УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ЗБОРНИК РАДОВА

IV СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ“

24. И 25. МАЈ 2013.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ЗБОРНИК РАДОВА – IV СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”

24. И 25. МАЈ 2013.

Издавач:
Универзитет у Београду
Математички факултет

За издавача:
проф. др Миодраг Матељевић, декан

Уредници:
проф. др Зорица Станимировић
доц. др Мирослав Марић
Марек Светлик

Одговорни уредник:
проф. др Миодраг Матељевић

Илустација на корицама:
ГеоГебра центар Београд, Математички факултет

Штампа:
Развојно-истраживачки центар графичког инжењерства
Технолошко-металуршког факултета у Београду, Карнегијева 4.

Тираж:
200 примерака

ISBN 978-86-7589-090-4

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

CIP

51-7(082)(0.034.2)
371.3::51(082)(0.034.2)

СИМПОЗИЈУМ Математика и примене (4 ; 2013 ; Београд)
Зборник радова [Електронски извор] / IV симпозијум Математика и примене, 24. и 25. мај 2013. ; [организатор] Универзитет у Београду, Математички факултет ; [уредници Зорица Станимировић, Мирослав Марић, Марек Светлик]. - Београд : Математички факултет, 2014 (Београд : Развојно-истраживачки центар графичког инжењерства ТМФ). - 1 електронски оптички диск (CD-ROM) ; 12 cm

Системски захтеви: Нису наведени. - Насл. са насловног екрана. - Радови на срп. и енгл. језику. - Текст лат. и ћир. - Тираж 200. - Напомене уз текст. - Библиографија уз сваки рад. - Апстакти ; Abstracts.

ISBN 978-86-7589-090-4

1. Станимировић, Зорица [уредник] 2. Математички факултет (Београд)
а) Математика - Зборници b) Математика - Настава - Зборници

COBISS.SR-ID 210010380

П Р Е Д Г О В О Р

Четврти Симпозијум ,,МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”, национални скуп са међународним учешћем, одржан је 24. и 25. маја 2013. у организацији Математичког факултета Универзитета у Београду и Српске академије наука и уметности. Скуп је одржан уз подршку Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије. Активности на симпозијуму биле су део манифестације „Мај месец математике 2013” у организацији Центра за промоцију науке.

На отварању Симпозијума, учеснике и госте су поздравили академик Никола Хајдин, председник САНУ, проф. др Миодраг Матељевић, дописни члан САНУ и декан Математичког факултета, проф. др Иванка Поповић, проректор за науку Универзитета у Београду и мр Алексндра Дрецун, дирkторка Центра за промоцију науке.

Након отварања Симпозијума, пленарна предавања су одржали проф. др Миодраг Матељевић, др Фивос Пападимитриу и проф. др Предраг Јаничић. Даље активности на Симпозијуму реализоване су кроз три секције: ,,Математика и примене – данас”, ,,Математика и информатика у образовању” и „Научноистраживачки и стручни рад студената”.

У оквиру секције „Математика и примене – данас” одржана су интересантна предавања на тему примена математике у различитим областима. Секција „Математика и информатика у образовању” је окупила велики број професора математике и информатике. Предавачи су скренули пажњу на актуелне проблеме у настави математике и информатике који се тичу процеса учења, унапређења наставе, мотивације ученика, итд. Студенти свих нивоа студија узели су активно учешће у трећој секцији „Научноистраживачки и стручни рад студената” и представили своје научне и стручне радове, као и резултате пројеката на којима учествују.

На Симпозијуму је било око 240 учесника из око двадесет научно – истраживачких и око педесет образовних установа из земље и иностранства, а од тога 113 учесника је презентовало своје резултате. Са задовољством можемо констатовати да су испуњени главни циљеви одржавања скупа, као што су сагледавање постојећих и отварање нових могућности примене математике у различитим областима, унапређење наставе математике и рачунарства и развој научног подмлатка.

Програмски одбор симпозијума

Академик проф. др Градимир Миловановић, Математички институт САНУ
проф. др Миодраг Матељевић, декан Математичког факултета, дописни члан САНУ
проф. др Бошко Јовановић, редовни професор Математичког факултета, шеф Катедре за нумеричку математику и оптимизацију
проф. др Зорица Станимировић, продекан за науку Математичког факултета, Универзитета у Београду
доц. др Мирослав Марић, Математички факултет, Универзитета у Београду
Марек Светлик, асистент Математичког факултета Универзитета у Београду

<u>Организациони одбор симпозијума</u>

проф. др Зорица Станимировић, продекан за науку Математичког факултета Универзитета у Београду
мр Миљан Кнежевић, асистент Математичког факултета Универзитета у Београду
Марек Светлик, асистент Математичког факултета Универзитета у Београду
Ђорђе Стакић, Рачунарска лабораторија Математичког факултета Универзитета у Београду
Сања Косановић, менаџер за односе са јавношћу Математичког факултета Универзитета
у Београду
Косана Протић, студент Математичког факултета Универзитета у Београду

Захваљујемо свим учесницима на успешној реализацији скупа и постигнутим резултатима и идемо у сусрет V Симпозијуму „Математика и примене", који ће се одржати 17. и 18. октобра у организацији Математичког факултета Универзитета у Београду и Српске академије наука и уметности.

У Београду, септембар 2014.

САДРЖАЈ

Simpozijum MATEMATIKA I PRIMENE, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2013 ,Vol. IV(1)

Fragmenti sećanja na kompleksnu analizu u Beogradu (1968 - 1980) i Vojina Dajovića - Izoperimetrijska nejednakost, Hardy-jevi prostori i Fourier-ovi redovi

Miodrag Mateljević

Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu
e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs

Apstrakt. Pokušao sam kroz priču da opišem (i) studentske dane, magistarske i doktorske studije; (ii) kako sam se zainteresovao za ekstremalne probleme u Hardy-jevim prostorima i povezao ih sa sa izoperimetijskom nejednakošću; (iii) kako sam se zainteresovao za prostore analitičkih funkcija; (iv) rezultate beogradskog seminara (grupe) u periodu 1980-1990 (kao i pozadinu rezultata); i (v) ulogu profesora Dajovića (uloga profesora Aljančića je samo skicirana) u razvoju obrazovanja i nauke. Kratak pregled teorije Hardy-jevih prostora, Fourier-ovih redova i izoperimetrijskog problema dat je sa preciznim formulacijama stavova i skicama dokaza.

Ključne reči: Izoperimetrijska nejednakost; Hardy-jevi prostori; Fourier-ovi redovi.

1. Uvod

Godine 1968. prvi put sam prolazio putem koji je vodio uz Balkansku ulicu[1] da predam dokumenta za upis na Prirodno-matematički fakultet (PMF). (Tada nije postojala emisija „Balkanskom ulicom” [2]; sudbina je htela da prođem pored hotela Moskva, mada nisam znao gde je hotel Moskva i da je uspeh stići do hotela Moskva [3]).

Kasnije sam shvatio da Beograd ima nešto univerzalno i kako kaže Kusturica da je „jedini grad na Balkanu koji, kao velika raskrsnica naslonjena na dvije reke, ima protok ideja, ali i neku vrstu sposobnosti da prihvati ljude koji odluče da se tu nastane, i to mnogo prije od Zagreba ili Ljubljane”.

Često sam prelazio Brankov most, na putu studentski dom - PMF i nazad, i mogao sam da vidim ceo grad od Ratnog ostrva do Avale [4]. Beograd vas dočeka, ne vidite ceo grad, ali imate utisak da je tu oko Kalemegdana, ceo ispred vas. Odmah sam osetio „gravitaciju” i kosmopolitsku širinu Beograda. Želeo sam da ostanem u Beogradu i u početku je bilo najvažnije da znam put od studentskog doma do zgrade PMF-a i nazad.

Kao student pokazao sam interesovanje za analizu. Prvo sam trenirao Analizu 1 i Analizu 2 kod odličnih asistenata M. Nikića i B. Mirkovića; rešavali smo zadatke iz Demidovič-a.

Knjiga profesora Aljančića [2], koja je i sa pedagoške tačke gledišta odličan udžbenik [5], uticala je na obrazovanje naših matematičara i predstavlja kvalitativni skok u odnosu na ono što se proučava u predmetima Analiza 1 i Analiza 2. Bio sam fasciniran svojstvima Riemann-Stieltjesovog integrala, Lebesgue-ovom merom i integralom, činjenicom da monotona funkcija ima izvod skoro svuda, Radon-Nikodym-ovim stavom, teoremama o reprezentaciji linearnih funkcionela, dualnim prostorima, . . .

U početku mog rada, posle diplomiranja, pratio sam dva toka. U sekciji 2, koja se odnosi na prvi tok, razmatrani su samo neki izabrani problemi minimuma i maksimuma u geometriji, simetrije i izometrije, izoperimetrija u prostoru i za poliedre. U ovoj sekciji takođe opisujem kako sam došao do prvog rada, koji pripada geometrijskoj teoriji funkcija (gft). Drugi tok se odnosi na Hardy-jevi prostore. Kada sam profesoru Dajoviću rekao da me interesuju teme gde se preplići realna, kompleksna i funkcionalna analiza, ponudio mi je da proučavam prostore analitičkih funkcija. Pokazalo se da su Hardy-jevi prostori lepa i interesantna oblast. U sekciji 3 su navedena osnovna svojstva ovih prostora, kao i neki početni rezultati dobijeni u Beogradu. U sekciji 4 prikazani su uglavnom polazni rezultati iz mog magistarskog rada [18] iz 1976. godine i doktorske disertacije [19] iz 1979. godine, koji se odnose na izoperimetrijsku nejednakost i ekstremalne probleme u H^1 prostorima.

[1] To se ponavljalo, samo ponekad sam koristio Kameničku ulicu, kada sam se ponovo vraćao u Beograd sa nekog puta.

[2] Emisija „Balkanskom ulicom” je portretska emisija u kojoj gosti - značajna imena istorije duha Beograda i Balkana, priznati umetnici, sportisti, novinari, advokati, lekari... govore o trenutku dolaska sa železničke stanice uz Balkansku ulicu u Beograd, o snovima o uspehu u velikom gradu i trenucima sreće i tuge koji su im obeležili život.

[3] U umetničkim krugovima koristiti se metafora: „Dolasci u Beograd iz provincije i penjanje uz Balkansku ulicu do Terazija”, koja označava uspeh.

[4] Ipak veći deo mog bića ponašao se u skladu sa izrekom „u matematici je ne samo lepota nego i najviša istina”.

[5] I pored odličnih udžbenika u svetskoj literaturi, često se vraćam na Aljančića.

U sekciji 5 se razmatraju osnovna svojstva Riemann-Stieltjes-ovog integrala i trigonometrijski redovi. Sadržaj ove sekcije je uglavnom pokriven i u knjizi profesora Aljančića i ilustruje kvalitet njegovog udžbenika [2]. Ovde je izlaganje prilagođeno potrebama kompleksne analize.

U sekciji 6 se prvo kratko razmatraju stavovi Tauber-ovog tipa, Abel sumabilnost, Tauber-ova teorema, kao i odgovarajući rezultati do kojih su došli Hardy, Littlewood i Karamata, a zatim i rezultati o prostorima analitičkih funkcija, koji su dobijeni u Beogradu u periodu 1980 - 1990.

Dvadesetpetog septembra ove godine biće 100 godina od rođenja profesora Dajovića koji je prvi u Beogradu počeo da se interesuje za Hardy-jeve prostore. Imao je težak put, ali i ogromnu volju i energiju. U svojim predavanjima uvek je tražio primene i veze matematike sa drugim oblastima. Simpozijum „Matematika i primene", koji se održava počev od 2008. godine na neki način predstavlja nastavak njegove vizije.

Sekcija 7 se odnosi na ulogu profesora Dajovića u razvoju matematike u Srbiji i Crnoj Gori.

U podsekciji 7.5 se kratko razmatra i rad seminara za kompleksnu analizu.

Posle mog povratka iz SAD-a 1990. godine, grupa za kompleksnu analizu radi:
(i) u oblasti kvazikonformnih preslikavanja i Teichmüller-ovih prostora, videti [22].

Od 2000. godine ova grupa počinje da publikuje:
(ii) radove o harmonijskim i kvazikonformnim preslikavanjima, videti [23].

Moja istraživanja (i grupe okupljene oko seminara) išla su u smeru analize. Uspeli smo da dodirnemo:
(iii) izoperimetrijski problem za funkcije više promenljivih, ali smo zaobišli fascinantnu oblast poliedara. U planu je i serija članaka o tačkama (i)- (iii) i drugim temama pomenutim u ovom članku, u kojima će biti dato više detalja.

2. Gehring-ov problem (1975. godina), simetrije i izometrije, izoperimetrija u prostoru

2.1. Problemi minimuma i maksimuma

U ovoj podsekciji se razmatra nekoliko izabranih elementarnih problema, koji mogu koristiti čitaocu kao uvod u probleme izoperimetrijskog tipa.

Primer 1. *U temenu O tetraedra, tri ivice grade prave uglove. Ako su A, B i C površine tri trougla koji se sreću u temenu O, naći površinu D trougla koji je naspram temena O.*

Rešenje. Važi da je $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$. △

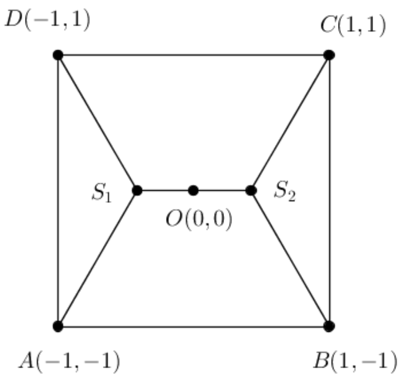
U vezi sa prethodnim primerom je sledeći izoperimetrijski problem: U familiji tetraedara za koje je zbir površina strana jednak p_0, gde je p_0 dato, odrediti optimalnu zapreminu.

