamma$ њена унутрашњост. Уколико је подинтегрална функција f аналитичка на домену \mathcal{D} који садржи интервал $[-1, 1]$, тада се остатак квадратурне формуле $R_{n,r}^L(f)$ може представити интегралном репрезентацијом

$$R_{n,r}^L(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} K_{n,r}^L(z; \omega) f(z) dz. \quad (1.2)$$

Такозвано језгро је дато са

$$K_{n,r}^L(z; \omega) \equiv K_{n,r}(z, \omega) = \frac{\varrho_{n,r}^L(z; \omega)}{(z^2 - 1)^r \pi_n(z; \omega^L)}, \quad z \notin [-1, 1],$$

где је

$$(z^2 - 1)^r \pi_n(z; \omega^L) = \omega_{n,r}(z; \omega),$$

$$\varrho_{n,r}^L(z; \omega) \equiv \varrho_{n,r}(z, \omega) = \int_{-1}^1 \frac{\omega_{n,r}(z; \omega)}{z-t} \omega(t) dt.$$

Остатак квадратурне формуле (1.2) можемо оценити

$$|R_{n,r}^L(f)| \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi} \left(\max_{z \in \Gamma} |K_{n,r}(z; \omega)| \right) \left(\max_{z \in \Gamma} |f(z)| \right),$$

где је $\ell(\Gamma)$ дужина контуре Γ .

Нека је контура елиптичка $\Gamma = \mathcal{E}_\rho$, где је

$$\mathcal{E}_\rho = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = \frac{1}{2} \left(\rho e^{i\theta} + \frac{1}{\rho e^{i\theta}} \right) = \frac{1}{2} (u + u^{-1}), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}. \quad (1.3)$$

Овим се модуо грешке $|R_{n,r}^L(f)|$ своди на

$$|R_{n,r}^L(f)| \leq \frac{\ell(\mathcal{E}_\rho)}{2\pi} \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n,r}(z; \omega)| \right) \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right).$$

У наставку претпостављамо да је $r = 2$, односно да су крајње тачке многострукости 2.

Потребно је одредити тачан положај на елиптичкој контури у ком модуо језгра достиже своју максималну вредност.

У раду [1] Гаучи и Ли разматрају Гаус-Радау и Гаус-Лобато квадратурне формуле са двоструким крајњим тачкама у односу на четири Чебишевљеве тежинске функције

$$\omega_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \omega_2(t) = \sqrt{1-t^2}, \quad \omega_3(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}, \quad \omega_4(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}.$$

Такође, формулишу и експлицитне изразе одговарајућих језгара $K(z; \omega_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, као функције променљиве $u = \rho e^{i\theta}$.

За Гаус-Радау квадратурне формуле са фиксираним чвором у -1, Гаучи доказује да одговарајуће језгро у случају Чебишевљевих тежинских функција $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_4$ достиже своју максималну вредност на елипси \mathcal{E}_ρ на негативном делу реалне осе.

Недавно, Пејчев и Спалевић потврђују и доказују емпиријске резултате у случају $\omega = \omega_3$ [2]. Миловановић, Спалевић и Пранић у раду [3] такође доказују и потврђују емпиријске резултате у случају тежине $\omega = \omega_2$.

Гаучи и Ли показују да Гаус-Лобато квадратурна формула са двоструким крајњим тачкама у односу на Чебишевљеву тежинску функцију прве врсте достиже своју максималну вредност на реалној осе ([1], Теорема 4.1).

За преостала три случаја $\omega = \omega_2$, $\omega = \omega_3$ и $\omega = \omega_4$ до сада су постојале само хипотезе засноване на асимптотским и нумеричким резултатима. У овом раду аналитички доказујемо егзистенцију вредности ρ^* (поглавље 2) из поменутих хипотеза, а дата је и детаљна нумеричка анализа.

2. Максимум модула језгра у случају треће и четврте Чебишевљеве тежинске функције

За Гаус-Лобато квадратурну формулу (1.1) у односу на тежинску функцију $\omega = \omega_3$ постоји хипотеза ([1], стр. 328) да се максимум модула језгра увек достиже на позитивном делу реалне осе.

Гаучи и Ли [1, једнакости (2.17) и (2.18)] експлицитно формулишу изразе за језгра на елипси \mathcal{E}_ρ ,

$$K_{n,2}(z; \omega_3) = \frac{2\pi}{u^{n+4}} \frac{u+1}{u-1} \times \frac{u^3 + \alpha_n(u^2 - u) - \beta_n}{\beta_n[u^{n+4} - u^{-(n+4)}] + \alpha_n[u^{n+3} - u^{-(n+3)} - (u^{n+2} - u^{-(n+2)})] - [u^{n+1} - u^{-(n+1)}]},$$

и $K_{n,2}(z; \omega_4) = -K_{n,2}(-z; \omega_3)$, где је $\alpha_n = \frac{n+1}{n+3}$, $\beta_n = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}$, $z = (u + u^{-1})/2$ и $u = \rho e^{i\theta}$.

Потребно је израчунати модуо језгра за $\theta = 0$ јер одговарајућа хипотеза тврди да се максимум модула језгра достиже управо у тој вредности угла за свако $\rho > 1$.

Најпре анализирамо језгро у односу на трећу тежинску функцију $K_{n,2}(z; \omega_3)$, а затим, због симетрије, приказујемо аналогне резултате и за $K_{n,2}(z; \omega_4)$.

Модуо језгра се може записати у облику

$$|K_{n,2}(z; \omega_3)| = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\rho^{2n+8}} \frac{ac}{b\delta}},$$

где су

$$a = |u+1|^2 = \rho^2 + 2\cos\theta \cdot \rho + 1,$$

$$b = |u-1|^2 = \rho^2 - 2\cos\theta \cdot \rho + 1,$$

$$\begin{aligned} c &= |u^3 + \alpha_n(u^2 - u) - \beta_n|^2 \\ &= \rho^6 + (2\alpha_n \cos \frac{\theta}{2}) \cdot \rho^5 + (\alpha_n^2 - 2\alpha_n \cos \theta) \cdot \rho^4 + (-2\alpha_n^2 \cos \frac{\theta}{2} - 2\beta_n \cos \frac{3\theta}{2}) \cdot \rho^3 \\ &\quad + (\alpha_n^2 - 2\alpha_n \beta_n \cos \theta) \cdot \rho^2 + (2\alpha_n \beta_n \cos \frac{\theta}{2}) \cdot \rho + \beta_n^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta &= \left| \beta_n[u^{n+4} - u^{-(n+4)}] + \alpha_n[u^{n+3} - u^{-(n+3)} - (u^{n+2} - u^{-(n+2)})] - [u^{n+1} - u^{-(n+1)}] \right|^2 \\ &= \frac{d}{\rho^{2n+8}}, \end{aligned}$$

тј.

$$\begin{aligned}
d &= \delta \cdot \rho^{2n+8} = |\beta_n[u^{n+4} - u^{-(n+4)}] \\
&+ \alpha_n[u^{n+3} - u^{-(n+3)} - (u^{n+2} - u^{-(n+2)})] - [u^{n+1} - u^{-(n+1)}]^2 \cdot \rho^{2n+8} \\
&= \beta_n^2 \cdot \rho^{4n+16} + (2\alpha_n\beta_n \cos \theta) \cdot \rho^{4n+15} + (\alpha_n^2 - 2\alpha_n\beta_n \cos 2\theta) \cdot \rho^{4n+14} \\
&+ (-2\beta_n \cos 3\theta - 2\alpha_n^2 \cos \theta) \cdot \rho^{4n+13} + (\alpha_n^2 - 2\alpha_n \cos 2\theta) \cdot \rho^{4n+12} \\
&+ (2\alpha_n \cos \theta) \cdot \rho^{4n+11} + \rho^{4n+10} + (2\beta_n \cos(2n+5)\theta) \cdot \rho^{2n+11} \\
&+ (2\alpha_n\beta_n \cos(2n+6)\theta + 2\alpha_n \cos(2n+4)\theta) \cdot \rho^{2n+10} \\
&+ (2\alpha_n^2 \cos(2n+5)\theta - 2\alpha_n\beta_n \cos(2n+7)\theta - 2\alpha_n \cos(2n+3)\theta) \cdot \rho^{2n+9} \\
&+ (-2\beta_n^2 \cos(2n+8)\theta - 2 \cos(2n+2)\theta - 2\alpha_n^2 \cos(2n+6)\theta - 2\alpha_n^2 \cos(2n+4)\theta) \cdot \rho^{2n+8} \\
&+ (-2\alpha_n\beta_n \cos(2n+7)\theta - 2\alpha_n \cos(2n+3)\theta + 2\alpha_n^2 \cos(2n+5)\theta) \cdot \rho^{2n+7} \\
&+ (2\alpha_n \cos(2n+4)\theta + 2\alpha_n\beta_n \cos(2n+6)\theta) \cdot \rho^{2n+6} + (2\beta_n \cos(2n+5)\theta) \cdot \rho^{2n+5} \\
&+ \rho^6 + (2\alpha_n \cos \theta) \cdot \rho^5 + (\alpha_n^2 - 2\alpha_n \cos 2\theta) \cdot \rho^4 + (-2\alpha_n^2 \cos \theta - 2\beta_n \cos 3\theta) \cdot \rho^3 \\
&+ (\alpha_n^2 - 2\alpha_n\beta_n \cos 2\theta) \cdot \rho^2 + (2\alpha_n\beta_n \cos \theta) \cdot \rho + \beta_n^2.
\end{aligned}$$

Да би се $d(\rho)$ представило као полиномијална функција по ρ , израз $\delta(\rho)$ је помножен са ρ^{2n+8} , чиме се квадрат модула језгра своди на

$$|K_{n,2}(z; \omega_3)|^2 = 4\pi^2 \frac{ac}{bd}.$$

Квадрат модула језгра за $\theta = 0$ се може изразити

$$|K_{n,2}(z; \omega_3)|^2 = 4\pi^2 \frac{AC}{BD},$$

где су A, B, C, D вредности функција a, b, c, d за $\theta = 0$. Наш задатак је да покажемо да је ово уједно и максимална вредност квадрата модула језгра.

Теорема 1. *За Гаус-Лобато квадратурну формулу са двоструким чвором у крајњим тачкама ∓ 1 у односу на Чебишевљеву тежинску функцију треће врсте, постоји вредност ρ^* почев од које модуло језгра $|K_{n,2}(z; \omega_3)|$ увек достиже своју максималну вредност на позитивном делу реалне осе ($\theta = 0$), тј.*

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n,2}(z; \omega_3)| = \left| K_{n,2} \left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}), \omega_3 \right) \right|.$$

Доказ У складу са претходним ознакама, потребно је показати $\frac{ac}{bd} \leq \frac{AC}{BD}$.

Ова неједнакост се може упростити увођењем ознака A_1, B_1, C_1, D_1 које представљају разлике $a - A, b - B, c - C$ и $d - D$, респективно. Претходна неједнакост се може представити у облику

$$I = I(\rho) = [CD(A_1B - AB_1) + C_1BD(A + A_1) - AC(B + B_1)D_1] \leq 0, \quad (2.4)$$

за свако $\rho > 1$.

Лако се види да је $I(\rho)$ полиномијални израз по променљивој ρ степена $4n + 25$, чији коефицијенти зависе само од θ , тј.

$$I = I(\rho) = \sum_{i=0}^{4n+25} a_i(\theta)\rho^i. \quad (2.5)$$

Да бисмо показали непозитивност израза $I(\rho)$ за свако $\rho > \rho^*$, најпре је потребно да се анализира знак његовог водећег коефицијента a_{4n+25} . Наиме, користимо једноставну чињеницу да се почев од неке довољно велике вредности ρ , знак полинома $I(\rho) = \rho^{4n+25}(a_{4n+25} + \frac{a_{4n+24}}{\rho} + \frac{a_{4n+23}}{\rho^2} + \dots + \frac{a_0}{\rho^{4n+25}})$ поклапа са знаком његовог водећег коефицијента.

Дакле, да бисмо показали егзистенцију неке фиксиране вредности почев од које је полином непозитиван, потребно је показати негативност водећег коефицијента a_{4n+25} .

Поново, уводећи ознаке: $I(\rho) = x(\rho) + y(\rho) - z(\rho)$, и рачунајући водеће коефицијенте израза $x(\rho)$, $y(\rho)$ и $z(\rho)$ респективно добијамо: $\beta_n^2(-8\sin^2\frac{\theta}{2})$, $-4\alpha_n\beta_n^2\sin^2\frac{\theta}{2}$ и $(-4\alpha_n\beta_n\sin^2\frac{\theta}{2})$. Овим се добија

$$a_{4n+25} = -8\beta_n^2\sin^2\frac{\theta}{2} - 4\alpha_n\beta_n^2\sin^2\frac{\theta}{2} + 4\alpha_n\beta_n\sin^2\frac{\theta}{2} = -4\beta_n\sin^2\frac{\theta}{2}(2\beta_n + \alpha_n\beta_n - \alpha_n),$$

где је $\alpha_n = \frac{n+1}{n+3}$ и $\beta_n = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)} = \alpha_n \cdot \frac{n+2}{n+4}$, односно

$$a_{4n+25} < 0 \quad \text{акко} \quad 2\beta_n + \alpha_n\beta_n - \alpha_n > 0 \quad \text{акко} \quad 2\frac{n+2}{n+4} + \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)} - 1 > 0.$$

Претходна неједнакост се своди на $n^2 + 3n + 1 > 0$, што је испуњено за свако $n > 0$, тако да је негативност израза a_{4n+25} очигледна. \square

Трансформација полинома $I(\rho)$

Да бисмо показали непозитивност полинома $I(\rho)$ за свако $\rho > 1$, најпре га записујемо у облику развоја по позитивним разликама $\rho - 1$

$$I(\rho) = \sum_{i=0}^{4n+25} b_i(\theta)(\rho - 1)^i,$$

а затим анализирамо његове нове коефицијенте.

Експлицитни изрази за коефицијенте $b_i(\theta)$, $i = 0, 1, \dots, 4n + 25$ су такође компликовани тригонометријски изрази по θ . Они се могу изразити као функције коефицијената $a_j(\theta)$, $j = 0, 1, \dots, 4n + 25$ користећи биномну формулу, али је њихова нумеричка имплементација једноставнија помоћу итеративне Хорнерове шеме.

Пртањем графика коефицијената $b_i(\theta)$, $i = 0, 1, \dots, 4n + 25$, уочавамо да су сви строго испод x -осе. Ова метода је тестирана за све вредности n од 1 до 100 и даје оптималне резултате. Неки од њих су приказани (слика 2.1).

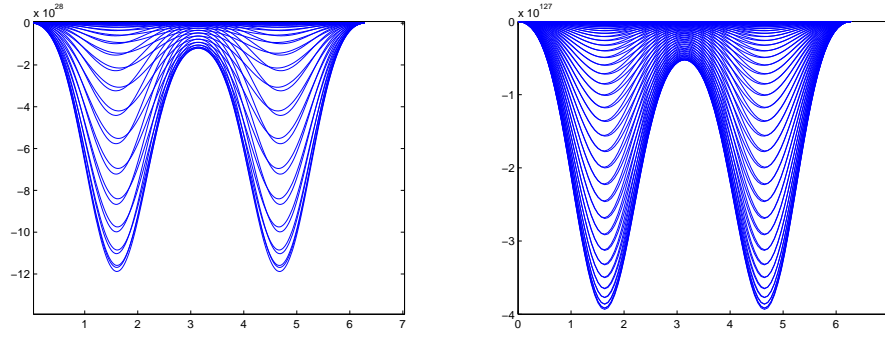
Слични резултати важе и за $K_{n,2}(z; \omega_4) = -K_{n,2}(-z; \omega_3)$.

С обзиром на то да је елипса дата са $\mathcal{E}_\rho = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = \frac{1}{2} \left(\rho e^{i\theta} + \frac{1}{\rho e^{i\theta}} \right), 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$, z и $-z$ се могу записати у облику

$$z = \frac{\rho + \rho^{-1}}{2} \cos \theta + i \cdot \frac{\rho - \rho^{-1}}{2} \sin \theta,$$

$$-z = \frac{\rho + \rho^{-1}}{2} \cos(\theta + \pi) + i \cdot \frac{\rho - \rho^{-1}}{2} \sin(\theta + \pi).$$

Теорема 2. *За Гаус-Лобато квадратурну формулу са двоструким чвором у крајњим тачкама ∓ 1 у односу на Чебишевљеву тежинску функцију четврте врсте, постоји вредност ρ^* почев*



Слика 2.1. Функције $b_0(\theta), \dots, b_{97}(\theta)$, у случају $n = 18$ (лево) и функције $b_0(\theta), \dots, b_{425}(\theta)$, у случају $n = 100$ (десно).

од које модуло језгра $|K_{n,2}(z; \omega_4)|$ увек достиже своју максималну вредност на негативном делу реалне осе ($\theta = \pi$), тј.

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n,2}(z; \omega_4)| = \left| K_{n,2} \left(-\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}), \omega_4 \right) \right|.$$

3. Максимум модула језгра у случају друге Чебишевљеве тежинске функције

Гаучи и Ли (у [1], једн. (2.13)) формулишу експлицитни израз за језгро на елипси \mathcal{E}_ρ ,

$$K_{n,2}(z; \omega_2) = \frac{\pi(u^2 - 1)}{u^{n+6}} \frac{u^4 - \alpha_n u^2 + \beta_n}{\beta_n [u^{n+5} - u^{-(n+5)}] - \alpha_n [u^{n+3} - u^{-(n+3)}] + [u^{n+1} - u^{-(n+1)}]},$$

где је $\alpha_n = \frac{2(n+1)}{n+4}$, $\beta_n = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+4)(n+5)}$.

У истом раду (стр. 327) постоји хипотеза да се максимум увек достиже на позитивном делу реалне осе ($\theta = 0$) уколико је $1 \leq n \leq 9$; исто важи и за $n \geq 10$ уколико је $1 < \rho < \rho^*$ (за неко $\rho^* > 1$); док се за $\rho \geq \rho^*$ максимум достиже на имагинарној осе ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

На исти начин као што је приказано у претходном поглављу, квадрат модула језгра се може изразити у облику

$$|K_{n,2}(z; \omega_2)|^2 = \frac{\pi^2 ac}{\rho^2 d}.$$

С обзиром на хипотезу, сада треба израчунати модуло језгра у угловима $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Теорема 3. За Гаус-Лобато квадратурне формуле са двоструким чворовима у крајњим тачкама ∓ 1 у односу на Чебишевљеву тежинску функцију друге врсте, постоји вредност $\rho = \rho^*$ почев од које модуло језгра $|K_{n,2}(z; \omega_2)|$ достиже своју максималну вредност

i) на позитивном делу реалне осе ($\theta = 0$) за свако $\rho \geq \rho^*$ уколико је $1 \leq n \leq 9$, тј.

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n,2}(z; \omega_2)| = \left| K_{n,2} \left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}), \omega_2 \right) \right|, \quad \rho \geq \rho^*, \quad 1 \leq n \leq 9;$$

ii) на имагинарној осе ($\theta = \frac{\pi}{2}$) за $\rho \geq \rho^*$, уколико је $n \geq 10$, тј.

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n,2}(z; \omega_2)| = \left| K_{n,2} \left(\frac{i}{2}(\rho - \rho^{-1}), \omega_2 \right) \right|, \quad \rho \geq \rho^*, \quad n \geq 10.$$

Доказ. Доказ егзистенције вредности $\rho = \rho^*$ је аналоган доказу из претходног поглавља. Анализом водећег коефицијента такође се долази до закључка да постоје фиксирани вредности почев од којих одговарајући полиноми постају непозитивни. □

Трансформација полинома $I(\rho)$

Први случај хипотезе важи за свако $\rho > 1$, што је већ размотрено у претходном поглављу. Други случај важи за свако ρ веће од ρ^* . Слично као у првом случају, израз $I(\rho)$ можемо записати у облику развоја по позитивним разликама $\rho - \rho^*$. Нумерички резултати такође показују да су нови коефицијенти непозитивни за свако $\rho > \rho^*$.

Последњи случај теореме захтева другачији приступ јер $1 < \rho < \rho^*$, тј. разлике $\rho - \rho^*$ нису позитивне. Најпре анализирамо интервале

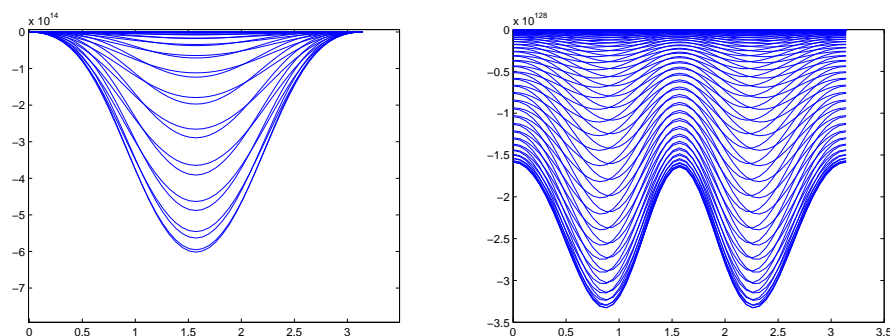
$\rho \in (1, \rho^*)$ акко $-\rho \in (-\rho^*, -1)$ акко $-\rho + \rho^* \in (0, \rho^* - 1)$, где је $\rho^* > 1$.

Иницијални полином $I(\rho)$ можемо записати у облику развоја по позитивним разликама $-\rho + \rho^*$

$$I(\rho) = \sum_{i=0}^{4n+25} A_i(\theta)(-\rho + \rho^*)^i.$$

И у овом случају нумерички резултати показују да су графици коефицијената $A_i(\theta)$, $i = 1, 2, \dots, 4n+25$ строго испод x -осе. Непозитивност претходног полинома на интервалу $(0, \rho^* - 1)$ је довољан услов за непозитивност иницијалног полинома на интервалу $(1, \rho^*)$.

За разлику од првог случаја теореме где је коришћена само translација $\rho \rightarrow \rho - 1$, приликом MatLab имплементације случаја $\rho \rightarrow (-1) \cdot \rho + \rho^*$, примењујемо нешто сложенији облик Хорнерове шеме. Приказани су неки примери (слика 3.2).



Слика 3.2. Функције $b_0(\theta), \dots, b_{54}(\theta)$, у случају $n = 6$, $\rho = 1$ (лево) и функције $b_0(\theta), \dots, b_{426}(\theta)$, у случају $n = 99$, $\rho_n = 1.0105$ (десно).

4. Закључак

Користећи методе сличне онима које су приказане у раду [2], на елипси је могуће одредити тачан положај максимума модула језгара. Анализирајући коефицијенте одговарајућих полинома, аналитички се доказује егзистенција вредности наведених у хипотезама које су формулисане у раду [1]. Трансформацијом одговарајућих полинома и детаљним нумеричким разматрањем потврђују се и Гаучи-Ли хипотезе.

Захвалница. Љубица Мишић и Александар Пејчев су подржани од стране Министарства Образовања, Науке и Технолошког развоја (Пројекат: 'Методe нумеричке и нелинеарне анализе са применама' (Бр. 174002)).

Библиографија

- [1] **W. Gautschi, S. Li**, *The remainder term for analytic functions of Gauss-Radau and Gauss-Lobatto quadrature rules with multiple end points*, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 33 (1990) 315-329.
- [2] **A. V. Pejčev, M. M. Spalević**, *On the remainder term of Gauss-Radau quadrature with Chebyshev weight of the third kind for analytic functions*, *Appl. Math. Comp.* 219 (2012) 2760–2765.
- [3] **G. V. Milovanović, M. M. Spalević, M. S. Pranić**, *On the remainder term of Gauss-Radau quadratures for analytic functions*, *J. Comput. Appl. Math.* 218 (2008) 281–289.
- [4] **A. V. Pejčev, M. M. Spalević**, *Error bounds of Micchelli-Rivlin quadrature formula for analytic functions*, *J. Approx. Theory* 169 (2013) 23–34.
- [5] **A. V. Pejčev, M. M. Spalević**, *Error bounds of the Micchelli-Sharma quadrature formula for analytic functions*, *J. Comput. Appl. Math.* 259 (2014) 48–56.
- [6] **W. Gautschi, R. S. Varga**, *Error bounds for Gaussian quadrature of analytic functions*, *SIAM J. Numer. Anal.* 20 (1983) 1170–1186.

PERT metodom do uspešnijeg upravljanja istraživačkim projektima

Nikola M. Perić

Khaoticen, Beograd, Srbija

e-mail: nikola.m.peric@gmail.com

Apstrakt. Zaplaniranje i kontrolu vremena potrebnog za realizaciju projektarazvijeneskupmetoda iz domena primenjene matematike kojesejednimimenomnazivajutehnikemrežnogplaniranja, a koje se oslanjaju na teoriju grafova. PERT, kao tehnika mrežnogplaniranja, nečješćesekoristi u upravljanju istraživačkim i razvojnim projektima u oblasti informaciono-komunikacionih tehnologija, sa naglaskom da je primenljiva i na projekte iz drugih naučnih oblasti. Predmet ovog rada je prikaz korišćenja PERT metode, sa aspekta upravljanja projektima, u situacijama kada je nemoguće deterministički odrediti potrebno vreme za realizaciju projekta, već se pribegava probabilističkom pristupu.

Ključne reči: PERT metoda; upravljanje vremenom; istraživački projekti; razvojni projekti.

1. Uvod

Zbog značaja dobrog planiranja razvijeni su različiti modeli planiranja, pri čemu su najbolje rezultate davali modeli mreže koji su korišćeni u tu svrhu [1-2]. Načini rešavanja ovih modela oslanjaju se na teoriju grafova. Pri tome se graf definiše kao skup događaja (čvorova) koji su spojeni aktivnostima (granama). Shodno tome, projekat se posmatra kao skup aktivnosti koje se obavljaju definisanim redosledom i koje zahtevaju određeno vreme i odgovarajuće resurse [2]. Svaka aktivnost u okviru projekta ima početni i završni događaj u vremenu.

Dve nezavisne tehnike analize mreže razvile su se sredinom dvadesetog veka [3]:

- Metoda kritičkog puta – CPM (akronim, eng. Critical Path Method), koristi se od 1957. godine u projektima u kojima se određuje jedinstvena, deterministička procena vremena za svaku aktivnost;
- Metoda ocene i revizije programa – PERT (akronim, eng. Program Evaluation and Review Technique) koristi se od 1958. godine u naučnim istraživačkim i razvojnim projektima, te je zato potrebno vreme za pojedine aktivnosti nemoguće odrediti deterministički, nego se koristi probabilistički pristup.

Kod nekih projekata nije moguće egzaktno, na osnovu proračuna, ili na osnovu iskustava odrediti vreme trajanja pojedinih aktivnosti [3-4]. Ovo se prvenstveno odnosi na istraživačke projekte [5-6].

U nastavku, autor ovog rada, sagledaće primenu PERT metode u pogledu uspešnijeg planiranja i kontrole vremena u upravljanju istraživačko-razvojnim projektima. Prvi korak u primeni PERT metode sastoji se od detaljnog specificiranja svih aktivnosti uključenih u projekat, pri čemu se u definisanju događaja i aktivnosti pažnja usmerava na činjenice da:

- svaka definisana aktivnost predstavljena je jedinstvenom granom određene dužine;

- orijentacija grane ukazuje na tok aktivnosti u vremenu od događaja gde aktivnost počinje pa sve do događaja sa kojim se aktivnost završava;
- svi događaji imaju svoje jedinstvene identifikatore (najčešće kraća obeležja u formi brojeva koji označavaju njihov redosled).

2. PERT metoda

2.1. Procene vremena

Pod analizom vremena podrazumeva se procena i utvrđivanje vremena potrebnog za izvršavanje definisanih aktivnosti, kao i određivanje vremenskih parametara na osnovu kojih se može pratiti i kontrolisati vremensko odvijanje projekta i uticati na poštovanje planiranih rokova [2]. Definisane vremena trajanja aktivnosti projekta predstavlja određivanje polaznih podataka sa kojima će se dalje operisati pri izračunavanju određenih zaključaka i rukovođenju projektom. Precizno određivanje vremena trajanja aktivnosti projekta uslovljeno je tačnim opisom predviđenih postupaka i potrebnih resursa za njeno izvršavanje [1-3]. Zbog toga takve podatke moraju dati i proceniti najbolji poznavaoči predviđenih aktivnosti, oni koji mogu da utiču na realizaciju i održavanje preuzetih obaveza [1]. Pri tome, mora se imati u vidu da je početak vremenske analize uslovljen detaljnom analizom strukture projekta, u čiju suštinu u ovom radu autor neće ulaziti.

PERT metoda uzima u obzir nesigurnost u proceni vremena trajanja pojedinih aktivnosti. Polazi se od toga da nije moguće unapred precizno odrediti trajanje pojedinih aktivnosti, pa se ono procenjuje uz primenu statističkih metoda [3]. Zato se za PERT metodu kaže da je stohastička [4-6]. Zbog tih karakteristika ova metoda je našla primenu uglavnom kod istraživačko-razvojnih projekata [3].

U okviru PERT metode, za svaku aktivnost projekta utvrđuju se tri različite procene vremena trajanja: optimistička, realna i pesimistička procena. Optimističko trajanje aktivnosti, u oznaci o_{ij} , predstavlja vreme koje se može ostvariti pod posebno povoljnim uslovima, gde su i, j jedinstveni identifikatori događaja, kojima se označava redosled početnog i krajnjeg događaja svake aktivnosti projekta. Mala je verovatnoća da će se aktivnosti izvršiti za ovo vreme, ali postoji mogućnost. Međutim, nema nikakvih mogućnosti da se aktivnosti izvrše za kraće vreme od optimistički procenjenog. Najverovatnije, najrealnije vreme trajanja aktivnosti, u oznaci r_{ij} , predstavlja vreme koje bi se najčešće javljalo kad bi se aktivnost više puta izvodila pod istim uslovima. Verovatnoća da se neka aktivnost realizuje za ovo planirano vreme je najveća. Pesimističko trajanje aktivnosti, u oznaci p_{ij} , predstavlja vreme koje bi bilo potrebno da se aktivnost realizuje u različitim kritičnim situacijama nepovoljnim za ishod projekta. To je najduže vreme potrebno za realizaciju određenih aktivnosti. Za sve tri navedene procene vremena, potrebno je da bude ispunjen uslov

$$o_{ij} < r_{ij} < p_{ij} \quad , \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

2.2. Matrica međuzavisnosti

Radi ilustracije, pretpostavimo da je potrebno realizovati istraživački projekat. Na osnovu detaljne analize projekta konstruiše se matrica međuzavisnosti aktivnosti (videti Tabelu 1). U matrici su, pored oznaka aktivnosti (od A do G), njihove međuzavisnosti (označene tamnim poljima) i rednih brojeva događaja (od 1 do 6), navedene i optimističke, realne i pesimističke procene vremena svih aktivnosti (videti Tabelu 1).

	posmatrana aktivnost						
	A	B	C	D	E	F	G
(1-2) A							
(1-3) B							
(2-4) C							
(3-4) D							
(3-5) E							
(4-6) F							
(5-6) G							
o_{ij} (u danima)	20	10	10	20	30	25	5
r_{ij} (u danima)	30	20	20	25	35	45	15
p_{ij} (u danima)	45	25	40	35	40	50	25

Tabela 1. Matrica međuzavisnosti

Na osnovu procenjenih vremena aktivnosti o_{ij} , r_{ij} i p_{ij} , računaju se očekivana vremena potrebna za realizaciju aktivnosti, u oznaci T_{ij} :

$$T_{ij} = \frac{o_{ij} + 4r_{ij} + p_{ij}}{6}, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Kako u izračunavanju očekivanog vremena T_{ij} , optimističko i pesimističko vreme trajanja aktivnosti učestvuju sa faktorom 1, a najverovatnije vreme sa faktorom 4, može se očekivati da očekivano vreme T_{ij} bude u blizini najverovatnijeg vremena r_{ij} ili će se poklapati sa njim.

Varijansa trajanja aktivnosti kod PERT metode predstavlja meru nesigurnosti procene trajanja aktivnosti, odnosno, meru grubosti sa kojom su definisani polazni podaci za svaku aktivnost – o_{ij} , r_{ij} , p_{ij} [3]:

$$\sigma_{ij} = \frac{p_{ij} - o_{ij}}{6}, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Ukoliko je varijansa manja, utoliko su polazni podaci precizniji [3]. Kod određivanja polaznih podataka treba nastojati da p_{ij} ne bude mnogo veće od o_{ij} kako bi se povećala tačnost svih ocena koje se dobijaju kao rezultat vremenske obrade mrežnog dijagrama. Moguće je, za određene projekte, unapred odrediti potrebnu preciznost polaznih podataka i to zadavanjem uslova da varijansa ne prelazi određenu konačnu vrednost.