Primer 2. *Neka su a, b i c dužine stranica trogla i x , y i z rastojanja tačke M od ovih stranica respektivno. Odrediti minimum funkcije $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.*

Skica rešenja. Neka je $X = (x, y, z)$ i $X_0 = (a, b, c)$ i P površina trougla. Tada je $d = |X|$. Ako je tačka $M(x, y, z)$ u trouglu, onda je $2P = ax + by + cz$. Otuda je $2P \leqslant |X||X_0|$. Kako se jednakost dostiže u prethodnoj nejednakosti, minimum je $2P/|X_0|$. Napomena: jednakost važi ako i samo ako je $X = sX_0$, $s \in \mathbb{R}$, tj. $2P = s(a^2 + b^2 + c^2)$, $s = 2P/|X_0|^2$; $d = s|X_0| = 2P/|X_0|$. △

Primer 3 (Steiner-ovo drvo)**.** *Četiri kuće nalaze se na temenima kvadrata Q^0 čija ivica ima dužinu* $1\,\mathrm{km}$. *Odrediti dužinu najkraćeg puta koji spaja kuće.*

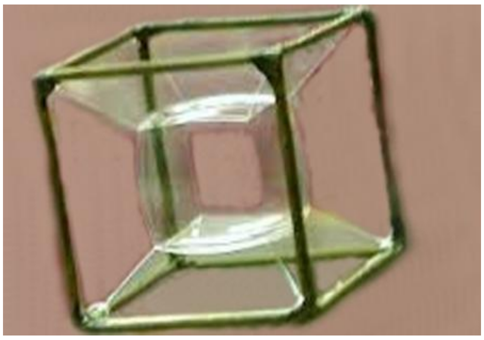
Rešenje. Neka je tačka O^0 presek dijagonala kvadrata. Pogodno je pretpostaviti da je tačka O^0 u koordinatnom početku. Homotetija H_k (definisana sa $H_k(z) = kz$, gde je $k > 0$ dato) preslikava kvadrat Q^0 u Q_k čija ivica ima dužinu $k\,\mathrm{km}$. Homotetija H_k preslikava najkraći put za Q^0 na najkraći put za Q_k. Za nalaženje rešenja (izračunavanje) pogodno je pretpostaviti da su ivice kvadrata dužine $2\,\mathrm{km}$. Neka su temena kvadrata tačke $A = (-1, -1)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 1)$ i $D = (-1, 1)$. Tačka $O = (0, 0)$ je presek dijagonala kvadrata. Neka je $E = (1, 0)$, $M = (x, 0)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ i $\alpha = \measuredangle ECM$. Tada je $|CM| = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $1 - x = \operatorname{tg}\alpha$. Optimalni put je simetričan u odnosu na koordinatne ose i sastoji se od duži. Dužina dela puta koji spaja tačke B i C sa O je $l(\alpha) = 2|CM| + x$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/4$. Potrebno je odrediti minimum funkcije $l(\alpha)$ na intervalu $I = [0, \pi/4]$. Kako je $l(\alpha) = 2|CM| + x = \dfrac{2}{\cos\alpha} + 1 - \operatorname{tg}\alpha$, dobija se da je $l'(\alpha) = \dfrac{2\sin\alpha - 1}{\cos^2\alpha}$, i stoga $l'(\alpha) = 0$ ako i samo ako $2\sin\alpha - 1 = 0$; $\alpha = \pi/6$ je jedino rešenje u intervalu I. Otuda je $x_0 = 1 - \operatorname{tg}(\pi/6) = 1 - 1/\sqrt{3}$. Neka je $S_1 = (-x_0, 0)$ i $S_2 = (x_0, 0)$. Optimalni put P_0, koji je simetričan u odnosu na koordinatne ose, sastoji se od duži AS_1, DS_1, S_1S_2, S_2B i S_2C (slika 1).



Slika 1. Steiner-ovo drvo

Neka su p_1 i p_2 dijagonale kvadrata. Put P^0 simetričan putu P_0 u odnosu na p_1 je takođe optimalan. Može se primetiti da je $P^0 = S_{p_1}(P_0) = S_{p_2}(P_0)$. $\triangle$

Interesantan je analogon Steiner-ovog problema (drva) u prostoru: Odrediti minimalanu površ razapetu pomoću skeleta kocke. Ako skelet (skup ivica) kocke stavimo u sapunicu (rastvor sapuna) nastaje minimalana površ razapeta pomoću skeleta (slika 2).



Slika 2. Skelet kocke i sapunica

Primer 4 (Bazen[6]). *Bazen u obliku kvadrata $\underline{Q} = ABCD$ stranice dužine a sa topolama u temenima proširiti tako da je novi bazen $\underline{R}$ kvadratnog oblika i topole ostanu na ivicama $\underline{R}$.*

(a) Konstruisati sva rešenja.
(b) Odrediti $\underline{R}$ (rešenje) za koje se dobija maksimalna površina.

Rešenje. Neka je O središte duži DC, $\underline{K}$ polukružnica sa središtem u O, poluprečnika $a/2$, $P \in \underline{K}$, c i d poluprave sa početkom u P koje sadrže C i D respektivno. Dalje, neka normala a iz A na d seče d u S i normala b iz B na c seče c u Q. Ako je R presek pravih a i b, treba dokazati da je $\underline{R} = \underline{R}(P) = PQRS$ kvadrat. Neka je P' presek normale p iz P na DC i neka je $h = h(P)$ dužina duži PP'. Tada je površina bazena $A(\underline{R}) = a^2 + 2ah$. Maksimalna vrednost h_0 za $h = h(P)$ kada $P \in \underline{K}$ dostiže se za $P = P_0$, gde je P_0 središte luka $\underline{K}$ i $h_0 = h(P_0)$ je $a/2$. Otuda maksimalna vrednost A_0 za površinu ($\underline{R}(P)$ dostiže se za $P = P_0$ i jednaka je $2a^2$.
Tačka $P = P_0$ je tačka na $\underline{K}$ koja pripada simetrali s duži DC; s sadrži O i ortogonalna je na DC; s je skup tačaka podjednako udaljenih od C i D ($M \in s$ ako i samo ako $MC = MD$). $\triangle$

[6] U problemu se ne razmatra plivanje.

Primer 5. *Površina kupe je $P = \pi rs$, gde je s dužina izvodnice, a r poluprečnik. Zašto se kupa može razrezati a zatim „razviti” u ravni u kružni isečak dužine luka $l = 2\pi r$ i poluprečnika $R = s$?*

Rešenje. U analizi 2 definišemo površinu površi, na primer, u $\mathbb{R}^3$. Neka je površ S zadata jednačinom $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, gde je D dopustiva oblast i $f \in C^1(\overline{D})$. Tada je

$$P(S) = \int_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy,$$

gde je $p = \partial f/\partial x$ i $q = \partial f/\partial y$. Na primer rotacijom duži $z = kx$, $0 \leqslant x \leqslant r$, oko z-ose dobija se kupa $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in B_r$, gde je B_r krug čiji je centar 0, a poluprečnik r. Ako je h visina kupe, a s dužina izvodnice, dobija se $h = kr$, $s^2 = r^2 + h^2$, $\sqrt{1 + k^2} = s/r$, i $\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + k^2} = s/r$. Otuda

$$P(S) = \int_{B_r} \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy = \pi\sqrt{1 + k^2}r^2 = \pi rs.$$

$\triangle$

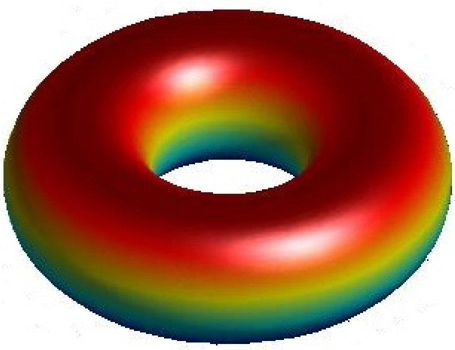
Primer 6. *Površina zarubljene kupe je $P = \pi(r + R)s$.*

Rešenje. Neka kupa K_1 sa temenom A ima izvodnicu dužine s_1 i poluprečnik R i neka kupa K_2 sa temenom A, koja je deo kupe K_1, ima izvodnicu dužine s_2 i poluprečnik r i neka je $P_1 = \pi Rs_1$, $P_2 = \pi rs_2$, $s_1 = s + s_2$, i $s_1/s_2 = R/r = k$. Otuda $s = (k - 1)s_2$, $Rs_1 = k^2rs_2$ i $P = P_1 - P_2 = \pi(k^2 - 1)rs_2 = \pi(k + 1)rs = \pi(r + R)s$. $\triangle$

Torus (slika 3) lako definišemo u parametarskom obliku. Na primer, ako kružnicu K u $yz-$ ravni čiji je centar $(0, R, 0)$, a poluprečnik r, $r < R$, rotiramo oko $z-$ose nastaje torus:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= (R + r\cos v)\cos u, \\ y(u, v) &= (R + r\cos v)\sin u, \\ z(u, v) &= r\sin v, \end{aligned}$$

gde su u, v parametri (u intervalu $[\,0, 2\pi)$). Može se primetiti da je R rastojanje od središta cevi torusa do središta



Slika 3. Torus

torusa a r poluprečnik cevi torusa. Torus se može razrezati po kružnici koja rotira i „ispraviti” u valjak V, tako da su zapremina valjka i površina omotača jednake zapremini i površini torusa. Formule za zapreminu i površinu torusa mogu se izvesti elementarno. Navedimo opštiji rezultat.

Prvo Pappus-Guldin-ovo pravilo:

Površina površi nastale rotacijom ravanske linije oko ose koja leži u ravni linije, a ne preseca liniju, računa se kao proizvod dužine linije i obima kružnice (ili dužine kružnog luka) po kojoj se kreće težište linije pri toj rotaciji. Otuda za površinu torusa P važi: $P = 4\pi^2 Rr = (2\pi r) \cdot (2\pi R)$.

Drugo Pappus-Guldinovo pravilo:

Neka je D oblast koja leži u nekoj ravni α. Zapremina tela koje nastaje rotacijom oblasti D oko ose koja leži u ravni α, a ne preseca oblasti D, računa se kao umnožak površine oblasti D i obima kružnice (ili duž ine kružnog luka) po kojoj se kreće težište linije pri toj rotaciji. Otuda za zapreminu torusa V važi: $V = 2\pi^2 Rr^2 = \left(\pi r^2\right) \cdot (2\pi R)$.

Za put γ u $\mathbb{R}^3$ definišimo $C(\gamma; r) = \cup_{a\in\gamma} B(a, r)$.

U vezi Gehring-ovog problema (videti podsekciju 2.2) razmatra se sledeće:

(A) Za fiksirano r u familiji $F = F(l_0)$ svih krivih dužine l_0 odrediti krive za koju je $V(C(\gamma; r))$ optimalno, gde V označava zapreminu.

2.2. Gehring-ov problem

Po završetku fakulteta 1973. pokušavao sam da pronađem neku oblast matematike koja bi me posebno zainteresovala. Sećam se da je profesor Marjanović[7] držao kurseve Analiza na mnogostrukostima i kasnije Morsovu teoriju. U oblasti analize jedino je B. Mirković držao poslediplomske kurseve vezane za funkcionalnu analizu i linearne topološke prostore. U to vreme nisam znao tačno kako su formirane doktorske studije u SAD-u, šta je matematička škola i naučni rad.

Profesor V. Mićić dao mi je knjigu sa konferencije održane u Canterbury -ju u kojoj sam našao neke probleme (videti podsekciju 7.4). Imao sam malo znanja i tražio sam neki problem čiju formulaciju mogu razumeti. Tako sam našao Gehring[8]-ov problem.

Zatvorene krive γ i γ_0 su ulančane ako γ_0 nije homotopno tački (nuli) u $\mathbb{R}^3 \setminus \gamma^*$.

Formulacija problema:

Ako su γ i γ_0 ulančane krive u $\mathbb{R}^3$ na rastojanju 1, dokazati da je dužina svake od ovih krivih najmanje 2π.

Pokušavao sam da konstruišem cilindre oko krivih, ali se problem stalno „otimao". Otišao sam u Šid da se malo odmorim i posetim porodicu[9]. Razgovarao sam sa domaćinom, ali Gehring-ov problem je stalno bio u glavi. Domaćin je ponudio da probamo domaće vino i iznenada, kao iz anegdote o Banach-u, slika rešenja se pojavila[10]. Video sam materijalne tačke kako se kreću i opisuju krive[11]. Zamislio sam tačku A_0 na jednoj krivoj npr. γ_0 i tačku A koja opisuje ovu krivu (kreće se duž krive); duži A_0A opisuju neku „površ" S_0. Tačka B koja opisuje krivu γ „probija" površ S_0 u nekoj tački B_0. Kriva γ_0 nema tačaka unutar sfere $S(B_0, 1)$ (slika 4).

Projekcija na sferu $S = S(O; r)$ je preslikavanje koje tački M dodeljuje tačku M' koja je presek poluprave OM i sfere S.

Projekcija Γ krive γ_0 na sferu pripada jediničnoj sferi $S(B_0, 1)$ i sadrži antipodalne tačke sfere. Ako su geodezijske linije na sferi lukovi velikih krugova, onda je dužina krive Γ najmanje 2π.

Pokušao sam da se setim kursa diferencijalne geometrije. Nisam odmah video dokaz, ali intuitivno sam osećao da je to tačno. Ostalo je da proverim da se dužina ne povećava pri projektovanju na sferu; video sam u glavi jednakokrake trouglove na sferi.

2.3. Simetrija

Pojam simetrije provlači se kroz celu istoriju ljudskog kreativnog stvaralaštva.

Ako je tačka M središte duži AA' kažemo da su tačke A i A' simetrične u odnosu na M. Ako za telo $\underline{B}$ postoji tačka O tako da za svaku tačku $A \in \underline{B}$ postoji tačka $A' \in \underline{B}$ tako da su A i A' simetrične u odnosu na O, kažemo da je telo $\underline{B}$ centralno simetrično telo i da je tačka O centar simetrije tela $\underline{B}$.

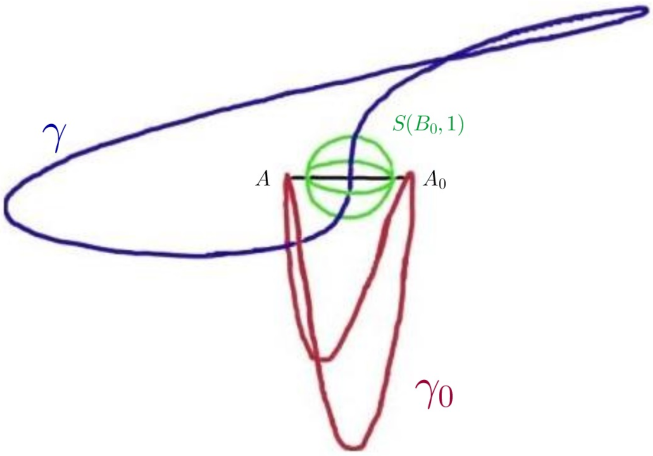
[7] Rođen 1931. godine, akademik, redovni član SANU od 1991. godine.

[8] F. W. Gehring (1925 - 2012). Bio je član National Academy of Sciences (od 1989. godine) i dobitnik nagrada „Order of the White Rose of Finland" (1986), „Onsager Medal" (1995) i „Steele Prize (2006)".

[9] Oženio sam se Anđelkom 1974. godine, naša prva ćerka Nataša rođena je 1975. godine.

[10] U kući domaćina Lj. Maukovića u Šidu, dok smo pijuckali domaće vino; možda je u vinu istina - „In vino veritas".

[11] Možda je vino uticalo.



Slika 4. Gehring-ov problem

U rešenju Gehring-ovog problema učestvuju sfera i kružnica, najsavršenije figure u svojim klasama. Sfera je simetrična u odnosu na svaku ravan kroz njen centar.

Klasifikacija kristalnih struktura svela se na klasifikaciju grupa simetrije kristala. Osnovno svojstvo kristala je pravilnost rasporeda strukturnih elemenata u simetričnu trodimenzionalnu formu koja se periodično ponavlja u prostoru. Kristali se sastoje od manjih strukturnih jedinica pravilno raspoređenih u 3D mrežu ili kristalnu rešetku. Idealan kristal ne može postojati - što zbog prisustva defekata, što zbog same njegove površine koja ne može biti beskonačna.

Stari Grci su simetriju povezivali sa Univerzumom iz jednostavnog razloga: smatrali su je lepom. Polazeći od ideje simetrije oni su izveli nekoliko pretpostavki. Pitagora (V vek p.n.e) koji je smatrao sferu najsimetričnijim i najsavršenijim oblikom, zaključio je da Zemlja ima oblik lopte (i otuda njena površ upravo oblik sfere).

Danas znamo da zemlja nije savršena lopta i da ima oblik elipsoida (geoida). Pošto Zemlja rotira, najveća sila je na ekvatoru, te izgleda kao košarkaška lopta kad neko sedne na nju. Takav oblik nazivamo spljoštenim sferoidom.

Interesantno je pratiti kako teorije evoluiraju i razmatrati neke zablude velikana: Npr. Pitagora je, takođe, pretpostavljao da se Zemlja okreće oko neke „centralne vatre", zajedno sa šest planeta poznatih u to vreme. Narodi starog veka voleli su simetriju i osim sfera oni su upotrebljavali i pravilne poliedre (svaki pravilni poliedar je ograničen površima istog oblika, pravilnim poligonima).

Tako su ustanovili interesantnu činjenicu, koju je dokazao Euklid, da postoji samo pet konveksnih pravilnih poliedara, mada postoji beskonačno pravilnih poligona; 3-gon, 4-gon, ... Dakle, ne postoji analogija između pravilnih poligona i poliedara.

Prva učenja Pitagorejaca o pet pravilnih poliedara kasnije je opširnije opisao Platon, tako da su oni u matematici poznati kao Platonova tela.

Ideja simetrije koristi se u raznim naukama i u matematici. Ipak u realnom svetu ne postoji idealna simetrija kao u matematici. Npr. kocka nije rešenje izoperimetrijskog problema u klasi poliedara sa $v = 8$ temena, mada izgleda prirodan kandidat. Npr. indirektne transformacije kocke su: 6 ravanskih refleksija definisanih u odnosu na bisektralne ravni unutrašnjih diedara i 3 ravanske refleksije zadate medijalnim ravnima ivica.

Krug je u osnovi simetričan geometrijski lik, gde je osa simetrije bilo koji prava koja prolazi kroz centar kruga i pripada ravni u kojoj se krug nalazi (simetričan u odnosu na bilo koji prečnik kruga). Svaka tačka kruga će se preslikati u „naspramnu" tačku u odnosu na bilo koji svoj prečnik. Krug je i centralnosimetrična figura u odnosu na centar kruga. Svakodnevnim jezikom bismo rekli da je „veoma simetričan". Jezikom geometrije krug ima beskonačno osa simetrije.

U ravni, rotacije oko koordinatnog početka mogu se zapisati u obliku $R(z) = e^{i\alpha}z$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Kvadrat, s druge strane, ima manje simetrija od kruga. Ako kvadrat $Q = ABCD$ (pozitivno orjentisan) rotiramo za $90°$ oko tačke O (presek dijagonala kvadrata), temena ciklično menjaju mesta, ali se skup Q kao celina ne pomera. Ako je O koordinatni početak, rotacija za $90°$ u pozitivnom smeru data je sa $R(z) = iz$. Kompozicija dve rotacije za $90°$ oko tačke O daje rotaciju za $180°$ oko tačke O; važi $(R \circ R)(z) = i(iz) = -z$.

Štaviše, ako kvadrat rotiramo za 90° ili 180° u bilo kom smeru, pri čemu je centar rotacije presek dijagonala kvadrata, preslikani kvadrat će izgledati isto. Ako kvadrat čija je jedna ivica paralelna sa x-osom, rotiramo za 45°, njegove dijagonale biće paralelne sa koordinatnim osama; izgledaće drugačije, kao dijamant.

Kvadrat je centralnosimetrična figura. Centar simetrije jeste presek dijagonala. Kvadrat ima četiri ose simetrije: dve dijagonale i dve prave koje prolaze kroz sredine naspramnih stranica. Ovim preslikavanjima svaka tačka kvadrata menja svoj položaj, ali krajnji oblik figure ostaje neizmenjen.

2.4. Poliedri

Politopi (konveksni) su figure koje se definišu kao konveksni omotači konačnog broja tačaka u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$. Ako je $n = 2$ nazivamo ih poligonima, a ako je $n = 3$ poliedrima. Pravilni poliedri su pravilni konveksni poliedri čije su zajedničke karakteristike:

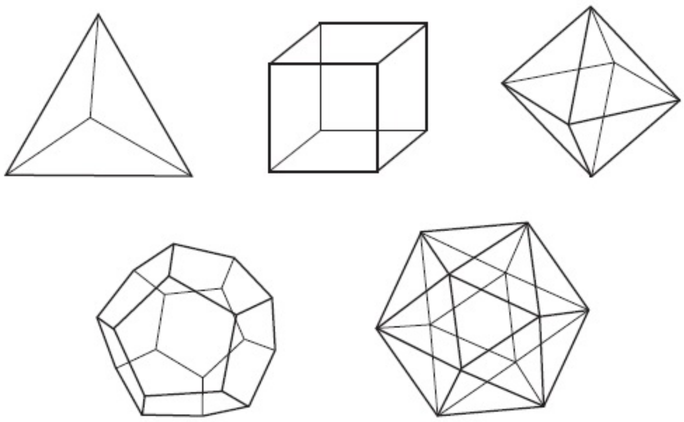
Svaki pravilni poliedar je ograničen površima istog oblika.

Ove površi su pravilni mnogouglovi.

Iz svakog temena jednog pravilnog poliedra polazi jednak broj ivica.

Jedan pravilni poliedar se ne može dobiti spajanjem više drugih.

Ovih geometrijskih tela ima svega pet: tetraedar, heksaedar (kocka), oktaedar, dodekaedar i ikosaedar. Ograničeni su respektivno sa 4 pravilna trougla, 6 pravilnih kvadrata, 8 pravilnih trouglova, 12 pravilnih petouglova i 20 pravilnih trouglova (slika 5).



Slika 5. Pravilni poliedri

Za strane poliedra koriste se i nazivi pljosan ili lice.

Teorema 1. *Ako imamo triangulaciju proste zatvorene poligonalne linije u ravni sa t temena (čvorova), i ivica i s trouglova tada je na osnovu Euler-ove formule $t - i + s = 1$.*

Ako je $t = v$ broj temena (čvorova), $i = e$ broj ivica i $s = f$ broj lica (strana) konveksnog 3-dimenzionog poliedra P, tada je $\chi(P) = v - e + f = 2$.

Euler nije prvi dao korektan dokaz ove formule. Danas se Euler-ova formula (ubraja se u 10 omiljenih i najuticajnijih teorema) posmatra u opštijem kontekstu povezanog grafa (struktura koja se sastoji od tačaka i segmenata koji ih spajaju tako da formiraju jedan deo).

Pravilan poliedar kome lica imaju po m stranica, a rogljevi po n ivica ima red r grupe simetrija koji se može izraziti jednakostima: $r = 2mp + 2nt = 4i$, gde su p broj lica, t broj temena, a i broj ivica tog poliedra.

U tabeli 1 su date neke numeričke karakteristike pravilnih poliedara.

Tabela 1. Pet pravilnih poliedara

Ime	tetraedar	heksaedar (kocka)	oktaedar	dodekaedar	ikosaedar
Strane	4 trougla	6 kvadrata	8 trouglova	12 petouglova	20 trouglova
Broj ivica/ temena	6/4	12/8	12/6	30/20	30/12
Broj ivica u temenu	3	3	4	3	5

Euklidski prostor $\mathbb{E}^n$ se naziva n-dimenzionalni prostor $\mathbb{R}^n$ u kome je uveden skalarni proizvod: $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$ i otuda rastojanje $d_e(x, y) = (\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2)^{1/2}$. Svaku bijekciju I prostora na sebe nazivamo izometrijskom transformacijom ili izometrijom ako je $d_e(A, B) = d_e(I(A), I(B))$ za svaki par tačaka (A, B), tj. ako je slika svakog para tačaka (A, B) njemu podudaran par tačaka $(I(A), I(B))$.

Ako izometrijska transformacija I prostora ima četiri nekomplementarne invarijantne tačke, onda je $I = Id$ (koincidencija, odnosno identitet).

Neka je p prava u kompleksnoj ravni $\mathbb{C}$. Neidentičku izometriju prostora kojoj je svaka tačka prave p invarijantna nazivamo simetrijom u kompleksnoj ravni sa osnovom p i označavamo sa S_p.

Neka je p ravan u euklidskom prostoru $\mathbb{E}^n$. Ravanskom refleksijom ili ravanskom simetrijom prostora sa osnovom p zovemo neidentičku izometriju prostora kojoj je svaka tačka ravni p invarijantna. Obeležavamo je sa S_p. Ravan p zovemo osnovom ili ravni refleksije.

Važno je napomenuti da ravanska refleksija van ravni p nema invarijantnih tačaka.

Neka je, $S_{\mathbb{R}}(z) = \overline{z}$ simetrija u odnosu na $\mathbb{R}$, p prava određena tačkama 0 i $e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada je $S_p(w) = e^{i\alpha} S_{\mathbb{R}}(e^{i\alpha} w) = e^{i2\alpha}\overline{w}$ i $(S_p \circ S_{\mathbb{R}})(z) = e^{i\beta} z$, gde je $\beta = 2\alpha$. Dakle, kompozicija dve refleksije je rotacija i obratno, svaka rotacija se može napisati kao kompozicija dve refeleksije.

Neka je S izometrija kompleksne ravni. Tada preslikavanje $A(z) = S(z) - S(0)$ je izometrija kompleksne ravni i $A(0) = 0$. Ako je $A(1) = e^{i\alpha}$, tada je $A(z) = e^{i\alpha} z$. Dakle, svaka izometrija kompleksne ravni je kompozicija najviše dve refleksije. Slično važi i u prostoru. Preciznije, važi sledeća:

Teorema 2 (Euler, 1776)**.** *Svaka izometrija prostora može se predstaviti kao kompozicija najviše četiri ravanske refleksije prostora.*

Euler-ova teorema o rotaciji tvrdi da je, u trodimenzionalnom prostoru, bilo koje kretanje krutog tela, tako da jedna tačka krutog tela ostaje fiksna (nepokretna), rotacija oko neke ose koja prolazi kroz nepokretnu tačku. To znači da je kompozicija dve rotacije takođe rotacija. Stoga skup rotacija ima strukturu grupe, poznatu kao: rotaciona grupa tela.

U teoriji grafova, graf je reprezentacija skupa objekata gde su neki parovi objekata povezani. U matematičkom apstraktnom smislu povezane objekte interpretiramo kao tačke i zovemo temena (vrhovi), a veze koje povezuju neke parove vrhova nazivaju se ivicama. Tipično, graf se prikazuje u obliku dijagrama kao skup tačaka u kome su neka temena povezana linijama ili putevima. Grafovi su jedan od predmeta proučavanja u diskretnoj matematici.

Interpretacija grafa:

Neka je dat skup V i neka je $I \subset V \times V$ simetrična relacija koja ne sadrži dijagonalne elemente. Skup $G = (V, I)$ nazivamo *neorijentisan graf* ili samo *graf*, elemente skupa V nazivamo temena, a elemente skupa I *ivice*. Ako je skup V konačan onda kažemo da je graf $G = (V, I)$ *konačan*. Niz temena $v_1, v_2, \ldots, v_n$ grafa G nazivamo put ako $(v_k, v_{k+1}) \in I$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$, a put nazivamo kontura ako je $v_1 = v_n$. Konačan graf koji je povezan i koji ne sadrži konturu nazivamo *stablo*.

Za $a \in V$, broj elemenata skupa $\{v \in V : (a, v) \in I\}$ nazivamo stepen temena i označavamo obično sa d ili d_k. Ako postoji 1-1 preslikavanje skupa V na V_1 tako da $(a, b) \in I$ ako i samo ako $(fa, fb) \in I_1$, kažemo da su grafovi $G = (V, I)$ i $G_1 = (V_1, I_1)$ izomorfni.

Poliedru P pridružujemo graf $G = G(P) = (V, I)$, gde je V skup temena poliedra i $(a, v) \in I$ ako je $[a, v]$ ivica poliedra.

Poliedri P i P' su kombinatorno ekvivalentni ako su grafovi $G(P)$ i $G(P')$ izomorfni. Graf je planarni (u ravni) ako se može realizovati u ravni tako da se njegove ivice ne seku.