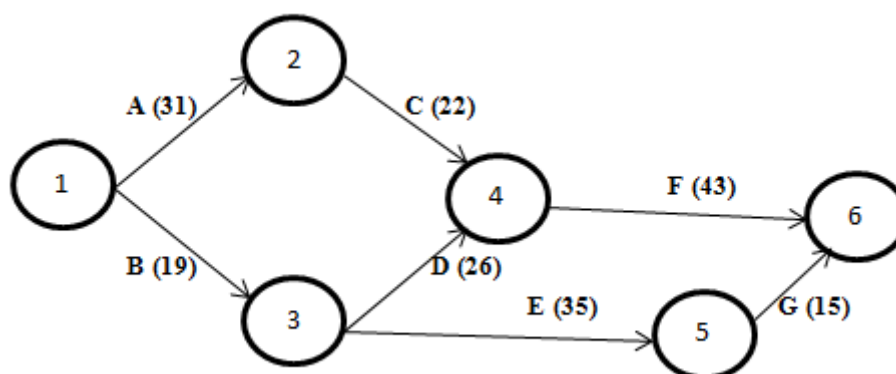
Proračun očekivanih vremena za realizaciju aktivnosti projekta i njihovih varijansi prikazani su u tabeli 2.

	A	B	C	D	E	F	G
T_{ij} (u danima)	31	19	22	26	35	43	15
$(\sigma_{ij})^2$ (u danima)	17	6	25	6	3	17	11

Tabela 2. Proračun očekivanih vremena i varijansi

Pri konstruisanju mrežnog dijagrama vodi se računa da se što bolje identifikuje kritični put projekta, uzimajući u obzir sve relevantne podatke poput aktivnosti, njihovog očekivanog trajanja, događaja, ... (videti Sliku 1). Kritični put projekta čine kritične aktivnosti na mrežnom dijagramu čiji je zbir vremena potrebnog za realizaciju najveći. Kako kritični put izlazi iz domena teme ovog rada, autor će se zadržati na dovoljnoj opštosti kritičkog puta. U ovom primeru je reč o putu A – C – F, čije je ukupno trajanje T_E :

$$T_E = T_{12} + T_{24} + T_{46} = 31 + 22 + 43 = 96 \text{ dana.}$$



Slika 1. Mrežni dijagram projekta

2.3. Verovatnoća ostvarivanja vremenskog plana

Pri planiranju realizacije projekata PERT metodom, moguće je za određene aktivnosti projekta prikazane na mrežnom dijagramu unapred utvrditi rokove njihovog ispunjavanja. Za ovakve aktivnosti značajno je proceniti verovatnoću njihovog odigravanja u okviru planiranog roka. Faktor verovatnoće, u oznaci Z , može se izračunati za svaku aktivnost projekta čije je vreme realizacije unapred predviđeno, kao i za kritične aktivnosti koje su deo neke celine projekta, a takođe i za završetak realizacije celog projekta. Pomoću ukupnog vremena trajanja aktivnosti na kritičnom putu projekta, u oznaci $(T_E)_n$, i sume varijansi koje leže na kritičnom putu $\sum(\sigma^2)_n$, može se izračunati koja je verovatnoća, u oznaci Z_n , da se ostvari planirani rok realizacije celog projekta, u oznaci $(T_S)_n$ [1, 3, 5, 6]:

$$Z_n = \frac{(T_S)_n - (T_E)_n}{\sqrt{\sum(\sigma^2)_n}}$$

Verovatnoća ostvarivanja planiranog roka projekta, u oznaci $P(Z)$, predstavlja se funkcijom faktora verovatnoće, a njene vrednosti se predstavljaju tablično (videti Tabelu 3). Verovatnoće za faktore verovatnoće $Z < -3$ približno su jednake 0, dok su verovatnoće za faktore $Z > 3$ približno jednake 1, te se njene vrednosti daju samo za Z koje se kreće u interval $-3 \leq Z \leq 3$ [5-7].

Z	P(Z)	Z	P(Z)	Z	P(Z)	Z	P(Z)	Z	P(Z)	Z	P(Z)
-3.0	0.0013	-2.0	0.0228	-1.0	0.1587	0	0.5000	1.0	0.8413	2.0	0.9772
-2.9	0.0019	-1.9	0.0287	-0.9	0.1841	0.1	0.5398	1.1	0.8643	2.1	0.9821
-2.8	0.0026	-1.8	0.0359	-0.8	0.2119	0.2	0.5793	1.2	0.8849	2.2	0.9861
-2.7	0.0035	-1.7	0.0446	-0.7	0.2420	0.3	0.6179	1.3	0.9032	2.3	0.9893
-2.6	0.0047	-1.6	0.0548	-0.6	0.2743	0.4	0.6554	1.4	0.9192	2.4	0.9918
-2.5	0.0062	-1.5	0.0668	-0.5	0.3085	0.5	0.6915	1.5	0.9332	2.5	0.9938
-2.4	0.0082	-1.4	0.0808	-0.4	0.3446	0.6	0.7257	1.6	0.9452	2.6	0.9953
-2.3	0.0107	-1.3	0.0968	-0.3	0.3821	0.7	0.7580	1.7	0.9554	2.7	0.9965
-2.2	0.0139	-1.2	0.1151	-0.2	0.4207	0.8	0.7881	1.8	0.9641	2.8	0.9974
-2.1	0.0179	-1.1	0.1357	-0.1	0.4602	0.9	0.8159	1.9	0.9713	2.9	0.9981
										3.0	0.9987

Tabela 3. Verovatnoće za faktor $Z \in [-3, 3]$

Verovatnoća realizovanja aktivnosti u funkciji faktora verovatnoće Z dobija se iz zakona normalne raspodele [5-6]

$$P(Z) = \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

3. Zaključak

Pretpostavimo da je za realizaciju navedenog istraživačko-razvojnog projekta planirano šest meseci ($T_S = 120$ dana), pri čemu je za rezervu predviđeno 20 radnih dana, verovatnoća realizacije celog projekta računa se na sledeći način:

$$Z = \frac{T_S - T_E}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{24}^2 + \sigma_{46}^2}} = \frac{120 - 96}{\sqrt{17 + 25 + 17}} \approx 3.$$

Na osnovu Tabele 3 i dobijenog faktora verovatnoće 3, verovatnoća razmatrane realizacije projekta je $P(Z) = P(3) \approx 1$ ili skoro 100%, što ukazuje na izuzetno dobro planiranje realizacije istraživačko-razvojnog projekta i njegovo 100% realizovanje u okvirima predviđenog vremenskog plana, budžeta i resursa koji su na raspolaganju.

Međutim, ukoliko bi planirana rezerva od 20 dana izostala iz nekog razloga, verovatnoća završetka projekta za $T_S = 100$ dana bila bi

$$Z = \frac{T_S - T_E}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{24}^2 + \sigma_{46}^2}} = \frac{100 - 96}{\sqrt{17 + 25 + 17}} \approx 0,5.$$

Na osnovu Tabele 3 i dobijenog faktora verovatnoće 0,5 , verovatnoća razmatrane realizacije projekta je $P(Z) = P(0,5) \approx 0,69$ ili 69%, što predstavlja relativno veliku verovatnoću postizanja planiranog vremenskog roka pri realizaciji istraživačko-rezvojnog projekta.

Prema iskustvima autora ovog rada u realizaciji brojnih razvojnih, kao i istraživačkih projekata, verovatnoće realizacije aktivnosti mogu se grubo kategorizovati na sledeći način:

- verovatnoća do 30% predstavlja veliki rizik u pogledu ostvarenja planiranog roka;
- verovatnoća od 30% do 65% ukazuje na normalan rizik na projektu i dobro iskorišćavanje resursa;
- verovatnoća od 65% do 90% označava mali rizik, ali i nedovoljno iskorišćene resurse, dok
- verovatnoća preko 90% predstavlja izuzetno veliku verovatnoću postizanja planiranog roka.

Iz navedenog prikaza primene PERT metode, sa aspekta uspešnijeg upravljanja istraživačko-razvojnim projektima, nedvosmisleno se vidi značaj ove metode, a ujedno i dobar "alat za pomoć" u situacijama kada je nemoguće deterministički odrediti potrebno vreme za realizaciju projekta, te se pribegava probabilističkom pristupu.

Bibliografija

- [1] **J. D. Wiest.** Some Properties of Schedules for Large Projects with Limited Resources, *Operations Research*, vol. 12, 1964.
- [2] **E. Demeulemeester and W. Herroelen.** Project scheduling: a research handbook. *Boston: Kluwer Academic Publishers*, 2002.
- [3] **D. G. Malcolm, J. H. Roseboom, C. E. Clark, and W. Fazar.** Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation, *Operations Research*, vol. 7, 1959.
- [4] **H. Li.** Constraint Programming Based Approximate Dynamic Programming for Deterministic and Stochastic Resource-Constrained Project Scheduling, *University of Missouri*, 2009.
- [5] **F. Stork.** Stochastic resource-constrained project scheduling, *PhD Thesis, Technical University at Berlin, Berlin, Germany*, 2001.
- [6] **S. Archer.** Stochastic resource constrained project scheduling with stochastic task insertions problems, *PhD Thesis, University of Central Florida Orlando, Florida, Orlando, Florida*, 2008.
- [7] **S. Van de Vonder, E. Demeulemeester, and W. S. Herroelen.** Proactive heuristic procedures for robust project scheduling: An experimental analysis, *European Journal Of Operational Research*, vol. 189, 2008.

Jedan pristup za formiranje sigurnijih lozinki analizom napada rečnikom

Irena Milinković

Fakultet organizacionih nauka u Beogradu, Jove Ilića 154

e-mail: imilinkovic3@gmail.com

Luka Milinković

Elektrotehnički fakultet u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73

e-mail: luka.milinkovic@etf.rs

Apstrakt. Privatnost podataka i pravilan izbor lozinki nije više važan samo za specijalne službe, kao što su vojska i policija, već svakome ko koristi računare, mobilne uređaje, e-mail, elektronsko bankarstvo i druge slične servise. Da bi se bolje definisali uslovi potrebni da se formira sigurna lozinka, neophodno je analizirati moguće načine za njeno neovlašćeno otkrivanje. Tek nakon toga se pristupa odbrani od takvih napada pravilnim izborom lozinki. U radu je akcentat stavljen na napad rečnikom, kao jednom od najčešće korišćenih pri nasilnom otkrivanju lozinki. Često se pominje pravilo: „Sigurna je samo lozinka koja se sastoji od cifara, simbola, malih i velikih slova.“ Ovo nije jedini uslov za sigurnu lozinku. Čak se može reći da ovo pravilo garantuje formiranje najkomplikovanije lozinke, koju je, nekada, teško i zapamtiti, a lako otkriti. Postoje i neki drugi uslovi, koji, ako se ispune, mogu da obezbede zahtevanu sigurnost. Tom prilikom lozinka se ne mora sastojati od nasumično izabranih karaktera, pa ju je lakše i zapamtiti. Način dolaska do ovakve lozinke predstavljen je detaljnom analizom skupova karaktera koji se koriste i njihove dužine. Pomoću kombinatorike, preko formula i grafika, biće pokazano da se različitost lozinki ne može opisati jednostavnim formulama preko varijacija sa ponavljanjem, već se u računu mora koristiti izmenjena polinomijalna formula.

Ključne reči: Autentifikacija, kombinatorika, lozinke, napad rečnikom, zaštita privatnosti.

1. Uvod

Usled sve većeg broja naloga koji se koriste na internetu i neograničenog širenja elektronskih transakcija povećava se i broj lozinki, koje je potrebno znati u svakom trenutku. Pravim izborom lozinke onemogućava se pristup neautorizovanih korisnika i smanjuje verovatnoća krađe osetljivih informacija. Podaci se mogu nalaziti na računarima, mobilnim uređajima, e-mail naložima, elektronskim računima itd. Definisane uslova za kreiranje sigurnih lozinki, prvenstveno zavisi od vrsta napada koji mogu da ih ugroze. Pored toga, važno je da se lozinka može zapamtiti i relativno brzo i jednostavno reprodukovati kada je to neophodno.

Sigurnost lozinke se definiše preko njene dužine i karaktera koji se koriste pri formiranju. Karakteri mogu da budu iz jednog ili više skupova, a mogući skupovi su cifre, simboli, mala i velika slova [1]. Često se navodi da lozinka mora da bude minimalne dužine od 8 karaktera i da sadrži karaktere iz najmanje 3 skupa [2]. Ovo nije uslov samo kod manje poznatih sajtova ili softvera, već i kod važnijih sistema kao što su elektronsko bankarstvo, osetljiva mrežna oprema kompanije (ruteri, *firewall* i slično), nalozi na berzi i dr.

Kod pojedinih servera, koji sadrže posebno osjetljive podatke o klijentima kompanije i njihovim ugovorima, može biti uslovda minimalna dužina lozinke bude 12 ili 15 karaktera i da sadrži karaktere iz sva 4 skupa. Problem sigurne lozinke ovim nije rešen, jer zaposleni, često, ne mogu da ih zapamte pa počnu da ih zapisuju. Tom prilikom evidenciju ove lozinke ili svih lozinke koje koriste čuvaju na lako dostupnim mestima, ne samo za njih, već i za potencijalnog napadača.

Iako se traži zamena lozinkama da bi podaci bili sigurniji one će verovatno još dugo da se koriste, jer su i pored uvođenja dvofaktorske autentifikacije ostale u upotrebi. Kao što je poznato autentifikacija se može raditi na tri načina: nešto što znam (lozinka), nešto što jesam (biometrijski podaci: fotografija lica, otisak prsta, oko itd) i nešto što imam (telefon, token). Već se postiglo falsifikovanje biometrijskih podataka i to samo na osnovu fotografija prsta ili oka, pa se došlo do zaključka da i nije mnogo bolje rešenje od lozinke. Sa druge strane, ako se koristi dvofaktorska autentifikacija na osnovu nečega što imamo, onda se skoro uvek koristi i lozinka. S toga ćemo kroz rad pokazati da sigurnost lozinke ne mora da bude uslovljena različitošću karaktera koji se koriste. Takođe, korišćenje karaktera iz svakog od 4 navedena skupa pri formiranju lozinke, često, nije garancija da se sačuva privatnost.

2. Vrste napada na lozinke

Da bi mogli da se postave neophodni uslovi za formiranje sigurnih lozinke potrebno je da se sagledaju mogućnosti za njihovu krađu i nasilno otkrivanje. U zavisnosti od toga na koji način se dolazi do lozinke postoje dve vrste napada. Prvo, mogu se ukrasti lozinke u otvorenom, nešifrovanom, obliku. S toga se ovaj napad dešava u trenutku unošenja lozinke. Lozinke, koje se čuvaju u sistemu, na serverima ili prenose kroz mrežu su šifrovane, pa bi druga vrsta napada bila napad na šifrovane lozinke.

2.1. Krađa nešifrovanih lozinke

Postoji više različitih načina da se dođe do lozinke pre nego što se ona šifrue i pošalje kroz mrežu. Jedan od napada je *phishing* [3]. Ovo je najčešći oblik napada na mreži, a postaje uspešan kada korisnik unese svoje podatke, najčešće korisničko ime i lozinku, na lažni sajt koji izgleda potpuno isto kao i onaj pravi na koji je korisnik hteo da ode. Razlike između pravih i lažnih sajtova, naravno da, postoje, ali nisu lako uočljive. Naziv sajta ne može da bude isti i razlikuje se u bar jednom slovu. Takođe, razlika je i u tome što lažni sajt sigurno ne koristi HTTPS protokol, koji koriste mnogi poznati, originalni, sajtovi. Na ovaj način korisniku se ukradu podaci pomoću kojih se posle pristupa njegovom nalogu. Korisnik se preusmeri i loguje na pravi sajt, pa on i ne primeti da se išta desilo u tom trenutku.

Krađa lozinke se može desiti i pomoću malicioznog koda koji se instalira na ciljani računar da bi prikupljaopodatke, koje korisnik unosi. Ova informacije se prosleđuju zlonamernom korisniku, koji na taj način može da sazna korisničko ime i lozinke na internetu, šifre za čuvanje podataka na računaru, kao i sve drugo što je korisnik unosi preko tastature [4]. Ovakav program se naziva *keylogger*.

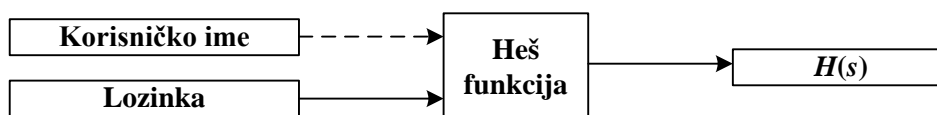
Pomoću posebnih alata mogu se napasti i bežične tastature kada se opet prikupljaju sve informacije koje se preko njih unose.

Postoje i drugi načini da se dođe do lozinke kao što su, na primer, preko kamera, koje snimaju tastaturu [5]. Zatim, provala i krađa novčanika ili mobilnih uređaja, gde se nalaze upisane lozinke ili papira na kojima su zapisane, a najčešće se nalaze na radnom stolu ili zalepljene za monitor. Ovose dešava, upravo, zato što se biraju komplikovane lozinke, koje je teško zapamtiti, pa ih je potrebno zapisati.

Od krađe nešifrovanih lozinke korisnik se ne može zaštititi pomoću složenih i dugačkih lozinke, koje se sastoje od nasumično izabranih karaktera, bez obzira iz koliko različitih skupova se karakteri koriste. Jedina zaštita je opreznost.

2.2. Napad na šifrovane lozinke

Ako se komunikacija ostvaruje preko mreže onda se lozinka, korisničko ime i drugi podaci, ako su neophodni, prenose u šifrovanom obliku. Tada se šifrovanje ostvaruje preko simetričnih (AES – *Advanced Encryption Standard*) i/ili asimetričnih algoritama (RSA). Provera korisnika se vrši na osnovu već postojećih podataka u bazi, koji su jedinstveni. U bazi se ne čuvaju lozinke i korisničko ime u čitljivom obliku, već u šifrovanom. Pri prvoj registraciji se od lozinke ili od korisničkog imena i lozinke formira digitalni sažetak, odnosno heš (*hash*), slika 1. Pojedini sistemi koriste i dodatne informacije, kao na primer početnu vrednost (*seed*) ili neki drugi jedinstven podatak.



Slika 1. Formiranje digitalnog sažetka

Digitalni sažetak je nečitljiv i formiran na osnovu jednosmerne heš funkcije, H . Tako se od heša ne može saznati lozinka. Ipak, način formiranja digitalnog sažetka se može razlikovati od kompanije do kompanije, ali je u suštini poznat. Karakteristika heš funkcija je i ta da se na osnovu ulaznog teksta bez obzira na njegovu dužinu formira izlazni tekst uvek iste dužine [6]. Tako se može desiti da dva različita ulazna teksta formiraju isti heš. Ipak, verovatnoća za tako nešto je veoma mala [7].

Zbog sigurnosti sve su popularnije heš funkcije iz SHA familije (SHA-224, SHA-256, SHA-384 i druge), kao i najnovija SHA-3 (*Keccak*). Mada, još uvek se koriste i starije funkcije, kao što su MD5 i SHA-1.

Ako se sazna heš može se nagađanjem, tj. grubom silom, doći do korišćene lozinke. Takođe, i ako se ne zna heš može se nasilno pokušati da se otkrije lozinka, ali od ovakve vrste napada uglavnom postoji zaštita u vidu ograničenog broja pokušaja logovanja, koji je, najčešće, 3 ili 5.

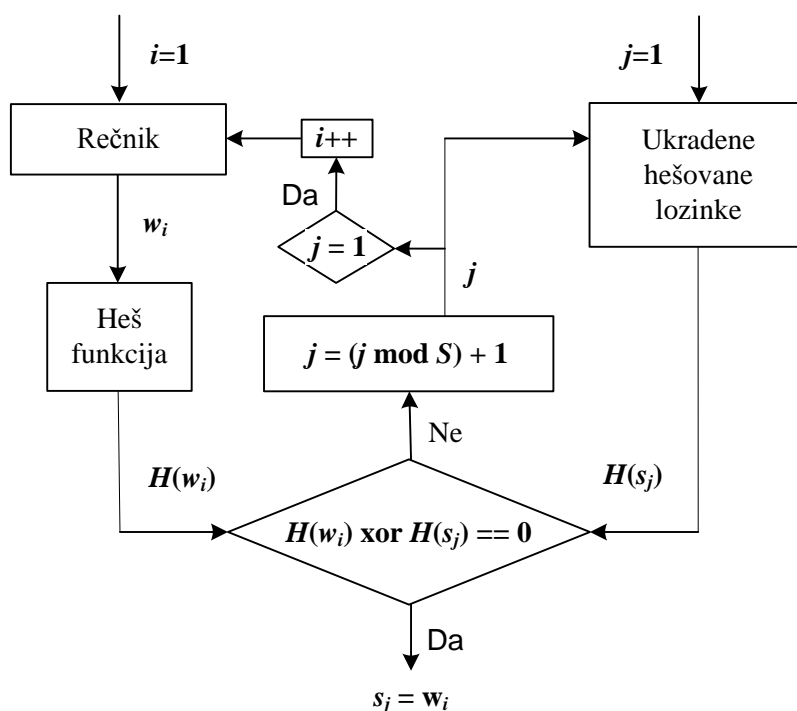
Kod ovih vrsta napada do skrivenih lozinki se najčešće dolazi pomoću napada rečnikom, pa je važno pronaći način da se postigne što bolja zaštita od ove vrste napada [8, 9]. U ovom slučaju se najpre krađom podataka dođe do baze šifrovanih lozinki. Kada su podaci ukradeni onda se može naćiniti neogranićen broj pokušaja u njihovom otkrivanju. Za te potrebe koriste se predefinisani rećnici najčešće korišćenih lozinki. Ovo ne garantuje uspeh, ali što je baza veća to bolje, jer postoji veća verovatnoća da se otkrije neka od lozinki.

Važna stvar koju navodi i međunarodni standard za upravljanje sigurnošću i zaštitom informacionog sistema u dokumentu ISO 27002 jeste da lozinke moraju da budu otporne na napad rećnikom [10]. Naćin zaštite se ne definiše, pa se ostavlja korisniku da sam naće najbolje rešenje.

3. Napad rećnikom

3.1. Postupak otkrivanja lozinki

Pomoću malicioznih softvera ili na neki drugi naćin napadaći pokušavaju da dođu do što većeg broja šifrovanih lozinki. Prikupljena baza od S digitalnih saćetaka lozinki s_j , $j \in \{1, 2, \dots, S\}$, koristi se kako bi se nasilnim putem otkrile lozinke. Za te potrebe koriste se rećnici, koji se sastoje od W reći w_i , $i \in \{1, 2, \dots, W\}$. Ove reći predstavljaju najčešće korišćene ili moguće lozinke, koje imaju neki šablon formiranja. Reći se šifruju pomoću jednosmerne heš funkcije H , pomoću koje su šifrovane i ukradene lozinke. Digitalni saćetak reći se proverava pomoću digitalnih saćetaka ukradenih lozinki i tom prilikom traći potpuno poklapanje, slika 2. Ako se heš posmatrane reći ne poklapa ni sa jednom vrednošću onda se uzima nova reć i postupak se ponavlja sve dok se ne provere sve reći iz rećnika ili dok se ne naće poklapanje. Ovakav naćin otkrivanja može da potraje, ali cilj napadaća je, najčešće, da otkriju bilo koju lozinku, što je svakako manji problem nego da treba da otkriju sve.



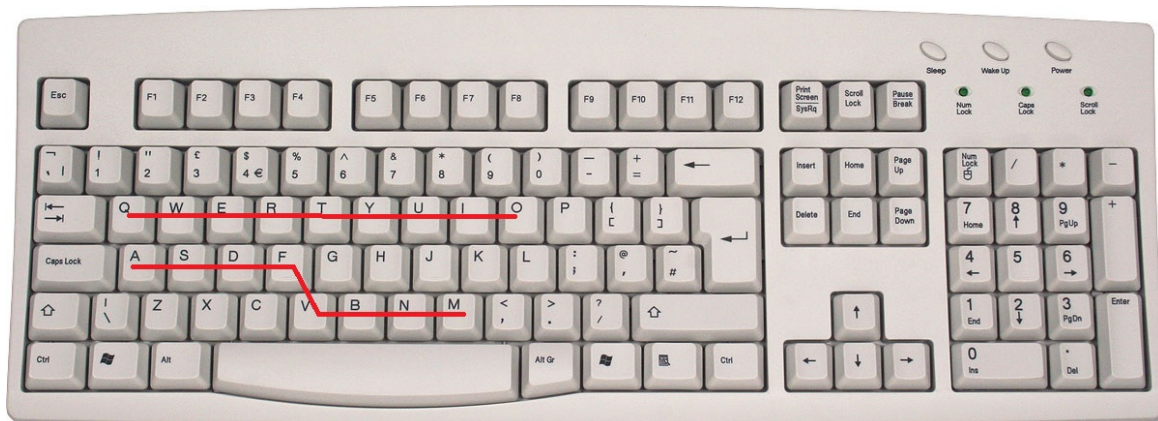
Slika 2. Blok šema napada rečnikom

3.2. Vrste rečnika

Napad rečnikom je jedan od najopasnijih napada ako su korišćene lake lozinke. Postoji veliki broj rečnika koji se koriste i svi oni sadrže reči koje su formirane po nekom šablonu [11-12]. Najčešći rečnici su na engleskom jeziku, jer obuhvata najveće govorno područje, kao i najveći broj korisnika interneta. Sa druge strane, ako izabrana reč za lozinku ne postoji u rečniku ovim napadom se neće otkriti. Neki od rečnika koji se najčešće koriste su:

1. Rečnik poznatih reči – sadrži sve reči posmatranog jezika bez obzira na njihovu dužinu. Tako može sadržati i najkraće i najduže reči. Za engleski bi to bile, na primer, computer, mathematics, communication itd. Najčešće se izostavljaju reči od 5 ili manje karaktera, jer je na većini sistema za autentifikaciju minimalna dužina lozinke 6 karaktera.
2. Rečnik sastavljen od kombinacije cifara – sadrži sve kombinacije od najčešće 6, 7 ili 8 cifara. Postoje i rečnici koji sadrže specifične kombinacije cifara, ali najčešće ne sadrže reči čija je dužina preko 20 cifara, jer bi tada bili veoma veliki. Ako se koristi lozinka čija je dužina 40 karaktera i sadrži samo cifru 1 onda postoji velika šansa da se ne otkrije pomoću napada rečnikom, jer je jednostavno nema u rečniku.
3. Rečnik sastavljen od kombinacije poznatih reči – sadrži sve ili samo odabrane kombinacije dve ili tri reči. Za engleski bi to bile, na primer, bookcomputer, booktree the itd. Ako se koristi lozinka koja je nastala kao kombinacija 4 ili 5 reči, a može i strofa neke pesme postoji velika šansa da se ne otkrije, jer je nema u rečniku. Takođe, može se koristiti i kombinacija reči iz različitih jezika, na primer, bookosamdrvo (book osam drvo), pijacawallzelena (pijaca wall zelena) itd.
4. Rečnik najčešće korišćenih fraza – omogućava otkrivanje lozinke sastavljenih od više reči, s tim što je akcenat na često kombinovanim rečima, tj. poznatim frazama. Neki od primera koji se nalaze u takvim rečnicima su iloveyou, letmein, mayihelpyou (may i help you) itd.
5. Rečnik kombinacija poznatih reči i najviše 2 cifre i/ili 2 simbola – omogućava otkrivanje lozinke na sajtovima gde se od korisnika zahteva da unese bar jednu cifru ili simbol kako bi pojačao sigurnost lozinke. Korisnik se u tom slučaju uglavnom opredeljuje da to bude na početku ili kraju reči, ili između dve reči. Neki od primera koji se nalaze u rečniku ovog tipa su: *mathematics+, communication66, book4%computer itd.

6. Rečnik kombinacije poznatih reči sa jednim velikim slovom i najviše 2 cifre i/ili 2 simbola – omogućava otkrivanje lozinki koje sadrže velika i mala slova, cifre i/ili simbole. Ovi rečnici postoje, jer ukoliko korisnik dodaje velika slova, on će se uglavnom opredeliti da to bude prvo ili poslednje slovo njegove lozinke kako bi to lakše zapamtio. Shodno tome primeri koji se javljaju u rečnicima su: *Mathematics+, communicatioN66, Book4%Computer itd.
7. Rečnik reči sastavljenih kao lanac karaktera sa tastature – sadrži sve moguće nizove karaktera sa tastature. Naravno, ovi nizovi, najčešće, ne prelaze 15 karaktera, pa se sa dovoljno dugaćkim nizom može postići sigurnost. Ovakve lozinke omogućavaju korisniku da ih veoma brzo unese i lako zapamti, pa su takođe, u veoma širokoj upotrebi. To su na primer lozinke qwertyuio i asdfvbnm, slika 3.



Slika 3. Formiranje lanca karaktera sa tastature

8. Rečnik u kojem su slova zamenjena sa ciframa ili simbolima – ovakav tip rečnika sadrži često korišćene reči nekog jezika, sa uvedenim izmena za slova koja se mogu zameniti nekom cifrom ili simbolom, a najčešće zamene su: a=@, l=1, i=1, s=\$, o=0 itd. U ovakvim rečnicima se mogu nalaziti reči kao što su: P@\$w0rd, 10z1nk@ (lozinka), \$011d@rn0\$t (solidarnost).

Napad rečnikom je jedan od najčešćih vidova napada koji omogućava veću uspešnost u otkrivanju lozinki. Ako formirane lozinke budu otporne na ovaj napad, onda će se izbeći jedan deo problema koji se može javiti zbog slabih lozinki. Kroz rad analiziramo neophodne uslove za formiranje lozinki otpornih na napade rečnikom, ali istovremeno i lakih za pamćenje. Tako se postiže veliki stepen zaštite podataka od krađe, koja može da bude posledica korišćenja manje sigurnih lozinki ili složenijih koje se zapisuju zbog nemogućnosti da se zapamte.

4. Formiranje lozinki otpornih na napad rečnikom

4.1. Određivanje broja različitih kombinacija na osnovu dužine lozinke

Lozinke se mogu formirati od 94 različita karaktera koji se, kao što je već navedeno, mogu svrstati u 4 skupa. Razlikujemo 4 konstante, koje označavaju broj karaktera u svakom skupu: $N_d=10$ cifara, $N_s=32$ simbola, $N_l=26$ malih i $N_u=26$ velikih slova. Kombinovanjem ovih skupova može se dobiti 15 različitih mogućnosti, gde se svaka od njih sastoji od N različitih karaktera. Tako se lozinka može sastojati od karaktera jednog skupa ili od kombinacije karaktera dva ili više skupova. Broj skupova koji se kombinuje se označava sa $n \in \{1,2,3,4\}$. U tabeli 1 je prikazano svih 15 kombinovanjaskupova sa brojem različitih karaktera koji se tom prilikom mogu koristiti. Pošto je $N_l=N_u$ onda postoji 11 kombinovanja skupova sa različitim brojem karaktera koji se mogu koristiti. Četiri kombinovanja u kojima se ponavlja broj različitih karaktera su istaknuta tako što su napisana debljom bojom (bold).