Teorema 3. *Konveksnom* 3*-dimenzionom poliedru pridružuje se planarni graf (u ravni).*

Skiciraćemo dva postupka:

a) Isecite jedno lice duž ivica koje ga ograničavaju i ispravite poliedar bez odstranjenog lica tako da leži u ravni i tako da odstranjeno lice bude neograničena komponenta nastalog grafa P'. Kako se neograničena komponenta ne uračunava u broj poligona grafa P', nalazimo $\chi(P) = \chi(P') + 1$.

b) Zamislite da posmatrate konveksan poliedar P iz tačke izvan poliedra koja je blizu nekog 2-dimenzionog lica F_0. Ako je ovo lice providno (npr. od stakla), videćemo sva ostala lica (i ivice) poliedra (kroz lice F_0). Preciznije, neka x^0 bude unutrašnja tačka lica F_0 i tačka x_0 izvan poliedra blizu x^0 tako svaki interval $[x_0, v]$, gde je v teme poliedra P koje nije teme 2-dimenzionog lica F_0, seče F_0 u nekoj unutrašnjoj tački. Neka je π_{F_0} radijalna projekcija iz tačke x_0 na ravan, koja sadrži lice F_0. Projekcije temena i ivica poliedra P formiraju planarni graf $G(P)$, koji zovemo graf poliedra P. Projekcije preostalih 2-dimenzionih lica poliedra P formiraju podelu F_0 na konačno mnogo poligona. U vezi pristupa b) videti npr. [36].

c) Pretpostavimo da konveksan poliedar P nema zajedničkih tačaka sa $xy-$ravni. Ako su $v_1, v_2, \ldots, v_n$ temena poliedra P, tada postoji tačka v_0 tako da v_0 ne pripada nijednoj ravni koju određuju bilo koja tri temena poliedra (specijalno, poluprave v_0v_k, $k = 1, 2, \cdots, n$, nemaju zajedničkih tačaka izuzev tačke v_0) i da poluprave v_0v_k, $k = 1, 2, \cdots, n$, nisu paralelne sa $xy-$ravni. Neka je π^{v_0} radijalna projekcija iz tačke v_0 na $xy-$ravan. Projekcije temena i ivica poliedra P formiraju odgovarajući graf G'. Temena ovog grafa su tačke v'_k, koje su presek poluprave v_0v_k sa $xy-$ravni. Da li je G' planarni graf?

2.5. Izoperimetrija u prostoru

O izoperimetrijskom problemu za poliedre videti u [4]. Izoperimetrijski količnik Q za poliedar P definiše se kao $Q(P) = S^3/V^2$, pri čemu je S površina, a V zapremina poliedra P.

U literaturi se koristi i recipročna definicija.

Neka su zapremina i površina poliedra P redom jednake V i S, neka je r_V poluprečnik lopte čija je zapremina jednaka V i neka je r_S poluprečnik sfere čija je površina jednaka S. Tada važi $V = 4\pi r_V^3/3$ i $S = 4\pi r_S^2$. Ako je $R_V = r_V^3$ i $R_S = r_S^2$ definiše se

$$\underline{Q} = \underline{Q}(P) = R_V^2/R_S^3 = (3V/4\pi)^2 \cdot (4\pi/S)^3 = 36\pi V^2/S^3.$$

U nastavku teksta će biti korišćena prva definicija izoperimetrijskog količnika.

Steiner je 1842. godine postavio pitanje: Da li pravilni poliedri imaju minimalan izoperimetrijski količnik u svojoj kombinatornoj klasi?

Zna se da je odgovor pozitivan, izuzev za ikosaedar za koji je pitanje još uvek otvoreno.

Za fiksirano f_0 (broj lica), označimo sa $P_{face}(f_0)$ (pogodno je koristiti i kraću notaciju $P_f(f_0)$[12] ili $P(f_0)$) skup poliedara koji imaju f_0 lica.

Za fiksirano f Minkowski je 1897. godine pokazao da postoji optimalni poliedar u $P(f)$. Oktaedar ($f = 8$) i ikosaedar ($f = 20$) nisu optimalni u $P_f(8)$ i $P_f(20)$.

Teorema 4. *Za svaki poliedar sa f lica važi*

$$A^3/V^2 \geqslant 54(f-2)(4\sin^2\omega_f - 1)\operatorname{tg}^2\omega_f, \tag{1}$$

gde je

$$\omega_f = \frac{\pi f}{6(f-2)}.$$

Jednakost važi samo za pravini tetraedar, kocku i dodekaedar.

Dokaz (1) je težak i prvi dokazi su bili nekompletni.

Dakle pravilni tetraedar, kocka i dodekaedar su optimalni u $P_f(4)$, $P_f(6)$ i $P_f(12)$ respektivno.

Hipoteza 1. *Za poliedre sa v temena važi*

$$A^3/V^2 \geqslant \frac{27\sqrt{3}}{2}(v-2)(3\operatorname{tg}^2\omega_v - 1), \tag{2}$$

gde je

$$\omega_v = \frac{\pi v}{6(v-2)}.$$

[12] f označava da se radi o broju lica.

Jednakost važi za tetraedar, oktaedar i ikosaedar.

Za fiksirano v_0 označimo sa $P_v(v_0)$ skup poliedara koji imaju tačno v_0 temena. Poznato je da kocka ($v = 8$) i dodekaedar ($v = 20$) nisu optimalni u $P_v(8)$ i $P_v(20)$ respektivno. Ako je hipoteza tačna, tetraedar, oktaedar, i ikosaedar su optimalni u $P_v(4)$, $P_v(6)$ i $P_v(12)$ respektivno.

2.6. Rešenje Gehring-ovog problema. Dokaz

Sada će biti naveden formalni (matematički) dokaz.

Za tačku x i skup A se uvodi oznaka

$$c(x, A) = \{tx + (1-t)y : 0 \leqslant t \leqslant 1, y \in A\}.$$

Dokaz se sastoji iz nekoliko tačaka:

a) Dokazati da je za svako $x \in \gamma^*$, $c(x, \gamma^*) \cap \gamma_0^* \neq \emptyset$;

b) Neka je $x_* \in \gamma^*$ i $y_0 \in c(x_*, \gamma^*) \cap \gamma_0^*$. Tada postoji $y_* \in \gamma^*$ i $0 < t < 1$ tako da je $y_0 = tx_* + (1-t)y_*$. Definišimo $\Gamma = f \circ \gamma$, gde je $f(y) = y_0 + \dfrac{y - y_0}{\|y - y_0\|}$;

c) Dokazati da je $|\Gamma| \leqslant |\gamma|$;

d) Zatvorena kriva Γ pripada jediničnoj sferi $S(y_0, 1)$ i sadrži antipodalne tačke $f(x_*)$ i $f(y_*)$ sfere $S(y_0, 1)$. Kako su geodezijske linije na sferi lukovi velikih krugova, otuda sledi da je dužina krive Γ najmanje 2π.

Kompletno rešenje ovog problema, koji je postavio Gehring, dato je u [17]. O ovom i drugim problemima u kompleksnoj analizi videti u [3]. U drugom delu članka [3] dat je pregled lekcija Hayman-a, o progresu o problemima postavljenim u dva prethodna članka.

L. Milin[13] je odmah rekao da je rešenje korektno, profesor Marjanović je pogledao detaljnije i saglasio se da je dokaz tačan i da treba pisati Gehring-u. V. Mićić je dobio odgovor u kome Gehring kaže da je i jedan njegov student takođe došao do rešenja.

Rukopis sam predao u Matematički Vesnik. Recenzent S. Mardešić[14] je pohvalio rezultat (kaže da je dokaz ispravan) i predlaže da se tehnički rad dotera; ako se sećam tražio je da se pretpostavi da su krive rektificibilne. Smatrao sam ako nisu rektificibilne da možemo smatrati da imaju beskonačnu dužinu; možda je profesor S. Mardešić video nešto više. M. Edelstein i B. Schwarz kasnije, daju dokaz [9] ali ne citiraju moj rad. Israel J. Math je ugledan časopis i ovo pokazuje kako je odnos između časopisa relativan.

U toku pisanja ovog rukopisa došao sam do sledeće generalizacije Gehring-ovog problema:

Neka je c put u $\mathbb{R}^3$. Za $x, y \in \mathbb{R}^3$ definišimo $r(x, y) = \sup\{d_e(z, \mathrm{tr}(c)) : z \in [x, y]\}$ i $r(c) = \sup\{r(x, y) : x, y \in \mathrm{tr}(c)\}$, gde d_e označava euklidsko rastojanje. Tada je $|c| \geqslant 2\pi r(c)$.

Na osnovu rešenja Gehring-ovog problema, izabran sam za asistenta na Institutu za Matematiku PMF-a 1975. godine.

3. Hardy-jevi prostori

3.1. Neke definicije, stavovi i primeri

Ako se sa z obeleži kompleksan broj onda se realni i imaginarni deo kompleksnog broja z obično obeležavaju sa x i y, odnosno važi $z = x + iy$. Ovaj zapis se naziva algebarski zapis kompleksnog broja. Osim algebarskog zapisa često se koristi i eksponencijalni zapis kompleksnog broja. Ako se sa r i θ obeleže modul i argument kompleksnog broja z onda važi $z = re^{i\theta}$ i ovaj zapis se naziva eksponencijalni zapis.

Uobičajeno je da i neki podskupovi skupa $\mathbb{C}$ imaju standardne oznake. Tako

jedinični disk, $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, se obeležava sa $\mathbb{D}$;
jedinična kružnica, $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, se obeležava sa $\mathbb{T}$;
gornja poluravan, $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$, se obeležava sa $\mathbb{H}$.

[13] Imao je medalje sa olimpijade i važio je za talentovanog matematičara.

[14] Rođen 1927. godine, akademik, redovni član HAZU, od 2013. godine Fellow of American Mathematical Society

Neka je $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$. Familija funkcija $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $y > 0$ se definiše na sledeći način $f_y(x) = f(z) = f(x+iy)$.

U kompleksnoj analizi, Hardy-jevi prostori (ili Hardy-jeve klase) H^p su prostori analitičkih funkcija na jediničnom disku ili gornjoj poluravni. Uveo ih je F. Riesz 1923. godine [33], a dobili su ime po G.H. Hardy-ju, zbog članka [12]. U realnoj analizi Hardy-jevi prostori, $\mathrm{real} - H^p$, su određeni prostori distribucija na realnoj pravoj $\mathbb{R}$, koje su (u smislu distribucija) granične vrednosti holomorfnih funkcija iz kompleksnih Hardy-jevih prostora. Preciznije, distribucija g na $\mathbb{R}$, pripada $\mathrm{real} - H^p$ ako postoji $f \in H^p(\mathbb{H})$, tako da f_y teži g u smislu distribucija kada $y \to 0+$. Povezani su sa L^p prostorima koji se proučavaju u realnoj i funkcionalnoj analizi. Za $1 \leqslant p \leqslant \infty$ realni Hardy-jevi prostori su određeni podprostori L^p prostora. Za $p < 1$, L^p prostori imaju neka „nepoželjna” svojstva, dok su Hardy-jevi prostori mnogo pogodniji za proučavanje.

Za funkciju $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definiše se

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$$

i

$$f_*(\theta) = f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}), \text{ ako taj limes postoji.}$$

Za funkciju $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, definiše se $\underline{f}(\theta) = f(e^{i\theta})$. Umesto $\underline{f}$ koristi se i oznaka f_*.

Klasa svih holomorfnih (respektivno harmonijskih) funkcija u oblasti D se obeležava sa $H(D)$ (respektivno sa $h(D)$).

Neka je $0 < p \leqslant \infty$. Za funkciju $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definiše se

$$\begin{aligned} M_p(f;r) &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it}|^p dt \right)^{1/p}, && \text{ako je } 0 < p < \infty \\ M_\infty(f;r) &= \sup_{t\in[\,0,2\pi]} |f(re^{it})|, && \text{ako je } p = \infty \end{aligned}$$

i $\|f\|_p = \lim\limits_{r\to 1} M_p(f;r)$.

Klasa H^p (respektivno h^p) sastoji se od svih $f \in H(\mathbb{D})$ (respektivno svih $f \in h(\mathbb{D})$) za koje je $\|f\|_p < \infty$.

Za dato $f \in H^p$, $p > 0$, radijalni limes $f^*(e^{i\theta})$ postoji za skoro svako θ i $f^* \in L^p(\mathbb{T})$. Prostori $L^p(\mathbb{T})$ i $L^p(0,2\pi)$ se identifikuju na prirodan način tako što se funkciji $g \in L^p(\mathbb{T})$ pridruži funkcija $\underline{g} \in L^p(0,2\pi)$.

Ako $g \in L^1(\mathbb{T})$ onda se Fourier-ovi koeficijenti funkcije g označavaju sa $\hat{g}(n)$ ili $\hat{g}_n$. Slično ako je funkcija f holomorfna u okolini 0, Taylor-ovi koeficijenti funkcije f se označavaju sa $\hat{f}(n)$ ili $\hat{f}_n$ i u tom slučaju piše se $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)z^n$.

Sa $H^p(\mathbb{T})$ se obeležava podskup skupa $L^p(\mathbb{T})$ koji se sastoji od svih graničnih funkcija f^* kada f pripada H^p. Za $p \geqslant 1$ važi

$$g \in H^p(\mathbb{T}) \quad \text{ako i samo ako} \quad g \in L^p(\mathbb{T}) \text{ i } \hat{g}(n) = 0 \text{ za svako } n < 0.$$

Ako $g \in L^p(\mathbb{T})$, $p \geqslant 1$ onda je $f = P[g]$ harmonijska funkcija na $\mathbb{D}$; $f \in H^p$ ako i samo ako $g \in H^p(\mathbb{T})$. Ako $g \in H^p(\mathbb{T})$, onda je $\hat{g}(n) = 0$ za svako $n < 0$ i $f(z) = P[g](z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \hat{g}(n)z^n$, za svako $z \in \mathbb{D}$.

Definiše se

$$S(t,z)=\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z},\quad |z|<1, \tag{3}$$

$$S[g]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S(t,z)g(t)dt, \tag{4}$$

$$P_r(t)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\ \text{ i} \tag{5}$$

$$P[\psi]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(t)\psi(t)dt. \tag{6}$$

Ako $f\in H^p$, $p\geqslant 1$, onda je $f=S[\mathrm{Re}f^*]+i\,\mathrm{Im}\,f(0)$.
Funkcija

$$A(z)=S(0,z)=\frac{1+z}{1-z},\quad |z|<1,$$

pripada H^p, za $p<1$ i njena granična funkcija je data sa $A^*(e^{i\theta})=i\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Treba podvući da je $\mathrm{Re}\,A_r(e^{it})=P_r(t)$. Kako je $\mathrm{Re}\,A^*$ jednak nuli, sem u jednoj tački, ne može se rekonstrusati A pomoću $\mathrm{Re}\,A^*$. Ako je φ test funkcija na $\mathbb{T}$, onda $\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,A_r(e^{it})\varphi(e^{it})dt=\int\limits_0^{2\pi}P_r(t)\varphi(e^{it})dt\to 2\pi\varphi(1)$, kada $r\to 1-$. Otuda, granična vrednost funkcije $\mathrm{Re}\,A$ kada $r\to 1$ postoji u smislu distribucija i jednaka je $c\delta$ gde je δ Dirac-ova distribucija u $z=1$ i $c=2\pi$.