Broj skupova koji se kombinuje	Skupovi koji se kombinuju	Broj različitih karaktera, N
$n=1$	N_d	10
	N_l	26
	N_u	26
	N_s	32
$n=2$	$N_d \ N_l$	36
	$N_d \ N_u$	36
	$N_d \ N_s$	42
	$N_l \ N_u$	52
	$N_l \ N_s$	58
	$N_u \ N_s$	58
$n=3$	$N_d \ N_l \ N_u$	62
	$N_d \ N_l \ N_s$	68
	$N_d \ N_u \ N_s$	68
	$N_l \ N_u \ N_s$	84
$n=4$	$N_d \ N_l \ N_u \ N_s$	94

Tabela 1. Kombinovanje 4 skupa: cifre, simboli, mala i velika slova

Da bi se nasilnim putem, odnosno slučajnim pogađanjem, otkrila lozinka potrebno je ispitati određeni broj mogućnosti, a on upravo zavisi od dužine lozinke, L i broja korišćenih skupova, n . Tako, lozinka postaje sigurnija sa povećavanjem vrednosti parametara L i n , odnosno sa povećavanjem broja različitih kombinacija, koje se tom prilikom mogu napraviti, K'_n . Ovde se smatra da će se sa nasilnim otkrivanjem lozinke početi tako što će se prvo isprobati kraće lozinke, koje se sastoje samo od cifara, zatim od malih slova i tako redom kao što je prikazano u tabeli 1. Shodno tome, broj različitih kombinacija se određuje prekopolinomijalne formule

$$K'_{n,l} = N^L = (N_1 + N_2 + \dots + N_n)^L = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=l} \binom{l}{k_1, k_2, \dots, k_n} \prod_{1 \leq t \leq n} N_t^{k_t}, \quad (1)$$

gde je l moguća dužina lozinke, a N_t skup cifara, simbola, malih ili velikih slova. Kako je

$$\binom{l}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{l!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \quad (2)$$

onda se može pisati da je

$$K'_{n,l} = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=l} \frac{l!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \prod_{1 \leq t \leq n} N_t^{k_t}. \quad (3)$$

Da bi se ispitale sve moguće kombinacije potrebno je sabrati sve vrednosti za $K'_{n,l}$, gde uzima celobrojne vrednosti od m do L . Vrednost parametra m je najčešće 6 ili 8, jer većina sistema ne dozvoljava formiranje kraćih lozinki. Tako bi ukupan broj različitih kombinacija bio

$$K'_n = K'_{n,m} + K'_{n,m+1} + \dots + K'_{n,L} = \sum_{l=m}^L K'_{n,l}. \quad (4)$$

U praksi, kao i na sajtovima koji se najčešće koriste za proveru jačine lozinki [13-15], za računanje broja različitih kombinacija kao osnova se koristi formula 3. Neki sistemi prave ograničenja da se mora koristiti minimalna dužina lozinke od $m=10$ karaktera i najmanje $n=3$ skupa. Takođe, pri nasilnom otkrivanju se ne mora krenuti od najslabijih lozinki, već se može krenuti i od složenijih lozinki. Pomoću napada rečnikom koristi se potpuno drugi sistem, pa se mnogo brže može doći do rešenja. Ako se preko formule 3 radi proračun broja različitih kombinacija za slučaj kada je $n=2$, uračunaće se i kombinacije kada se koristi samo jedan od dva navedena skupa, što ne bi trebalo da se uradi. Da bi se izračunao tačan broj kombinacija ako se koristi više od jednog skupa potrebno je u formuli 3 dodati uslov

$$(\forall r)k_r > 0. \quad (5)$$

Na ovaj način se eliminiše mogućnost da se karakteri nekog skupa ne pojave u lozinci, pa se dobija formula

$$K_{n,l} = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_n=l \\ (\forall r)k_r>0}} \frac{l!}{k_1!k_2!\dots k_n!} \prod_{1 \leq t \leq n} N_t^{k_t}, \quad (6)$$

odnosno,

$$K_n = K_{n,m} + K_{n,m+1} + \dots + K_{n,L} = \sum_{l=m}^L K_{n,l}. \quad (7)$$

U daljoj analizi ćemo radi promenljivosti parametra m , posmatrati strožiji slučaj. Nećemo analizirati sve moguće dužine lozinki već samo kada je dužina L . Na ovaj način se postiže nešto veća sigurnost, a greška je od 1 do 4%. Tako će se ukupan broj različitih kombinacija računati preko formule 6 kada je $l=L$, pa je

$$K_{n,L} = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_n=L \\ (\forall r)k_r>0}} \frac{L!}{k_1!k_2!\dots k_n!} \prod_{1 \leq t \leq n} N_t^{k_t}. \quad (8)$$

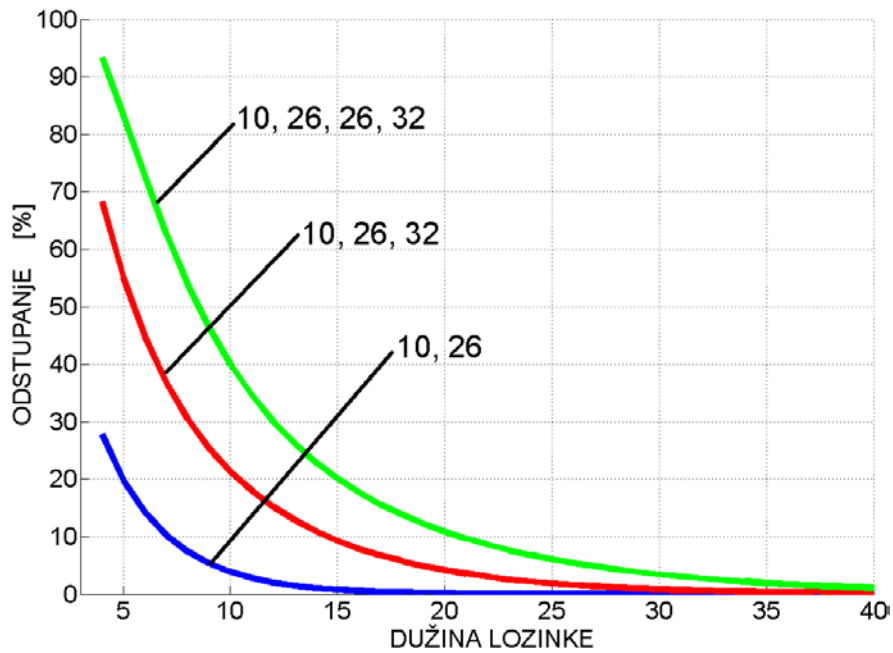
Verovatnoća otkrivanja lozinki je obrnuto srazmerna broju različitih kombinacija

$$P_{n,L} = \frac{1}{K_{n,L}}. \quad (9)$$

Na slici 4 je prikazano odstupanje između proračuna koji se rade preko formule 3, sa nepoželjnim slučajevima, i formule 8, bez nepoželjnih slučajeva. Kako je $K'_{n,L} \geq K_{n,L}$ važi

$$\frac{K'_{n,L} - K_{n,L}}{K_{n,L}} \geq 0. \quad (10)$$

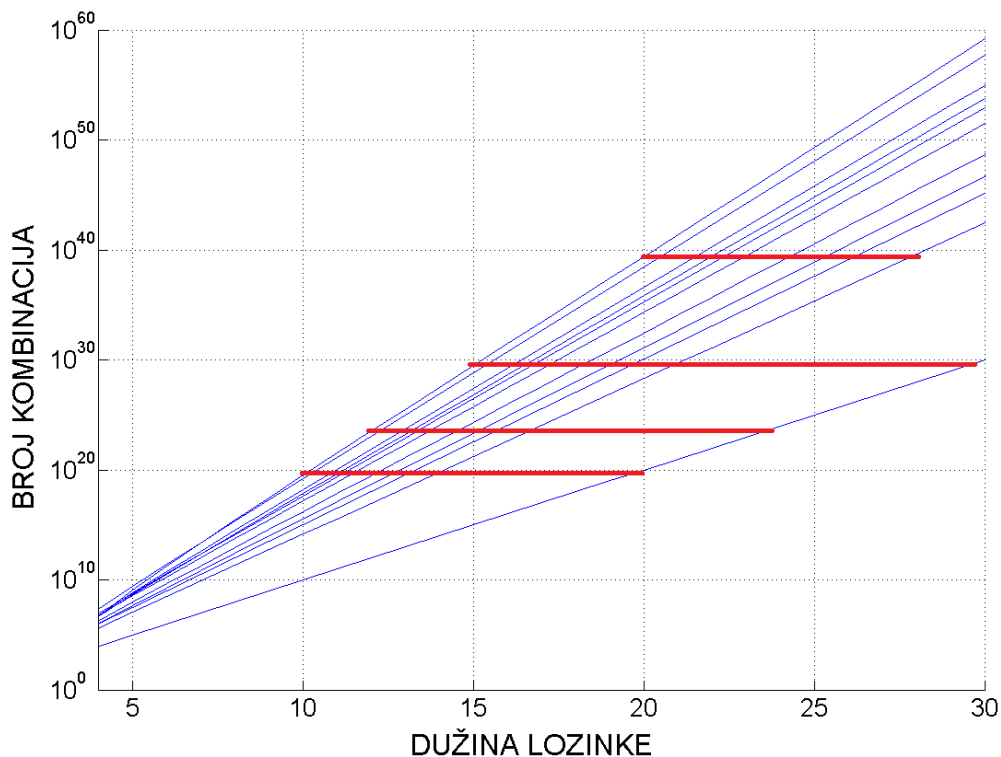
Jednakost je zadovoljena samo u slučaju kada je $n=1$. Linije na grafiku su prikazane preko odnosa iz formule 10. Može se primetiti da je $K'_{n,L}$ veće od $K_{n,L}$ i do 50% za najčešće korišćene dužine lozinki. Radi preglednosti odstupanje je prikazano u procentima, pa se može videti da nikada ne može biti veće od 100%. Takođe, izvodi se zaključak da je stvaran broj kombinacija manji nego što se u praksi proračunava, pa je i verovatnoća otkrivanja lozinki veća. Na grafiku su prikazane 3 linije za različiti broj korišćenih skupova. Najmanje odstupanje je kada se koriste samo dva skupa, a najveće kada se koriste sva četiri. Kada se koriste tri skupa, u ovom slučaju cifre, mala (ili velika) slova i simboli, odstupanje može da bude od 20 do 30% za najčešće korišćene dužine lozinki od 8 do 10 karaktera. Još veće odstupanje od 40 do 50% za iste dužine lozinki se javlja kada se koriste sva 4 skupa. Kada bi se koristile duže lozinke svakako da bi odstupanje bilo manje, ali bi bile i teže za pamćenje.



Slika 4. Procentualan prikaz broja nepoželjnih slučajeva

4.2. Korišćenje sigurnijih lozinki koje se sastoje iz jednog ili dva skupa karaktera

Ako se pretpostavi da je broj različitih kombinacija lozinki pokazatelj njene sigurnosti, što se najčešće uzima kao slučaj, onda se može analizirati kako se promenom dužine lozinki i broja korišćenih skupova utiče na njenu sigurnost. Na slici 5 je u logaritamskoj raspodeli prikazan broj različitih kombinacija za načine kombinovanja iz tabele 1. Proračun je urađen na osnovu formule 8. Pošto se 4 linije preklapaju, jer i malih i velikih slova ima po 26, vidljivo je 11 linija, a ne 15. Linija koja najsporije raste prikazuje lozinke koje se formiraju samo od cifara, a ona koja najbrže raste prikazuje lozinke koje se formiraju od najmanje jednog karaktera iz svakog od 4 skupa. Zato je uzeto da je minimalna dužina lozinke, za koje se radi proračun prikazan na grafiku, 4.



Slika 5. Broj različitih kombinacija za sva moguća kombinovanja skupova

Horizontalnim linijama su povezane tačke sa istim brojem kombinacija, slika 5. Kako osnova za postavljanje horizontalnih linija su uzete dužine lozinke od 10, 12, 15 i 20 karaktera kada se koriste sva 4 skupa, tabela 2. Na osnovu toga se lakše može videti, da lozinke formirane od karaktera iz sva 4 skupa čija je dužina 10 imaju istu verovatnoću otkrivanja kao i lozinke formirane samo od malih slova čija je dužina 14 karaktera, odnosno lozinke formirane od 20 cifara.

$K_{4,10}$	$K_{4,12}$	$K_{4,15}$	$K_{4,20}$
$3,23 \cdot 10^{19}$	$3,33 \cdot 10^{23}$	$3,16 \cdot 10^{29}$	$2,58 \cdot 10^{39}$

Tabela 2. Broj različitih kombinacija za $n=4$

U tabeli 3je prikazano koje su potrebne dužine lozinke za svako od 15 kombinovanja da bi se postigao isti nivo sigurnosti za posmatrane 4 vrednosti broja različitih kombinacija.

Skupovi koji se kombinuju	Broj različitih karaktera, N	Dužina lozinke, L			
		$K_{4,10}$	$K_{4,12}$	$K_{4,15}$	$K_{4,20}$
N_d	10	20	24	30	40
N_l	26	14	17	21	28
N_u	26	14	17	21	28
N_s	32	13	16	20	27
$N_d N_l$	36	13	16	19	26
$N_d N_u$	36	13	16	19	26
$N_d N_s$	42	13	15	19	25
$N_l N_u$	52	12	14	18	23
$N_l N_s$	58	12	14	17	23
$N_u N_s$	58	12	14	17	23
$N_d N_l N_u$	62	11	14	17	22
$N_d N_l N_s$	68	11	13	17	22
$N_d N_u N_s$	68	11	13	17	22
$N_l N_u N_s$	84	11	13	16	21
$N_d N_l N_u N_s$	94	10	12	15	20

Tabela 3. Odgovarajuće dužine lozinke za 4 vrednosti broja kombinacija

Kao što se može videti sa slike 5 i iz tabele 2 lozinke sastavljene od karaktera iz 3 skupa ili iz sva 4 skupa nisu mnogo sigurnije, ali su svakako teže za pamćenje od lozinke sastavljenih od karaktera samo jednog skupa (ako se izuzmu cifre) ili iz kombinacije dva skupa.

5. Zaključak

Na osnovu analize i formula prikazanih u ovom radu može se zaključiti da se sigurnost lozinke ne postiže samo korišćenjem karaktera iz 3 ili sva 4 skupa, već se veliki stepen sigurnosti može postići i sa povećavanjem dužine lozinke. Tako je otpornost lozinke na napad rečnikom i dalje velika, a lozinke se lakše unose i pamte. Važno je i to da lozinke tom prilikom ne moraju da budu mnogo duže nego što je uobičajeno, tabela 3. Takođe, lozinke je uglavnom lakše zapamtiti i pored toga što su duže, ako se sastoje samo od malih slova ili malih slova i cifara ili malih slova i simbola, nego ako se sastoje od karaktera iz sva 4 skupa. Sa druge strane, sve je više rečnika koji mogu da otkriju najčešće korišćene oblike lozinke sastavljene iz karaktera 3 ili sva 4 skupa.

Block representations of generalized inverses of matrices

Vera Miler Jerković

*School of Electrical Engineering, University of Belgrade, 73 Bulevar kralja Aleksandra
e-mail: vera.miler@etf.rs*

Branko Malešević

*School of Electrical Engineering, University of Belgrade, 73 Bulevar kralja Aleksandra
e-mail: branko.malesevic@etf.rs*

Abstract. In this paper will be considered standard forms of generalized inverses for matrices in the shape of block representations $\{1, 2, 3, 4, 5, 5^k\}$ -inverse. Especially will be considered Moore-Penrose inverse and the group inverse. Results from Rhode's technique are used and methods for calculating some inverse are shown on examples.

Index Terms. Generalized inverse, Moore-Penrose inverse, Group inverse, Drazin inverse

1. Introduction

The concept of generalized inverse for matrices was considered by E.H. Moore (1920.) and R. Penrose (1955.) [1], [2] and [3]. The generalized form of $\{1, 2, 3, 4, 5, 5^k\}$ -inverse as well as some combination (the Moore-Penrose inverse, the group inverse, the Drazin inverse) play major role in solving problems in various areas of sciences, such as fuzzy mathematics, linear regression,... The combinations $\{1,3\}$ and $\{1,4\}$ of generalized inverses and also Moore-Penrose inverse have minimax properties and it can be applied in solving linear systems. Also, combination $\{1,2,3\}$ of generalized inverses can be used for finding least squared solution of linear system. The group inverse has many applications in singular differential equations; Markov chains iterate methods and so on. The generalized inverses have application in linear statistical modeling, especially in solving singularity of covariance matrix. Application of $\{2\}$ -inverse is using in Newton methods for solving systems of nonlinear equations. The Drazin inverse is using for solving singular linear difference equations. The overview of applications can be found in textbooks [2] and [3]. Presentations of various forms of generalized inverse are given according to method of C.A. Rhode [4]. This method is also presented in [5] and [6]. The Rhode's method is applied in many fields. It can be used for finding solution of matrix equation $AXB = C$ where solution is described in the terms of the Rhode's general form of the $\{1\}$ -inverse [6], [7], [8], [9], [10]; see also [11]. This method is also applicable for solving matrix equation $AXB = C$ using Penrose's general solution [12]. The aim of this paper is to describe generalized form of $\{1, 2, 3, 4, 5, 5^k\}$ -inverse using Rhode's method. Consequently, we obtain forms of the Moore-Penrose inverse, the group inverse and the Drazin inverse. Using block representations of generalized inverse of matrix, we got detailed structure of generalized inverses. In this way, we can approach parts of generalized inverse and modify it to do better, which will our future plan. All relevant theorems and methods for pseudoinverses in this paper are presented by appropriate examples.

2. Block representations

For the matrix $A \in \mathcal{C}^{m \times n}$ system of four Penrose's equations is consider:

$$AXA = A \quad (1)$$

$$XAX = X \quad (2)$$

$$(AX)^* = AX \quad (3)$$

$$(XA)^* = XA \quad (4)$$

where matrix $X \in \mathcal{C}^{n \times m}$ is unknown. For square matrix, we add matrix equations:

$$AX = XA \quad (5)$$

$$A^k XA = A^k \quad (6)$$

where $ind(A) = k$ is index of the matrix A .

Definition 1. The index k of matrix A is smallest non-negative number such that the equality $rank(A^k) = rank(A^{k+1})$ is true.

Solutions of matrix equations (1), (2), (3), (4), (5) and (6) we defined as $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ and $\{5^k\}$ generalized inverse of the matrix A .

Let $\mathcal{C}_r^{m \times n}$ be a set of all matrices over set of complex numbers of order $m \times n$ with a rank r . For the matrix $A \in \mathcal{C}_r^{m \times n}$ we can make expanded matrix $\begin{bmatrix} A & I_m \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$ which can be transformed, by elementary transformations on the columns and rows, in equivalent matrix:

$$\begin{bmatrix} A & I_m \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} E_r & Q \\ P & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

where $E_r \in \mathcal{C}_r^{m \times n}$ is matrix with r ones on first r places of the main diagonal and zeros on the all other places. The matrices $Q \in \mathcal{C}^{m \times m}$ and $P \in \mathcal{C}^{n \times n}$ are regular and the following equality is true:

$$QAP = E_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Definition 2. The generalized inverses of the matrix $A \in \mathcal{C}_r^{m \times n}$, which satisfy some of matrix equations (1) – (4), and also (5)–(6) in the case of square matrix, can be defined as *block representations*:

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} X_0 & X_1 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix} \cdot Q \quad (9)$$

where $X_0 \in \mathcal{C}^{r \times r}$, $X_1 \in \mathcal{C}^{r \times (m-r)}$, $X_2 \in \mathcal{C}^{(n-r) \times r}$, $X_3 \in \mathcal{C}^{(n-r) \times (m-r)}$ are appropriate submatrices.

In the next section are presented some essential theorems for block representations. Concretely, specifying theorems we describe block representations of $\{1, 2, 3, 4, 5, 5^k\}$ inverses. Likewise, using corollaries we describe combinations of these inverses, which are unique. The details of proofs of these theorems are shown in [2], [3], [4], [5] and [6].

Theorem 1. (Generalized $\{1\}$ – inverse) For the matrix $A \in \mathcal{C}_r^{m \times n}$, $r < \min\{m, n\}$, let there be given regular matrices $Q \in \mathcal{C}^{m \times m}$ and $P \in \mathcal{C}^{n \times n}$ such that satisfy (8). The matrix X of the shape (9) satisfies matrix equation (1) if and only if:

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix} \cdot Q \quad (10)$$

where $X_1 \in \mathcal{C}^{r \times (m-r)}$, $X_2 \in \mathcal{C}^{(n-r) \times r}$, and $X_3 \in \mathcal{C}^{(n-r) \times (m-r)}$ are arbitrary submatrices.

In the case when $m=r$, then the matrix A is matrix of full rank by rows, hence submatrices X_1 and X_3 disappear by dimension. Therefore, the matrix X from (10) has the shape

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} I_r \\ X_2 \end{bmatrix} \cdot Q \quad (11)$$

In the case when $n=r$, then the matrix A is matrix of full rank by columns, hence submatrices X_2 and X_3 dissappear by dimension. Therefore, the matrix X from (10) has the shape

$$X = P \cdot [I_r \quad X_1] \cdot Q \quad (12)$$

Theorem 2. (Generalized {2} – inverse) For the matrix $A \in \mathbf{C}_r^{m \times n}$, $r < \min\{m, n\}$, let there be given regular matrices $Q \in \mathbf{C}^{m \times m}$ and $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ such that satisfy (8). The matrix X of the shape (9) satisfies matrix equation (2) if and only if submatrices $X_0 \in \mathbf{C}^{r \times r}$, $X_1 \in \mathbf{C}^{r \times (m-r)}$, $X_2 \in \mathbf{C}^{(n-r) \times r}$ and $X_3 \in \mathbf{C}^{(n-r) \times (m-r)}$ satisfy matrix equations:

$$X_0^2 = X_0, X_0 X_1 = X_1, X_2 X_0 = X_2, X_2 X_1 = X_3. \quad (13)$$

Corollary 1. (Generalized {1, 2} – inverse) For the matrix $A \in \mathbf{C}_r^{m \times n}$, $r < \min\{m, n\}$, let there be given regular matrices $Q \in \mathbf{C}^{m \times m}$ and $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ such that satisfy (8). The matrix X of the shape (9) satisfies matrix equations (1) and (2) if and only if:

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ X_2 & X_2 X_1 \end{bmatrix} \cdot Q \quad (14)$$

where $X_1 \in \mathbf{C}^{r \times (m-r)}$ and $X_2 \in \mathbf{C}^{(n-r) \times r}$ are arbitrary submatrices.

In the case of $m=r$ the matrix A is matrix of full rank by rows, hence submatrix X_1 dissappears by dimension. Therefore, the matrix X from (14) has the shape

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} I_r \\ X_2 \end{bmatrix} \cdot Q \quad (15)$$

In the case of $n=r$ the matrix A is matrix of full rank by columns, hence submatrix X_2 dissappears by dimension. Therefore, the matrix X from (14) has the shape

$$X = P \cdot [I_r \quad X_1] \cdot Q \quad (16)$$

To detect {3} and {4} inverses of matrix A in the shape of block, it is necessary to make square block matrices:

$$Q \cdot Q^* = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad P^* \cdot P = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

with appropriate submatrices $S_1 \in \mathbf{C}^{r \times r}$, $S_2 \in \mathbf{C}^{r \times (m-r)}$, $S_3 \in \mathbf{C}^{(m-r) \times r}$, $S_4 \in \mathbf{C}^{(m-r) \times (m-r)}$ and $T_1 \in \mathbf{C}^{r \times r}$, $T_2 \in \mathbf{C}^{r \times (n-r)}$, $T_3 \in \mathbf{C}^{(n-r) \times r}$, $T_4 \in \mathbf{C}^{(n-r) \times (n-r)}$. Matrices $Q \cdot Q^* \in \mathbf{C}^{m \times m}$ and $P^* \cdot P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ are Hermitian. According to [4] hold:

$$S_1^* = S_1, S_2^* = S_3, S_4^* = S_4, T_1^* = T_1, T_2^* = T_3, T_4^* = T_4 \quad (18)$$

and also square matrices S_4 and T_4 are invertible.

Definition 3. The matrix matrix $A \in \mathbf{C}^{m \times m}$ is Hermitian if $A = A^*$.

Theorem 3. (Generalized {3} – inverse) For the matrix $A \in \mathbf{C}_r^{m \times n}$, $r < \min\{m, n\}$, let there be given regular matrices $Q \in \mathbf{C}^{m \times m}$ and $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ such that satisfy (8) and let square matrix $Q \cdot Q^*$ be in the shape (17). The matrix X of the shape (9) satisfies matrix equation (3) if and only if submatrices $X_0 \in \mathbf{C}^{r \times r}$, and $X_1 \in \mathbf{C}^{r \times (m-r)}$ satisfy:

$$(S_1 - S_2 S_4^{-1} S_2^*) X_0^* = X_0 (S_1 - S_2 S_4^{-1} S_2^*) \quad \text{and} \quad X_1 = -X_0 S_2 S_4^{-1} \quad (19)$$

where $X_2 \in \mathbf{C}^{(n-r) \times r}$ and $X_3 \in \mathbf{C}^{(n-r) \times (m-r)}$ are arbitrary submatrices.

Corollary 2. (Generalized {1, 3} – inverse) For the matrix $A \in \mathbf{C}_r^{m \times n}$, $r < \min\{m, n\}$, let there be given regular matrices $Q \in \mathbf{C}^{m \times m}$ and $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ such that satisfy (8) and let square matrix $Q \cdot Q^*$ be in the shape (17). Matrix X of the shape (9) satisfies matrix equations (1) and (3) if and only if:

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} I_r & -S_2 S_4^{-1} \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix} \cdot Q \quad (20)$$

where $X_2 \in \mathbf{C}^{(n-r) \times r}$ and $X_3 \in \mathbf{C}^{(n-r) \times (m-r)}$ are arbitrary submatrices.

In the case of $m=r$ the matrix A is matrix of full rank by rows, hence submatrices S_2 , S_4 and X_3 disappear by dimension. Therefore, the matrix X from (20) has the shape

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} I_r \\ X_2 \end{bmatrix} \cdot Q \quad (21)$$

In the case of $n=r$, then the matrix A is matrix of full rank by columns, hence submatrices X_2 and X_3 disappear by dimension. Therefore, the matrix X from (20) has the shape

$$X = P \cdot [I_r \quad -S_2 S_4^{-1}] \cdot Q \quad (22)$$

Corollary 3. (Generalized {1, 2, 3} – inverse) For the matrix $A \in \mathbf{C}_r^{m \times n}$, $r < \min\{m, n\}$, let there be given regular matrices $Q \in \mathbf{C}^{m \times m}$ and $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ such that satisfy (8) and let square matrix $Q \cdot Q^*$ be in the shape (17). The matrix X of the shape (9) satisfies matrix equations (1), (2) and (3) if and only if:

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} I_r & -S_2 S_4^{-1} \\ X_2 & X_2 \cdot (-S_2 S_4^{-1}) \end{bmatrix} \cdot Q \quad (23)$$

where $X_2 \in \mathbf{C}^{(n-r) \times r}$ is arbitrary submatrix.

In the case of $m=r$ the matrix A is matrix of full rank by rows, hence submatrices S_2 and S_4 disappear by dimension. Therefore, the matrix X from (23) has the shape

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} I_r \\ X_2 \end{bmatrix} \cdot Q \quad (24)$$

In the case of $n=r$ the matrix A is matrix of full rank by columns, hence submatrix X_2 disappears by dimension. Therefore, the matrix X from (23) has the shape

$$X = P \cdot [I_r \quad -S_2 S_4^{-1}] \cdot Q \quad (25)$$

Theorem 4. (Generalized {4} – inverse) For the matrix $A \in \mathbf{C}_r^{m \times n}$, $r < \min\{m, n\}$, let there be given regular matrices $Q \in \mathbf{C}^{m \times m}$ and $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ such that satisfy (8) and let square matrix $P^* \cdot P$ be in the shape (17). Matrix X of the shape (9) satisfies matrix equation (4) if and only if submatrices $X_0 \in \mathbf{C}^{r \times r}$ and $X_2 \in \mathbf{C}^{(n-r) \times r}$ satisfy:

$$X_0^* (T_1 - T_2 T_4^{-1} T_2^*) = (T_1 - T_2 T_4^{-1} T_2^*) X_0 \quad \text{and} \quad X_2 = -T_4^{-1} T_3 X_0 \quad (26)$$

where $X_0 \in \mathbf{C}^{r \times r}$ and $X_2 \in \mathbf{C}^{(n-r) \times r}$ are arbitrary submatrices.

Corollary 4. (Generalized {1, 4} – inverse) For the matrix $A \in \mathbf{C}_r^{m \times n}$, $r < \min\{m, n\}$, let there be given regular matrices $Q \in \mathbf{C}^{m \times m}$ and $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ such that satisfy (8) and let square matrix $P^* \cdot P$ be in the shape (17). The matrix X of the shape (9) satisfies matrix equations (1) and (4) if and only if:

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ -T_4^{-1} T_3 & X_3 \end{bmatrix} \cdot Q \quad (27)$$

where $X_1 \in \mathbf{C}^{r \times (m-r)}$ and $X_3 \in \mathbf{C}^{(n-r) \times (m-r)}$ are arbitrary submatrices.

In the case of $m=r$ the matrix A is matrix of full rank by rows, hence submatrices X_1 and X_3 disappear by dimension. Therefore, the matrix X from (27) has the shape

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} I_r \\ -T_4^{-1}T_3 \end{bmatrix} \cdot Q \quad (28)$$

In the case of $n=r$ the matrix A is matrix of full rank by columns, hence submatrices T_3, T_4 and X_3 disappear by dimension. Therefore, the matrix X from (27) has the shape

$$X = P \cdot [I_r \quad X_1] \cdot Q \quad (29)$$

Corollary 5. (Generalized {1, 2, 4} – inverse) For the matrix $A \in \mathbf{C}_r^{m \times n}$, $r < \min\{m, n\}$, let there be given regular $Q \in \mathbf{C}^{m \times m}$ and $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ such as to satisfy (8) and let square matrix $P^* \cdot P$ be in the shape (17). The matrix X of the shape (9) satisfies matrix equations (1), (2) and (4) if and only if:

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ -T_4^{-1}T_3 & (-T_4^{-1}T_3) \cdot X_1 \end{bmatrix} \cdot Q \quad (30)$$

where $X_1 \in \mathbf{C}^{r \times (m-r)}$ is arbitrary submatrix.

In the case of $m=r$ the matrix A is matrix of full rank by rows, hence submatrix X_1 disappears by dimension. Therefore, the matrix X from (30) has the shape

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} I_r \\ -T_4^{-1}T_3 \end{bmatrix} \cdot Q \quad (31)$$

In the case of $n=r$ the matrix A is matrix of full rank by columns, hence submatrices T_3 and T_4 disappear by dimension. Therefore, the matrix X from (30) has the shape

$$X = P \cdot [I_r \quad X_1] \cdot Q \quad (32)$$

Corollary 6. (Generalized {1, 3, 4} – inverse) For the matrix $A \in \mathbf{C}_r^{m \times n}$, $r < \min\{m, n\}$, let there be given regular matrices $Q \in \mathbf{C}^{m \times m}$ and $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ such that satisfy (8) and let square matrices $Q \cdot Q^*$ and $P^* \cdot P$ have the shape (17). The matrix X of the shape (9) satisfies matrix equations (1), (3) and (4) if and only if:

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} I_r & -S_2S_4^{-1} \\ -T_4^{-1}T_3 & X_3 \end{bmatrix} \cdot Q \quad (33)$$

where $X_3 \in \mathbf{C}^{(n-r) \times (m-r)}$ is arbitrary submatrix.

In the case of $m=r$ the matrix A is matrix of full rank by rows, hence submatrices S_2, S_4 and X_3 disappear by dimension. Therefore, the matrix X from (33) has the shape

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} I_r \\ -T_4^{-1}T_3 \end{bmatrix} \cdot Q \quad (34)$$

In the case when $n=r$, then the matrix A is matrix of full rank by columns, hence submatrices T_3, T_4 and X_3 disappear by dimension. Therefore, the matrix X from (33) has the shape

$$X = P \cdot [I_r \quad -S_2S_4^{-1}] \cdot Q \quad (35)$$

For the matrix $A \in \mathbf{C}_r^{m \times n}$ system of matrix equations (1), (2), (3) and (4) has unique solution that is denoted by A^\dagger and known as *Moore-Penrose inverse of matrix*. From above theorems we present the block representation of Moore-Penrose inverse:

Theorem 5. (Moore-Penrose inverse) For the matrix $A \in \mathbf{C}_r^{m \times n}$, $r < \min\{m, n\}$, let there be given regular matrices $Q \in \mathbf{C}^{m \times m}$ and $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ such that satisfy (8) and let square matrices $Q \cdot Q^*$ and $P^* \cdot P$ have the shape (17). Unique solution of matrix equations (1), (2), (3) and (4) is given with

$$A^\dagger = P \cdot \begin{bmatrix} I_r & -S_2 S_4^{-1} \\ -T_4^{-1} T_3 & T_4^{-1} T_3 S_2 S_4^{-1} \end{bmatrix} \cdot Q \quad (36)$$

In the case of $m=r$ the matrix A is matrix of full rank by rows, hence submatrices S_2 and S_4 disappear by dimension. Therefore, the matrix A^\dagger from (36) has the shape

$$A^\dagger = P \cdot \begin{bmatrix} I_r \\ -T_4^{-1} T_3 \end{bmatrix} \cdot Q \quad (37)$$

In the case of $n=r$ the matrix A is matrix of full rank by columns, hence submatrices T_3 and T_4 disappear by dimension. Therefore, the matrix A^\dagger from (36) has the shape

$$A^\dagger = P \cdot [I_r \quad -S_2 S_4^{-1}] \cdot Q \quad (38)$$

In the case that the matrix A is regular and square, $m=n=r$, the Moore-Penrose inverse A^\dagger of the matrix A is equal with A^{-1} . In that case, the matrix A^\dagger from (36) has the shape

$$A^\dagger = A^{-1} = P \cdot Q \quad (39)$$

In next example, determination of the Moore-penrose inverse of matrix in a shape of block is presented.

Example 1. For the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ calculate the Moore-Penrose inverse .

Solution. Using elementary transformations by columns and rows of expanded matrix $\begin{bmatrix} A & I_3 \\ I_3 & 0 \end{bmatrix}$ we can determine regular matrices P and Q :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } Q = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

such that $QAP = E_2$. By making product of matrices

$$Q \cdot Q^* = \begin{bmatrix} \frac{29}{9} & -\frac{22}{9} & -3 \\ -\frac{22}{9} & \frac{17}{9} & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ and } P^* \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

we obtain submatrices $S_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $S_4 = [6]$, $T_3 = [1 \quad -2]$, $T_4 = [6]$ based on which we can

determine submatrices $-S_2 S_4^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $-T_4^{-1} T_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $(T_4^{-1} T_3)(S_2 S_4^{-1}) = \begin{bmatrix} -\frac{7}{36} \end{bmatrix}$. Therefore, the

Moore-Penrose inverse of matrix A , according to theorem 5, is given by

$$A^\dagger = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{36} \end{bmatrix} \cdot Q = \begin{bmatrix} -\frac{23}{36} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{36} \\ -\frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{36} \end{bmatrix}$$

△

Block representations of generalized inverses of squared matrices

In this part of paper shall be considered block representations of generalized inverses of the square matrix $A \in \mathbf{C}_r^{n \times n}$. Let the matrix A be square matrix with index $ind(A) = k$, and let given minimal polynomial be $\mu(x)$. Then:

$$\mu(x) = x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \dots + c_k x^k, \quad c_k \neq 0. \quad (40)$$

Using to minimal polynomial we can form q -polynomial:

$$q(x) = -\frac{1}{c_k} \cdot (x^{m-k-1} + c_{m-1}x^{m-k-2} + \dots + c_{k+1}). \quad (41)$$

Relation between minimal polynomial (40) and q -polynomial (41) can be defined by:

$$\mu(x) = c_k x^k (1 - xq(x)) \quad (42)$$

Definition 4. Let is matrix $A \in \mathbf{C}_r^{n \times n}$ with index $ind(A) \leq 1$. Then system of matrix equations (1), (2) and (5) has unique solution denoted by $A^\#$ and known as *the group inverse*.

If the matrix A has $ind(A) = 0$, then it is regular and hold $A^\# = A^{-1}$.

Theorem 6. (Group inverse) For the square matrix $A \in \mathbf{C}_r^{n \times n}$ with index $ind(A) = 1$ and adequate q -polynomial $q(x)$, the matrix $q(A)$ represents one $\{1\}$ -inverse of matrix A . Unique solution of system of matrix equations (1), (2) and (5) given by q -polynomial is

$$A^\# = A(q(A))^2. \quad (43)$$

Next theorem is shown and proved in [13]. According to block representation of the group inverse of square matrix can be obtained without determining q -polynomial.

Theorem 7. (Group inverse) For square matrix $A \in \mathbf{C}_r^{n \times n}$, $r < \min\{m, n\}$, with index $ind(A) = 1$ let there be given regular matrices $Q, P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ such that satisfy (8). Let block decomposition

$$Q \cdot P = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} \quad (44)$$

is true under assumption that the submatrix $V_4 \in \mathbf{C}^{(n-r) \times (n-r)}$ is regular. Unique solution of system of matrix equations (1), (2) and (5) is given by block representation

$$A^\# = P \cdot \begin{bmatrix} I_r & -V_2 V_4^{-1} \\ -V_4^{-1} V_3 & V_4^{-1} V_3 V_2 V_4^{-1} \end{bmatrix} \cdot Q \quad (45)$$

The theorems 6 and 7 are illustrated by next example.

Example 2. For the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ calculate the group inverse.

Solution. Minimal polynomial and q -polynomial of the matrix A are $\mu(x) = x^3 - 15x^2 - 18x$ and $q(x) = \frac{x}{18} - \frac{5}{6}$ respectively. The index of matrix A is $ind(A) = 1$. The group inverse of the matrix A , according to theorem 6, is

$$A^\# = A(q(A))^2 = \begin{bmatrix} -\frac{23}{36} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{36} \\ -\frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{36} \end{bmatrix}$$

Above result can be reached using theorem 7. By use of the elementary transformation on columns and rows of expanded matrix $\begin{bmatrix} A & I_3 \\ I_3 & 0 \end{bmatrix}$ we can determine regular matrices P and Q :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

such that $QAP = E_2$. From product of matrices

$$Q \cdot P = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -3 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

we can determine submatrices: $V_1 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $V_3 = [1 \quad -2]$, $V_4 = [6]$. Next, according to $|V_4| = 6 \neq 0$, we get

$$A^\# = P \cdot \begin{bmatrix} I_r & -V_2 V_4^{-1} \\ -V_4^{-1} V_3 & V_4^{-1} V_3 V_2 V_4^{-1} \end{bmatrix} \cdot Q = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{36} \end{bmatrix} \cdot Q = \begin{bmatrix} -\frac{23}{36} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{36} \\ -\frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{36} \end{bmatrix}$$

Given solutions according to theorem 6 and theorem 7 are the same. △

Definition 5. The square matrix $A \in \mathbf{C}_r^{n \times n}$ with index $\text{ind}(A) = k$, system of matrix equations (2), (5) and (6) has unique solution denoted by A^D and known as *the Drazin inverse of matrix*.

Theorem 8. (Drazin inverse) For the square matrix $A \in \mathbf{C}_r^{n \times n}$ with index $\text{ind}(A) = k$ and adequate q -polynomial, unique solution of system of matrix equations (2), (5) and (6) is given with

$$A^D = A^k (q(A))^{k+1} \tag{46}$$

If $k = \text{ind}(A) \leq 1$, then $A^D = A^\#$.

Theorem 9. [3] For the square matrix $A \in \mathbf{C}_r^{n \times n}$ holds $AA^D A = A$ if and only if $\text{ind}(A) \leq 1$.

Definition 6. The square matrix $A \in \mathbf{C}_r^{n \times n}$ for which holds true that $A^\dagger = A^D$ is called *EP-matrix*.

According to theorem 8, for *EP*-matrices holds $A^\dagger = A^D = A^\#$. At the end of this section, next theorem determines one characterisation of *EP*-matrices:

Theorem 10. [13] Square matrix $A \in \mathbf{C}_r^{n \times n}$ is *EP*-matrix if and only if one of equivalent condition satisfied:

1. $N(A) = N(A^*)$.
2. $R(A) = R(A^*)$.
3. $\mathbf{C}^n = N(A) \oplus R(A)$.

4. There exist regular matrices $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ and $A_r \in \mathbf{C}^{r \times r}$ such that:

$$A = P \cdot \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \quad (47)$$

Corollary 6. Every square singular symmetrical matrix $A \in \mathbf{C}_r^{n \times n}$ is EP-matrix.

Based on previous two theorems here we give one example of computing Moore-Penrose inverse of EP-matrix.

Example 3. Calculate the Moore-Penrose inverse of matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution. Let us note that the matrix A is symmetrical and singular ($|A| = 0$). It is meaning that matrix A is one EP-matrix with index $ind(A) = 1$. So, $A^\dagger = A^D = A^\#$, and we can applied theorem

7. By applying elementary transformations on columns and rows of expanded matrix $\begin{bmatrix} A & I_5 \\ I_5 & 0 \end{bmatrix}$ we can

obtain regular matrices P and Q :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

such that $QAP = E_2$. From the product of matrices

$$Q \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 6 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

we can determine the submatrices $V_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, $V_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ and

$V_4 = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Then, according to $|V_4| = 12 \neq 0$, we get

$$A^\dagger = A^\# = P \cdot \begin{bmatrix} I_r & -V_2 V_4^{-1} \\ -V_4^{-1} V_3 & V_4^{-1} V_3 V_2 V_4^{-1} \end{bmatrix} \cdot Q = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{25}{144} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \cdot Q,$$

and

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{25} & \frac{7}{144} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{9} & \frac{7}{144} & \frac{25}{144} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

△

3. Conclusion

In this paper were presented theorems for obtaining Moore-Penrose inverse of matrices based on block representations. In addition, one part of this paper was dedicated to EP matrices. Classes {1,3} and {1,4} of generalized inverses and Moore-Penrose inverse have some minimax properties which can be applied on linear systems. Described procedure for detecting block representations of generalized inverses of matrices can be used in image reconstruction [14]. In the future, this will be subject of the further research.

Acknowledgment. *This work was supported in part by the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development under Grant No. 175016 and Grants No. 174032 and 44006.*

References

- [1] **R. Penrose.** A generalized inverses for matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 1955, 51, 406-413
- [2] **A. Ben-Israel, T.N.E. Greville.** Generalized Inverses, Theory and Applications. *Springer, New York*, 2003.
- [3] **S.L. Cambell, C.D. Meyer.** Inverses of Linear Transformations. *Siam, Philadelphia*, 2009.
- [4] **C.A. Rhode.** Contribution to the theory, computation and application of generalized inverses (PhD dissertation). University of North Carolina at Raleigh, 1964.
- [2] **V. Perić.** Generalizirana reciproka matrice, *Stručno-metodički časopis Matematika*, Zagreb, 1982, 11 (1), 40-57.
- [3] **B. Malešević.** Grupna funkcionalna jednačina (magistarski rad). *Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu*, 1998.
- [4] **I. Jovović, B. Malešević.** A note on Solutions of the Matrix Equations $AXB=C$. *Scientific publications of the state university of Novi Pazar, Ser.A: Appl. Math. Inform. And Mech.* 2014, 6 (1), 45-55
- [8] **B. Malešević, B. Radičić.** Reproductive and non-reproductive solutions of matrix equation $AXB = C$. *Proceedings of the second symposium on Matematics and Applications Faculty of Mathematics*, 2011, 157-163
- [9] **B. Malešević, B. Radičić.** Non-reproductive and reproductive solutions of some matrix equations. *Proceedings of the Conference on Mathematical and Informational Technologies MIT*, 2011, 246-251
- [10] **B. Malešević, B. Radičić.** Some considerations of matrix equations using the concept of reproductivity. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 2012, 36 (1), 151-161
- [11] **B. Malešević, I. Jovović, M. Makragić, B. Radičić.** A Note on Solutions of Linear Systems. *ISRN Algebra*, vol. 2013 Article ID 142124, 6 pages, 2013. doi:10.1155/2013/142124
- [12] **B. Radičić, B. Malešević.** Some considerations in Relation to the Matrix Equation $AXB=C$. *The Mediterranean Journal of Mathematics* 2014, 11, 841-856
- [13] **N. Matzakos, D. Pappas.** EP matrices: Computation of the Moore-Penrose inverse via factorizations. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2010, 34, 113-127
- [14] **B. Malešević, B. Banjac, M. Makragić, R. Obradović.** Application of polynomial texture mapping in process of digitalization of cultural heritage, *arXiv:1312.6935 [cs.GR]*

Višekriterijumsko odlučivanje metodom AHP - definicija, rešavanje i primene

Mladen Vidić

Saobraćajni fakultet Doboj, Vojvode Mišića 52, Doboj, RS, BiH

e-mail: mladen@matf.bg.ac.rs

Apstrakt. Višekriterijumsko odlučivanje po jednoj ili više ciljnih funkcija ima neprekidnu primenu u realnom životu, u poslovnim primenama i tehnologijama. Matematika je idealan alat za precizno formulisanje i rešavanje zadataka odlučivanja. Praktični problemi odlučivanja se najčešće opisuju u objedinjenoj formi kao zadaci optimizacije jedne ili više ciljnih funkcija uz skup ograničenja definisanih sistemom linearnih (ne)jednačina. Konačan skup vrednosti u R^n u kojem važe ta ograničenja označavamo P. Definisane skupa ograničenja pomoću sistema linearnih nejednačina često nije dovoljno za praktične zadatke odlučivanja. Ovome se dodaje jedna ili više funkcija $C(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definisane eksplicitno, koje treba pozicionirati u nekom graničnom položaju na skupu dopuštenih rešenja, obično minimizirati ili maksimizirati, na skupu P dopuštenih rešenja određenom ograničenjima. Definisane funkciju sa optimizacionim uslovom nazivamo *ciljna funkcija*. Ako su ciljne funkcije $C_i(X)$ nelinearnog tipa ili ako im tip argumenata i tip vrednosti nije u skupu realnih brojeva, tada ne možemo primeniti iterativne metode koje generišu niz numeričkih iteracija ka konačnom rešenju. Nepoznata veličina X koja je vektor u R^n ili matrica u $R^{m \times n}$ sa dobro odabranom početnom iteracijom X_0 kreće se uvek u tom prostoru rešenja. Moramo koristiti druge metode koje koriste relativne odnose diskretnih vrednosti kriterijuma u odnosu na druge vrednosti ili apsolutnu diskretnu vrednost. Najpoznatija je metoda AHP (eng. *Analitycal Hierarchy Process*) koja rešava traženje optimalnog rešenja za skup ponuđenih alternativa uz postavljeni sistem ograničenja pomoću uzajamnih prioriteta alternativa za sve postavljene kriterijume i skup uzajamnih odnosa prioriteta atributa, odnosno ciljnih funkcija, diskretnog ili kontinualnog tipa vrednosti.

Ključne reči: Višekriterijumsko odlučivanje; AHP; Saaty skala; database pretraživanje.

1. Uvod

Rešavajući probleme odlučivanja sa izborom najpovoljnije iz skupa alternativa, matematika je idealan alat za precizno i formalno opisivanje postavljenih zadataka odlučivanja. Uz niz zadataka i problema matematički opisanih, sistemi jednačina i nejednačina su jedna od najčešće primenjivih matematičkih formi u teoriji odlučivanja, jer se njima opisuju odnosi jednakosti ili nejednakosti pojmova i njihovih numerički izraženih odnosa.

U praksi, sistemom linearnih (ne)jednačina opisuje se skup ograničenja koja treba da zadovolje neke promenljive, koje opisuju praktični problem, na određenim oblastima analize. Konačan skup vrednosti u R^n u kojem važe ta ograničenja označavamo P.

Definisane skupa ograničenja pomoću sistema linearnih nejednačina često nije dovoljno za praktično modelovanje zadatka odlučivanja. Dodajemo jednu ili više realnih funkcija $C(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cilja više promenljivih definisanih nad skupom P, koje treba pozicionirati u nekim graničnim položajima kada dostižu neku svoju optimalnu vrednost. Obično ih želimo minimizirati ili maksimizirati na skupu P dopuštenih rešenja određenom ograničenjima. Definisane funkciju sa optimizacionim uslovom nazivamo *ciljna funkcija*.

Praktični problemi se najčešće modeluju i opisuju u objedinjenoj formi kao zadaci optimizacije jedne ili više ciljnih funkcija uz ograničenja definisana sistemom linearnih nejednačina. Rešavanje podrazumeva traženje vektora $r=(r_1, r_2, \dots, r_n)$ rešenja u P, u kojima se dostižu optimalne vrednosti.

Ciljne funkcije mogu biti definisane kao linearna kombinacija težinskih koeficijenata i nepoznatih sistema određenih vektorima r . Za traženje rešenja problema optimizacije linearne ciljne funkcije uz ograničenja definisana sistemom nelinearnih jednačina najčešće se koriste metode *linearnog programiranja* (LP) i druge metode. Ukoliko rešenja treba da budu u skupu celih brojeva, onda je reč o metodama *celobrojnog linearnog programiranja* (CLP). Ako su ciljne funkcije $C_i(X)$ nelinearnog tipa ili čak ako im tip argumenata i tip vrednosti nije u skupu relanih brojeva, tada ne možemo primeniti poznate iterativne metode koje generišu niz numeričkih iteracija ka konačnom rešenju $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$. Nepoznata veličina X koja je vektor u R^n ili matrica u $R^{m \times n}$ sa dobro odabranom početnom iteracijom X_0 kreće se uvek u tom prostoru rešenja. Postoji niz numeričkih metoda koja rešavaju ove probleme iterativnim putem.

Kod problema VKO (višekriterijumsko odlučivanje) zadatak odlučivanja se sastoji u izboru najbolje alternative (parcijalni problem VKO) ili rangiranju skupa alternativa (potpun problem VKO) od najbolje do najlošije za izbor. Alternative mogu biti robe ili akcije ako se odlučujemo između skupa različitih proizvoda odnosno aktivnosti koje ćemo birati za postupanje.

Za rešavanje VKO koristimo metode ELECTRE sa podtipovima, PROMETHEE sa podtipovima i AHP metodu koja je nezavisna od domena vrednosti atributa i garantuje rangiranje svih alternativa. Prve dve metode imaju nedostatke pri odlučivanju i u diskusiji rešenja te se u zadacimavišekriterijumskog odlučivanja i analize rezultata češće koristi AHP metoda koja omogućava jednostavniju diskusiju rezultata. AHP(eng. Analytic hierarchy process) je razvio ThomasL. Saaty 70-tih godina. Kasnije je doradivana. Softverska podrška je kroz Expert Choice i druge. Metoda AHP obezbeđuje traženje optimalnog rešenja (najbolje alternative) za utvrđeni skup alternativa uvažavajući prioritetkriterijuma date njihovim relativnim uzajamnim odnosima i relativne uzajamne odnose alternativa za definisane kriterijume. Primena nije česta iako je velika potreba zaformalnom metodom višekriterijumskog odlučivanja. Uglavnom se koriste metode rangiranja prema manjem broju kriterijuma istog prioriteta.

2. Definisanje problema VKO, tabelle i matrice odlučivanja

Problem višekriterijumskog odlučivanja opisujemo skupom alternativa za izbor $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$, atributima A_1, A_2, \dots, A_n primenjivim na sve alternative i ciljnom funkcijom izbora optimalne alternative ako su atributima pridruženi priroteni (preferencije) u formi normiranog vektora težina. Alternative mogu biti robe ako se odlučujemo između nekih predmeta za neku namenu, osobe ako se metoda primenjuje u ljudskim resursima ili drugim društvenim naukama, grupe ljudi, zajednice, ali i aktivnosti (radnje) koje ćemo preduzeti za ostvarenje nekih strateških ciljeva ili drugih poduhvata.

Cilj višekriterijumskog odlučivanja je utvrđivanje najboljeg izbora (alternative) iz skupa ponuđenih alternativa na osnovu zadatih kriterijuma. Na raspolaganju za izbor imamo:

- Funkciju cilja,
- Kriterijume/atribute i definisane domene vrednosti (numeričke ili alfanumeričke),
- Prioritet kriterijuma/atributa,
- Kandidate/alternative koje biramo,
- Vrednosti atributa za alternative u tabeli odlučivanja.

Alternative nad atributima imaju vrednosti koje unosimo u tabelu dimenzije $m \times n$ koju nazivamo *tabelom odlučivanja* (1). Tabela odlučivanja sadrži vrednosti atributa v_i^j za alternativu a_i nad atributom A_j koje su kvantitativno (numerički) ili kvalitativno (alfanumerički) određene i odgovara strukturi zadatka odlučivanja koji rešavamo. U ovom radu fokus je na metodi odlučivanja, a vrednosti atributa su poznate i zavise od primene metode. Svaka primena ima posebne metode merenja, eksperimentalno utvrđivanje vrednosti ili druge matematičke metode kojim se utvrđuju vrednosti atributa. Obično vrednosti mogu biti specifične prirodne ili veštačke karakteristike alternative, testne vrednosti ili subjektivne procene vrednosti kao i utvrđene vrednosti tačnim ili približnim postupkom merenja. Ovaj poslednji način utvrđivanja podrazumeva primenu metoda merenja kojima se pouzdanim postupcima

može izračunati vrednost atributa ili sa nekom dopuštenom pouzdanošću greške eksperimentalno ili statistički utvrditi.

		Atributi						
		A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	...	A _n
Alternative	a ₁	v ₁ ¹	v ₁ ²	v ₁ ³	v ₁ ⁴	v ₁ ⁵	...	v ₁ ⁿ
	a ₂	v ₂ ¹	v ₂ ²	v ₂ ³	v ₂ ⁴	v ₂ ⁵	...	v ₂ ⁿ
	a ₃	v ₃ ¹	v ₃ ²	v ₃ ³	v ₃ ⁴	v ₃ ⁵	...	v ₃ ⁿ

	a _m	v _m ¹	v _m ²	v _m ³	v _m ⁴	v _m ⁵	...	v _m ⁿ

Tabela 1. Tabela odlučivanja za skup alternativa i izabrane atribute

Za svaki atribut se definiše pojam optimalne vrednosti (*min* ili *max*) na domenu vrednosti atributa prema kojem možemo rangirati alternative u opadajući ili rastući poredak. Ako je optimalan *max* sortiramo ih opadajući, a ako je optimalan *min* sortiramo ih rastući po vrednosti svakog atributa pomoću relacije poretka na domenu atributa. Svaki atribut definiše novo rangiranje alternativa. Atributi u praksi mogu da imaju jednak uticaj, ali najčešće u praktičnim problemima odlučivanja nemaju jednak uticaj na rezultat. Atributima se pridružuje vektor težina $t^T = [t_1 \ t_2 \ t_3 \dots t_n]$ koji treba biti normiran pa pretpostavljamo da je $\sum_1^n t_j = 1$. Vrednost $t_j * 100$ definiše procenat učešća atributa u odluci konačnog rangiranja alternativa.

Konačno sortiranje alternativa mora uzeti u obzir komponovanu relaciju koja integriše pojedinačno rangiranje alternativa po atributima i rangiranje atributa prema težinama. Metode koje omogućuju parcijalno ili potpuno rangiranje alternativa spadaju u metode višekriterijumskog odlučivanja i analize (VKO i VKA). Vrednosti atributa A_j su iz domena DA_j koji često nisu uporedivi. Mogu biti intervali vrednosti različitog dijametra ali i sa različitim prirastom vrednosti atributa sa promenom značaja vrednosti atributa. U praktičnom primeru izbora automobila za kupovinu, *snaga motora u KW* neme isti opseg vrednosti kao i *potrošnja goriva u l/100*. Prva karakteristika ima opseg u intervalu $[45,500]$ sa korakom značajnog prirasta vrednosti oko 10KW dok potrošnja goriva ima opseg intervala vrednosti $[1.5,25]$ sa korakom značajnog prirasta vrednosti oko 0.3. Atribut *cena* je numerički i kao i potrošnja goriva optimalna vrednost je opadajuća funkcija za porastom značaja. Što je manja potrošnja ili manja cena to je veća saglasnost za izbor alternative. Kod snage motora funkcija kriterijuma bi bila rastuća funkcija sa porastom značaja atributa za saglasnost izbora. Atribut *boja* automobila je vrednost iz diskretnog skupa vrednosti koji se ne mogu uporediti na prethodni način. Takve atribute moramo primenom transformacije i strogo definisane funkcije transformacije prevesti u numeričke vrednosti u nekom opsegu. U literaturi praksi postoji više metoda transformacije atributa prema prirodi i monotonosti funkcije značaja vrednosti atributa od kojih je najpoznatija metoda bipolarne skale, normalizacija atributa i linearne skale [12]. Postoje i druge metode ali se u svim transformacija svodi na preslikavanje skupa alfanumeričkih vrednosti u skup vrednosti u nekom intervalu. Ukratko, za navedeni skup vrednosti atributa kreiramo preslikavanje tako što interval $[1,10]$ podelimo sa brojem različitih vrednosti atributa, najlošijoj vrednosti pridružimo 1, a najboljoj vrednosti 10. Tada za atribut A_j kreiramo AT_j transformisani atribut koji ima numeričke vrednosti i definisan numerički poredak (relacijom $<$ ili $>$) izomorfan poretku na originalnom skupu vrednosti atributa. Kada iz tabele odlučivanja izdvojimo vrednosti numeričkih atributa i odgovarajuće numeričke transformisane vrednosti za alfanumeričke atribute dobijamo, umesto tabele, matricu odlučivanja (1) koja sadrži elemente b_{ij} koji su numeričke vrednosti atributa A_j ili AT_j za alternativu a_i . Pridružujemo problemu odlučivanja i vektor t težina koji određuje preferencije atributa u odlučivanju.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}, t = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \text{ i } \sum_{j=1}^n t_j = 1. \quad (1)$$

3. Semantika podataka u matricama odlučivanja

Kreiranje izvedene matrice odlučivanja se realizuje prevođenjem opisnih vrednosti atributa u numeričke ekvivalente. Svakoj $B[i]$ vrsti matrice pridruženoj alternativni a_i odgovara vektor vrste te matrice dimenzije n . Izvedena matrica odlučivanja sadrži samo numeričke vrednosti atributa izvedene prethodnim transformacijama. Domeni vrednosti atributa su različiti i neuporedivi intervali različitog dijametra intervala, granica intervala i koraka prirasta vrednosti atributa sa različitim ciljem optimizacije (min, max) koji se mogu usaglasiti normalizacijom vektora. U slučaju normalizacije vektora (delenje normom) dobijamo domene vrednosti usaglašene ali se u tom slučaju gubi informacija o stvarnim rastojanjima vektora. Da bi se shvatio značaj metode AHP izložićemo ukratko neke metode odlučivanja.

Rangiranje (uređenje) po proizvoljnom atributu nije rešenje zadatka VKO jer zanemaruje ostale atribute i njihove preferencije u kombinovanom odlučivanju sa različitim atributima. Kombinovano rangiranje ponuđenih alternativa se značajno razlikuje od filtriranja skupa alternativa po zadatim kriterijumima. Filtriranje je postupak koji podrazumeva traženje svih alternativa koje zadovoljavaju neke minimalne kriterijume pre rangiranja. Moguće je sortiranje filtriranog skupa alternativa po pojedinačnim kriterijumima bez evaluacije ciljne funkcije za izbor optimalne alternative. Filtriranje se primenjuje za sužavanje skupa na manji podskup alternativa (iz većeg skupa) pre izbora optimalnih alternativa metodama VKO. Svi softveri za tabelarnu obradu podataka i baze podataka podržavaju operacije sortiranja skupa n -torki podataka (što odgovara alternativama) po izabranim atributima. Uređenje podataka unutar grupa kreirano po listi atributa gde prvi atribut ima najviši prioritet, ostali atributi imaju manje prioritete od prethodnih narušava preferencije (nije saglasno) atributa zadate u zadatku VKO koji rešavamo. Moguće je izostaviti neke atribute primenjene na alternative iz kriterijuma za uređenje. Prvi atribut određuje kriterijum izbora dok ostali dejstvuju tek u slučaju identičnih vrednosti atributa za više instanci uređenjem po ostalim atributima. Rangiranje nije metoda za rešavanje zadatka višekriterijumskog odlučivanja.

Vektorsko odlučivanje. Moguće je odlučivanje izvršiti primenom vektorske metrike u domenu $D = DA_1 \times DA_2 \times DA_3 \times \dots \times DA_n$. S obzirom da ovaj skup nije pravi potprostor od \mathbb{R}^n jer nisu uporedivi intervali domena atributa, dovodi se u pitanje primena euklidske metrike kao mere distance dve tačke u D . Ponuđene alternative za izbor se mogu posmatrati kao vektori položaja elemenata u D . Potrebno je definisati posebnu metriku za računanje rastojanja u domenu D . Posmatramo alternative kao vektor u D i optimalnu vrednost kojoj težimo instanciramo kao vektor a_{opt} u D čiji atributi imaju optimalne vrednosti iz domena. Pažljivim izborom metrike za rastojanje dva vektora $d(u, v)$ nad domenom D obezbeđujemo mogućnost utvrđivanja koja od ponuđenih alternativa $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ je najbliža a_{opt} vektoru u D . Alternative rangiramo prema vrednosti $d(a_i, a_{opt})$, za $i = 1..m$. Metrika d mora povezati dijametar intervala domena atributa A_j , da li je optimalna vrednost gornja granica ili donja granica intervala domena DA_j i težinu (t_j preferenciju) atributa A_j u odnosu na druge atribute $A_k, k \neq j$. Tada bismo birali prvu najbližu, drugu itd. alternativu kao optimalnu ($min/max d$) iz skupa rangiranih alternativa. Izbor metrike d je predmet izučavanja jer zavisi od domena vrednosti D i pridruženih težina atributima. Sigurno je da treba biti pažljivo određena. Značajno je, kod kasnije diskusije rešenja, moći brzo preračunavati rastojanje datom metrikom u slučaju primene parametara i promena vrednosti atributa koja je konzistentna sa promenama vrednosti atributa.

Srednja vrednost za odlučivanje. Ako su svi domeni vrednosti atributa numerički i jednaki (imaju isti interval), optimalna vrednost po svim atributima je jednaka i prioritet atributa je jednak, možemo koristiti srednju vrednost atributa alternative kao kriterijum za rangiranje. Kao primer možemo koristiti ocene učenika (studenta) za izbor najboljeg učenika (studenta) u grupi. Tu su kriterijumi ocene koje imaju vrednosti iz jednakog intervala sa istom optimalnom vrednošću. Optimalna alternativa a_{opt} ima za sve atribute A_j vrednost a_{opt}^j koje su identične jer su intervali domena atributa identični. Rastojanje $d_j(a_{opt}, a_i)$ alternative a_i od optimalne alternative nad atributom A_j je dato izrazom

$$d_j(a_{opt}, a_i) = a_{opt}^j - a_{ij} \quad (2)$$

gde zbog semantike optimalne vrednosti (koja može biti maksimalna ili minimalna vrednost) ne naglašavamo znak operacije niti koristimo apsolutnu vrednost. Zbog jednakih preferencija atributa ukupno rastojanje $d(a_{opt}, a_i)$ izvodimo kao prosečnu vrednost rastojanja $d_j(a_{opt}, a_i)$, $j=1..n$ nad svim atributima po formuli

$$d(a_{opt}, a_i) = \frac{\sum_{j=1}^n (a_{opt}^j - a_{ij})}{n} \quad (3)$$

Važan uslov da ukupno rastojanje možemo izvesti po prethodnoj formuli, kao srednju vrednost rastojanja (1), je da su sve vrednosti a_{opt}^j jednake. Ako neka vrednost a_{opt}^j odgovara suprotnom kraju intervala DA_j zbog suprotne monotonosti kriterijuma optimizacije u srednjoj vrednosti (3) dolazi do gubitka informacije o distanci kroz razlike suprotnog znaka nad različitim atributima. Tada treba koristiti drugu metriku dobro definisanu koja te razlike uzima u obzir. S obzirom da smo imali pretpostavku da su intervali identični i vrednosti a_{opt}^j optimalnih vrednosti atributa jednake taj slučaj ne razmatramo. U formuli (3) možemo uočiti da je $d(a_{opt}, a_i)$

$$d(a_{opt}, a_i) = \frac{\sum_{j=1}^n a_{opt}^j}{n} - \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{n} = \overline{a_{opt}} - \bar{a}_i \quad (4)$$

jednaka razlici srednjih vrednosti svih atributa za optimalnu alternativu a_{opt} i a_i . Rastojanja $d(a_{opt}, a_i)$ za sve alternative a_i služe da se izvrši rangiranje alternativa u rastućem redosledu. Prva u nizu je alternativa najbliža optimalnoj a_{opt} i nju biramo kao prvi izbor pri rešavanju problema odlučivanja izbora optimalne alternative. Naredna je drugi izbor itd. Uočavamo da pri računanju $d(a_{opt}, a_i)$ u (4) jednoj fiksiranoj vrednosti $\overline{a_{opt}}$ oduzimamo srednje vrednosti \bar{a}_i izračunate za sve alternative. Uklanjanje $\overline{a_{opt}}$ pri rangiranju razlika menja znak rangiranja ali ne utiče na redosled i konačan ishod. Dovoljno je računati srednje vrednosti \bar{a}_i atributa alternativa i rangiranje izvršiti prema njima. U primeru sa ocenama učenika rangiranje se vrši prema prosečnoj oceni učenika \bar{X}_i gde su atributi učenika ocene iz raznih predmeta. Na kraju rangiranje vršimo od najveće do najmanje prosečne ocene što odgovara redosledu najbliže do najdalje prosečne ocene optimalnoj prosečnoj oceni $\overline{X_{opt}}$ (sa svim maksimalnim ocenama). Primer sa ocenama smo koristili za ilustraciju skupa zadataka koji se mogu rešavati ocenjivanjem alternativa i pridruživanjem ocena iz istog domena vrednosti. Veliki skup zadataka VKO se može transformisati transformacijom atributa u attribute ocene i rešavati na prethodni način ako su atributi jednakih preferencija. Primetimo da je u (3) i (4) uticaj svih atributa jednak što se vidi kroz koeficijent $1/n$ sa kojim množimo vrednost a_{ij} alternative a_i za atribut A_j . Neophodni uslovi (ograničenja) za primenu srednje vrednosti alternativa \bar{a}_i za odlučivanje su:

- Da su svi kriterijumi numerički (ili izvedeni numerički iz alfanumeričkih atributa);
- Da imaju isti domen vrednosti kriterijuma (intervali vrednosti) npr. $[0,5]; [0,10]$;
- Isti prioritet kriterijuma.

Očekivana vrednost za odlučivanje. Ako nisu isti prioriteti kriterijuma za odlučivanje možemo koristiti očekivanu srednju vrednost Ea_i („ponderisana srednja”) zavisnu od raspodele težina t_j na uticaj atributa A_j za rangiranje. Koristimo formulu

$$Ea_i = \frac{\sum_{k=1}^n t_k * a_{ik}}{\sum_{j=1}^n t_j} = \sum_{k=1}^n t_k * a_{ik} \text{ gde je } \sum_{j=1}^n t_j = 1 \quad (5)$$

kao konačan kriterijum za rangiranje alternativa.

Ako nisu jednaki domen atributa, a jesu numerički (uvek možemo transformisati u numerički domen) korišćemo metode koje koriste matricu odlučivanja i vektor težina (1). U praksi je komplikovano za odlučivanje i analizu koristiti vektorsko odlučivanje jer takve metrike su kompleksne za računanje.