Za $1\leqslant p<\infty$, realna funkcija na jediničnoj kružnici pripada $\mathrm{real}-H^p(\mathbb{T})$ ako je realni deo te funkcije iz $H^p(\mathbb{T})$.

Za $p<1$, realna distribucija pripada $\mathrm{real}-H^p(\mathbb{T})$ ako je granična vrednost (u smislu distribucija) funkcije iz H^p. Dirac-ova distribucija δ_z, gde je z tačka sa jedinične kružnice, pripada $\mathrm{real}-H^p(\mathbb{T})$ za svako $p<1$.

3.2. Nejednakost Petrovića, Karamate, Smirnov-a i Kolmogorov-a

Neka je $L_\theta=\{re^{it}\in\mathbb{C}:|t|\leqslant\theta\}$ i $z_k=r_ke^{i\theta_k}\in L_\theta$.

Tvrđenje 1. *Ako je $\theta\in(0,\pi/2)$, onda je* $\sum|z_k|\leqslant\frac{1}{\cos\theta}\sum\mathrm{Re}\,z_k$.

Tvrđenje 2. *Ako $\theta\in(0,\pi/2)$ i $f:[a,b]\to L_\theta$ neprekidna (opštije integrabilna) funkcija, onda je*

$$\int\limits_a^b|f(t)|dt\leqslant\frac{1}{\cos\theta}\,\mathrm{Re}\int\limits_a^b f(t)dt.$$

Prema Mitrinoviću (videti [30]), tvrđenje 1 (za slučaj $\theta=\pi/4$) se prvi put pojavilo u Petrovićevom članku iz 1917. godine. Petrović je dokazao opšti slučaj tek 1933. godine. Tvrđenje 2 je navedeno u Karamatinoj knjizi [13].

Jedna verzija tvrđenja 2 koja se pripisuje Smirnov-u (1928) i Kolmogorov-u koristi se za dokaz sledećeg tvrđenja (videti [31], strana 93).

Tvrđenje 3. *Ako je $f:\mathbb{D}\to L_\theta$ holomorfna, onda $f\in H^p$, gde je $\theta_0=p\theta=\pi/2$.*

Dokaz. Neka je F grana funkcije f^p. Kako $F:\mathbb{D}\to L_{\theta_0}$, sledi $\int_0^{2\pi}|F(t)|dt\leqslant\frac{1}{\cos(\theta_0)}\,\mathrm{Re}\,F(0)$. $\square$

4. Izoperimetrijska nejednakost

U dogovoru sa profesorom Dajovićem odlučio sam da proučavam ekstremalne probleme u H^p prostorima.

Došao sam na ideju da ovu temu povežem sa izoperimetijskom nejednakošću koja je jedan od najznačajnijih problema geometrije; polazne rezultate objavio sam u magistarskom radu, [18], 1976. godine i doktorskoj disertaciji, [19], 1979. godine.

Može se reći da je problem izoperimetrijske nejednakosti star koliko i matematika uopšte. Međutim njegovi detaljni i korektni dokazi su ipak relativno novijeg datuma. Izoperimetrijska nejednakost se najčešće formuliše kao nejednakost između povšine A i obima L neke prosto-povezane ograničene figure u ravni i ta nejednakost glasi:

$$A \leqslant \frac{L^2}{4\pi}. \tag{7}$$

Figure istog obima nazivaju se izoperimetrijske figure.

Moguće formulacije izoperimetrijskog problema:

(A) Između svih zatvorenih izoperimetrijskih n-touglova, odrediti n-tougao koji ograničava najveću površinu.

(B) Između svih zatvorenih krivih u ravni, date dužine L, odrediti krivu koja ograničava najveću površinu.

Važi sledeće:

Tvrđenje 4. *Između svih zatvorenih krivih u ravni, date dužine L, kružnica dužine L ograničava najveću površinu.*

U nekom smislu je vrlo zadovoljavajuće da je krug (kružnica) rešenje problema (B). Krug ima jedinstven oblik, simetričan je u odnosu na svaku pravu u njegovoj ravni koja sadrži njegov centar. Krug je „savršen”, a time je dobar kandidat za rešenje problema (B). Poligoni su, može se reći, „manje savršeni” nego krug. Ipak u svakoj familiji poligona postoji onaj koji je „manje nesavršen” (pravilan poligon) od ostalih. Zanimljivo, i u njihovim familijama taj „manje nesavršeni oblik” je rešenje problema (A).

Na primer važi:

1) Od svih trouglova jednakog obima jednakostranični trougao ima najveću površinu.
2) Od svih četvorouglova jednakog obima, kvadrat ima najveću površinu.
3) Specijalno, među svim pravougaonicima jednakog obima, kvadrat ima najveću površinu (ova činjenica je ekvivalentna sa nejednakošću između geometrijske i aritmetičke sredine).
4) Među bilo kojim konačnim brojem pravilnih poligona jednakog obima, onaj sa najvećim brojem strana ima najveću površinu.
5) Od svih n-touglova (n fiksirano) jednakog obima pravilan n-tougao ima najveću površinu (ovo je poznato kao Zenodorus teorema, videti [35] , str. 11-15.).
6) Svaki od navedenih stavova ima ekvivalent u kome je navedena površina.

A1) Steiner je uveo metod pravog ugla. Prvo navodimo elementarni metod pravog ugla. Neka je α ugao kod temena M trougla AMB, $a = |AM|$ i $b = |BM|$. Tada je površina trougla AMB, $P = ab \sin \alpha$. Ako se pretpostavi da ugao AMB nije prav, sprovodi se sledeći postupak:

1) Rotira se duž BM oko M tako da tačka B pređe u tačku B^*, duž BM u duž B^*M i ugao AMB^* bude prav. Na ovaj način definišemo jedno preslikavanje $\mathcal{R}$ koje je rotacija oko M. Ako je $\widehat{P}$ površina trougla AMB^*, tada je $P < \widehat{P}$.

U primenama se koristi sledeća forma:

2) Neka je c kriva koja spaja tačke B i M i nema drugih zajedničkih tačaka sa trouglom AMB i neka je Λ figura koju ograničavaju duži MA, AB i kriva c. Ako je $c^* = \mathcal{R}(c)$ i Λ^* figura koju ograničavaju duži MA, AB^* i kriva c^*, onda je $\operatorname{area}(\Lambda) < \operatorname{area}(\Lambda^*)$ (sa area je obeležena površina).

A2) Neka je duž AB dužine d, $l > d$ i k kružnica koja sadrži tačke A i B tako da je jedan od lukova kružnice k, recimo luk k_0, na koje tačke A i B dele krug k, dužine l. Označimo drugi luk sa k_1 i neka je c kriva dužine l

koja spaja tačke A i B, i G oblast koju ograničavaju k_1 i c. Neka je D oblast koju ograničavaju duž AB i kriva c, a D_0 oblast koju ograničavaju duž AB i luk k_0. Na osnovu izoperimetrijske teoreme sledi $\operatorname{area}(G) \leqslant \operatorname{area}(k)$ i stoga $\operatorname{area}(D) \leqslant \operatorname{area}(D_0)$.

A3) Ako je duž AB dužine d tetiva kruga k i l dužina manjeg od lukova na koje tačke A i B dele krug k, tada je $l \leqslant \pi d/2$.

A4) Ako je γ Jordan-ova zatvorena kriva i $D = Int(\gamma)$ konveksan skup, tada je $L \leqslant \pi d_2$, gde je L dužina krive γ i d_2 dijametar skupa D.

Otuda važi:

Tvrđenje 5. *Među svim ravanskim krivim fiksne dužine i sa fiksnim krajnjim tačkama A i B, kružni luk zatvara maksimalnu površinu između njega i duži određene tačkama A i B.*

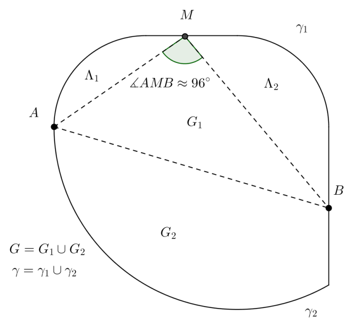
Ako je dat $n-$ tougao oko kog se ne može opisati kružnica, onda se može konstruisati $n-$tougao čije su stranice jednake stranicama datog $n-$tougla i oko kog se može opisati kružnica. Sledeća teorema (teorema Cramer-a) tvrdi da je površina tako konstruisanog $n-$tougla veća od površine datog $n-$tougla.

Teorema 5 (Cramer)**.** *Od svih $n-$ touglova sa datim stranama $a_1, a_2, \ldots, a_n$ najveću površinu ima $n-$ tougao oko koga se može opisati krug.*

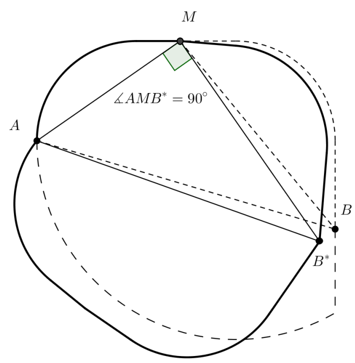
Dokaz u [14] koristi teoremu o izoperimetriji: Od svih krivih date dužine najveću površinu ograničava krug. Postavlja se pitanje da li se dokaz može izvesti na osnovu Steiner-ovog metoda pravog ugla?

Neka kriva γ ograničava figuru G površine S i neka tačke A i B dele krivu γ na dve krive γ_1 i γ_2 jednake dužine. Duž AB deli G na dve oblasti G_1 i G_2 površine S_1 i S_2; neka je na primer $S_1 \geqslant S_2$.

Neka $M \in \gamma_1$. Označimo figure ograničene lukom $\widehat{AM}$ ($\widehat{BM}$) krive γ_1 i duži AM (BM) respektivno sa Λ_1 i Λ_2 (slika 6).



Slika 6. Metod pravog ugla



Slika 7. Metod pravog ugla

Ako ugao AMB nije prav, rotirajmo figuru Λ_2 oko M tako da tačka B pređe u tačku B^*, luk $\widehat{BM}$ u luk $\widehat{B^*M}$ i tako da ugao AMB^* bude prav. Neka se kriva $\widehat{\gamma}$ sastoji od lukova $\widehat{AM}$ i $\widehat{B^*M}$ i njima simetričnih u odnosu na AB^* i neka su $\widehat{S}$ i $\widehat{L}$ respektivno površina oblasti $\widehat{G} = Int(\widehat{\gamma})$ i dužina krive $\widehat{\gamma}$ (slika 7). Konačno, važi $S < \widehat{S}$ i $L = \widehat{L}$.

Da li je prethodnim razmatranjem dokazana izoperimetrijska nejednakost? Ostaje da se dokaže da u familiji svih krivih date dužine postoji kriva koja ograničava najveću površinu.

Razmotrimo prvo dokaz za mnogouglove (videti [18]). Mnogougao P_n je konačan niz tačaka M_1, M_2,..., M_n, $M_{n+1} = M_1$, ne obavezno različitih, ali cikličnih. Mnogougao je ravnostran ako su duži M_kM_{k+1}, $k = 1, 2, \ldots, n$, jednake dužine. Ravnostran mnogougao je pravilan ako se može upisati u krug i ako duži M_kM_{k+1}, $k = 1, 2, \ldots, n$ nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka.

Izaberimo u ravni pravougli koordinatni sistem. Neka je O koordinatni početak; M_1 i M_2 dve tačke sa koordinatama x_1, y_1 i x_2, y_2. Orijentisana površina trougla OM_1M_2 definiše se na sledeći način:

$$P\{OM_1M_2\} = \frac{1}{2}(x_1y_2 - y_1x_2).$$

Ako M_1 pripada $x-$ osi, geometrijski smisao je jasan. Površina je pozitivna ako se temena OM_1M_2 obilaze u pozitivnom smeru.

Neka je M_1, M_2,..., M_n, M_{n+1} konačan niz tačaka i neka tačka M_k ($k = 1, \dots, n, n+1$) ima koordinate x_k, y_k. Orijentisana površina mnogougla sa temenima O, M_1, M_2,..., M_n, M_{n+1} definiše se na sledeći način:

$$\begin{aligned} & P\{OM_1M_2 \dots M_nM_{n+1}\} && (8)\\ = {} & P\{OM_1M_2\} + P\{OM_2M_3\} + \dots + P\{OM_nM_{n+1}\} && (9)\\ = {} & \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_ky_{k+1} - y_kx_{k+1}) && (10)\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $M_{n+1} = M_1$. Tada orijentisana površina ne zavisi od izbora koordinatnog početka O.

Definišimo $P\{M_1M_2 \dots M_nM_1\} = P\{OM_1M_2 \dots M_nM_{n+1}\}$.

Lema 1. *Neka je zbir brojeva a i b konstantan i jednak s. Proizvod ab je maksimalan ako je $a = b = s/2$. Najveća vrednost proizvoda je $s^2/4$.*

Dokaz. Iz $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$ sledi da je proizvod ab veći, pri konstantnoj sumi $a+b = s$, što je apsolutna veličina njihove razlike manja; proizvod ab je maksimalan ako je $a = b = s/2$ i maksimum je $s^2/4$. □

Prethodni kriterijum maksimuma može se uopštiti na proizvoljan broj činilaca :

Tvrđenje 6. *Ako je data suma $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ proizvod $p = a_1a_2...a_n$ dostiže maksimum, ako je $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{s}{n}$.*

Neka je A proizvoljan neprazan podskup ravni ili prostora. Najmanji konveksan skup koji sadrži skup A se naziva konveksan omotač skupa A i obeležava se sa $\mathrm{con}(A)$.

Lema 2. *Ako je Λ prost mnogougao koji nije konveksan, tada je obim $\mathrm{con}(\Lambda)$ manji od obima Λ.*

Teorema 6.

a) Ako je Λ nejednakostranični $n-$ tougao koji ograničava površinu S, onda postoji jednakostranični $n-$ tougao jednakog obima Λ_* koji ograničava površinu S_* tako da je $S < S_*$.
b) Od svih izoperimetrijskih $n-$ touglova najveću površinu ima pravilni $n-$ tougao.