Kreirane su druge metode koje uzimaju u obzir vrednosti atributa za alternative i težine (preferencije) atributa u odlučivanju. Najpoznatije su metode ELECTREE, PROMETHEE i AHP. Kod ELECTREE metode se uzimaju vrednosti atributa iz matrice (1) i normiraju se deljenjem sa normom vektora alternativa. Potom se pomnože koordinate vektora alternativa sa odgovarajućim težinama pridruženim atributima. Kreirana je težinska normirana matrica odlučivanja. Poređenjem

alternativa prema atributima utvrđujemo da li je neka alternativa saglasna za izbor u odnosu na drugu ili nesaglasna. Kreiraju se skupovi indeksa atributa prema saglasnosti i nesaglasnosti alternativa. Brojanjem uzajamnih saglasnosti i nesaglasnosti alternativa po atributima računaju se matrice saglasnosti i nesaglasnosti alternativa jednih prema drugima po atributima. Iz njih dobijamo matrice saglasne dominacije, nesaglasne dominacije i agregirane dominacije radi utvrđivanja koje alternative možemo pouzdano izabrati i stepen konzistentnosti odlučivanja. U tim matricama saglasnosti nema informacija koliko je jedna alternativa bolja od druge za neki atribut niti se može rekonstruisati. Tako izgubljene informacije akumuliraju grešku te kod konačnog rangiranja komponovanog sa atributima i njihovim težinama imamo rezultate koji predstavljaju parcijalno rangiranje alternativa sa velikim stepenom nekonzistentnosti. To je neodgovarajuće za potpuno rangiranje alternativa i diskusiju rešenja zavisno od ulaznih parametara. Metoda AHP otklanja te nedostatke i ne zavisi od domena vrednosti atributa. Ne uzima se razlika vrednosti i snaga saglasnosti po nekom atributu i njegovoj težini (preferenciji) pa metoda ELECTREE ima problem konzistentnosti rešenja u slučaju malih promena vrednosti atributa.

4. Matoda AHP

AHP metoda takođe rešava zadatak višekriterijumskog odlučivanja formulisan u sekciji 2. Definisan je cilj zadatka VKO, atributi i alternative. Kao polaznu osnovu koristi tabelu 1. odlučivanja u kojoj se poznate vrednosti atributa za alternative. Svaki praktičan zadatak VKO obezbeđuje podatke za tabelu 1 (sekcija 1). Ako nisu svi atributi numerički izraženi u skupu R , reč je o problemima VKO iz domena skupa diskretnih promenljivih gde se obično vrši neka transformacija domena atributa sa diskretnih u domene numeričkih vrednosti. Jedan postupak transformacije prilagođen metodi AHP ćemo izložiti kasnije u radu. Pretpostavljamo da u opštem slučaju nisu svi atributi numerički u R (neki su alfanumerički kvalitativni), domen vrednosti nije iste kardinalnosti (mere) i nije jednak uticaj kriterijuma na rezultat. Kako su date preferencije (težine) kriterijuma za odlučivanje?

4.1. Procene preferencija kriterijuma

Pretpostavljamo da nije poznat vektor preferencija iz (1) atributa nego su poznati relativni uzajamni odnosi t_j/t_k svaka dva atributa A_j i A_k , $j \neq k$. Taj odnos je 1 za $j=k$. U praksi je česta situacija da se vektor težina ne može direktno odrediti. Kada imamo više učesnika u donošenju odluka utvrđuje se koje kriterijume uzeti za odlučivanje i koje uzajamne relativne odnose, ali ukupne težine u vektoru (1) ne možemo pouzdano utvrditi. Ukupna težina atributa je rezultat sinteze odnosa atributa i može se menjati sa čestim promenama odluka za preferenciju atributa. Moguće je za svaka dva kriterijuma utvrditi „odnos značaja jednog prema drugom”. Taj odnos definiše faktor dominacije atributa A_j nad atributom A_k . U praksi odnose preferencija definišu pojedinci, odbori, komisije i drugi subjekti zaduženi za utvrđivanje kriterijuma. Postupak utvrđivanja odnosa je eksplicitan i ne zavisi od domena vrednosti atributa.

Vrednosti odnosa t_j/t_k se računaju, utvrđuju subjektivno ili primenom preporučene SAATY skale od strane autora ove metode [4][5][6]. Originalne nazive opisa možemo naći u [4], a jedan predlog prevoda opisa u [12]. U tabeli 2 predlažu se lično usvojeni radni opisi naziva odnosa. U softveru ExpertChoice primenjuju se originalni nazivi prikazani u posebnoj koloni tabele 2. Recipročne vrednosti odnosa imaju analogne nazive.

Stepen odnosa t_j/t_k	Radni opisi	Stepen odnosat $_j/t_k$	Radni opisi	Expert Choice
1	Jednak odnos	1	Jednak odnos	Equal
2	Pola dominantan	1/2	Pola podređen odnos	
3	Dominantan odnos	1/3	Podređen odnos	Moderate
4	Pola jaka dominacija	1/4	Pola jako podređenog odnosa	

5	Jak odnos dominacije	1/5	Jako podređen odnos	Strong
6	Pola vrlo jaka dominacija	1/6	Pola vrlo podređenog odnosa	
7	Vrlo jak odnos dominacije	1/7	Vrlo podređen odnos	Very strong
8	Pola apsolutnog odnosa dominacije	1/8	Pola apsolutno podređenog odnosa	
9	Apsolutni odnos dominacije	1/9	Apsolutno podređen odnos	Extreme

Tabela 2. Preporučena upotreba SAATY skale devet stepeni

Kreiramo recipročnu matricu odlučivanja za kriterijume iz tih odnosa preferencija

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, c_{jk} = \begin{cases} t_j/t_k & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}, j, k = 1..n. \quad (6)$$

u kojoj važi jednakost $c_{jk}=1/c_{kj}$ za $j,k = 1..n$. Kako izračunati preferencije u vektoru $t^T=[t_1 \ t_2 \ t_3...t_n]$? Normalizovani vektor preferencija t možemo naći rešavanjem vezanog zadatka nalaženja maksimalne sopstvene vrednosti recipročne matrice C iz jednakosti

$$Ct = \alpha t \quad (7)$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} t_1/t_1 & t_1/t_2 & \cdots & t_1/t_n \\ t_2/t_1 & t_2/t_2 & \cdots & t_2/t_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_n/t_1 & t_n/t_2 & \cdots & t_n/t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Matrica (8) je recipročna i na dijagonali su joj 1. Iz [5] i teorije o sopstvenim vrednostima matrica znamo da je zbir sopstvenih vrednosti jednak tragu matrice. Sa druge strane, ako je matrica konzistentna onda su joj elementi recipročni u formi b_i/b_j , $i, j=1..n$ i vrste su umnožak jedne izabrane vrste. U matrici (8) važi $c_{ik}/c_{ij}=c_{jk}$ što garantuje da je konzistentna. Pošto su sve vrste u matrici (8) konstantni umnožak prve vrste i ona je recipročna, onda ima samo jednu sopstvenu vrednost različitu od 0. Ta sopstvena vrednost je ujedno maksimalna vrednost α_{\max} i mora biti jednaka n , odnosno rang matrice C . Dakle, biće $\alpha_{\max} = n$ pa se zadatak svodi na problem traženja sopstvenog vektora za ovu sopstvenu vrednost rešavanjem zadatka $Ct = \alpha_{\max} t$. Odgovarajući sopstveni vektor t je rešenje našeg zadatka računanja vektora težina. Kada ga rešimo delimo sa $\sum_{l=1}^n t_l$ kako bismo dobili normirani vektor. Uočimo da u datoj matrici C iz (6) nisu recipročne vrednosti nego približne ocene c_{ij} odnosa atributa. Matrica C je rezultat približnih ocena nastalih upoređivanjem atributa i kadaza tu matricu rešavamo zadatak sopstvenih vrednosti dobijamo najveću sopstvenu vrednost koja zadovoljava tvrđenje 1 ako je C regularna matrica.

Tvrđenje 1. Maksimalna sopstvena vrednost matrice je \geq rang matrice, odnosno $\alpha_{\max} \geq n$ [5].

Posledica 1. Matrica A je konzistentna akko je $\alpha_{\max} = n$.

Dokazi ovih tvrđenja i posledica dati su u [5]. Kada iz vektora t , koji dobijemo rešavanjem zadatka sopstvenog vektora, dobijemo obrnutim postupkom matricu CC kao u (8) zaključujemo da ona jeste recipročna i konzistentna. Pošto je nova matrica recipročna i konzistentna njena najveća sopstvena vrednost je jedina različita od 0 i jednaka n zbog posledice 1. Imamo dve matrice, C i CC sa maksimalnim sopstvenim vrednostima α_{\max} i n .

Kada unosimo matricu C težimo da odnosi c_{ij} budu što pouzdaniji. Ali postoji greška procenjivanja i matrica C koju dobijemo teži da bude recipročna (konzistentna) kao u (8). Pošto nije idealno recipročna, što je teško postići proizvoljnim procenama odnosa, rešimo zadatak traženja sopstvenog vektora t za tu matricu. Matrica CC ima odstupanje od polazne matrice koje ukazuje na nekonzistentnost polaznih procena odnosa. Obe matrice imaju jednu maksimalnu sopstvenu vrednost različitu od nule. Matrici CC je to i jedina sopstvena vrednost. Prva ima sopstvenu vrednost α_{\max} i

druge koje teže 0, a druga samo n. Kako je zbir sopstvenih vrednosti matrice njen trag, onda nekonzistentnost procenjenih odnosa u matrici C dobijamo kao razliku sopstvenih vrednosti $\alpha_{\max}-n$. Uvodi se pojam IK (indeks konzistentnosti) formulom $IK=(\alpha_{\max}-n)/(n-1)$ gde je α_{\max} najveća sopstvena vrednost matrice C za koju smo unosili odnose. Ako se nakon unosa matrice C i računanja sopstvenog vektora t dobije $IK > 0,1$ moramo ponoviti postupak procenjivanja odnosa težina atributa (prihvatljivo je $IK \leq 0,1$).

Dalje rešavamo zadatak traženja sopstvenog vektora t za sopstvenu vrednost α_{\max} . Primitimo da deljenjem elemenata recipročne matrice odlučivanja preferencija C u koloni k, $k=1..n$, sumom cele kolone dobijamo

$$\frac{c_{jk}}{\sum_{l=1}^n c_{lk}} = t_j^k, \frac{t_j/t_k}{\sum_{l=1}^n t_l/t_k} = \frac{t_j}{\sum_{l=1}^n t_l} = t_j^k, j=1..n \quad (9)$$

normiranu relativnu vrednost t_j^k težine atributa A_j , $j=1..n$, u odnosu na A_k atribut. Normirane relativne težine t_j^k atributa A_j u odnosu na A_k koristimo za računanje vektor težina t u (6). Traženo t biće jednak t_j^k iz formule $t_j = t_j^k * \sum_{l=1}^n t_l$ kada normiramo vektor težina $\sum_{l=1}^n t_l = 1$. Ako kreiramo za sve kolone normirane relativne težine atributa dobijamo matricu normiranih relativnih težina iz koje možemo težinu atributa izvesti kao srednju vrednost vrste matrice D i izračunati indeks konzistentnosti IK.

$$D = \begin{bmatrix} t_1^1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ t_2^1 & t_2^2 & \dots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_n^1 & t_n^2 & \dots & t_n^n \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Iz prethodnog je

$$\sum_{j=1}^n t_j^k = 1, \quad \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n t_j^k = n. \quad (11)$$

Zaključujemo da je konačna suma

$$1 = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n t_j^k}{n} = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n t_j^k}{n} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\sum_{k=1}^n t_j^k}{n} \right). \quad (12)$$

Vrstaj matrice D sadrži normirane vrednosti relativnih težina atributa A_j u odnosu na attribute A_k . Iz (12) srednja vrednost vrste matrice D daje vrednost težine atributa A_j u ukupnoj raspodeli težina t_j atributa A_j .

$$t_j = \frac{\sum_{k=1}^n t_j^k}{n}, t = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

Vektor t je normirani vektor težina, $\sum_{j=1}^n t_j = 1$.

Ako atributi imaju hijerarhijsku strukturu tada je moguće izvesti istim postupkom težine atributa na nižim nivoima hijerarhije i uvrstiti u težine atributa na višim nivoima. Na svim nivoima hijerarhijske strukture kriterijuma odnosi atributa se definišu matricom recipročnih vrednosti kao u (6) za taj nivo. Dobijeni vektor raspodele težina atributa na nivou s koji ulaze u atribut na nivou s-1 se množi sa težinom pridruženom atributu na nivou s-1. Ako kriterijum A_j sa težinom 0,25 na nivou s-1 ima podkriterijume A_{j1} , A_{j2} na nivou s sa težinama 0,4 i 0,6 u kriterijumu A_j , tada podkriterijumi imaju težine $0,25*0,4=0,1$ i $0,25*0,6=0,15$ na nivou s-1, u ukupnom rangiranju. S obzirom da je proces utvrđivanja težina u skladu sa strukturom kriterijuma A_j , definišemo recipročnu matricu odlučivanja (tipa C) za raspodelu odnosa podkriterijuma i primenjujemo postupak (13) za podnivo. Ako je kriterijum A_j strukturiran na podkriterijume definišemo recipročnu matricu za raspodelu odnosa podkriterijuma A_{j1} , A_{j2} , ..., A_{jk} nivoa s različitu od recipročne matrice odnosa kriterijuma nivoa s-1. Rezultujuće težine nivoa s množimo sa težinama nivoa s-1 za ukupne težine podkriterijuma.

4.2. Alternative i matrice relativnih odnosa

Nakon rangiranja atributa prema težinama (13) isti postupak koristimo za rangiranje alternativa prema vrednostima nad atributima. Za svaki atribut A_k , $k=1..n$, uređujemo alternative a_1, \dots, a_m definisanjem relativnih odnosa alternativa u recipročnoj matrici tipa (6) i primenjujemo isti

postupak kao u prethodnom slučaju određivanja normiranog vektora težina. Kreiramo matricu relativnih odnosa alternativa za atribut A_k

$$C^k = \begin{bmatrix} c_{11}^k & \dots & c_{1m}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}^k & \dots & c_{mm}^k \end{bmatrix}, c_{ij} = \begin{cases} v^k(a_i):v^k(a_j) & |i \neq j \\ 1 & |i = j \end{cases}, i, j = 1..m. \quad (14)$$

Vrednosti za matricu C^k se računaju, utvrđuju subjektivno ili primenom SAATY skale iz tebele 2.

Za alfanumeričke attribute u tabeli 1 pri definisanju odnosa možemo koristiti *bipolarnu skalu* za kreiranje transformisanih vrednosti. Donju granicu intervala uparujemo sa najlošijom vrednosti atributa, a gornju granicu intervala za najboljom vrednosti. Sredina intervala odgovara srednjoj vrednosti iz skupa mogućih diskretnih alfanumeričkih vrednosti. Preporučuje se i upotreba tebele 2.

Za računanje odnosa $v^k(a_i):v^k(a_j)$ numeričkih atributa koriste se vrednosti izvedenih atributa usaglašene sa optimalnom vrednosti atributa. Time se izbegava nedostatak ELECTREE metode koja koristi vrednosti atributa za utvrđivanje saglasnosti alternative prema drugoj alternativu ali ne i intezitet te saglasnosti. U AHP metodi se čuva intenzitet saglasnosti u odnosu alternativa iz (14) za atribut. Npr. ako biramo telefon najmanje mase, bolji je model koji ima manju težinu. Da bismo odnose alternativa za atribut masa telefona dobro izračunali, preporučuje se kreiranje izvedenog atributa oduzimanjem vrednosti po formuli (*max masa – masa telefona*). Taj atribut će imati rast vrednost za rast saglasnosti alternative za izbor i odnose alternativa izvodimo iz količnika vrednosti transformisanog atributa. Bez transformacije upoređivanje nije moguće izvesti pouzdano bez gubitka informacije o odnosima. Poređenje 120gr i 130gr je teško izvesti ako ne uzmemo u obzir da ispod 100gr i preko 150gr nije u skupu prihvatljivih alternativa. Slično je za atribut dimenzija ekrana. Veći ekran ima bolja alternativa, ali postoji maksimum i minimum za prihvatljivu alternativu. U tabeli 3 je data ilustracija za atribut masa telefona. Odnos 30/20=1,5 odgovara stvarnom odnosu dok je odnos 130/120=1,083, koji odgovara skoro jednakosti, ne odgovara stvarnom odnosu alternativa. Analogno, kod atributa koji imaju rast saglasnosti za izbor sa rastom vrednosti atributa imamo interval dozvoljenih vrednosti i kreiramo transformisani atribut oduzimanjem donje granice intervala od vrednosti atributa. Npr. za atribut memorija telefona uzećemo da je minum 512MB i svim alternativama ćemo oduzeti tu vrednost za kreiranje izvedenog atributa. Tada poređenje alternativa sa 2GB i 1GB izvodimo po obrascu (2-0,5)/(1-0,5)=3 i odgovara više realnom odnosu za izbor alternative nego odnos 2/1=2.

	Masa (gr)	Tmasa(150-Masa)	Odnos a_i/a_j
a_i	120	30	30/20=1,5
a_j	130	20	20/30=0,66

Tabela 3. Atribut masa telefona i transformacija atributa za utvrđivanje odnosa alternativa

Nakon uspešnog kreiranja matrice C^k dimenzije $m \times m$ koja je recipročna matrica sa 1 na dijagonali primenjujemo isti postupak kao i kod težina atributa da odredimo matricu D^k normiranih relativnih odnosa alternativa za atribut A_k . U koloni $p, p=1..m$, matrice C^k važi formula (15)

$$\frac{c_{jp}^k}{\sum_{l=1}^n c_{lp}^k} = d_{jp}^k, \frac{v^k(a_j):v^k(a_p)}{\sum_{l=1}^n (v^k(a_l):v^k(a_p))} = \frac{v^k(a_j)}{\sum_{l=1}^n v^k(a_l)} = d_{jp}^k, j=1..n \quad (15)$$

i matrica D^k

$$D^k = \begin{bmatrix} d_{11}^k & d_{12}^k & \dots & d_{1m}^k \\ d_{21}^k & d_{22}^k & \dots & d_{2m}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}^k & d_{m2}^k & \dots & d_{mm}^k \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Istim postupkom kao u (11),(12),(13) tražimo srednju vrednost \bar{d}_j^k vrste j matrice D^k formulom (17) i vektor uređenja r^k alternativa za atribut A_k . Uređenje vrednosti \bar{d}_j^k u r^k određuje i potpuno uređenje alternativa za atribut A_k . Vrednost \bar{d}_j^k je normirana ocena pozicije alternative a_j za atribut A_k .

$$\bar{d}_j^k = \frac{\sum_{l=1}^m d_{jl}^k}{m}, r^k = \begin{bmatrix} \bar{d}_1^k \\ \vdots \\ \bar{d}_m^k \end{bmatrix} \quad (17)$$

4.3. Kompozicija relativnih odnosa alternativa i preferencija kriterijuma

Ako prethodni postupak primenimo za sve atribute A_k , $k=1..n$, dobićemo n vektora r^k . U svakom vektoru r^k alternativa a_i ima normiranu vrednost \bar{d}_i^k koja joj određuje mesto u uređenju alternativa za atribut A_k . Redosledi alternativa se razlikuju po atributima. Atributi imaju međusobne preferencije definisane vektorom t određenim u (13) (t_k za A_k) koje određuju koliko će učestvovati pozicija alternative a_i za atribut A_k u ukupnom rangiranju. Faktor $t_k * \bar{d}_i^k$ određuje učešće atributa u ukupnim bodovima alternative a_i . Ako primenimo matricu uređenja R iz (18) na vektor težina atributa t dobićemo ponderisane srednje vrednosti(težinske) odnosa alternativa u ukupnom uređenju.

$$R = \begin{bmatrix} \bar{d}_1^1 & \bar{d}_1^2 & \dots & \bar{d}_1^n \\ \bar{d}_2^1 & \bar{d}_2^2 & \dots & \bar{d}_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{d}_m^1 & \bar{d}_m^2 & \dots & \bar{d}_m^n \end{bmatrix}, \quad p = R \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^n (t_s * \bar{d}_1^s) \\ \vdots \\ \sum_{s=1}^n (t_s * \bar{d}_m^s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}. \quad (18)$$

U matrici R kolona q sadrži normirani vektor uređenja alternativa za atribute A_q . Vektor p je normirani vektor uređenja alternativa dok je vrednost p_i ukupna normirana ocena pozicije alternative a_i . Za odlučivanje sortiramo vrednosti p_i u opadajući poredak i biramo pripadajuće alternative počevši od najveće vrednosti p_i . Ako p vektor podelimo sa najvećom vrednosti p_i dobijamo relativni poredak ostalih alternativa u odnosu na najbolju alternativu.

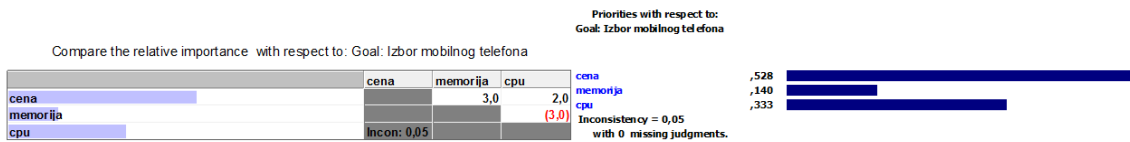
5. Postupak primene metode AHP

Na osnovu prethodno izloženog formalnog objašnjenja AHP metode možemo precizirati algoritam primene metode AHP:

1. Definisane cilja odlučivanja – šta odlučujemo?
2. Izbor kriterijuma, definisanje domena vrednosti kriterijuma i strukture hijerarhije kriterijuma. Utvrđivanje međusobnih odnosa kriterijuma (prioritet kriterijuma – značaj za izbor). Formiranje trougaone matrice C odnosa kriterijuma kao u (6);
3. Utvrđivanje skupa ishoda (alternativa). Kreiranje tabele odlučivanja koja sadrži vrednosti svih atributa za alternative. Priprema transformacije numeričkih atributa: kreiranje izvedenih atributa za transformaciju vrednosti kao u sekciji 4.2. Kreiranje novih atributa za transformaciju alfanumeričkih atributa (bipolarna skala, SAATY skala). Popunjavanje matrice odnosa C^k za alternative po svakom kriterijumu A_k (atributu) tipa (14). Ponavljanje koraka 3. za sve atribute;
4. Primena metode kao u 4.3 i prikaz rangiranja alternativa po atributima;
5. Rangiranje alternativa prema konačnoj ciljnoj funkciji uz primenu težina atributa iz 2;
6. Diskusija rezultata kroz „šta ako“ (eng. „what if“) analizu. Pomoću softveraprimenom grafičkih pregleda i dinamičkim osvežavanjem rezultata olakšan je taj postupak. Zbog mogućnosti diskusije rešenja i parametarske analize AHP spada i u metode višekriterijumske analize (VKA).

5.1. Primer za ilustraciju – kupovina telefona

Cilj: Odlučićemo se za mobilni telefon koji ćemo kupiti. Zbog obima računa i rada odlučivaćemo na osnovu 3 kriterijuma: cena, memorija, procesor. Biraćemo između 4 alternative: M1, M2, M3, M4. Preporučuje se dodeljivanje kratkih naziva za alternative da se izbegne subjektivnost pri definisanju odnosa alternativa. Definišemo matricu C odnosa preferencija kriterijuma. Koristićemo ilustracije iz softvera Expert Choice - celi postupak računanja koji smo izložili u sekciji 4 možemo ručno uraditi.



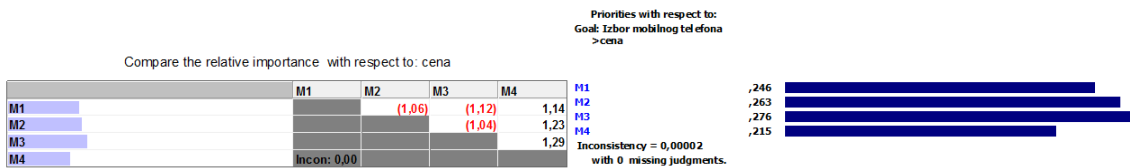
Slika 1. Trougaona recipročna matrica odnosa težina (levo) i normirani vektor težina (desno)

Primitimo da pri računanju normiranog vektora težina na slici 1 imamo indeks konzistentnosti 0,05 jer smo odnose preferencija u primeru dali proizvoljnom ocenom i odstupili od recipročne matrice. Kreiramo tabelu odlučivanja sa izvedenim kolonama.

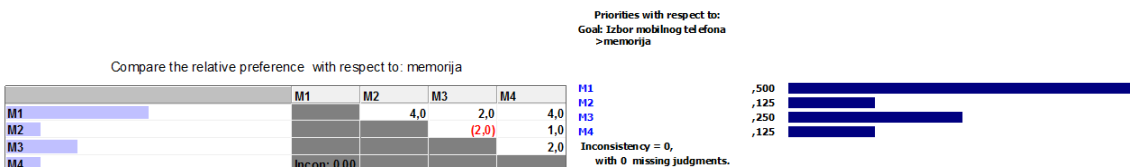
	Cena (A ₁)	Tcena (TA ₁)	Memorija (A ₂)	Tmemorija (TA ₂)	CPU (A ₃)	TCPU (TA ₃)
M1	400	400	1,5GB	1024	1,5GHz	0,5
M2	370	430	756GB	256	1,4GHz	0,4
M3	350	450	1GB	512	1,5GHz	0,5
M4	450	350	756GB	256	1,7GHz	0,7

Tabela 4. Tabela odlučivanja sa izvedenim atributima za računanje odnosa alternativa nad atributima

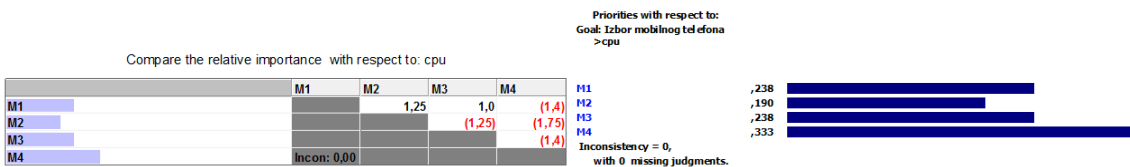
U tabeli odlučivanja kreiramo kolone transformacije Tcena (800-Cena), Tmemorija (Memorija-512), TCPU (CPU-1GHz) . Kreiramo recipročne matrice odnosa alternativa za svaki atribut i računamo normirani vektor uređenja sa ukupnim IK = 0,00002 zanemarljivim. To se desilo jer odnose za atribut cena nismo kreirali približno nego na osnovu preciznog poređenja vrednosti atributa Tcena. Slično je i za atribut Memorija i CPU u kojima smo za odnose laternativa koristili Tmemorija i TCPU. IK je takođe blizu 0.



Slika 2. Recipročna matrica odnosa alternativa za atribut Cena i normirani vektor uređenja



Slika 3. Recipročna matrica odnosa alternativa za atribut Memorija i normirani vektor uređenja



Slika 4. Recipročna matrica odnosa alternativa za atribut CPU i normirani vektor uređenja

Na kraju dobijamo sintetizovan rezultat kao u 4.3 prikazan na slici 5 sa ukupnim IK=0,02.



Slika 5. Sintetizovan rezultat u odnosu na cilj odlučivanja

Svi histogrami su grafička ilustracija rezultata i mogu se urediti u opadajuću poredak. Postoji niz grafikona koji omogućavaju analizu promene rezultata za promenu ulaznih vrednosti. U radu nije moguće izložiti zbog ograničenja.

6. Značaj metode i oblast primene

Metoda AHP omogućava rešavanje složenih problema višekriterijumskog odlučivanja po kriterijumima različite prirode (domen vrednosti, rang vrednosti i prioriteti). Široka oblast primene.

Navodimo samo neke oblasti primene. Odlučivanje u proizvodnji. Nabavka materijala, opreme i sredstava za rad. Rangiranje kandidata kod prijema za posao. Priprema i obrada rezultata tendera. Izbor nekretnina za promet i iznajmljivanje. Kupovina automobila, transportnih sredstava. Nabavka računarske opreme i tehnike. Izbor lokacije za izgradnju objekata. Lokacijski problemi u transportu prema zadatim i promenljivim kriterijumima. Lokacija transportnih i logističkih centara. Izbor lokacije za saobraćajne baze. Izbor medicinske opreme. Rangiranje rezultata konkursa. Rangiranje kandidata za nagrade bez numeričkog ocenjivanja. U medicini za dijagnostiku obolenja kod kompleksnih skupova simptoma. Izbor fakulteta za studiranje. Izbor sportske aktivnosti. Rangiranje univerziteta i fakulteta prema indikatorima uspešnosti i raspodeli uticaja indikatora na konačno rangiranje.

7. Zaključak

Od svih metoda VKO, AHP metoda daje najkompletnije odlučivanje garantujući potpuni poredak alternativa. Izvođenje metode ne zavisi od domena vrednosti atributa jer se uzimaju odnosi alternativa i kriterijuma u kojima se pored saglasnosti kriterijuma sa drugim kriterijumom čuva i intenzitet saglasnosti što daje prednost metodi za preciznu diskusiju rezultata u slučaju malih promena ulaznih podataka. Metoda ima dobru softversku podršku i prilično jednostavno formulisanje zadatka odlučivanja koji se brzo rešava. Intuitivno je opisivanje zadatka odlučivanja i tumačenje rezultata. Pouzdana je dinamika i diskusija rešenja. Brojni su primeri praktične primene.

Bibliografija

- [1] **A. Ishizaka, A. Labib.** Analytic Hierarchy Process and Expert Choice: Benefits and Limitations. *University of Portsmouth, Portsmouth Business School, United Kingdom, 2009*
- [2] **M. Vidić.** Višekriterijumska analiza za izbor softverske tehnologije na primeru SUBP metodom AHP. *Zbornik radova, Infofest, Budva, 2011*
- [3] **E. Forman.** Decision by Objectives: The Analytic Hierarchy Process and Expert Choice. *World Scientific Press, 2001*
- [4] **T.L. Saaty.** A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures. *Journal of Mathematical Psychology, 15, 234-281, 1977*
- [5] **T.L. Saaty.** How to make a decision: The Analytic Hierarchy Process. *European Journal of Operational Research 48, 9-26, 1990*
- [6] **T.L. Saaty.** Decision making with the analytic hierarchy process. *International Journal of Services Sciences, 2008*
- [7] **J.R. Grandzol.** Improving the Faculty Selection Process in Higher Education: a Case for the Analytic Hierarchy Process. *IR Applications Using Advanced Tools, Techniques, and Methodologies, vol. 6, August 24, 2005*
- [8] **R. Morse, M. Foster.** How U.S. News Calculated the Best Global Universities Rankings at <http://www.usnews.com/education/best-global-universities/articles/methodology>. *U.S. News Education, 2014*
- [9] **A. Melvin.** Decision-Making using the Analytic Hierarchy Process (AHP) and SAS/IML. *SESUG 2012: The Proceedings of the SouthEast SAS Users Group, Durham, NC, 2012, 2012*
- [10] **R. Hass, O. Meixner.** An Illustrated guide to the Analytic Hierarchy Process. Institute of Marketing and Innovation, University of Natural Resources and Applied Life Sciences, Vienna
- [11] **M. Backović, S. Babić.** Višekriterijumska optimizacija postupka izbora najpovoljnije polise životnog osiguranja. *Economics & Economy, Vol. 1, No. 1, 2013*
- [12] **M. Čupić, V.M. RaoTummala, M. Suknović.** Odlučivanje: formalni pristup. *Fakultet Organizacionih Nauka, Beograd, 2003*



**УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ**

**ЗБИРКА АПСТРАКТА
ЧЕТВРТОГ СИМПОЗИЈУМА „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”
НАЦИОНАЛНОГ СКУПА СА МЕЂУНАРОДНИМ УЧЕШЋЕМ
Београд 17 – 18. октобар 2014.**

I SEKCIJA: MATEMATIKA I PRIMENE DANAS

Vesna Jevremović, Bojana Milošević, Marko Obradović, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

„Karakterizacije raspodela verovatnoća sa posebnim osvrtom na eksponencijalnu raspodelu“

Apstrakt. Karakterizacija raspodela verovatnoća – način da se ustanove, ukoliko postoje, specifične osobine karakteristične samo za određenu familiju raspodela, je veoma važan zadatak, ne samo sa teorijskog, nego i sa praktičnog aspekta. Karakterizacija raspodela omogućava formiranje modela prirodnih pojava kao i konstruisanje i primenu statističkih testova. Postoje razne vrste karakterizacija: one koje su vezane za statistike poretka, za momente u raspodeli, za zasecanje raspodele... Uz normalnu raspodelu eksponencijalna raspodela je u vrhu raspodela koje su modeli realnih situacija, jer se javlja npr. u teoriji masovnog opsluživanja, u teoriji pouzdanosti... U radu će biti razmotrene četiri osnovne međusobno ekvivalentne karakterizacije eksponencijalne raspodele. Iz njih se izvode i karakterizacije raspodela koje se dobijaju transformacijom eksponencijalne raspodele: Paretova raspodela, logistička raspodela, Vejbulova raspodela... a takođe se dobija i karakterizacija Puasonovog procesa. Pitanjima karakterizacije raspodela su se bavili, a i danas se bave mnogi naučnici.

Ključne reči: karakterizacija raspodela; eksponencijalna raspodela; statistike poretka.