Skica dokaza. Neka je $T_n(L)$ familija prostih $n-$ touglova u ravni $\mathbb{C}$, obima L. U $\mathbb{C}^n$ za $Z = \underline{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ sa $|Z|_1 = \sum_{k=1}^{n}|\zeta_k|$ zadaje se norma. Neka je $\Lambda \in T_n(L)$ i neka su $z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1} = z_1$, temena $n-$ tougla Λ. Ako uvedemo oznaku $\zeta_k = z_{k+1} - z_k$ onda važi $\sum_{k=1}^{n}\zeta_k = 0$. Dakle, svakom $n-$ touglu dodeljujemo $\underline{\zeta} \in \mathbb{C}^n$ i obratno svakoj tački $\underline{\zeta} \in \mathbb{C}^n$ dodeljujemo poligon $\Lambda = \Lambda(\underline{\zeta})$ određen sa $\underline{z}$, gde je $z_1 = 0$ i $z_k = \zeta_1 + \dots + \zeta_{k-1}$, $1 < k \leqslant n+1$. Za orijentisanu površinu $n-$tougla Λ važi: $S = S(\Lambda) = S(\underline{\zeta}) = 1/2\sum_{k=1}^{n}(x_ky_{k+1} - y_kx_{k+1})$. Kako su $|\zeta_k|$ dužine stranice $n-$ tougla Λ sledi $L = \sum_{k=1}^{n}|\zeta_k|$.

Neka je S_L sfera poluprečnika L u odnosu na normu $|\cdot|_1$ i V skup tačaka $Z \in \mathbb{C}^n$ za koje važi $\sum_{k=1}^{n}\zeta_k = 0$. Funkcija S je neprekidna na kompaktnom skupu $V_0 = S_L \cap V$ i dostiže maksimum u nekoj tački $\underline{\zeta}_0 \in V_0$; neka je Λ_0 odgovarajući mnogougao (ponovimo $z_1 = 0$). Može se prvo pokazati da je Λ_0 jednakostanični mnogougao, a zatim kombinujući Steiner-ov metod pravog ugla i da je upisan u krug i otuda pravilan. □

U [24] je dat elementaran pristup za slučajeve $n = 3$ i $n = 4$.

Ako su p_n i S_n obim i površina pravilnog $n-$tougla, onda je

$$S_n = \frac{1}{4n}p_n^2 \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

Koeficijent pravilnog $n-$tougla, K_n, se definiše na sledeći način:

$$K_n = \frac{S_n}{p_n^2}$$

i stoga važi:

$$K_n = \frac{1}{4n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}.$$

Lema 3. *K_n je rastući niz i teži ka $\frac{1}{4\pi}$.*

Dokaz. Neka je $\varphi(x) = x \operatorname{ctg} x$. Tada je $\varphi'(x) = \dfrac{\cos x \sin x - x}{\sin^2 x} < 0$ za $x > 0$. □

Tvrđenje 7. *Od svih izoperimetrijskih $n-$ touglova najveću površinu ima pravilan. Ako su p_n i S_n, respektivno, obim i površina proizvoljnog zatvorenog prostog $n-$ tougla $\mathcal{P}_n$, tada je*

$$S_n \leqslant \frac{1}{4n} p_n^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, \tag{11}$$

$$S_n \leqslant \frac{1}{4\pi} p_n^2. \tag{12}$$

Na osnovu teoreme 6 dobija se (11); a iz (11), na osnovu leme 3, sledi (12).

Granica $n-$ tougla koji ima tačke „samopresecanja" može se podeliti na proste zatvorene poligonalne linije na koje se može primeniti nejednakost (12). Otuda se dobija

Teorema 7 (Izoperimetrijska nejednakost 1)**.** *Neka je P zatvoren orijentisan mnogougao (koji može imati i tačke samopreseka) i $A(P)$ orijentisana površina i $\ell(P)$ dužina granice mnogougla P. Tada je*

$$A(P) \leqslant \frac{1}{4\pi} \ell(P)^2.$$

Teorema 8 (Izoperimetrijska nejednakost 2)**.** *Neka je γ neprekidna, rektificibilna, zatvorena kriva (u opštem slučaju sa tačkama samopreseka). Obeležimo sa S orijentisanu površinu oblasti $G = Int(\gamma)$ i sa L dužinu krive γ. Tada važi*

$$|S| \leqslant \frac{L^2}{4\pi}.$$

Može se konstruisati poligonalna linija (specijalno ravnostrani mnogougao Λ sa parnim brojem stranica) tako da se njegov obim L_* i površina S_* proizvoljno malo razikuju od L i S, što je kontradikcija sa Teoremom 7.

Ako bi bilo $L^2 - 4\,\pi S < 0$, moglo bi se odrediti Λ, tako da je $L_*^2 - 4\,\pi S_* < 0$ što protivureči nejednakosti za ravnostrane mnogouglove.

4.1. Izoperimetrijska nejednakost, dijametar i kapacitet

Neka je γ zatvorena Jordan-ova kriva klase C^1 definisana na intervalu $[\,a, b]$. Neka je $G = Int(\gamma)$, $A(G)$ površina oblasti G i neka je

$$A(\gamma) = \frac{1}{2} \int_\gamma (xdy - ydx) = \frac{i}{2} \int_\gamma z\overline{dz} = \frac{i}{2} \int_a^b \gamma(t)\overline{\gamma'(t)}dt. \tag{13}$$

Ako je γ pozitivno orijentisana (ako se neki objekat kreće po zakonu $\gamma(t)$ onda oblast koju ograničava trag krive γ ostaje s leve strane) onda se kao posledica Green-ove teoreme dobija

$$A(G) = A(\gamma).$$

Ako je γ negativno orijentisana, onda važi

$$A(G) = -A(\gamma).$$

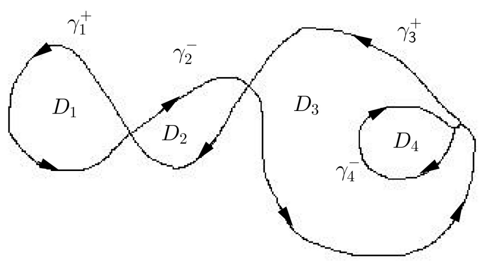
Neka je γ zatvorena Jordan-ova kriva u $\mathbb{C}$. Trag krive γ, $\mathrm{tr}(\gamma)$, dopušta dve orijentacije. Ako sa γ^+ naznačimo da je kriva γ pozitivno orijentisana, a sa γ^- da je negativno orijentisana, onda važi $A(\gamma^-) = -A(\gamma^+)$.

Neka je γ proizvoljna kriva definisana na $I = [0, 1]$ (može imati i tačke samopresecanja).

Ako sa γ^- označimo suprotno orijentisanu krivu, $\gamma^-(t) = \gamma(1-t)$ i ako je γ ograničene varijacije, tada važi $A(\gamma^-) = -A(\gamma)$.

Primer 7. *Neka je $\gamma = \gamma_1^+ \cup \gamma_2^- \cup \gamma_3^+ \cup \gamma_4^-$, $D_1 = Int(\gamma_1^+)$, $D_2 = Int(\gamma_2^-)$, $D_3 = Int(\gamma_3^+)$ i $D_4 = Int(\gamma_4^-)$ (slika 8). Tada je*

$$\begin{aligned} A(\gamma) &= A(\gamma_1^+) + A(\gamma_2^-) + A(\gamma_3^+) + A(\gamma_4^-) \\ &= A(D_1) - A(D_2) + A(D_3) - A(D_4) \\ &= A(D_1) - A(D_2) + A(D_3 \backslash D_4). \end{aligned}$$



Slika 8. Kriva sa tačkama samopreseka

Neka je $a = 0$, $b = 2\pi$ i neka je $\gamma(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\gamma}_k e^{ikt}$. Formalno, $\hat{\gamma'}_k = ik\hat{\gamma}_k$, pa korišćenjem Parseval-ove formule dobijamo

$$A(\gamma) = \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k|\hat{\gamma}_k|^2. \tag{14}$$

Interesantno je da formula (13) definiše orijentisanu površinu ako je γ samo neprekidna, rektificibilna, zatvorena kriva (u opštem slučaju sa tačkama samopreseka) i da važi (14) (specijalno red u formuli (14) konvergira u običnom smislu).

Kako je γ neprekidna, rektificibilna kriva niz $\{k\hat{\gamma}_k\}$ je ograničen odakle sledi konvergencija reda u formuli (14) (može se dokazati pomoću Abel-ove i Tauber-ove teoreme).

Ako je γ apsolutno neprekidna tada važi formula (13).

Izoperimetrijska nejednakost za Jordan-ove oblasti može se dokazati pomoću teoreme o površini, videti[20].

Neka je $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

Kažemo da $F \in \Sigma$ (F pripada klasi Σ) ako je univalentna na $\mathbb{E}$ i ako je

$$F(z) = z + \frac{b_1}{z} + \cdots + \frac{b_k}{z^k} + \cdots. \tag{15}$$

Teorema 9 (Area theorem)**.** *Ako $F \in \Sigma$, $E^* = \mathbb{C} \setminus F(\mathbb{E})$ i $A(E^*)$ površina oblasti E^*, onda*

a) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k|b_k|^2 \leqslant 1$;

b) $A(E^*) = \pi \left(1 - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k|b_k|^2\right)$.

Teorema 10 ([19, 25], Izoperimetrijska nejednakost 2)**.** *Neka je γ neprekidna, rektificibilna, zatvorena Jordanova kriva. Neka je S površina oblasti $G = Int(\gamma)$ i L dužina krive γ. Tada važi*

$$2\pi\,\mathrm{cap}(G) \leqslant L \qquad i \qquad S \leqslant \pi(\mathrm{cap}(G))^2. \tag{16}$$

Otuda

$$4\pi S \leqslant L^2. \tag{17}$$

Dokaz. Neka je $\tilde{G} = Ext(\gamma)$. Na osnovu Riemann-ove teoreme postoji konformno preslikavanje F oblika

$$F(z) = \lambda z + \frac{b_1}{z} + \cdots + \frac{b_k}{z^k} + \cdots$$

koje slika $\mathbb{E}$ na $\tilde{G}$. Neka je $r > 1$, $\mathcal{K}_r(\theta) = re^{i\theta}$, $(\theta \in [0, 2\pi])$, $\gamma_r = F \circ \mathcal{K}_r$ i $G_r = Int(\gamma_r)$.

Primenom teoreme o površini dobija se

$$\mathrm{area}(G_r) \leqslant \pi|\lambda|^2 r^2. \tag{18}$$

Kako je

$$\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{K}_r}\frac{F'(z)}{z}dz = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F'(re^{i\theta})d\theta \tag{19}$$

sledi

$$|\lambda| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F'(re^{i\theta})|d\theta = \frac{1}{2\,\pi}\frac{|\gamma_r|}{r}, \tag{20}$$

pri čemu je $|\gamma_r|$ dužina krive γ_r.

Na osnovu (18) i (20) dobijamo

$$\mathrm{area}(G_r) \leqslant \frac{1}{4\,\pi}|\gamma_r|^2. \tag{21}$$

Korišćenjem poznatog rezultata iz teorije Hardy-jevih prostora sledi $|\gamma_r| \to |\gamma|$ kada $r \to 1+$. Otuda dobijamo (17).

Kako je $|\lambda| = \mathrm{cap}(G)$ na osnovu (18) i (20) dobijamo (16). $\square$

Ako je $f' \in H^1$, tada je f neprekidna na $\overline{\mathbb{D}}$. Otuda za $f' \in H^1$ možemo da definišimo krivu γ sa $\gamma(t) = \underline{f}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Funkcija γ je apsolutno neprekidna funkcija na $[0, 2\pi]$, videti [7]. Označimo sa L dužinu krive γ, a sa A površinu figure koju ograničava γ. Dokazuje se da je $A = \iint\limits_{\mathbb{D}} |f'(x+iy)|^2 dxdy$ i $L = 2\pi\|f'\|_1$.

U [18, 19] dokazana je H^1 verzija izoperimetrijske nejednakosti:

Ako je $f' \in H^1$, onda je $\iint\limits_{\mathbb{D}} |f'(x+iy)|^2 dxdy \leqslant \pi\|f'\|_1^2$.

Navedimo specijalni slučaj nekih rezultata iz [19].

Tvrđenje 8.

a) Ako je $f \in H^1$, onda je $\iint\limits_{\mathbb{D}} |f(x+iy)|^2 dxdy \leqslant \pi\|f\|_1^2$.

b) Ako je $\theta \in (0, \pi/2)$ i $f : \mathbb{D} \to L_\theta$, onda je $\cos^2\theta \iint\limits_{\mathbb{D}} |f(x+iy)|^2 dxdy \leqslant \pi(\mathrm{Re}\, f(0))^2$.

Kako je

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} |f(x+iy)|^2 dxdy = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\hat{f}(n)|^2}{n+1},$$

iz a) sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|^2}{n+1} \leqslant \|f\|_1^2.$$

Poslednji rad iz ove oblasti objavio sam sredinom osamdesetih godina. Nakon toga, radio sam u drugom pravcu. Iznenada, moj učenik M. Marković [16] je pre par godina oživeo problematiku vezanu za izoperimetrijsku nejednakost.

5. Riemann-Stieltjes-ov integral i trigonometrijski redovi

5.1. Riemann-Stieltjesov integral

Iz pedagoških razloga definišemo prvo funkcije *ograničene varijacije* na konačnom intervalu, a zatim na celom $\mathbb{R}$.

Neka je realna funkcija f definisana na konačnom intervalu $[a, b]$ i neka je

$$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

podela tog intervala. U ovoj situaciji kažemo da je podela $\mathcal{P}$ definisana tačkama $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Definicija 1. Ako je

$$V(f) = V_a^b(f) = \sup \sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})|,$$

gde se supremum uzima po svim podelama $\mathcal{P}$ intervala $[a, b]$, konačan broj kažemo da je f *ograničene varijacije* na $[a, b]$. $V_a^b(f)$ je njena *totalna varijacija*. Klasu funkcija ograničene varijacije označavamo sa $BV = BV[a, b]$. Na isti način definišu se ovi pojmovi i za kompleksnu funkciju.

Primer 8. *Ako je f monotona na $[a, b]$, tada je f ograničene varijacije na $[a, b]$ i $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.*

Rešenje. Neka je, na primer, f neopadajuća i neka je podela $\mathcal{P}$ definisana tačkama $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Tada je $f(x_\nu) \geqslant f(x_{\nu-1})$ i stoga $|f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| = f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})$ i

$$\sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| = \sum_{\nu=1}^{n} (f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})) = f(b) - f(a).$$

Otuda je $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$. $\triangle$

Neka su realne funkcije f i g definisane i ograničene na konačnom intervalu $[a, b]$ i neka je $\mathcal{P}$ podela tog intervala

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Neka ξ_ν pripadaju podintervalima $[x_{\nu-1}, x_\nu]$. Označimo sa $m(\mathcal{P})$ najveću od dužina podintervala podele $\mathcal{P}$ i definišimo

$$\sigma(\mathcal{P}) = \sigma(f, g; \mathcal{P}) = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)(g(x_\nu) - g(x_{\nu-1})).$$

Definicija 2. Ako postoji broj $I(f, g)$ tako da svakom $\varepsilon > 0$ odgovara $\delta > 0$, tako da za svaki izbor tačaka ξ_ν u $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ i nezavisno od uočene podele $\mathcal{P}$

$$m(\mathcal{P}) < \delta \;\Rightarrow\; |\sigma(f, g; \mathcal{P}) - I(f, g)| < \varepsilon,$$

kažemo da je $I(f, g)$ *Riemann-Stieltjes-ov integral* funkcije f u odnosu na funkciju g na intervalu $[a, b]$.

Riemann-Stieltjes-ov integral označavamo sa

$$\int_a^b f\, dg.$$

Kada postoji $\int\limits_a^b f\,dg$ kažemo da je f integrabilna u odnosu na g, ili da je f $\mathcal{R}_g$ integrabilna na intervalu $[a,b]$.

Primer 9. *Ako je f neprekidna na $[0,a]$, $(0 < a < +\infty)$, tada je* $\int\limits_0^a f(x)d[x] = \sum\limits_{k=1}^{[a]} f(k)$.

Najjednostavnija teorema o postojanju Riemann-Stieltjes-ovog integrala kaže: Ako je f neprekidna i g ograničene varijacije na $[a,b]$, tada integral postoji. Funkcija g je ograničene varijacije ako i samo ako je razlika dve monotone funkcije. Ako g nije ograničene varijacije, onda će postojati neprekidna funkcija koje se ne može integraliti u odnosu na g (tj. f nije integrabilna u odnosu na g na intervalu $[a,b]$). U principu,

(i.1) integral nije dobro definisan (ne postoji), ako

(ii.1) f i g imaju zajedničku tačku prekida.

Važi da je (ii.1) dovoljan, ali ne i potreban, uslov za (i.1).

S druge strane, klasičan rezultat Young-a iz 1936. godine kaže da je integral dobro definisan ako je f α-Hölder neprekidna i g β-Hölder neprekidna, pri čemu je $\alpha + \beta > 1$.

I kada g ima izvod u svakoj tački, Riemann-Stieltjes-ov integral može biti različit od Riemann-ovog integrala funkcije fg' datog sa

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx,$$

na primer, ako je izvod funkcije g neograničen. Ali ako je izvod neprekidan, integrali imaju jednake vrednosti. Ovaj uslov je zadovoljen ako je g (Lebesgue-ov) integral svog izvoda; u ovom slučaju kaže se da je g apsolutno neprekidna.

Funkcija f ima prekid prve vrste (skok prekida) u tački x_0 ako su limesi sleva i zdesna u toj tački konačni i različiti.

U praksi se pojavljuju slučajevi da g ima prekid prve vrste; ili g ima izvod nula skoro svuda dok je još uvek neprekidna i monotona (npr. Cantor-ova funkcija). U ovim slučajevima Riemann-Stieltjes-ov integral se ne može izraziti pomoću izvoda funkcije g.

Riemann-Stieltjes-ov integral dopušta parcijalnu integraciju u obliku

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)\,df(x),$$

pri čemu postojanje jednog od ovih integrala povlači postojanje drugog.

Teorema 11. *Neka je f neprekidna, a g apsolutno neprekidna funkcija na $[a,b]$. Tada je*

$$\int\limits_a^b f dg = \int\limits_a^b f g' dx. \tag{22}$$

Neka je f ograničene varijacije, a g apsolutno neprekidna funkcija na $[a,b]$, tada takođe važi (22).

Dokaz. Neka je $P: a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ podela intervala $[a,b]$ i σ odgovarajuća suma koja dovodi do Rimann-Stieltjes-ovog integrala. Iz apsolutne neprekidnosti funkcije g, sledi

$$g(x_\nu) - g(x_{\nu-1}) = \int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} g'(x)dx, \qquad \nu = 1,2,...,n.$$

Iz ove formule, sledi

$$\sigma(\mathcal{P}) = \sigma(f,g;\mathcal{P}) = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)(g(x_\nu) - g(x_{\nu-1}))$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu) \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} g'(x)dx = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(\xi_\nu)\, g'(x)dx. \tag{23}$$

Otuda je

$$\epsilon = |\sigma - \int_a^b fg'dx| = |\sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} [f(\xi_\nu) - f(x)]\, g'(x)\, dx|. \tag{24}$$

Kako je g' integrabilna, $I_0 = \int_a^b |g'(x)|dx < +\infty$. Neka je (ε,δ) par iz definicije uniformne neprekidnosti funkcije f na $[a,b]$. Ako je podela P takva da je $m(P) < \delta$, tada je $|f(\xi_\nu) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ za $x_{\nu-1} \leqslant x \leqslant x_\nu$, i na osnovu (24), sledi

$$\epsilon \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |f(\xi_\nu) - f(x)|\, |g'(x)|\, dx$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varepsilon\, |g'(x)|\, dx \leqslant \varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |g'(x)|\, dx.$$

Otuda, sledi $\epsilon < \varepsilon I_0$. Kako ε možemo birati proizvoljno malo, sledi da je $\epsilon = 0$, tj. tvrđenje. □

Teorema 12. *Ako su f i g apsolutno neprekidne na $[a,b]$, tada važi formula za parcijalnu integraciju.*

Dokaz. Dokaz sledi iz teoreme 11 i formule za parcijalnu integraciju Riemann-Stieltjes-ovog integrala. □

U praksi se često primenjuju i sledeći stavovi.

Tvrđenje 9. *Ako postoji integral $\int_a^b f dg$, tada postoji i integral $\int_a^b g df$.*

Tvrđenje 10. (*a1*) *Pretpostavimo da je f neprekidna i g ograničene varijacije na $[a,b]$, tada je (i.1) f $\mathcal{R}_g-$integrabilna na $[a,b]$.*

Tvrđenje 11. (*b1*) *Pretpostavimo da su f i g ograničene varijacije na $[a,b]$ i da im se tačke prekida ne poklapaju, tada je (ii.1) f $\mathcal{R}_g-$integrabilna na $[a,b]$.*

Tvrđenje 12. *Ako f i g ispunjavaju uslove (a1) ili (b1), tada je $\left|\int_a^b f dg\right| \leqslant MV_a^b(g)$, gde je $M = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$.*

Tvrđenje 13. *Ako je f je neprekidna na $[a,b]$ i g_n niz funkcija uniformno ograničene varijacije na $[a,b]$ koji konvergira ka g, tada $\int_a^b f dg_n \to \int_a^b f dg$, kad $n \to \infty$.*

Tvrđenje 14. *Neka je f neprekidna, a g ima na $[a,b]$ $\mathcal{R}-$integrabilan izvod. Tada je*

$$\int_a^b f dg = \int_a^b fg'dx. \tag{25}$$

Tvrđenje 15. *Ako g ima na $[a,b]$ $\mathcal{R}-$integrabilan izvod tada je g apsolutno neprekidna funkcija na $[a,b]$.*

Tvrđenje 16. *Ako je f neprekidna (ili ograničene varijacije), a g apsolutno neprekidna funkcija na $[a,b]$ tada takođe važi (25).*

5.2. Trigonometrijski redovi

U ovoj podsekciji se razmatraju prirodna proširenja rezultata sa $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$.

U realnoj analizi razmatraju se Fourier-ovi koeficijenti u odnosu na trigonometrijski sistem. Analogno, mogu se definisati Fourier-ovi koeficijenti u odnosu na sistem $\{e_k(x) = e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$.

Fourier-ovi koeficijenti funkcije $f \in \mathcal{R}([-\pi,\pi])$ u odnosu na sistem $\{e_k(x) = e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ izražavaju se formulom

$$c_k = \hat{f}(k) = (f, e_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx. \tag{26}$$

Fourier-ov red funkcije f je

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx} \tag{27}$$

i njegove *parcijalne sume* su

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e^{ikx}, \quad n = 0,1,2,\dots \tag{28}$$

Dirichlet-ovo jezgro, preciznije, $n-$to *Dirichlet*-ovo jezgro D_n definiše se na sledeći način:

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{\sin\dfrac{1}{2}t}.$$

Jednostavno se proverava (u kursevima analize) da je

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x-t)\, dt.$$

Ako je F funkcija definisana na jediničnoj kružnici $\mathbb{T}$ i f definisana na $\mathbb{R}$ sa

$$f(t) = F(e^{it}), \tag{29}$$

tada je f periodična funkcija sa periodom 2π. Ovo znači da je $f(t) = f(t+2\pi)$. Suprotno, ako je f periodična funkcija sa periodom 2π, tada postoji F tako da važi (29) . Dakle, možemo identifikovati funkcije na $\mathbb{T}$ sa 2π-periodičnim funkcijama na $\mathbb{R}$ i, ponekad, da uprostimo notaciju, pišemo $f(t)$ umesto $f(e^{it})$, čak ako je f definisana na $\mathbb{T}$.

$L^p(\mathbb{T})$ je klasa kompleksnih, Lebesgue merljivih, 2π - periodičnih funkcija na $\mathbb{R}$ takvih da je

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Umesto $L^p(\mathbb{T})$, ponekad, pišemo i kratko L^p.

Za $f \in L^1(\mathbb{T})$, Fourier-ovi koeficijenti funkcije f u odnosu na $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ definišu se formulama

$$c_k = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{30}$$

Iz Bessel-ove nejednakosti dobija se: Ako $f \in L^2(\mathbb{T})$, tada

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx.$$

Trigonometrijski polinom je konačna suma oblika

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Na osnovu Euler-ove formule može se pokazati da je

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Skalarni proizvod u $L^2(\mathbb{T})$ se definiše sa:

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt. \tag{31}$$

Skup $\{e_k(t) = e^{ikt} : k \in \mathbb{Z}\}$ čini ortormiran sistem vektora u odnosu na skalarni proizvod (31) i obično se naziva *trigonometrijski sistem*.

5.3. Kompletnost trigonometrijskog sistema

Skup A je *gust* (kaže se i svuda gust) u B ako je $B \subset \overline{A}$.

Teorema 13. *Jednostavne funkcije (respektivno neprekidne) na $\mathbb{T}$ su guste u L^p, $1 \leqslant p < \infty$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $f \geqslant 0$. Postoji niz s_n kao u Beppo-Levi-jevom stavu (aproksimacija jednostavnim funkcijama). Kako je $0 \leqslant s_n \leqslant f$ i otuda $|f - s_n|^p \leqslant |f|^p$, na osnovu teoreme o dominantnoj konvergenciji, sledi $\|f - s_n\|_p \to 0$ kada $n \to \infty$. Dalje treba pokazati da se merljivi skupovi aproksimiraju elementarnim i otuda da se jednostavne funkcije aproksimiraju (u L^p-metrici, $1 \leqslant p < \infty$) jednostavnim funkcijama definisanim pomoću intervala. U realnoj analizi pokazuje se da se jednostavne funkcije definisane pomoću intervala dobro aproksimiraju neprekidnim funkcijama. Opšti slučaj (f kompleksna) sledi iz ovog. $\square$

Postavlja se pitanje:

Pitanje 1. *Da li prethodna teorema važi za L^∞? Odgovor je negativan.*

Teorema 14. *Sistem*

$$\{e_k(t) = e^{ikt} : k \in \mathbb{Z}\}$$

je kompletan u L^p, $1 \leqslant p < \infty$.

Dokaz. S obzirom na drugu Weierstrass-ovu teoremu (videti [1], teorema 8.3.1), trigonometrijski polinomi su gusti u $C(\mathbb{T})$. Otuda dokaz sledi na osnovu teoreme 13. $\square$

Na osnovu (30), svakom $f \in L^1(\mathbb{T})$ pridružuje se funkcija $\hat{f}$ na $\mathbb{Z}$.

Kako je $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, sledi da (30) važi i za $f \in L^2(\mathbb{T})$. Štaviše, važi *Parseval-ova formula*:

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}, \tag{32}$$

za svako $f, g \in L^2(\mathbb{T})$.

Red na desnoj strani formule (32) konvergira apsolutno i ako je S_n definisano kao u (28), tada je

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|_2 = 0, \tag{33}$$

jer, na osnovu specijalnog slučaja formule (32), nalazimo

$$\|f - S_n\|_2^2 = \sum_{|k|>n} |\hat{f}_k|^2. \tag{34}$$

Podvucimo da, na osnovu formule (33), sledi: svako $f \in L^2(\mathbb{T})$ je L^2 granica parcijalnih suma svog Fourier-ovog reda; tj. Furier-ov red funkcije f konvergira u L^2 smislu. Konvergencija tačka po tačka je teži problem (videti [32], [38]).

Primer 10. *Ako je $A \subset [0, 2\pi]$ i A merljiv, tada $\int_A \cos nx dx$ teži nuli kada $n \to \infty$.*

Tvrđenje 17 (Lema Riemann-a)**.** *Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ apsolutno integrabilna (bar u nesvojstvenom smislu) i $I(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\, dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada $I(\lambda) \to 0$, kada $\lambda \to \infty$.*

Skica dokaza. Pomoću parcijalne integracije dokazati lemu ako je f glatka funkcija. Integrabilne funkcije aproksimirati neprekidnim, a neprekidne polinomima. Za kompletan dokaz videti [38]. □

Ako je poznato da $f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi]\,)$ tada, na osnovu Bessel-ove nejednakosti, sledi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx} dx \to 0$$

kada $n \to \infty$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ova diskretna varijanta Riemann-ove leme je u osnovi početnih ispitivanja klasičnih Fourier-ovih redova.

Pitanje 2. *Da li lema Riemann-a važi ako $f \in L^1(a, b)$?*

Ako je f neprekidna i ako su njeni Fourier-ovi koeficijenti apsolutno sumabilni, onda njen Fourier-ov red konvergira uniformno. Postoji neprekidna funkcija čiji Fourier-ov red konvergira u svakoj tački (tačka po tačka), ali ne i uniformno (videti [39]).

U primenama, korisno je imati ocenu za veličinu Fourier-ovih koeficijenata. Ako je f apsolutno neprekidna funkcija onda važi:

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \le \frac{K}{|n|},$$

gde konstanta K zavisi samo od f.