Bibliografija

- [1] J. Galambos, S. Kotz. Characterizations of Probability Distributions. *Springer-Verlag*, 1978.
- [2] Ahsanullah, Mohammad Ahsanullah, Gholamhossein G. Hamedani Hamedani. Exponential Distribution: Theory and Methods. *Nova Science Publishers*, 2010.

Zoran Vidović, Univerzitet u Beogradu, Učiteljski fakultet

„Bertranov paradoks - Novi pogledi“

Apstrakt. Jedan od najvažnijih paradoksa u teoriji verovatnoće predstavlja Bertranov paradoks, predstavljen 1888. godine, koji nas opominje da kad radimo sa geometrijskom, "lokalnom", verovatnoćom moramo da definišemo šta podrazumevamo pod pojmom slučajno. Bertran predstavlja tri rešenja ovog paradoksa, i ta rešenja su sadržana u skoro svakoj knjizi iz teorije verovatnoće, kao ilustracija da statistička verovatnoća ima kontradiktorno ponašanje kad se primenjuje u radu sa geometrijskim objektima. Najvažniji rezultati, prikupljeni iz radova *Bertrand's Paradox: Is there anything else?* autora V. Jevremović i M. Obradovića i *Bertrand's Paradox Revisited: More Lessons about that Ambiguous Word, Random* autora S. Chi i R. Larson, su prikazani u radu, objedinjeni u jednu celinu.

Značaj rada se ogleda u tome što se predstavlja novo rešenje Bertranovog paradoksa, teorijski rešeno uz podršku Monte Karlo simulacija. Simulacije su modelirane u programskom jezuku R, i rezultati simulacija su prikazani u radu, zajedno sa graficima. Prikazani su problemi u odogovarajućim dimenzijama koji su, na određen način, proširenje Bertrandovog paradoksa.

Ključne reči: Bertranov paradoks, Monte Karlo, geometrijske verovatnoće.

Marija Minić, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

„Uzorkovanje metodom sortiranih skupova“

Apstrakt: Metoda sortiranih skupova je statistička metoda uzorkovanja koju je prvi opisao McIntyre (1952, Australian Journal of Agricultural reasrch, 3, 385-390), a Takahasi i Wakimoto

su dali matematičku pozadinu (1968, On unbiased estimates of population mean based on the sample stratified by means of ordering, Annals of the Institute of Statistical Mathematics 20: 1-31.). Iako isprva nije izazvala veliko interesovanje, metoda sortiranih skupova je postala popularna poslednjih dvadesetak godina. Osnovna metoda sortiranih skupova iznedrila je mnoge druge sa njom povezane metode.

McIntyre predlaže ovu metodu kada su troškovi merenja obeležja visoki, finansijski i/ili vremenski. Ideja je da se jedinice uzorka sortiraju pomoću obeležja koje je lako i jeftino meriti. Odatle se dobija uzorak koje najbolje oslikavaju populaciju, a na kome se vrše stvarna merenja. Ocene parametara iz uzorka dobijenog metodom sortiranih skupova uglavnom su bolje u odnosu na ocene iz prostog slučajnog uzorka.

U ovom radu prikazan je koncept metode sortiranih skupova, kao i neke njene vrste i varijacije. Takođe je prikazana bibliografija radova koji se bave ovom temom.

Ključne reči: uzorkovanje, metoda sortiranih skupova, ocenjivanje parametara, bibliografija

Dušica Gavrilović, Institut za onkologiju i radiologiju Srbije

„Biostatistika u medicini: pojam i primena metodologije ROC krive“

Apstrakt: Najjednostavniji dijagnostički testovi koji se koriste u medicini obično su u stanju da izvrše klasifikaciju pacijenata u jednu od dve grupe: osobe koje imaju odnosno nemaju neko određeno oboljenje, simptome i sl. Klinički značaj takvih testova upravo je i zasnovan na njihovoj upotrebi tokom postavljanja dijagnoze bolesti.

Svaki dijagnostički test ima svoju senzitivnost, specifičnost, pozitivnu prediktivnu vrednost, negativnu prediktivnu vrednost i tačnost, što su neke od karakteristika koje su u funkciji kvantifikovanja dijagnostičkih sposobnosti izabranog testa i proceni njegovog kliničkog značaja.

Mnogi faktori u biomedicini imaju neprekidnu kvantitativnu prirodu (napr. enzimi, biomarkeri) i mogu biti u funkciji dijagnostičkog testa, samo ukoliko je njihov diskriminacioni potencijal klinički zadovoljavajući. U svrhu takvog ispitivanja koristi se tzv. ROC (Receiver Operating Characteristics) kriva, bazirana na proračunu i grafičkom prikazu svih parova specifičnosti i senzitivnosti dobijenih evaluacijom granične (diskriminacione) vrednosti po svim uzoračkim vrednostima izabrane varijable.

Napretkom biomedicine, danas se ispituje ne samo dijagnostički već sve češće prognostički i/ili prediktivni potencijal mnogih faktora neprekidne kvantitativne prirode. Metodologija ROC krive, pored ispitivanja diskriminacionog potencijala (dijagnostičkog, prognostičkog, prediktivnog) neprekidne varijable, pruža mogućnost određivanja granične (diskriminacione) vrednosti kao i mogućnost testiranja značajnosti razlika (za nezavisne ili zavisne uzorke) diskriminacionih potencijala različitih varijabli za isti binarni ishod.

I pored brojnih teorijskih uopštenja metodologije ROC krive, ekspanzija savremenih istraživanja u biomedicini sa ciljem ispitivanja diskriminacionog potencijala i kliničkog značaja biomarkera ili njihovih kombinacija (naročito u oblasti hroničnih ili teških oboljenja poput maligniteta, infarkta miokarda, dijabetesa, side), uticaće na dalju primenu i razvoj ove metodologije.

Ključne reči: ROC kriva; senzitivnost testa; specifičnost testa

Bibliografija

- [3] **DG. Altman, JM. Bland.** Statistics Notes: Diagnostic tests 1: sensitivity and specificity. *BMJ*, 1994, 308:1552.
- [4] **DG. Altman, JM. Bland.** Statistics Notes: Diagnostic tests 2: predictive values. *BMJ*, 1994, 309:102.
- [5] **DG. Altman, JM. Bland.** Statistics Notes: Diagnostic tests 3: receiver operating characteristic plots. *BMJ*, 1994, 309:188.
- [4] **J. Hanley, B. McNeil.** The meaning and use of the area under the Receiver Operating Characteristic (ROC) curve. *Radiology*, 1982, 143: 29-36.
- [5] **J. Hanley, B. McNeil.** A Method of Comparing the Areas under Receiver Operating Characteristics Curves Derived from the Same Cases. *Radiology*, 1983, 148:839-843.
- [6] **MH. Zweig, G. Campbell.** Receiver-operating characteristic (ROC) plots: A fundamental evaluation tool in clinical medicine. *Clin Chem*, 1993, 39/4, 56-577.
- [7] **ER. DeLong, DM. DeLong, DL. Clarke-Pearson.** Comparing the areas under two or more correlated receiver operating characteristic curves: a nonparametric approach. *Biometrics*, 1988, 44, 837-845.

Goran V. Janjić, ICTM, University of Belgrade

Saša N. Malkov, Faculty of Mathematics, University of Belgrade

Miodrag V. Živković, Faculty of Mathematics, University of Belgrade

Snežana D. Zarić, Faculty of Chemistry, University of Belgrade; Department of Chemistry, Texas A&M University at Qatar

„Interactions of water molecule with phenyl group in crystal structures of small molecules and proteins“

Abstract. The interactions of water molecule with aromatic rings are of great importance since the water is in contact with aromatic molecules in many molecular systems, from materials to biological molecules. A substantial number of experimental and theoretical investigations have focused on characterizing the interaction between benzene and water as a prototype for aromatic–polar interactions.

For the study of interactions between water molecule and phenyl ring in proteins (PDB) and in crystal structures of small molecules (CSD) several mathematical methods have been used [1]. The density analysis shows that the most frequent populated area of water-phenyl contacts in crystal structures from the CSD and PDB corresponds to the ellipsoid with the vertical axis of 4.0 Å and horizontal axis of 5.5 Å. Only the contacts in this area will be analyzed, because the contacts inside the ellipsoid correspond to interactions with the phenyl group, while the contacts outside the ellipsoid mainly correspond to the interactions of water molecule with the protein backbone. The density analysis also shows that the water molecule has a tendency to be positioned outside of the ring, close to mean plane of the ring. In this area water molecule and phenyl ring form the CH/O and the parallel alignment interactions. The statistical analysis reveals that water molecule form relatively small number of the strongest OH/ π interactions (around 2%). The area corrected density distribution indicate that water oxygen have slightly pronounced preference to positions at or near the centre of phenyl ring, in the area where water molecule forms the strongest interactions with aromatic ring, and high preference for positions outside of the ring, in the area of the CH/O and parallel interactions. The less strong water/aromatic interactions are compensated by the additional stabilization due to simultaneous interactions in supramolecular structures in crystals.

Keywords: water/aromatic interactions; crystal structures; density analysis, statistical analysis; area correction.

References

[6] **G. Janjić, S. Malkov, M. Živković, S. Zarić**, What are preferred water/aromatic interactions in proteins and crystal structures of small molecules? *Physical Chemistry Chemical Physics*, DOI: 10.1039/C4CP00929K.

Хелена Грубор, Универзитет у Београду, Хемијски факултет
Душан Ж. Вељковић, Универзитет у Београду, Хемијски факултет
Саша Н. Малков, Универзитет у Београду, Математички факултет
Снежана Д. Зарић, Универзитет у Београду, Хемијски факултет; Department of
Chemistry, Texas A&M University at Qatar

**„Израчунавање тежње аминокиселина ка одређеном типу секундарне структуре
применом различитих статистичких метода“**

Апстракт. Тежња аминокиселина ка одређеној конформацији је од великог значаја за предвиђање секундарних и терцијарних структура протеина. Данас се зна да различите аминокиселине имају склоност да се нађу у једној од конформација протеина (хеликс, плочица, завојница). Примењен је велики број статистичких метода да би се израчунале наведене склоности аминокиселина [1,2].

У нашем ранијем раду проучавали смо преферентност аминокиселина ка одређеном типу и секундарне структуре коришћењем новог статистичког метода [3]. Јасна склоност аминокиселина да се јављају у одређеној секундарној структури омогућава њихово класификовање у једну од четири групе. Аминокиселине из исте групе имају сличне структурне карактеристике у погледу $C\beta$ и $C\gamma$ атома који указују на склоност ка одређеној секундарној структури.

У овом раду смо упоредили различите статистичке методе за рачунање склоности аминокиселина ка одговарајућој конформацији са статистичком методом коју смо понудили у нашем ранијем раду. Поређење је извршено на основу вредности корелационих коефицијената ($\rho(s,p)$). Као извор података користили смо структуре из Протеинске банке података (PDB). Приписивање секундарних структура извршено је помоћу програма DSSP.

Кључне речи: аминокиселине; преферентност; секундарне структуре.

Библиографија

- [7] P. Y. Chou, G. D. Fasman. Conformational parameters for amino acids in helical, beta-sheet, and random coil regions calculated from proteins, *Biochemistry*, 1974, 13 (2), 211–222.
[8] M. Levitt. Conformational preferences of amino acids in globular proteins, *Biochemistry*, 1978, 17, 4277–4285.
[3] S. N. Malkov, M. V. Živković, M. V. Beljanski, M. B. Hall, S. D. Zarić, A reexamination of the propensities of amino acids towards a particular secondary structure: classification of amino acids based on their chemical structure, *J Mol Model*, 2008, 14, 769–775.

Olga Jakšić, Institute of Chemistry, Technology and Metallurgy, University of Belgrade
„On Chemical Master Equation and Stochastic Simulations for Stochastic Analysis of
Second Order Reactions“

Abstract. Stochastic processes are omnipresent in natural phenomena, but in social phenomena as well. There is a vast literature referring to mathematical methods that have been developed for treating stochastic processes, but when it comes to practical implementations of these methods, the proper interpretation of results becomes an issue, especially if the results obtained by different methods do not correspond to each other or to the results obtained by deterministic approach treatment of the same phenomena.

Here we investigate second order chemical reactions (which may be mathematically analogous to many other stochastic phenomena) in several different ways and give the comparative analysis of the obtained results.

We present the application of various mathematical methods for creation of deterministic model [1], [2], analytical analysis of fluctuation kinetics [3]–[5], stochastic simulation algorithms for visual and numerical analysis of fluctuation kinetics [6], [7] analytical analysis of fluctuation dynamics in equilibrium [8].

We give the comparative analysis of the obtained results with the special concern on the interpretation of the difference between the deterministic solution and the the expression for mean value of the reactant concentrations.

Keywords: chemical master equation, stochastic simulation algorithm, stochastic processes.

References

- [1] **L. Kolar-Anić, Ž. Čupić, V. Vukojević, and S. Anić.** The dynamics of nonlinear processes. *Belgrade: Faculty of Physical Chemistry*, 2011.
- [2] **O. M. Jakšić, D. V. Randjelović, Z. S. Jakšić, Ž. D. Čupić, and L. Z. Kolar-Anić.** Plasmonic sensors in multi-analyte environment: Rate constants and transient analysis. *Chem. Eng. Res. Des.*, 2014, 92, 91–101.
- [3] **D. A. McQuarrie.** Stochastic Approach to Chemical Kinetics. *J. Appl. Probab.*, 1967, 4, 3, pp. 413–478.
- [4] **O. M. Jakšić, Z. S. Jakšić, Ž. D. Čupić, D. V. Randjelović, and L. Z. Kolar-Anić.** Fluctuations in transient response of adsorption-based plasmonic sensors. *Sensors Actuators B Chem.*, 2014, 190, 419–428.
- [5] **N. Bailey.** The Elements of Stochastic Processes with Applications to Natural Sciences. *John Wiley & Sons: New York*, 1964.
- [6] **D. T. Gillespie.** Stochastic simulation of chemical kinetics. *Annu. Rev. Phys. Chem.*, 2007, 58, 35–55.
- [7] **D. T. Gillespie, A. Hellander, and L. R. Petzold.** Perspective: Stochastic algorithms for chemical kinetics. *J. Chem. Phys.*, 2013, 138, 17, 170901.
- [8] **Z. Djurić, I. Jokić, M. Frantlović, and O. Jakšić.** Fluctuations of the number of particles and mass adsorbed on the sensor surface surrounded by a mixture of an arbitrary number of gases. *Sens. Actuators, B*, 2007, 127, 2, 625–631.

Dušan P. Malenov, Innovation Center of the Faculty of Chemistry, University of Belgrade
Ivana S. Antonijević, Faculty of Chemistry, University of Belgrade
Snežana D. Zarić, Faculty of Chemistry, University of Belgrade; Department of Chemistry,
Texas A&M University at Qatar

„Assessment of performance of density functionals by using statistical methods – the case of tetrathiafulvalene stacking“

Abstract. Tetrathiafulvalene is planar non-aromatic organosulfur compound and one of the most important constituents of molecular metals – organic materials with very high conductivity. Stacking interactions of tetrathiafulvalene are among the most important features responsible for physical properties of these materials [1]. In order to study stacking interactions between two tetrathiafulvalene molecules, benchmark study was performed to find dispersion corrected density functionals which are able to reproduce interaction energies obtained at CCSD(T)/CBS level, the golden standard of quantum chemistry [2]. Statistical parameters, namely root mean square error (RMSE), mean unsigned error (MUE), average (signed) error (AVG), maximum (MAX) and minimum (MIN) relative error, signed error standard deviation (SESD), and unsigned error standard deviation (UESD), were used in benchmark study to estimate the agreement of CCSD(T)/CBS and individual D3 density functionals, with def2-TZVP and 6-311++G** basis sets. Using statistical parameters, it was determined that B2PLYP-D3 with 6-311++G** basis set gives excellent agreement with CCSD(T)/CBS values of interaction energies. Additionally, M06L-D3 with the same basis set systematically underestimates interaction energies, but with excellent consistency. Finally, interaction energy curves calculated at both levels of theory are of almost identical shapes, confirming that energies of stacking interactions between two tetrathiafulvalene molecules can be calculated at both levels of theory.

Keywords: benchmark; statistics; CCSD(T)/CBS; DFT; tetrathiafulvalene

References

- [9] **L. E. Smart, E. A. Moore**, *Solid State Chemistry: An Introduction*, CRC Press, Boca Raton, 2012.
[2] **M. O. Sinnokrot, C. D. Sherrill**, *J. Phys. Chem. A*, 2004, 108, 10200-10207.

Ivan Dimitrijević, Faculty of Mathematics, University of Belgrade
„On nonlocal modified gravity with cosmological solutions“

Abstract. In this talk we consider nonlocal gravity action without matter in the form

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + R^p \mathcal{F}(\square) R \right),$$

where $\mathcal{F}(\square)$ is an analytic function of the d'Alembertian \square and $p = +1, -1$. We present a few $a(t)$ nonsingular bounce cosmological solutions for the above two actions using FLRW metric. see references [1-5].

This is joint work with B. Dragovich, J. Grujic and Z. Rakic.

Keywords: modified gravity; nonlocal gravity; cosmological solutions.

References

- [1] T. Biswas, T. Koivisto, A. Mazumdar Towards a resolution of the cosmological singularity in non-local higher derivative theories of gravity JCAP, 2010, 1011.
- [2] A. S. Koshelev, S. Yu. Vernov On bouncing solutions in non-local gravity. Phys. Part. Nuclei, 2012, 08, 666-668, [arXiv:1202.1289v1 [hep-th]].
- [3] T. Biswas, A. S. Koshelev, A. Mazumdar, S. Yu. Vernov Stable bounce and inflation in non-local higher derivative cosmology. JCAP, 2012, 08, [arXiv:1206.6374v2 [astro-ph.CO]].
- [4] I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic, Z. Rakic New cosmological solutions in nonlocal modified gravity Operation Research, 2013, 5-6, 550-559, [arXiv:1302.2794 [gr-qc]].
- [5] I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic, Z. Rakic A new model of nonlocal modified gravity Publications de l'Institut Mathematique, 2013, 94, 187 - 196.

Mirko Stojadinović, Faculty of Mathematics, University of Belgrade

„Solving and Generating Large Sudoku Puzzles by Reduction to SAT“

Abstract. Many different computer-based approaches for solving real-world problems (e.g., planning, scheduling, timetabling) exist. If someone improves the efficiency of these approaches in solving instances of puzzles and hard combinatorial problems, then this usually implies faster solving of real-world problems. Therefore, there is a great interest in generating such instances. In the most of the papers studying Sudoku, puzzles of size 9×9 are generated and solving methods are tested on these small-sized puzzles. These puzzles may be challenging for humans, but are solved by many different approaches on contemporary computers in less than 0.1 seconds. One way of solving Sudoku is by reducing to Propositional Satisfiability problem (SAT) [1, 2]. We show that a SAT encoding of Sudoku significantly outperforms two existing approaches when solving puzzles of larger size than 9×9 . We add preprocessing rules to the SAT encoding and improve efficiency of the existing algorithm [3] for generating large Sudoku puzzles. Preprocessing rules speed up solving process only slightly, but they significantly speed up the generating process. The property of generated puzzles is uniqueness of solution and by removing any of the pre-filled numbers these property is lost. Generated puzzles are challenging for the contemporary computers, and new algorithms that use only reasoning for solving these puzzles need to be developed.

Keywords: Sudoku, solve, generate, SAT

References

- [1] W. Klieber, G. Kwon. Efficient cnf encoding for selecting 1 from n objects. In Proc. International Workshop on Constraints in Formal Verification, 2007.
- [2] I. Lynce, J. Ouaknine. Sudoku as a sat problem. In ISAIM, 2006.
- [3] A. Chiu, E. Nasiri, R. Rashid. Parallelization of sudoku. Technical report, University of Toronto, 2012.

Стефан Мишковић, Универзитет у Београду, Математички факултет

„Проблем оптималног распоређивања корисника с приоритетима“

Апстракт: У предложеном проблему је дат скуп корисника и скуп ресурса, као и цене додељивања сваког корисника сваком ресурсу. За сваки пар корисник-ресурс дати су одговарајући приоритети придруживања, при чему се у оптималном случају корисник придружује оном успостављеном ресурсу за којег је вредност приоритета најмања. Број успостављених ресурса мора бити једнак унапред фиксираном броју, а сваког корисника је потребно доделити тачно једном ресурсу тако да је укупна цена придруживања (корисника који су му додељени) неком ресурсу најмања могућа. За дати модел прикатана је основна и робусна формулација, при којој варирају цене придруживања. За решавање проблема предложен је меметички алгоритам, који представља хибридизацију генетског алгоритма и алгоритма заснованог на локалном претраживању. За инстанце које је било могуће решити CPLEX решавачем у разумном временском року, приказано је одговарајуће поређење резултата, а за остале, приказани су резултати меметичког алгоритма.

Radoslav Rajković, Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

Đorđe Stakić, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

„Primena matematičkog modela: višekriterijumska optimizacija u kontejnerskom transportu“

Apstrakt. Kontejnerska revolucija rezultirala je velikim promenama u međunarodnoj trgovini i jedan je od najvažnijih doprinosa globalizaciji svetske ekonomije. U toku poslednjih decenija, postala je najbrže rastući segment tržišta čineći preko 16 % globalne pomorske trgovine po zapremini u 2012. dostigavši vrednost od 155 miliona TEU i 1,58 milijardi tona. [1]

U ovom radu je analizirana intermodalna transportna mreža sa posebnim osvrtom na uvoz kontejnera sa Dalekog Istoka ka Srbiji. Intermodalnu mrežu čine okeanski deo na kome su kontejneri transportovani posredstvom najvećih svetskih brodara i kopneni deo na kome su kontejneri transportovani koristeći različite vidove prevoza. [2]

Osnovni cilj ovog istraživanja je traženje najboljeg rešenja iz niza dopustivih rešenja u smislu više usvojenih kriterijuma: minimalno tranzitno vreme, najniži transportni troškovi i minimalna emisija gasova prilikom prevoza kontejnera od Šangaja do Beograda. U studiji smo razvili multi-objektni optimizacioni model, programiran u MATLAB-u, prikazujući najoptimalniji put za uvoz kontejnera u Srbiju. Razvijeni matematički model nam daje mogućnost posmatranja čitavog opsega rešenja, kao i mogućnost njihovog rangiranja, čijim se odabirom vrši jednostavna selekcija grupe najoptimalnijih rešenja, posmatrajući istovremeno minimizaciju tranzitnog vremena, transportnih troškova i emisije gasova. [3]

Model odgovara različitim zahtevima kupaca obzirom da neki zahtevaju niže troškove transporta, dok su drugi orijentisani na minimizaciju i brže vreme isporuke, uzimajući u obzir sve važnije pitanje održivosti životne sredine, minimizacijom emisije gasova. Matematički model veliku primenu nalazi u praksi, čijom jednostavnom primenom transportne kompanije mogu pratiti konstantne promene na tržištu sa posebnim osvrtom na održivost ekosistema.

Ključne reči: kontejnerski transport; višekriterijumska optimizacija; matematički model.

Bibliografija

- [1] Review of Maritime Transport: UNCTAD/RMT/2013, United National Publication Sales no. E.13.II.D.9, ISBN 978-92-1-112872-7, e-ISBN 978-92-1-054195-4, ISSN 0566-7682.
- [2] **R. Rajkovic, N. Zrnic, Đ. Stakic, B. Mahnič.** The Costs of Container Transport Flow Between Far East and Serbia Using Different Liner Shipping Services, Proceeding of the 11th International Conference on Logistics and Sustainable Transport, 2014, Celje, Slovenia.
- [3] **R. Rajkovic, N. Zrnic, Đ. Stakic.** Application of Mathematical Model for Container Transport Flow of Goods: from Far East to Serbia, Proceeding of the International Conference on Industrial Logistics, 2014, Brac, Croatia, 159 - 166.

Dragan Vidaković, Gimnazija Ivanjica

Duško Parezanović, Gimnazija Ivanjica

„Zaštita integriteta podataka u praksi“

Apstrakt. Integritet i tajnost podataka se najbolje štite sopstvenim alatima. Da bi alati bili kvalitetniji potrebno je pospešiti interes za kriptografiju. Najbolji put za to je kodiranje kriptografskih algoritama. To je razlog što smo odlučili, u ovom radu, da prikazemo digitalni potpis poruke.

RSA i Elliptic Curve Cryptography-ECC su vodeći kriptosistemi javnog ključa. U osnovi RSA je problem faktorisanja velikog celog broja koji je proizvod dva prosta broja. Kako postoji subekspencijalan algoritam koji ga rešava potrebno je, za veću sigurnost, uzeti veći broj. To zahteva veću upotrebu svih resursa (energija, memorija...) što ne odgovara modernim telekomunikacijama (bežičnim (senzorskim) mrežama...).

ECC se zasniva na teško rešivom problem nalaženja diskretnog logaritma na eliptičnoj krivoj. Pošto ne postoji subekspencijalan algoritam koji ga rešava a zahteva i značajno manje resursa National Security Agency-NSA [1] je preporučila zamenu RSA sa ECC.

Pored efektivnog potpisivanja poruke, upoređićemo i vremena potrebna za postizanje istog nivoa sigurnosti. Ukazaćemo na mogućnost skraćanja vremena generisanje velikog prostog broja što je od značaja za oba kriptosistema. Pošto se potpisuje hash vrednost poruke priložićemo izvorni kod za SHA-1 što može biti inspirativno za one koji žele da počnu da se bave kriptografijom.

Ključne reči: Kriptosistemi javnog ključa; Digitalni potpis; Poređenje

Bibliografija

[10] **National Security Agency – NSA.** The Case for Elliptic Curve Cryptography, (pristup 22.08.2014.g.) dostupno na http://www.nsa.gov/business/programs/elliptic_curve.shtml

Đorđe Baralić, Matematički institut SANU, Beograd

„Cinderella - istraživanje, popularizacija i vizuelizacija matematike“

Apstrakt. Cinderella je matematički softver za dinamičku geometriju koji omogućava simuliranje eksperimenata u fizici i astronomiji, radu sa algoritmima i grafovima, kao i brojne druge matematičke alate. Prevedljivo ga karakteriše jednostavnost za korišćenje, a u kombinaciji sa naprednijim matematičkim idejama moguće je realizovati veoma interesantne eksperimente, animacije i na jedan kreativan način koristiti za istraživanje i vizuelizaciju u matematici kao i njenu širu popularizaciju

Ključne reči: Cinderella; matematika; vizuelizacija; animacija; popularizacija.

Bibliografija

[1] Đ. Baralić, V. Vranić. Cinderella - način da vidimo apstraktnu matematiku. In: D. Jokanović and M. Pikula (eds.), *Proceedings of Third Mathematical Conference of the Republic of Srpska, Trebinje*, 2014, Vol. 2, pp. 69–78.

[2] J. Richter-Gebert, U. Kortenkamp. The Cinderella. 2 Manual Working with The Interactive Geometry Software. *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg*, 2012.

Manuela Muzika Dizdarević, Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo
Rade T. Živaljević, Matematički institut SANU, Beograd

„Simetrična popločavanja tribonima i Gröbnerove baze“

Apstrakt. U ovom radu je primjenjena teorija Gröbnerovih baza na rješavanje problema signed popločavanja ograničenih regiona u heksagonalnoj rešetki u ravni koja su invarijantna u odnosu na djelovanje grupe rotacija za ugao od 120° . Unaprijeđen je poznati rezultat Conwaya i Lagarias o signed popločavanju tribonima trougaonog regiona T_N u kojem se tvrdi da je popločavanje moguće ako i samo ako je $N = 9r$ ili je $N = 9r + 8$ pri čemu je r nenegativan cio broj. Ovdje pod tribonom smatramo tri vezane susjedne ćelije u heksagonalnoj rešetki. Problem popločavanja regiona u ravni sveli smo na algebarski problem pripadnosti polinoma odgovarajućem polinomijalnom idealu. Pri rješavanju problema pripadnosti idealu

koristili smo rezultate Gröbnerove teorije prilagođene za prstene polinoma nad domenima jedinstvene faktorizacije, što je u konkretnom slučaju prsten cijelih brojeva \mathbb{Z} . Tako smo pokazali da je signed popločavanje tribonima trougaonih regiona $T_N = T_{3k-1}$ i $T_N = T_{3k}$ u heksagonalnoj rešetki, simetrično s obzirom na rotaciju za ugao od 120° , moguće ako i samo ako je $N = 27r - 1$ ili je $N = 27r$ za neki cio broj $r \geq 0$.

Ključne reči: Popločavanje; Gröbnerova baza; tribon.

Manuela Muzika Dizdarević, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Sarajevo
Marinko Timotijević, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science,
University of Kragujevac

Rade Živaljević, Mathematical Institute SASA, Belgrade

„Signed polyomino tilings by n -in-line polyominoes and Gröbner bases“

Abstract. Conway and Lagarias observed that a triangular region $T(m)$ in a hexagonal lattice admits a *signed tiling* by three-in-line polyominoes (tribones) if and only if $m \in \{9d - 1, 9d \mid d \in \mathbb{N}\}$. We apply the theory of Gröbner bases over integers to show that $T(m)$ admits a signed tiling by n -in-line polyominoes (n -bones) if and only if $m \in \{dn^2 - 1, dn^2 \mid d \in \mathbb{N}\}$.

Keywords: polyominoes, polynominals, ideal, Gröbner bases, remainders.

References

- [1] A. Barvinok. Integer Points in Polyhedra. *European Mathematical Society*, 2008.
- [2] M. Beck, S. Robins. Computing the Continuous Discretely. *Springer*, 2007.
- [3] T. Becker, V. Weispfenning. Gröbner Bases. *Springer-Verlag, New York*, 1993.
- [4] O. Bodini, B. Nouvel. Z-Tilings of Polyominoes and Standard Basis, In Combinatorial Image Analysis. *Springer*, 2004, 137-150.
- [5] J.H. Conway, J.C Lagarias. Tiling with Polyominoes and Combinatorial Group Theory. *Journal of Combinatorial Theory. Series A* 53, 1990, 183-208.
- [6] D. Cox, J. Little, D. O’Shea. Ideals, Varieties and Algorithms. *Third Edition, Springer-Verlag, New York*, 2007.
- [7] D. Cox, J. Little, D. O’Shea. Using Algebraic Geometry. *Second Edition, Springer-Verlag, New York*, 2005.
- [8] D. Fuchs, S. Tabachnikov. Mathematical Omnibus. *Thirty Lectures on Classic Mathematics*, A.M.S., 2007.
- [9] S.W. Golomb. Polyominoes: Puyyles, Patterns, Problems and Packings. *Princeton Univ. Press*, 1996.
- [10] M. Muzika Dizdarević, R.T. Živaljević. Symmetric polyomino tilings, tribones, ideals and Gröbner bases. *arXiv:1407.2015* [math.CO].
- [11] D. Lichtblau. Revisiting strong Gröbner bases over Euclidean domains. *Wolfram Library Archive* <http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/7522>.
- [12] M. Reid. Tile Homotopy Groups. *L’Enseignement Mathematique* 49, 2003, no.1-2, 123-155.
- [13] B. Sturmfels. Algorithms in Invariant Theory. (*2en ed.*) *Springer*, 2008.
- [14] W. Thurston. Conway’s Tilings Groups. *Amer. Math. Monthly* 97, 1990, 757-773.

Branko Malešević, Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

Luka Milinković, Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

„Verižni razlomci i primene“

Apstrakt. U radu će se prikazati neki elementi teorije aproksimacija realnih brojeva razlomcima. Posebno će se razmatrati racionalne aproksimacije realnih brojeva u obliku verižnih i međuverižnih razlomaka. Na osnovu tih reprezentacija izložiće se primene aproksimacija verižnim i međuverižnim razlomcima na neke poznate i na neke nove primere u akustici, mehanici, astronomiji i kriptografiji.

Ključne reči: Realni brojevi, racionalne aproksimacije, verižni i međuverižni razlomci.

Katica R. (Stevanović) Hedrih, Matematički institut SANU, Beograd; Univerzitet u Nišu, Mašinski fakultet

„Aproksimativno fenomenološko preslikavanje“

Apstrakt: Uvodni deo prikazuje najznačajnije delo Mihaila Petrovića, kompleksnu teoriju: “Elementi matematičke fenomenologije”, a sa posebnim osvrtom na veći broj primera različitih analogija među modelima ili dinamikama sistema u različitim naučnim oblastima. Te analogije su: kvalitativne analogije, matematičke analogije, kao i dodatno strukturne analogije, a na primerima iz teorije elastičnosti, dinamike krutih tela i diskretnih sistema, oscilacija mehaničkih i električnih sistema frakcionog reda, oscilacije hibridnih sistema. Daju se teoreme o promeni ukupne energije sistema frakcionog reda i veze sa generalisanom funkcijom disipacije energije frakcionog reda.

Glavni deo izlaganja je usmeren na teoriju i primene aproksimativnog fenomenološkog preslikavanja u lokalnoj okolini singularnih ili stacionarnih stanja nelinearnih dinamika sistema sa većim brojem istih.

Ukazano je na linearno i nelinearno aproksimativno preslikavanje fenomena nelinear dinamike i metodologiju ispitivanja dejstava nelinearnih fenomena lokalnim aproksimativnim fenomenološkim preslikavanjem svojstava singularne dinamike.

Kroz navedene primere, ukazuje se na fundamentalni značaj dela Mihaila Petrovića, kompleksnu teoriju: “**Elementi matematičke fenomenologije**” za integraciju naučnih saznanja u različitim oblastima nauka, samerljiv sa teorijom stabilnosti Ljapunova. Ističe se značaj ove teorije kao moguće baze za stvaranje “**minimalnih**” **zajedničkih osnovnih programa univerzitetskih studija** prirodno-matematičkih i tehničkih nauka, na kojima bi se gradili viši stepeni usmerenih studija prirodnih nauka ili tehničkih nauka.

Na kraju bi se prikazao i sadržaj **Specijalnog broja Elsevier-ovog časopisa Non-Linear Mechanics**, koji je u fazi pripreme za štampu, a posvećen ovoj teoriji Mihaila Petrovića. Predavač je pozvani gost urednik tog specijalnog broja časopisa.

Даниел А. Романо, Педагошки факултет, Универзитет у Источном Сарајеву

„Коначно квази-регуларне релације“

Апстракт. Квази-регуларне и дуално квази-регуларне релације овај аутор је увео и анализиране су 2013. године. У овом тексту уведен и анализиран је концепт 'коначно дуалних квази-регуларних релација'.

II SEKCIJA: MATEMATIKA I INFORMATIKA U OBRAZOVANJU

Miodrag Mateljević, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

„Fragmenti razmatranja – površina, zapremina, dužina, geometrijske nejednakosti“

Apstrakt: U geometriji se definiše površina figura kao što su trougao, pravougaonik, mnogougao. Ako imamo neku figuru koja se može rastaviti na konačan broj trouglova (takve figure nazivaju se elementarne), tada je njena površina jednaka zbiru površina trouglova (aditivnost površine). Ali, šta je površina figure ordinatnog skupa funkcije $y = x^2$ nad $[0,1]$ (površina parabole) ili uopšte šta je površina skupa $Ord(f)$ pozitivne funkcije $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$? Kako ordinatni skup nije elementaran i ne može se rastaviti na konačan broj trouglova, prirodno je postaviti pitanje: Kako za ovakve figure definisati i izračunati površinu. Prvo razmatramo

Arhimedovu ideju za izračunavanje površine parabole. Dalji razvoj Arhimedove ideje omogućava da izračunamo površine kupe, piramide i torusa. Takođe razmatramo pojam integrala i primitivne funkcije kao i nejednakosti vezane za dužinu i površinu figura (izoperimetrijski problem).

Navedimo samo jedan specijalni izoperimetrijski problem (Geringov problem). Ovaj problem rešio sam 1975: Ako su γ i γ_0 ulančane krive u \mathbb{R}^3 na rastojanju l , dokazati da je dužina svake od ovih krivih najmanje 2π .

Rešenje ovog problema ima veze sa logom IMU (Internacionalne matematičke unije) (videti takođe Borromean prsten).

Ksenija Simić-Muller, Pacific Lutheran University Tacoma, Washington, Sjedinjene Američke Države

„Učenje matematike kroz vizuelne i fizičke modele: nekoliko primera“

Apstrakt. Znanje matematike pre svega podrazumeva konceptualno razumevanje materijala. Ako učenici ne razumeju značenje ideja koje uče, biće im otežano i korišćenje procedura koje iz tih ideja proizilaze, a i dalje napredovanje u matematici. Da bi stekli konceptualno razumevanje, učenicima treba pružiti priliku da sami konstruišu matematičko znanje pre nego što nauče procedure. Pristup koji je često zastupljen u Sjedinjenim Američkim Državama je korišćenje modela, bilo vizuelnih ili fizičkih; oni se lako mogu crtati ili praviti, ali se takođe mogu koristiti i već postojeći kompjuterski programi. Jedan od resursa dostupnih korisnicima bilo gde u svetu je web stranica pod imenom National Library of Virtual Manipulatives, koja sadrži modele i prpratne aktivnosti za sve nivoe i oblasti školske matematike. U ovom radu će se predstaviti mogućnosti koje ovaj resurs pruža kroz primere primerene osnovnoj i srednjoj školi, od sabiranja decimalnih brojeva, do rešavanja linearnih jednačina i rastavljanja polinoma na činioce. U svim primerima će se posebna pažnja pokloniti konceptualnom razumevanju koje vizuelni i fizički modeli omogućavaju.

Ključne reči: matematičko obrazovanje; konceptualno razumevanje; vizuelni modeli; fizički modeli.

Небојша Васиљевић, Министарство трговине, туризма и телекомуникација
„Улога програмирања у општем образовању“

Апстракт: У све више земаља рачунарство, укључујући елементе програмирања, постаје обавезан део општег образовања. Претходни талас укључивања програмирања у образовне системе многих земаља десио се крајем седамдесетих и почетком осамдесетих година, након појаве кућних рачунара. На почетку ћемо поставити питање зашто је први талас био неуспешан и да ли уз другачији приступ ипак има смисла програмирање сврстати у општеобразовни садржај. Затим ћемо, кроз низ практичних примера, покушати да изведемо закључак да постоји јасан општеобразовни слој у знању програмирања и одговарајући методолошки приступ учењу програмирања који није оријентисан преваходно према потенцијалним будућим програмерима.

Nives Baranović, Filozofski fakultet u Splitu

„Potencijal jednog zadatka izveden na temelju Talesovog teorema o proporcionalnim dužinama“

Апстракт. Talesov teorem o proporcionalnim dužinama u nastavi matematike uvodi se pred kraj osnovne škole, najčešće tako da se do formalnog zapisa dolazi intuitivno na temelju mjerenja i uspostavljanja odgovarajućih proporcija, bez strogog dokazivanja, a zatim se primjena teorema uvježbava na odgovarajućim, ali vrlo sličnim zadacima. Nakon toga, ovisno o vrsti srednje škole, Talesov teorem i njegov obrat uvode se (u 1. razredu) formalno, ali na različite načine te se formalno i dokazuje.

Međutim, Talesov teorem iako naočigled jasan, učenicima ostaje nejasan te iako važan, vrlo brzo ga zasjene teoremi o sličnosti trokuta, koji postaju dominantno sredstvo u rješavanju brojnih zadataka. Događa se da pojedini učenici i Talesov teorem dokazuju primjenom sličnosti te se brzo nađu u začaranom krugu razmišljanja Talesovog teorema i teorema o sličnosti trokuta.

Pri rješavanju brojnih zadataka često se naglasak stavlja na određivanje neke veličine iz postavljene proporcije, a zatim se nižu slični zadaci u svrhu uvježbavanja istog. Umjesto da se, kada je jedan zadatak već riješen, sagledavaju i druge mogućnosti istog zadatka, kao i zadavanje istog zadatka na općenitijoj razini kako bi crpili što više njegovih potencijala, te različita znanja povezivali u funkcionalnu cjelinu.

Cilj ovog rada je ukazati na određene nejasnoće koje se javljaju pri obradi Taleovog teorema te usmjeriti pozornost na mogućnosti višestrukog iscrpljivanja jednog zadatka.

Кључне речи: Talesov teorem; obrat teorema; cirkularno razmišljanje; potencijal zadatka.

Драгана Станојевић, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања,
Београд

„Иницијални тестови знања за ученике у основној школи“

Апстракт. У раду су представљени иницијални тестови знања за ученике IV, VI и VIII разреда основне школе. Описана је методологија припреме тестова, упутстава за прегледање и упутстава за реализацију тестирања. Приказани су резултати пробног тестирања, које је реализовано у мају месецу 2014. године на пригодном узорку и резултати анкете коју су ученици попуњавали у вези са ставовима о тесту и математици уопште. Тестирање је спроведено у свим основним школама у Републици у септембру 2014. године.

Кључне речи: иницијални тестови; ученичка постигнућа; методологија тестирања

Библиографија

[11] R. C. Anderson, How to Construct Achievement Tests to Assess Comprehension, *Review of Educational Research*, 1972, 42, 145-170.

[12] Б. Ђорђевић. *Планирање израде теста и знања*. Београд: Савез друштава психолога Србије, 1986.

[13] N. K. Ross. *Item writing for tests and examinations*. Paris: UNESCO, 2005.

Milena Marić, Deveta beogradska gimnazija „Mihailo Petrović Alas“

„Primena automatskih dokazivača teorema u nastavi geometrije u srednjoj školi“

Апстракт. У оквиру овог рада биће представљена паралелна анализа аутоматских доказивача теорема интегрисаних у системима за динамичку геометрију Geogebra 5 и система GCLC. Посебан осврт биће на томе како се доказивачи могу применити у настави геометрије у средњој школи. Излагање се базира на анализи примене аутоматских доказивача на решавање задатака из

збирке за први разред средње школе. Један број задатака се директно може решити применом аутоматских доказивача, на поједине задатке се делимично могу применити доказивачи, док се на неке од задатака из збирке доказивачи уопште не могу применити. У оквиру рада смо анализирали разлоге због којих се појавило раслојаванје задатака у поменуте три групе. Са обзиром на то да

аутоматски доказивачи могу да решавају само проблеме конструктивног типа, приликом њихове примене на решавање геометријских проблема значајну улогу игра реформулација задатка у облику конструкције. Један од занимљивих резултата ове анализе јесте да се аутоматски доказивачи изузетно једноставно могу применити на задатке који се свode на доказивање колонеарности

тачака, подударности дужи, док се задаци који зависе од распореда тачака не могу решавати на овај начин, потешкоће се јављају и код провере једнакости углова јер се уместо једнакости користи подударност углова.

Кључне речи: Аутоматски доказивачи теорема, настава геометрије у средњој школи, GeoGebra, GCLC.

Библиографија

[1] Z. Kovács. The portfolio prover in GeoGebra 5. Proceedings of the 10th International Workshop on Automated Deduction in Geometry (ADG 2014) University of Coimbra, Portuga, 2014.

[2] I. Petrović, Z. Kovács, S. Weitzhofer, M. Hohenwarter, P. Janičić. Extending GeoGebra with Automated Theorem Proving by using OpenGeoProver. CADGME 2012 conference in Novi Sad, Serbia, 2012.

[3] M. Marić, P. Janičić. Using GCLC System and its Theorem Provers for Teaching Geometry. CADGME 2012 conference in Novi Sad, Serbia, 2012.

[4] Ž. Ivanović, S. Ognjanović. МАТЕМАТИКА - Збирка задатака и тестова за I разред гимназија и техничких школа. Krug, Beograd, 2008.

Igor Banjac, Beogradska poslovna škola

„Pojam elipse u srednjoškolskoj nastavi matematike“

Apstrakt. Iako pojam elipse važi za standardan u srednjoškolskom obrazovanju gimnazija u Srbiji, iskustvo govori da to nije slučaj, što je došlo do izražaja na ovogodišnjem Državnom takmičenju iz matematike. Veliki broj učenika pojam elipse ne vidi kao geometrijski pojam, a prilikom pokušaja geometrijskog razmišljanja često se na osnovu toga da li tvđenje važi za krug zaključuje analogno i za elipsu. Ovaj problem nije vezan samo za učenike gimnazija, pošto se zadaci koji sadrže pojam elipse često javljaju i na prijemnom ispitu za fakultete u Srbiji. Međutim, i ti zadaci se obično svode na poznavanje i primenu jedne formule, te je sa stanovišta učenika često i poželjno da elipsu ne posmatraju kao geometrijski objekat.

Cilj rada je da ukaže na ovaj problem i predstavi tvđenja koja je autor koristio da podstakne učenike da u ovoj oblasti razmišljaju i geometrijski i algebarski, kao i da im ukaže na sličnosti i razlike kruga i elipse.

Ključne reči: elipsa, krug, celobrojna rešetka

Bibliografija

[14] **I. Niven, H. S. Zuckerman.** Lattice Point Coverings by Plane Figures. *American Mathematical Monthly*, 1967, Vol. 74 No. 4, pp. 353-362.

[15] **R. Honsberger.** *Mathematical Morsels*, The Mathematical Association of America, 1978.

[16] **J. Kečkić.** Matematika (sa zbirkom zadataka) za 3. razred srednje škole, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2010.

[4] Matematička takmičenja srednjoškolaca u Srbiji 2013/14, bilten, Društvo matematičara Srbije, 2014.

Петар Огривовић, Гимназија „Руђер Бошковић“, Београд

„Основни геометријски објекти против скупова тачака“

Апстракт. У раду је анализиран важећи наставни план предмета математика за пети разред основне школе у Републици Србији. Начињен је осврт на обим предвиђених садржаја, а посебно је сагледано увођење основних појмова из геометрије.

Током претходних деценија, у оквиру образовних реформи, начињене су измене у плану за пети разред, неки садржаји су уклоњени, а неки су претрпели мање измене. Тако је, на пример, тема „Скупови тачака“ преименована и сада се зове „Основни геометријски објекти“. Чини се да је ово урађено са намером да се избегне скуповна нотација у геометрији. Ипак, детаљном анализом уџбеника (које су одобрили Министарство просвете и Национални просветни савет) може се доћи и до другачијих закључака.

Циљ рада је да се наставницима математике у основним школама скрене пажња на недоследности у важећем наставном плану као и у уџбеницима за пети разред, и да се покрене дискусија на тему сагледавања геометријских објеката као скупова тачака.

Кључне речи: наставни планови, основни геометријски објекти, скупови тачака.

Петар Мелентијевић, Универзитет у Београду, Математички факултет
Милан Живановић, Висока школа струковних студија за образовање васпитача
Крушевац

„Трагом једног задатка о векторима“

Апстракт. Метода решавања проблема на више начина је једна од најпродуктивнијих метода учења математике. О њеном значају афирмативно се изјашњавао и један од најутицајнијих аутора из области наставе математике прошлог века Ђерђ Поја. Поред изузетног утицаја на развој мисаоних операција и математичког мишљења, ова метода је корисна и због откривања веза између различитих математичких области. Знања добијена на тај начин су трајнија и лакше се увиђа њихова применљивост у другим ситуацијама. У овом раду поменутој методи ћемо обогатити још једним конкретним примером из теорије вектора у средњошколској настави.

Кључне речи: вектори; правилан петоугао; решавање проблема на више начина.

Библиографија

[17] З. Лучић. *Огледи из историје античке геометрије*, Службени гласник, Београд, 2009.

[18] В. Стојановић. *Математископ 3*

[19] Ђ. Паунић. *Правилни полигони*, ДМС, Београд, 2006.

Ivana Đokić, Fifth School of Economics “Rakovica”, Belgrade

Milena Životić Ilić, Fifth School of Economics “Rakovica”, Belgrade

Lilian Wieser, University of Applied Arts, Vienna, Austria

„Coding and decoding crocheting patterns of Regular Polygons“

Abstract. Crocheting patterns have algorithms in it's core. During our exploration of algorithms for crocheting Regular Polygon Shapes we realized the importance of visualization prior to crocheting, since drawing or imagining is not enough for students. This paper is dedicated to coding of algorithms and animations of crocheting mathematical models. We made a general formula for crocheting perfect regular polygon with n sides. Using Processing programming language, we made an animation of making a perfect polygon, iteration by iteration. It serves as help for students for perceiving sort of tessellation, since one can see the polygons spreading through a plane in a special, concentric form. Since we strongly believe that each moment in the process of making is important, our aim is not automatization of a crocheting. In this paper we are also, at the end, emphasizing the importance of manual work and handcraft from different perspectives - cognitive, psychological and physiological.

Ivan Obradović, Ranka Stanković, Marija Radojičić, Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet

„OER obrazovni sadržaji kao spona između akademskog i preduzetničkog znanja“

Apstrakt. Cilj ovog rada je da ukaže na mogućnosti i prednosti koje nude slobodni obrazovni materijali (Open Educational Resources - OER), kao i da ponudi koncept sistema koji omogućava njihovo kreiranje, publikovanje i pretraživanje. Koncept se razvija u okviru Tempus projekta "Spajanje akademskog i preduzetničkog znanja kroz tehnološki potpomognuto učenje" (Blending Academic and Entrepreneurial Knowledge in Technology Enhanced Learning - BAEKTEL) u koji je uključeno šest univerziteta sa Zapadnog Balkana, tri iz Evropske unije i dve vodeće privredne kompanije. Jedan od osnovnih zadataka projekta je da se kreira međuuniverzitetska mreža repozitorijuma koji će sadržati različite vidove slobodno dostupnih obrazovnih sadržaja u elektronskoj formi, poput elektronskih kurseva, prezentacija, udžbenika, skripti, video obrazovnih sadržaja i drugih obrazovnih resursa. Biće predstavljena edX platforma koja omogućava kreiranje ovakvih sadržaja sa posebnim osvrtom na didaktičke zahteve koji se postavljaju pred kreatora obrazovnih materijala. Svi obrazovni sadržaji u okviru mreže biće opisani pomoću metapodataka, a njihovo pretraživanje biće omogućeno na portalu projekta. U radu će biti opisani i neki drugi značajni ciljevi projekta kao što su korišćenje pomenutog koncepta za uspostavljanje veze između teorije i prakse, osavremenjivanje i prilagođavanje nastavnih sadržaja, kao saradnju između visokoobrazovnih institucija i kompanija iz privrede.

Ključne reči: OER, elektronski obrazovni materijali, edX, elektronsko učenje.

Valentina Kostić, Gimnazija Pirot

Tanja Sekulić, Visoka tehnička škola strukovnih studija, Zrenjanin

„Učenje po Poljinim principima u GeoGebra okruženju“

Apstrakt. GeoGebra je softver koji se sve više primenjuje u nastavi i učenju matematike. Zbog dvostrukog prikaza matematičkih objekata, algebarskog i geometrijskog, GeoGebra je moćan kognitivno-vizuelni alat. Njeno vizuelno, dinamično i interaktivno okruženje pruža široki spektar mogućnosti u objašnjavanju, istraživanju i modeliranju matematičkih koncepata i njihovih međusobnih odnosa. Poljin model rešavanja problema i principi heurističke nastave su kompatibilni sa GeoGebrom. Primenom ovog edukativnog softvera, uz adekvatna didaktičko-metodička rešenja, nastavnik može da kreira okolinu za učenje koja podstiče i usmerava učenike da istražuju, otkrivaju i kroz sopstveno iskustvo dolaze do novih saznanja. U radu je prikazana mogućnost didaktičkog oblikovanja koncepta lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije u GeoGebri, po Poljinim principima. Dinamički radni listovi, koje prikazujemo, pripremljeni su tako da učenici mogu samostalno da istražuju i kreiraju svoj put kojim dolaze do novih saznanja.

Ključne reči: GeoGebra; vizuelizacija; Poljin model rešavanja problema; ekstremne vrednosti.

Јована Јездимировић, ГеоГебра Центар Београд

Славиша Радовић, ГеоГебра Центар Београд

Мирослав Марић, Универзитет у Београду, Математички факултет

„ГеоГебром кроз свет математике“

Апстракт. У овом раду ће бити приказани резултати истраживања о ставовима и професионалним компетенцијама наставника математике за коришћење ИКТ-а у наставном процесу. Спроведена су квалитативна и квантитативна испитивања везана за улогу наставника у традиционалној и е-настави као и употребу ИКТ-а и програмског пакета ГеоГебра на часовима математике. Истраживања имају за циљ да покажу на који начин и у којој мери су разлике у ставовима наставника о природи подучавања, уверења о ефикасној наставној пракси и коришћењу традиционалних и/или савремених ИКТ наставних средстава међусобно повезане, као и која врста професионалног усавршавања је наставницима математике најпотребнија.

Кључне речи: ГеоГебра; ИКТ; наставници математике.

Татјана Станковић, **Марјана Мартинов-Переги**, **Јелена Миљић**, Електротехничка школа “НиколаТесла”, Панчево

„Математика - да знам, да разумем и да удем“

Апстракт. Искуство нам указује на то да велики број ученика поседује процедурално (алгоритамско), али не и концептуално односно функционално знање математике. Да би ученици стекли и концептуална односно функционална знања неопходно је креирати наставна окружења која ће од ученика захтевати лично ангажовање и примену стеченог знања приликом решавања практичних проблема у различитим контекстима. У раду је описан атипичан методолошки приступ настави математике приликом обраде наставних јединица које се односе на примену метода решавања система линеарних једначина. Приказано је како су ученици првог разреда средње стручне школе (ЕТШ “Никола Тесла”, Панчево) решавајући практичне проблеме у оквиру наставе Математике, Основа електротехнике, Програмирања, Рачунарства и информатике, паралелно усвајали знања из ових дисциплина тј. овладали различитим методама решавања система линеарних једначина решавањем проблема из свакодневног живота, али и стручних проблема (применом Кирхофових правила), програмирањем у Free Pascal-у, радом у ГеоГебри и EWB-у (Electronic Workbench вер.5.12.), како су ова стечена знања применили у струци приликом анализе теоријских и практичних резултата добијених симулацијом експеримената. Овакав приступ настави превазилази традиционалне оквири базиране на корелацији међу предметима и додатно мотивише ученике да активно учествују у процесу стицања знања.

Кључне речи: активно учење, функционално знање, образовни софтвер, системи линеарних једначина

Зорица Маринковић, Земунска гимназија

„Мала збирка опасних задатака“

Апстракт. “Мала збирка опасних задатака” је резултат истраживања ученика првог разреда Земунске гимназије на тему присутности математике у свакодневном животу, а у оквиру наставне теме Пропорционалност.

Збирка се састоји од 13 одабраних задатака чији је садржај везан за тумачење упутстава на амбалажи, рачунање попушта на рекламираним производима, језичке недоумице и слично. Решења ових задатака су понекад смешна и зависе од тумачења текста, некада нису могућа али се у сваком од њих могу пронаћи и дискутовати на први поглед споредни параметри: какав је хемијски састав, зашто је неки текст писан ситним словима, да ли је могуће купити чарапе на комад, да ли је цена прихватљивија ако се завршава цифром 9, како платити тачан износ и слично.

Дошли смо до интересантних закључака, као на пример да је снижење и веће него што пише на реклами или да не постоје одговарајуће новчанице којима бисмо могли платити тачан износ. Овакав начин учења је изузетно користан јер кроз интердисциплинарност развија критичко мишљење и трансверзалне компетенције, материјал који се користи доступан је свим ученицима и може се употребити на различитим нивима, од инклузивног образовања до врло сложених истраживања.

Кључне речи: проценат, пропорција, трансверзалне компетенције

Библиографија

[20] **Stanislaw Schukajlow and André Krug**, Do Multiple Solutions Matter? Prompting Multiple Solutions, Interest, Competence, and Autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2014, 45, 497 - 533.

[21] **Timo Tossavainen**, Three theories and a teaching model - Tools for better teaching, Summer University and Experience Workshop, 13 July 2013 - 25 July 2013 Hungary, Eger, EKF

III СЕКЦИЈА: НАУЧНОИСТРАЖИВАЧКИ И СТРУЧНИ РАД СТУДЕНАТА

Pavle V. M. Blagojević, Rheinische Friedrich-Wilhelms Universität Bonn; Freie Universität Berlin; Matematički institut SANU

„Tverberg's theorem strikes back“

Abstract: Many of the strengthenings and extensions of the topological Tverberg theorem can be derived with surprising ease directly from the original theorem: For this we present new proof technique that combines a concept of "Tverberg unavoidable subcomplexes" with the observation that Tverberg points that equalize the distance from such a subcomplex can be obtained

from maps to an extended target space.

Thus we obtain simple proofs for many variants of the topological Tverberg theorem, such as the colored Tverberg theorem of Zivaljevic and Vrecica (1992). We also get a new strengthened version of the generalized van Kampen-Flores theorem by Sarkaria (1991) and Volovikov (1996), an affine version of their "j-wise disjoint" Tverberg theorem, and a topological version of Soberon's (2013) result on Tverberg points with equal barycentric coordinates.

(joint work with Florian Frick and Günter Ziegler)

Александра Росић, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања

„Ојлеров проблем 36 официра, латински квадрати и универзална алгебра“

Апстракт. У раду су представљени иницијални тестови знања за ученике IV, VI и VIII разреда основне школе. Описана је методологија припреме тестова, упутстава за прегледање и упутстава за реализацију тестирања. Приказани су резултати пробног тестирања, које је реализовано у мају месецу 2014. године на пригодном узорку и резултати анкете коју су ученици попуњавали у вези са ставовима о тесту и математици уопште. Тестирање је спроведено у свим основним школама у Републици у септембру 2014. године.

Кључне речи: иницијални тестови; ученичка постигнућа; методологија тестирања

Библиографија

[22] **R. C. Anderson**, How to Construct Achievement Tests to Assess Comprehension, *Review of Educational Research*, 1972, 42, 145-170.

[23] **Ђ. Ђорђевић**. *Планирање израде теста и знања*. Београд: Савез друштава психолога Србије, 1986.

[24] **N. K. Ross**. *Item writing for tests and examinations*. Paris: UNESCO, 2005.

Љубица Мухић, Универзитет у Београду, Математички факултет; Висока технолошка школа струковних студија, Шабац

Александар Пејчев, Универзитет у Београду, Машински факултет

„Оцена грешке Gauss-Lobatto квадратурних формула у односу на Chebyshev-љеве тежинске функције друге, треће и четврте врсте“

Апстракт. У овом раду разматрамо апроксимацију интеграла функције, аналитичке у области комплексне равни која је ограничена елипсом са фокусима ± 1 , у односу на Chebyshev-љеве тежинске функције друге, треће и четврте врсте и са двоструким чвором у крајњој тачки -1 . Испитује се максимум модула језгра у интегралној репрезентацији остатка Gauss-Lobatto квадратурне формуле. Gautschi у [1] експлицитно формулише комплексна језгра као функције три променљиве у односу на четири Chebyshev-љеве тежине при чему је детаљно проучено понашање модула језгра само у случају прве тежине, док су за остале три постављане хипотезе засноване на нумеричким резултатима. Користећи методе сличне онима које су приказане у [2], на елипси је могуће одредити

тачан положај максимума модула језгара која одговарају и осталим тежинским функцијама. Због комплексности експлицитног израза, језгро најпре уопштено означимо са $const \cdot \frac{ab}{cd}$, а затим са $const \cdot \frac{AB}{CD}$ вредност језгра у тачки у којој хипотеза тврди да се достиже максимум. Затим, полазећи од неједнакости $\frac{ab}{cd} < \frac{AB}{CD}$, задатак сводимо на испитивање негативности израза $I(\rho, \sigma, n) = abCD - \mathbb{I}ABcd$. Одређеним трансформацијама израз I постаје полиномијалан по променљивој ρ , па наизменично фиксирајући остале променљиве, анализирајући асимптотско понашање и коефицијенте датог полинома, добијају се резултати који потврђују Gautschi-јеве хипотезе наведене у [1].

Кључне речи: Gauss-Lobatto квадратурне формуле; Chebyshev-љеве тежинске функције; Интегрална репрезентација остатка квадратурне формуле; Оцена грешке.

Библиографија

- [1] W. Gautschi, The remainder term for analytic functions of Gauss-Radau and Gauss-Lobatto quadrature rules with multiple end points, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 33 (1990) 315-329.
- [2] A.V. Pejčev, M.M. Spalević, On the remainder term of Gauss-Radau quadrature with Chebyshev weight of the third kind for analytic functions, *Appl. Math. Comp.* 219 (2012) 2760–2765.
- [3] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, M.S. Pranić, On the remainder term of Gauss-Radau quadratures for analytic functions, *J. Comput. Appl. Math.* 218 (2008) 281–289.

Marko Milošević, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

„Hibridizacija biometrijskih metoda u cilju identifikacije osoba“

Apstrakt. Računarska identifikacija osoba je proces kojim mašina dovodi u vezu akcije korisnika sa ranije dostupnim podacima o njemu, u bazi podataka. Naročito je značajna u obezbeđivanju objekata od neautorizovanih upada. U ovom radu je predstavljena mogućnost kombinovanja većeg broja biometrijskih metoda identifikacije osoba sa ciljem prevazilaženja ograničenja pojedinačnih procedura. Predloženi sistem kombinuje prednosti pouzdanosti metode identifikacije pomoću skeniranja otiska prsta sa brzinom izvršavanja i lakoćom implementacije metoda prepoznavanja lica. Automatizovani metod računarske identifikacije prepoznavanjem lica postavljanjem kamera koje ne zahtevaju interakciju korisnika, i u realnom vremenu obrađuju podatke, je moguće kombinovati sa maksimalnom preciznošću analize otiska prsta, kako bi bio otklonjen nedostatak prvog metoda, pouzdanost. Istovremeno se broj slučajeva u kojima korisnik identifikuje vremenski zahtevnim metodom skeniranja otiska prsta svodi na minimum. Rezultati istraživanja pokazuju da je moguće podesiti model algoritma za prepoznavanje lica tako da se u zahtevanoj meri eliminišu slučajevi neopravdane autentifikacije korisnika, uz povećanje broja odbijenih fotografija. Primena metoda analize otiska prsta u takvim specijalnim slučajevima eliminiše nedostatak prvog sistema, bez značajnog rasta prosečnog vremena potrebnog za identifikaciju.

Ključne reči: Identifikacija osoba; prepoznavanje lica; analiza otiska prsta; bezbednost

Irena Milinković, Univerzitet u Beogradu, Fakultet organizacionih nauka

Luka Milinković, Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

„Jedan pristup za formiranje sigurnijih lozinki analizom napada rečnikom“

Apstrakt. Privatnost podataka i pravilan izbor lozinki nije više važan samo za specijalne službe, kao što su vojska i policija, već svakome ko koristi računare, mobilne uređaje, e-mail, elektronsko bankarstvo i druge slične servise. Da bi se tačno definisali uslovi, koji su potrebni da se formira sigurna lozinka neophodno je analizirati, koji je sve napadi mogu ugroziti. Tek nakon toga se pristupa odbrani od takvih napada pravilnim izborom lozinki. U radu je prikazana analiza kriterijuma, predloženih od strane autora, koje treba poštovati pri izboru lozinki da bi one bile otporne na većinu poznatih tehnika napada. Akcenat je stavljen na napad rečnikom, kao jedna od najčešće korišćenih pri nasilnom otkrivanju lozinki. Često pominjano pravilo: „Sigurna je samo lozinka koja se sastoji od cifara, simbola, malih i velikih slova.“ nije jedini uslov za sigurnu lozinku. Čak se može reći da ovo pravilo garantuje formiranje najkomplikovanije lozinke, koju je, nekada, teško i zapamtiti. Postoje i neki drugi uslovi, koji, ako se ispune, mogu da obezbede zahtevanu sigurnost lozinke, koja se ne sastoji od nasumično izabranih karaktera, pa ju je lakše i zapamtiti. Kako doći do ovakve lozinke predstavljeno je detaljnom analizom njihove dužine i skupova karaktera koji se pri tom koriste. Pomoću kombinatorike, preko formula i grafika, biće pokazano da se različitost lozinki ne može opisati samo preko varijacija, već se u računu moraju koristiti i kombinacije.

Ključne reči: Autentifikacija, kombinatorika, lozinke, napad rečnikom, zaštita privatnosti.

Miloš Martinović, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet
Miodrag Živković, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet
Đorđe Stakić, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

„Kriptoanaliza šifre E0“

Apstrakt. E0 je algoritam koji se koristi za šifrovanje u okviru standarda Bluetooth. Bluetooth je standard za bežičnu komunikaciju raznih uređaja, najčešće mobilnih telefona, bežičnih slušalica, štampača, koji omogućava tim uređajima da međusobno komuniciraju. Sama E0 je lančana šifra koja se sastoji od četiri pomeračka registra sa linearnom povratnom spregom različite dužine, koji se kombinuju sa konačnim automatom. U radu se prikazuje i arhitektura bezbedonosnog sistema u okviru standarda Bluetooth.

Specifikacija algoritma za šifrovanje E0 iz rada [25] je programski realizovana, u programskom jeziku C, što je provereno pomoću više test vektora koji su dati u specifikaciji Bluetooth-a verzija 1.1 [3]. U radu se opisuje i realizuje napad na E0, pri čemu se zbog složenosti napada kao celine (2^{85} koraka), realizacija može praktično izvršiti za umanjenju verziju algoritma E0. U kriptoanalizi se bavimo napadom sa poznatim otvorenim tekstom gde se pretpostavlja da je poznata određena količina nešifrovanog teksta a zadatak je da se rekonstruiše ostatak otvorenog teksta koji nije poznat. U konkretnom slučaju, napadu na šifru E0, primenićemo tzv. pretpostavi i odredi napad gde se pretpostavlja inicijalno stanje konačnog automata i sadržaj pomeračkog registra najkraće dužine. Pokazuje se da se nakon rešavanja sistema linearnih jednačina po modulu 2, u 2^{85} koraka dolazi do početnih stanja svih pomeračkih registara šifre E0.

Ključne reči: Kriptoanaliza; Bluetooth; šifra E0.

Bibliografija

[26] **Cristophe De Cannière, Thomas Johansson, Bart Preneel.** Cryptanalysis of the Bluetooth Stream Cipher.

[27] **Ophir Levy, Avishai Wool.** A Uniform Framework for Cryptanalysis of the Bluetooth E0 Cipher.

[3] **Specification of the Bluetooth System, Specification Volume 1.** Version 1.1.

Nikola M. Perić, Khaoticen, Beograd

„PERT metodom do uspešnijeg upravljanja istraživačkim projektima“

Apstrakt. Primene matematike su, danas, brojne, a njena sveprisutnost je na zavidnom nivou i u nauci o upravljanju. Za planiranje i kontrolu vremena potrebnog za realizaciju projekta razvijen je skup metoda iz domena primenjene matematike koje se jednim imenom nazivaju tehnike mrežnog planiranja, a koje se oslanjaju na teoriju grafova. PERT, kao tehnika mrežnog planiranja, najčešće se koristi u upravljanju istraživačkim i razvojnim projektima u oblasti informaciono-komunikacionih tehnologija, sa naglaskom da je primenljiva i na projekte iz drugih naučnih oblasti. Predmet ovog rada je prikaz korišćenja PERT metode, sa aspekta upravljanja projektima, u situacijama kada je nemoguće deterministički odrediti potrebno vreme za realizaciju projekta, već se pribegava probabilističkom pristupu.

Ključne reči: PERT metoda; upravljanje vremenom; istraživački projekti; razvojni projekti.

Mladen Vidić, Saobraćajni fakultet Doboj

„Višekriterijumsko odlučivanje metodom AHP – definicija, rešavanje i primene“

Apstrakt. Višekriterijumsko odlučivanje po jednoj ili više ciljnih funkcija ima neprekidnu primenu u realnom životu, u poslovnim primenama i tehnologijama. Matematika je idealan alat za precizno formulisanje i rešavanje zadataka odlučivanja. Praktični problemi odlučivanja se najčešće opisuju u objedinjenoj formi kao zadaci optimizacije jedne ili više ciljnih funkcija uz skup ograničenja definisanih sistemom linearnih (ne)jednačina. Konačan skup vrednosti u R^n u kojem važe ta ograničenja označavamo P. Definisane skupa ograničenja pomoću sistema linearnih nejednačina često nije dovoljno za praktične zadatke odlučivanja. Ovome se dodaje jedna ili više funkcija $C(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definisane eksplicitno, koje treba pozicionirati u nekom graničnom položaju na skupu dopuštenih rešenja, obično minimizirati ili maksimizirati, na skupu P dopuštenih rešenja određenom ograničenjima. Definisane funkcije sa optimizacijskim uslovom nazivamo *ciljna funkcija*. Ako su ciljne funkcije $C_i(X)$ nelinearnog tipa ili ako im tip argumenata i tip vrednosti nije u skupu realnih brojeva, tada ne možemo primeniti iterativne metode koje generišu niz numeričkih iteracija ka konačnom rešenju. Nepoznata veličina X koja je vektor u R^n ili matrica u $R^{m \times n}$ sa dobro odabranom početnom iteracijom X_0 kreće se uvek u tom prostoru rešenja. Moramo koristiti druge metode koje koriste relativne odnose diskretnih vrednosti kriterijuma u odnosu na druge vrednosti ili apsolutnu diskretnu vrednost. Najpoznatija je metoda AHP (eng. *Analytical Hierarchy Process*) koja rešava traženje optimalnog rešenja za postavljeni sistem ograničenja pomoću uzajamnih prioriteta alternativa u odnosu na ciljeve i sistem (nelinearnih) ciljnih funkcija diskretnog i kontinualnog tipa vrednosti za koje znamo samo uzajamne prioritete.

Ključne reči: Višekriterijumsko odlučivanje; AHP; Saaty skala; database pretraživanje;

Bibliografija

- [1] A. Ishizaka, A. Labib. Analytic Hierarchy Process and Expert Choice: Benefits and Limitations. *University of Portsmouth, Portsmouth Business School, United Kingdom*, 2009
- [2] M. Vidić. Višekriterijumska analiza za izbor softverske tehnologije na primeru SUBP metodom AHP. *Zbornik radova, Infofest, Budva*, 2011
- [3] E. Forman. Decision by Objectives: The Analytic Hierarchy Process and Expert Choice. *World Scientific Press*, 2001

Danica Kosanović, Faculty of Mathematics, University of Belgrade

William Amos, Department of Zoology, University of Cambridge

„Modelling Microsatellite Evolution – Are Modern Humans Twice As Old As We Thought?“

Abstract. Microsatellites, or short tandem repeats (STRs), are highly polymorphic DNA sequences. They mutate mainly by gaining and losing repeat units creating a linear random walk called the stepwise mutation model (SMM). However, despite extensive study, the exact mutational process still remains unclear. Under a strict, unbounded SMM, mean repeat number drifts up and down over time and does not lead to a stationary distribution. Exploiting random walk theory, new genetic distance measures were developed based on squared differences in allele length. Two versions, ASD and $(\delta\mu)^2$ distance ([1], [2]) both have expectations that increase linearly with time under the SMM, the former having larger variance. However, direct analysis of mutations suggest a variant of the SMM where longer alleles tend to contract and shorter ones expand (=centrally directed mutation model, CDM). In our study we explore how genetic distances differ between the SMM and CDM. We extend this to re-evaluate Goldstein et al.'s dating of the deepest split in the human lineage. We show that the more realistic CDM models are likely to reduce genetic distances, possibly by a factor of two, pushing back divergence dates relative to the standard SMM.

Keywords: DNA evolution; microsatellites; stepwise mutation model; genetic distances.

References

[28] **Goldstein D.B., Ruiz-Linares A., Cavalli-Sforza L.L., Feldman M.W.**, An evaluation of genetic distances for use with microsatellite loci, 1995a, *Genetics* **139**:463–471.

[29] **Goldstein D.B., Ruiz-Linares A., Cavalli-Sforza L.L., Feldman M.W.** Genetic absolute dating based on microsatellites and the origins of modern humans, 1995b, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **92**:6723–6727.

Vera Miler Jerković, Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

Branko Malešević, Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

„Blok reprezentacija uopštenih inverza“

Apstrakt. U radu će se razmotriti svi oblici uopštenih $\{1, 2, 3, 4, 5, 5^k\}$ inverza u obliku blok matrica. Razmatraće se Moore-Penroseov inverz, Grupni inverz i Drazin inverz. Prikazaće se neki poznati i neki novi rezultati.

Ključne reči: Uopšteni inverz, Moore-Penroseov inverz, Grupni inverz, Drazin inverz.

Миленко Пикула, Универзитет у Источном Сарајеву, Филозофски факултет
Биљана Војводић, Министарство науке и технологије Републике Српске

„Одређивање рјешења граничног задатка оператора типа Штурм-Лиувил са два константна кашњења“

Апстракт. У раду посматрамо гранични проблем оператора типа Штурм-Лиувил са два константна кашњења $L = L(q_1(x), q_2(x), \tau_2, \tau_1)$:

$$ly := -y''(x) + q_1(x)(x - \tau_1) + q_2(x)(x - \tau_2) = \lambda y(x), \lambda = z^2, y(x - \tau_1) \equiv 0, x \in [0, \tau_1].$$

Основни спектрални задаци за класични оператор типа Штурм-Лиувил су у потпуности изучени и главни резултати се могу наћи у [30], док су инверзни проблеми за диференцијалне операторе са кашњењем још увијек недовољно истражени.

Рјешење за посматрани гранични проблем оператора типа Штурм-Лиувил са два константна кашњења, као и асимптотика својствених вриједности, познати су само у случају када за τ_1 и τ_2 вриједи $\tau_1 = k_0 \tau_2$ ([31],[32]). У општем случају поступак конструкције рјешења је знатно сложенији због усложњавања односа између линеарних комбинација кашњења τ_1 и τ_2 , као и због њихових односа у околини π . Због тога прво конструишемо рјешење за гранични задатак оператора са два константна кашњења у случају када за τ_1 и τ_2 вриједи услов $\tau_1 = k_0 \tau_2 + \delta$, $\delta \in (0, \frac{\tau_2}{l_0+1})$, $l_0 \tau_1 \leq \pi < (l_0 + 1)\tau_1$, а затим, користећи овај резултат, конструишемо рјешење у општем случају. Рјешења конструишемо методом узастопних апроксимација.

Затим показујемо да се на основу добијеног рјешења за посматрани гранични задатак и на основу резултата из [33], добија и асимптотика својствених вриједности граничног задатка оператора са два константна кашњења у општем случају.

Кључне речи: гранични проблем; константно кашњење; конструкција рјешења.

Библиографија

[34] G. Freiling, V. Yurko. Inverse Sturm-Liouville problems and their applications, New York, 2008.

[35] М. Пикула, Н. Павловић. Конструкција рјешења граничног задатка са два константна кашњења и асимптотика сопствених вриједности, Proceedings, Third Mathematical Conference of the Republic Srpska, Vol.1, 2014, pp.83-91

[36] М. Пикула, Н. Павловић, Б. Војводић. Први регуларизовани траг граничног задатка типа Штурм-Лиувил са два константна кашњења, Четврта математичка конференција Републике Српске, Требиње, 06-07. јун 2014

IV СЕКЦИЈА: 65 година живота и 40 година научног рада професора Миодрага Матељевића

Stevan Pilipović, Department of Mathematics and Informatics, University of Novi Sad

„Convolution, hypoellipticity and ellipticity of some classes of linear and semilinear pseudodifferential equations“

Abstract. In the first part we present the relations of Weyl and Anti-Wick quantization through the convolution while in the second part we present a class of linear and semilinear elliptic equations on spaces of tempered ultradistributions of Beurling and Roumieu type.

The talk is based on the joint papers with Mrcro Cappiello and Bojan Prangoski.

Gradimir V. Milovanović, Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts

„Two Centuries of Gaussian Quadrature Rules“

Abstract. In 1814 Carl Friedrich Gauß (1777-1855) developed his famous method of numerical integration which dramatically improves the earlier method of Isaac Newton (1643-1727) from 1676. Beside the some historical details, in this lecture we present recent progress in this subject (cf, [2]), as well as new important applications of this theory in several different directions. Precisely, we give the construction of several quadratures of Gaussian type with respect to strong non-classical and exotic weight functions which appear in approximation theory, summation of slowly convergent series, fraction calculus, etc. Some interesting applications of such kind of quadratures in summation of series, cubature formulas, statistics, physics, and calculation of the so-called “two-electron repulsion integrals” in computational quantum chemistry, are presented, as well as the corresponding software [1,3].

Keywords: Gaussian quadrature; three-term recurrence relation; weight function; summation of series.

References

1. **A.S. Cvetkovic, G.V. Milovanović.** The Mathematica Package “OrthogonalPolynomials”. *Facta Univ. Ser. Math. Inform.*, 2004, 19, 17 – 36.
2. **G. Mastroianni, G.V. Milovanović.** *Interpolation Processes. Basic Theory and Applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
3. **G.V. Milovanovic, A.S. Cvetković.** Special classes of orthogonal polynomials and corresponding quadratures of Gaussian type. *Math. Balkanica*, 2011, 26, 169 – 184.

Pavle V. M. Blagojević, Rheinische Friedrich-Wilhelms Universität Bonn; Freie Universität, Berlin, Matematički institut SANU

„On complex highly regular embeddings“

Abstract. A continuous map $C^d \rightarrow C^N$ is a complex k -regular embedding if any k pairwise distinct points in C^d are mapped by f into k complex linearly independent vectors in C^N . Our central result on complex k -regular embeddings extends results of Cohen & Handel (1978), Chisholm (1979) and Blagojević, Lück & Ziegler (2013) on real k -regular embeddings. In this talk we present the following lower bounds for the existence of complex k -regular embeddings

Let p be an odd prime, $k \geq 1$ and $d = p^t$ for $t \geq 1$. If there exists a complex k -regular embedding $C^d \rightarrow C^N$, then $d(k - \alpha_p(k)) + \alpha_p(k) \leq N$. Here $\alpha_p(k)$ denotes the sum of coefficients in the p -adic expansion of k .

These lower bounds are obtained via modified Cohen & Handel (1978) framework and study of Chern classes of complex regular representation. The main technical result, used for the study of the Chern classes, is the following upper bound for the height of the cohomology of the unordered configuration space

If $d \geq 2$ and $k \geq 2$ are integers, and p is an odd prime. Then

$$\text{height} \left(H^* \left(\frac{F(R^d, k)}{\sigma_k}; F_p \right) \right) \leq \min\{p^t : 2p^t \geq d\}.$$

Милош Арсеновић, Математички факултет, Универзитет у Београду

Милољуб Албијанић, Универзитет Сингидунум и ФЕФА

Миљан Кнежевић, Математички факултет, Универзитет у Београду

Марек Светлик, Математички факултет, Универзитет у Београду

„Миодраг Матељевић – вертикала београдске математичке школе“

Апстракт. Излагање на популаран начин одсликава професора Миодрага Матељевића. Приказује његове људске, педагошке и научне вредности. У раду се приказује вертикална повезаност у развоју математике у Србији, од Мике Петровића до Миодрага Матељевића. Мика Петровић је на одређени начин, радом са својим ученицима и докторантима, створио Београдску математичку школу. Та школа изнедрила је разне математичаре и донела напредак у педагошком раду и математичком образовању у Србији. Тој математичкој образовној и научној вертикали припада професор Миодраг Матељевић, дописни члан САНУ.

Кључне речи: математичка београдска школа.

David Kalaj, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Montenegro

„Muckenhoupt weights and Lindelof theorem for harmonic mappings“

Abstract: We extend the result of Lavrentiev which asserts that the harmonic measure and the arc-length measure are A_∞ equivalent in a chord-arc Jordan domain. By using this result we extend the classical result of Lindelöf to the class of quasiconformal (q.c.) harmonic mappings by proving the following assertion. Assume that f is a quasiconformal harmonic mapping of the unit disk U onto a Jordan domain. Then the function $A(z) = \arg(\partial_\varphi(f(z))/z)$

where $z = re^{i\varphi}$, is well-defined and smooth in $U^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$ and has a continuous extension to the boundary of the unit disk if and only if the image domain has C^1 boundary.

Ljubica Velimirović, Faculty of Science and Mathematics University of Niš

„On Infinitesimal Bending Problems“

Abstract. Problem of infinitesimal bending of surfaces is a special part of theory of surface deformation. Surface bending theory considers bending of surfaces, isometrical deformations as well as infinitesimal bending of surfaces and presents one of the main consisting parts of global Differential geometry. On the other hand, infinitesimal bending of surfaces is not an isometric deformation, or roughly speaking it is with appropriate precision. Arc length is stationary under infinitesimal bending.

The first result at the surface bending theory belongs to Cauchy. He has proved that closed convex polyhedrons are rigid. Later, 1838, F. Minding gave hypothesis that the sphere is rigid. Liebman 1899 confirms this hypothesis. The next contributions to the bending theory belongs to D. Hielbert, H Weil, Blaschke, Cohn-Vossen, A. D. Alexandrov, N.V. Efimov, A. V. Pogorelov, V. T. Fomenko, I. Kh. Sabitov, R. Connelly, R. Bishop, H. Stachel.

The shape (Old English: gesceap, created thing) of an object located in some space is a geometrical description of the part of that space occupied by the object, as determined by its external boundary - abstracting from location and orientation in space, size, and other properties such as colour, content, and material composition. In Geometry, two subsets of an Euclidean space have the same shape if one can be transformed to the other by a combination of translations, rotations (together also called rigid transformations), and uniform scalings. In other words, the shape of a set of points is all the geometrical information that is invariant to translations, rotations, and size changes. Having the same shape is an equivalence relation, and accordingly a precise mathematical definition of the notion of shape can be given as being an equivalence class of subsets of a Euclidean space having the same shape. A more flexible definition of shape takes into consideration the fact that we often deal with deformable shapes in reality, (e.g. a person in different postures, a tree bending in the wind or a hand with different finger positions). By allowing also isometric (or near-isometric) deformations like bending, the intrinsic geometry of the object will stay the same, while sub-parts might be located at very different positions in space. This definition uses the fact that, geodesics (curves measured along the surface of the object) stay the same, independent of the isometric embedding. This means that the distance from a finger to a toe of a person measured along the body is always the same, no matter how the body is posed.

Comparisons play an important role in many scientific areas. When comparing one surface to another, differences between the two can be interpreted as deformations which transform one object to the other. Bending of surfaces theory occurs and is applied at the problems at civil engineering shell theory as well as to membrane cell theory. There is an increasing interest in the field of deformable surface modeling. It has become clear that even though the applications areas differ significantly the methodological overlap is enormous. We will give an overview of the history, recent results and open problems at the theory of infinitesimal bending.

We consider some properties of magnitudes related to infinitesimal bending at Euclidean and Generalised Riemannian Space. Recent results of the author and cooperators Svetislav Mincic, Mica Stankovic, Marija Najdanovic, Milan Zlatanovic, Milica Cvetkovic and Nikola Velimirovic will be mentioned.

Keywords: infinitesimal bending; shape; Generalized Riemannian space.

References

- [1] **Ljubica S. Velimirovic, Milica D. Cvetkovic**, Gaudi surfaces and curvature based functional variations, Applied Mathematics and Computation, Vol. 228: 377–383 (2014).
- [2] **Ljubica S. Velimirovic, Marija S. Ciric**, : On the total mean curvature of piecewise smooth surfaces under infinitesimal bending. Appl. Math. Lett. Vol. 24(9): 1515-1519 (2011).
- [3] **Ljubica S. Velimirovic, Marija S. Ciric, Nikola M. Velimirovic**, On the Willmore energy of shells under infinitesimal deformations, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 61(11): 3181-3190 (2011).
- [4] **Ljubica S. Velimirovic, Svetislav M. Mincic, Mica S. Stankovic**: Infinitesimal rigidity and flexibility of a non-symmetric affine connection space. Eur. J. Comb. 31(4): 1148-1159 (2010)

Milutin Obradović, Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade
Saminathan Ponnusamy, Indian Statistical Institute (ISI), Chennai, India

„Univalence of Partial Sums for Some Classes of Univalent Functions”

Abstract. Let S denote the family of all functions f that are analytic and univalent in the unit disk $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ and normalized such that $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$. For the functions of the previous form let $s_n(f, z) := s_n(z) = z + \sum_{k=2}^n a_k z^k$ denote the n -th ($n \geq 2$) partial sums/sections of f . The question of finding the largest radius of univalence r_n of $s_n(z)$, when f belongs to S or some of its interesting subclasses, has been a subject of study by a number of researchers. In this lecture we present some recent results of the authors and their cooperators.

Keywords: univalence; partial sums; radius.

References

[37] **M. Obradovic and S. Ponnusamy** Partial sums and radius problem for certain class of conformal mappings. *Siberian Math. J.*, 2011, 52(2), 291-302.

[38] **M. Obradovic and S. Ponnusamy** Starlikeness of sections of univalent functions. *Rocky Mountain J. Math.*, 2014, 44(3), 1003-1014.

Дарко Милинковић, Математички факултет, Универзитет у Београду

„Action spectrum and symplectic invariants in Floer theories“

Abstract. We will discuss some properties of symplectic invariants constructed by the modified min/max principle applied to the Hamiltonian action functional with different boundary conditions.

Милош Арсеновић, Математички факултет, Универзитет у Београду

„On multipliers in spaces of harmonic functions and related results“

Abstract. Spaces of multipliers between harmonic function spaces on the unit ball in n -dimensional space are investigated. Characterization of these spaces are obtained in many different spaces: weighted Hardy spaces, mixed norm spaces, Triebel-Lizorkin spaces. Related results on embedding relations between these spaces are also presented. The results are obtained in joint work with R. Shamoyan.

Branko Dragovich, Institute of Physics, University of Belgrade

„*p*-Adic Properties of the Genetic Code“

Abstract. The generic code (GC) is mapping from the space of 64 codons onto set of 21 elements, which consists of 20 amino acids and 1 stop signal. Codons are ordered triples of four nucleotides (C, A, T (U), G) and they are building blocks of the genes. These canonical amino acids are building blocks of the proteins, and stop signal terminates synthesis of proteins. One of the main reasons for modeling the GC is a huge number (about 1084) of possible connections between 64 codons and 20 amino acids with one stop signal, while in living organisms there is practically one GC with 30 slight variations. In this contribution we use *p*-adic distance to describe ultrametric structure of the codon space. By this way, we show that codons which are nearest in the *p*-adic sense code the same amino acid. In this approach [1-3], codons are presented by natural numbers in three digit expansion in the base 5. Four codons are related to four digits as follows: C=1, A=2, T=U=3, G=4. Digit 0 means absence of codon. 5-adic and 2-adic norms are used for *p*-adic distances.

In this talk, it will be presented a brief review of modeling of the generic code, emphasizing ultrametric structure of codon space, which is quantitatively described by *p*-adic distances. Note that *p*-adic distance is the most significant example of the ultrametric distance, which satisfies strong triangle (ultrametric) inequality, i. e. $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$. It will be also discussed extension of this *p*-adic ultrametric approach to amino acids, modification of Hamming distance, possible evolution of the GC and to some other bioinformation systems,

Keywords: The genetic code; *p*-adic distance, ultrametric.

References

- B. Dragovich, A. Dragovich.** A *p*-adic model of DNA sequence and genetic code. *P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, 2009, 1 (1), 34-41, [arXiv:q-bio.GN/0607018v1].
- B, Dragovich, A. Dragovich.** *p*-Adic modeling of the genome and the genetic code, *Computer Journal*, 2010, 53 (4), 432-442, [arXiv:0707.304v1 [q-bio.OT]].
- B. Dragovich.** *p*-Adic structure of the genetic code. *NeuroQuantology*, 2011, 9 (4), 716-727, [arXiv:1202.2353 [q-bio.OT]].

Оливера Михаић, Факултет организационих наука, Универзитет у Београду

„О два паралелна живота Gehring-овог проблема“

Апстракт. У овом раду се говори о Семинару из комплексне анализе, који се одржава почев од 1990. године, ша све до данас, а посебно о периоду од 1996. до 2000. године. Дат је кратак садржај тема о којима се тада говорило на семинару, чија је актуелност и данас евидентна. У раду је реч и о изузетној улози професора Матељевића, на првом месту због формирања тзв. Београдске школе за комплексну анализу, а затим и о његовој интуитивности, захваљујући којој је настала читава серија научних радова из области квазиконформних пресликавања, Teichmüller-ових простора, хармонијских пресликавања, као и, у мањој мери, изопериметријског проблема за функције више променљивих. У раду је дат посебан осврт на проблем који је Gehring поставио 1974. године. Професор Матељевић је 1975. године дао комплетно решење овог тзв. Gehring-овог проблема. Међутим, занимљиво је да је скоро истовремено (тј. са закашњењем од годину дана) Gehring-ов проблем закупио пажњу и многих других познатих математичара и да, несвесни да резултат већ постоји у Београду, они објављују низ научних радова у угледним математичким часописима. Овде ће бити приказана упоредна анализа неколико резултата из 70 – их година, као и неких из ближе прошлости.

Мирјана Вуковић, Академија наука и умјетности Босне и Херцеговине
Емил Илић – Георгијевић, Грађевински факултет Универзитета у Сарајеву
Оливера Стевановић, Универзитет Синергија

„О примјени Парсефалове формуле на проблеме G_{θ}^{κ} сумабилности развоја по сопственим функцијама Лапласовог оператора“

Апстракт. Према Тичмаршу [6], ако $f \in L^2(D)$, онда је Рисова сумабилност (λ, κ) развоја функције $f \in L^2(D)$ по сопственим функцијама k -димензионалног рубног проблема $\Delta u + \lambda u = 0$ у D , $u = 0$ на ∂D , локална особина функције f у тачки у којој се она развија ако је $\kappa \geq \frac{k}{2}$. Овдје доказујемо исти резултат, али за Авакумовићеву G_{κ}^{θ} –сумабилност, тј. Доказујемо да G_{κ}^{θ} –сумабилност развоја функције $f \in L^2(D)$ по сопственим функцијама у $x_0 \in D$ зависи само од понашања функције f у околини тачке x_0 ако је $\geq \frac{k}{2}$, што представља побољшање процене до које је дошао М. Маравић у [4] гдје је доказано да G_{κ}^{θ} –сумабилност зависи само од понашања функције f у околини тачке x_0 ако је $\kappa > \frac{\kappa-1}{2}(2\theta-1)^{-1} + 1, \frac{1}{2} < \theta < 1$. Међутим, том приликом, М. Маравић је користио поређење са Рисовим поступком сумабилности, док се у овом раду проблему приступа директно, тј. конструише се функција помоћу које се добија језгро G_{κ}^{θ} –сумабилности. Т. V. Avadhani је у [1] доказао да Рисова сумабилност (λ, κ) реда у $x_0 \in D$ зависи само од понашања функције f у околини тачке x_0 ако је $\kappa \geq \frac{k}{2}$, тако да је за очекивати да се добијени резултат може побољшати.

Кључне речи: G_{κ}^{θ} –поступак сумабилности; Беселова функција; Парсефалова формула.

Библиографија

1. **T. V. Avadhani.** On the summability of eigenfunction expansions I. *J. Indian Math. Soc.*, 1954, XVII, 1, 9–18.
2. **V. G. Avakumović.** Über die Eigenwerte der Schwingungsgleichung. *Math. Scand.*, 1956, 4, 161–173.
3. **K. Chandrasekharan and S. Minakshisundaram.** Typical means. Geoffrey Cum berlege, Oxford University Press, 1952.
4. **M. Maravić.** Über die G_{κ}^{θ} – Summierbarkeit der verallgemeinerten Fourier-Reihen. *Publ. Inst. math. Acad. Serbe Sci.*, 1958, XII, 137–147.
5. **M. Maravić.** Sumabilnost razvitka po sopstvenim funkcijama Laplaceova operatora u n -dimenzionalnom prostoru. ANUBIH, Djela, knjiga LV, Sarajevo, 1979.
6. **E. C. Titchmarsh.** Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations II. Oxford at the Clarendon Press, 1958.
7. **M. Vuković.** O nekim problemima sumabilnosti i primjenama na generalisane Fourier-ove redove, doktorska disertacija, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu (1979), X+83. [8] G. N. Watson. A Treatise of the Theory of Bessel Functions. Cambridge, 1952.
8. **G. N. Watson.** A Treatise of the Theory of Bessel Functions. Cambridge, 1952.

Romeo Meštrović, Maritime Faculty, University of Montenegro

Žarko Pavićević, Faculty of Science, University of Montenegro

„On Linear Space Properties of Privalov Spaces on the Unit disk“

Abstract. For given $1 < p < \infty$, the Privalov class N^p consists of all holomorphic functions f on the open unit disk $|z| < 1$ in the complex plane \mathbb{C} such that

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} (\log^+ |f(re^{i\theta})|)^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

The radial limit of a function $f \in N^p$ defined as $f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ exists for almost every $e^{i\theta}$. In [1] M. Stoll showed that the space N^p with the topology given by the metric ρ_p defined by

$$\rho_p(f, g) = \left(\int_0^{2\pi} (\log(1 + |f^*(re^{i\theta}) - g^*(re^{i\theta})|))^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p}},$$

becomes an F –algebra.

Here we establish some linear space properties of the spaces N^p .

Keywords: Privalov space N^p ; F -algebra; topological dual.

References

[1] **M. Stoll.** Mean growth and Taylor coefficients of some topological algebras of analytic functions. *Ann. Polon. Math.*, 1977, 35, 139 - 158.

Владимир Божин, Математички факултет, Универзитет у Београду

„Јединствена екстремалност у две и више димензија“

Апстракт. Приказаћемо резултате везане за јединствену екстремалност у Teichmüller-овом простору, који су рађени у оквиру Београдске школе комплексне анализе. Дискутоваћемо решење познатог Teichmüller-овог проблема. Такође, размотрићемо новија уопштења на квазиконформна пресликавања у три или више димензија. Техника се у вишедимензионалним просторима разликује, али постоје аналогне Reich-Strebel неједнакости, које се могу користити.

Владимир Драговић, Математички институт САНУ

Борислав Гајић, Математички институт САНУ

„О прецесионом кретању четвородимензионог крутог тела“

Апстракт. Лагранжев симетричан случај обртања четвородимензионог тешког крутог тела на $e(4)$ је дефинисао Бељајев. У овом раду конструисано је партикуларно решење Лагранжевог случаја које представља уопштење вертикалне регуларне прецесије. Полазећи од тог решења дато је четвородимензионо уопштење класичог Гриолијевог случаја кретања крутог тела. Показано је да добијено решење представља уопштење регуларне невертикалне прецесије.

Кључне речи: четвородимензионо круто тело; регуларна прецесија

Marjan Marković, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Montenegro
 „Semi-norms of the Bergman projection“

Abstract. It is known that the Bergman projection operator maps the space of essentially bounded functions in the unit ball in the d -dimensional complex vector space onto the Bloch space of the unit ball. This work deals with the various semi-norms of the Bergman projection. We improve some recent results due to Perälä, Kalaj, Vujadinović and the author. For each $\sigma > -1$ let

$$K_\sigma(z, w) = \frac{(1 - |w|^2)^\sigma}{(1 - \langle z, w \rangle)^{d+1+\sigma}},$$

$$T_\sigma f(z) = c_\sigma \int_B K_\sigma(z, w) f(w) dv(w), \quad z \in B,$$

and where $B = \{z \in \mathbb{C}^d: |z| < 1\}$, dv is the normalized Lebesgue measure on B , and $T_\sigma 1 = 1$. T_σ is the Bergman projection which project $L^\infty(B)$ continuously onto the Bloch space \mathcal{B} .

Let n be any positive integer and denote $\tilde{d} = \binom{n+d-1}{d-1}$. Let $|\cdot|_{\mathbb{C}^{\tilde{d}}}$ be a norm on $\mathbb{C}^{\tilde{d}}$ which satisfies $|\bar{Z}|_{\mathbb{C}^{\tilde{d}}} = |Z|_{\mathbb{C}^{\tilde{d}}}$, $Z \in \mathbb{C}^{\tilde{d}}$. For a multi-index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ stands for the differential operator $D_{z_1}^{\alpha_1}, \dots, D_{z_n}^{\alpha_n}$. Denote by $\mathcal{D}_z: H(B) \rightarrow H(B)^{\tilde{d}}$ the following operator $\mathcal{D}_z f(z) = (\dots, D_z^\alpha f(z), \dots)$. On the right side we have all $D_z^\alpha f(z)$ such that for $\alpha \in \mathbb{N}^d$ holds $|\alpha| = n$, therefore it contains \tilde{d} components.

In \mathcal{B} we introduce the semi-norm

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\|G\|_\infty \leq 1} (1 - |z|^2)^n |\mathcal{D}_z f(z)|_{\mathbb{C}^{\tilde{d}}}.$$

It is known that $f \in \mathcal{B}$ if and only if $\|f\|_{\mathcal{B}} < \infty$. We consider the semi-norm of T_σ given by $\|T_\sigma: L^\infty(B) \rightarrow \mathcal{B}\| = \sup_{\|G\|_\infty \leq 1} \|T_\sigma G\|_{\mathcal{B}}$.

We prove: For the Bergman projection T_σ holds

$$\|T_\sigma: L^\infty(B) \rightarrow \mathcal{B}\| = c \frac{\Gamma(\lambda + n)\Gamma(n)}{\Gamma^2\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{n}{2}\right)}$$

for every $\sigma > -1$, where $\lambda = d + 1 + \sigma$ and $c = \max_{|\zeta|=1} |Z(\zeta)|_{\mathbb{C}^{\tilde{d}}}$; here $Z(\zeta) = (\dots, \zeta^\alpha, \dots) \in \mathbb{C}^{\tilde{d}}$ contains all $\zeta^\alpha = \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_d^{\alpha_d}$, $|\alpha| = n$.

Keywords: Bergman projection, Bloch space, Integral operators

References

- D. Kalaj, M. Marković.** Norm of the Bergman projection. *Mathematica Scandinavica*, 2014, 115, 143 - 160.
D. Kalaj, Dj. Vujadinović. Norm of the Bergman Projection onto the Bloch Space. *Journal of Operator Theory*, to appear.
M. Marković. A Sharp Constant for the Bergman Projection. *Canadian Mathematical Bulletin*, to appear.

Миљан Кнежевић, Математички факултет, Универзитет у Београду

Марек Светлик, Математички факултет, Универзитет у Београду

„On hyperbolic type metrics and related problems“

Abstract. In this note we give a new approach for understanding various formulae related to the hyperbolic length and distance in the settings of the Poincare disc model. Also, we discuss the way about the appearance of these topics in literature.

Одабране фотографије са V Симпозијума „Математике и примене“



Свечано отварање скупа



проф. др Миодраг Матељевић



Слављеник прима поклоне



проф. др Милош Арсеновић



Детаљ са секције „Математика и примене - данас“



Детаљ са секције „Научно – истраживачки и стручни рад студената“



Учесници секције „Математика и информатика у образовању“



Учесници секције „Математика и информатика у образовању“



Младе насмејане колегинице

Више фотографија са V Симпозијума „Математика и примене“ могу се погледати на адреси <http://alas.matf.bg.ac.rs/~konferencija>