Ako je f ograničene varijacije (videti [34]) onda važi:

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \le \frac{V(f)}{2\pi|n|}.$$

Problem da li Fourier-ov red neprekidne funkcije konvergira skoro svuda postavio je N.Lusin 1920. godine. Fourier-ov red bilo koje funkcije iz L^p (za $p > 1$) konvergira skoro svuda. Dokaz za $p = 2$ dao je Carleson[15] 1966. godine a kasnije je Hunt dokazao opšti slučaj ($p > 1$). Kolmogorov, kada je imao 21 godinu, konstruisao je primer funkcije u L^1, čiji Fourier-ov red divergira skoro svuda. Dakle, u odnosu na neka svojstva prostori L^p, za $p > 1$, potpuno su različiti od prostora L^1.

6. Redovi i prostori analitičkih funkcija

6.1. Abel sumabilnost, Tauber-ove teoreme, Hardy, Littlewood i Karamata

Neka je $a = \{a_k : k \geqslant 0\}$ niz realnih ili kompleksnih brojeva i neka je

$$F_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Pretpostavimo da red $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergira. Tada

$$\lim_{z \to 1-} F_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

pri čemu je promenljiva z realan broj, ili opštije, pripada nekom Stolz-ovom uglu, koji se definiše kao oblast jediničnog diska, pri čemu je $|1 - z| \leqslant M(1 - |z|)$.

Teorema 15 (Abel)**.** *Neka je*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{35}$$

zadati red, neka su

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

odgovarajuće parcijalne sume i neka je $f(r)$ odgovarajući stepeni red definisan kao gore.

Ako red (35) konvergira u običnom smislu ($s_n \to L$ kada $n \to \infty$), onda red konvergira i u Abel-ovom smislu i važi: $f(r) \to L$ kada $r \to 1-$.

Standardan primer divergentnog reda koji konvergira u Abel-ovom smislu je:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

Odgovarajući stepeni red je

$$\frac{1}{1+r} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n.$$

Kako važi

$$\frac{1}{1+r} \to \frac{1}{2} \qquad \text{kada} \qquad r \to 1-\,,$$

red konvergira u Abel-ovom smislu ka $\frac{1}{2}$.

Opšti obrat Abel-ove teoreme je netačan, kao što gornji primer ilustruje[16]. Međutim 1890-tih godina Tauber je dokazao sledeći delimičan obrat.

---

[15]Dobitnik nagrade „Abel prize” 2006. godine (za temeljne i iskonske doprinose harmonijskoj analizi i teoriji glatkih dinamičkih sistema).

[16]To je i bila želja; Ideja je da opišemo metod sumiranja određenih divergentnih redova.

Teorema 16 (Tauber)**.** *Pretpostavimo da je red* $\sum a_n$ *Abel sumabilan i da* $na_n \to 0$ *kad* $n \to \infty$*. Tada je* $\sum a_n$ *konvergentan u običnom smislu.*

Dokaz ove teoreme nije težak. Hardy i Littlewood su oko 1910. počeli seriju istraživanja inspirisani Tauber-ovom teoremom. Njihova čuvena saradnja trajala je preko 35 godina.

Littlewood je pokazao da obrat Abel-ove teoreme važi ako je niz na_n ograničen. Dokaz je mnogo teži od Tauber-ove teoreme i sadrži sofisticirane detalje. Karamata [17] je našao elegantan dokaz pomoću Weierstrass-ove teoreme.

6.2. Prostori analitičkih funkcija i rezultati beogradskog seminara u periodu 1980-1990

Planiramo da napišemo poseban članak o uticaju ovih rezultata na razvoj matematike u Beogradu[18]. Ovde će biti navedeno samo nekoliko rezultata, koji imaju veliki broj citata i značajnu ulogu u proučavanju prostora analitičkih funkcija.

Neka su A i B dva izraza koja zavise od nekih promenljivih, na primer x, y i z.

Ako postoji odgovarajuća pozitivna konstanta $c = c(y, z)$ takva da je $A(x) \leqslant cB(x)$ za svako x ($x \in M$) pišemo $A \preceq B$ (na M).

Ako postoji odgovarajuća pozitivna konstanta $c = c(y, z)$ takva da je $\frac{1}{c}B(x) \leqslant A(x) \leqslant cB(x)$ za svako x ($x \in M$) pišemo $f \approx g$ (ili $f \asymp g$) (na M).

Tvrđenje 18 ([26])**.** *Neka je* $\alpha > 0, p > 0$, $a_n \geqslant 0$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *i* $A_n = \sum\limits_{k \in I_n} a_k$*. Tada postoji konstanta* c *koja zavisi od* p *i* α *takva da je*

$$\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} f^p(x)dx \approx \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n\alpha} A_n^p.$$

Tvrđenje 19 ([27])**.** *Za analitičku funkciju* $f(z) = \sum a_k z^k$*, definišemo* $\Delta_n f(z) = \sum\limits_{k \in I_n} a_k z^k$*,* $e_n = \exp(2\pi i/2^{n-1})$*,* $f(n,k) = \Delta_n(e_n^k)$*,* $f_k = 2^{-2n/p} f(n,k)$*,* $k \in I_n$ *i* $T(f) = (f_k)$*. Tada za* $1 < p < \infty$ *važi:*

$$T \text{ je izomorfizam } B^p \text{ na } l^p$$

i

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dxdy \approx \sum_n 2^{-2n} \sum_{k \in I_n} |f(n,k)|^p \approx \sum_k k^{-2} |f(k)|^p.$$

Neka su A i B dva vektorska prostora nizova. Niz $\lambda = \{\lambda_n\}$ se naziva množilac iz A u B ako $\{\lambda_n a_n\} \in B$ za svako $\{a_n\} \in A$. Skup svih množilaca iz A u B se obeležava sa (A, B).

Analitička funkcija $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ pripada $\mathcal{B}$ ako i samo ako $\sup\limits_{z \in \mathbb{D}} (1-|z|)|g'(z)| < \infty$.

Za lokalno integrabilnu $2\pi-$ periodičnu funkciju g definišemo

$$|g|_* = \sup_I \int\limits_I |g - g_I| dt,$$

gde se supremum uzima po svim intervalima I i

$$g_I = \frac{1}{|I|} \int\limits_I g\, dt.$$

Kaže se da je g *ograničene srednje oscilacije*, $g \in BMO$, ako $|g|_* < \infty$.

[17] J. Karamata (1902 - 1967) jedan od najvećih srpskih matematičara dvadesetog veka.

[18] Izgledalo je kao da su se Hardy i Littlewood preselili u Beograd.

Prostor $H_1(0) = \{zf(z) : f \in H^1\}$ ima dual L^∞/H^∞.

C. Fefferman[19] je pokazao da je dual prostora $\mathrm{Re}\, H_1(0)$ prostor BMO.

Važi i: $f \in BMOA$ ako i samo ako postoje analitičke funkcije $f_1, f_2 : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ takve da su $\mathrm{Re}\, f_1$ i $\mathrm{Re}\, f_2$ ograničene i $f = f_1 + f_2$.

Tvrđenje 20 ([28])**.** *$(H^1, BMOA) = \mathcal{B}$, gde je $\mathcal{B}$ Bloch-ov prostor.*

7. Profesor Vojin Dajović (1914-1993)

Nadam se da mi nećete zameriti što ću pisati na popularan način i prema sećanjima. Za sistematske članke videti [8] i [29]. Navešću prvo samo nekoliko detalja u vezi sa ulogom profesora Vojina Dajovića u razvoju i popularizaciji matematike.

7.1. Otvaranje novih smerova i razvoj primenjene matematike

Uprkos činjenici da su radovi Mihaila Petrovića, osnivača beogradske matematičke škole, bili preteča kibernetike, postojali su otpori razvoju računarstva i primenjene matematike u Beogradu. Vojin Dajović je uspeo da savlada ove prepreke. Inicirao je prvo razvijanje numeričke matematike (formiranje Numeričkog instituta) u okviru svoje katedre i doprineo da Matematički institut 1965. godine nabavi računar koji je smešten u prostorijama PMF-a i tako su studenti matematike prvi put počeli da koriste računar u nastavi. Na osnovu njegove studije „Uloga i značaj matematike i nastave matematike u Jugoslaviji" 1962. godine je doneta „Preporuka odbora SIV-a za unapređenje matematičkog obrazovanja". Pre donošenja preporuke na matematiku se nije upisivalo više od 20 studenata. Poređenja radi, za upis na Matematički fakultet u junu 2014. godine prijavilo se 1019 kandidata od toga više od polovine na računarstvo i informatiku. Tradicija računarstva predstavlja krupnu vrednost beogradske matematičke škole i oživljava duh Mihaila Petrovića, a broj kandidata na prijemnom ispitu u junu 2014. godine pokazuje da je Vojin Dajović imao ispravnu viziju.

7.2. Obrazovanje i popularizacija matematike

Profesor Vojin Dajović je učestvovao u reformama nastave matematike i fizike na svim nivoima. Boravio je u Moskvi od marta 1963. do februara 1964. godine. Proučavao je organizaciju naučnog rada i stvaranje naučnog podmlatka. Na osnovu njegovog elaborata Odbor za prosvetu Savezne skupštine doneo je odluku o uvođenju poslediplomskih studija. Prva generacija se upisala na poslediplomske studije na PMF-u školske 1960/61. godine.

Idejni je tvorac Matematičke gimnazije, što govori u prilog njegovoj viziji. Osnivač je Društva matematičara i fizičara Republike Srbije, a učestvovao je i u osnivanju Saveza matematičara i fizičara Jugoslavije. Savez je organizovao skupove (na osnovu incijative generalnog sekretara Vojina Dajovića) na kojima su učestvovali i neki od najznačajnih matematičara: Choquet, Soboljev, Aleksandrov, Kolmogorov, Serpiński, Nevanlinna i drugi.

Stalno je vodio računa i o razvoju nastave matematike. Na primer, u septembru 1960. godine Jugoslovensko udruženje matematičara i fizičara u saradnji sa ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) je organizovalo simpozijum „Koordinacija nastave matematike i fizike". Organizacioni odbor su činili: Đ. Kurepa (predsednik), M.H. Stone i V. Dajović. Zbornik radova je objavilo Jugoslovensko udruženje matematičara i fizičara.

Organizovao je i tri internacionalna simpozijima „Kompleksna analiza i primene" - Aranđelovac 1984., Budva 1986. i Herceg Novi 1988. godine.

Profesori Vojin i Milica Dajović preveli su Courant-ove knjige: Kurs diferencijalnog i integralnog računa I i Kurs diferencijalnog i integralnog računa II. Na spomen tabli Courant-ovog instituta u Njujorku, u spisku Courant-ovih saradnika je i ime Vojin Dajović.

Gradio je veze među strukama i podržao objedinjavanje ne samo matematike, fizike i astronomije nego i šire društvenih nauka i filozofije sa prirodnim naukama.

Uticao je da profesor Đuro Kurepa (1907-1993), koji je imao već veliki ugled u svetskim matematičkim i naučnim krugovima i dubok naučni trag, pređe u Beograd (školske 1965/1966. godine) na mesto redovnog profesora PMF-a. Pre prelaska u Beograd, još 1952. godine Kurepa je kao gostujući predavač, održao izuzetan seminar tada mladim, a kasnije i našim poznatim matematičarima. Smatrao je da „obrazovanje mora biti aktuelno,

[19] Dobitnik nagrade „Fields medal" 1978. godine.

posebno, moramo uzimati u obzir nove pristupe nastavi, kao i primene, koji se ponekad gube pedantnim pristupom i logičkim finesama preterano dugačkih i kompleksnih dokaza" (videti [15]).

Kako kaže Sibe Mardešić, profesor Đuro Kurepa je izuzetna ličnost, velike radne energije, zanesen u svoje misli i ideje. Ž. Mijajlović je nadahnuto opisao njegovo stvaralaštvo, na skupu posvećenom njemu, a tom prilikom sam istakao da je u Beogradu postojala potreba za stvaranjem „malih mitova" i oaza, koji su prema posebnim merilima, kriterijumima i vrednostima (ponekad i lokalnim) podizani na pijedestal svetskih velikana. Profesora Kurepu voleli su studenti i doktoranti, imao je harizmu i može se reći da je zajedno sa M. Petrovićem i J. Karamatom najbliži ovoj „mitskoj" ulozi (ovde se ne razmatraju matematičari koji trenutno stvaraju). Na neki način, ako matematiku shvatamo kao ideal kome težimo, možda sam i sam u učenju i popularisanju matematike težio stvaranju oaze u kojoj se stvarnost preplića sa „mitskim" elementima.

7.3. Naučni i stručni rad profesora Vojina Dajovića

Doktorsku disertaciju „Egzistencija graničnih vrednosti nekih klasa analitičkih funkcija" profesor Vojin Dajović odbranio je 1956. godine. Njegovi naučni radovi vezani su za egzistenciju graničnih vrednosti nekih klasa analitičkih funkcija klase H^p.

U nameri da formulišemo teoremu 17 (deo A je rezultat Dajovića, videti i [5]) prvo dajemo potrebne definicije.

Ako je funkcija h definisana na segmentu $I = (r_0 e^{it}, e^{it})$, $0 \leqslant r_0 < 1$, pišemo $h^*(t) = \lim\limits_{r\to 1-} h(re^{it})$ ako taj limes postoji.

Za $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ i $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ definišemo Hadamard-ov proizvod: $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k$.

Teorema 17.
A) Neka je

$$f \in H^p, \quad \operatorname{Re} g \in h^q, \quad \textit{gde je } p, q > 1 \quad \textit{i} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{36}$$

Tada važi

$$\textit{Hadamard-ov proizvod funkcija } f \textit{ i } g \textit{ je ograničena analitička funkcija u } \mathbb{D}. \tag{37}$$

B) Neka je

$$1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad f \in H^p \quad \textit{i} \quad \operatorname{Re} g \in h^1. \tag{38}$$

Tada važi

$$\textit{Hadamard-ov proizvod funkcija } f \textit{ i } g \textit{ pripada prostoru } H^p. \tag{39}$$

Daćemo nekoliko napomena. Komentari (a) i (b) su preuzeti iz [11], a za (c) videti [31].

Na osnovu rada Dajovića [5], Whiteman [37] je dokazao obrat teoreme 17 (deo A). Sovjetski matematičari V.I.Gorbaichuk and V.I.Kuzminch [11] uopštili su Whiteman-ov rezultat.

Neka je $f_\theta(r,t) = f(r, e^{i(\theta - t)})$.

a) Qiu Hua-Ji je koristio $F(z) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(r,t) f(r, e^{i(\theta-t)})dt + c_0$, gde je $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho = r^2$, $0 < \rho < 1$, $g(r, e^{it}) = u(r,t) + iv(r,t)$, $F^*(\theta) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u^*(t) f_\theta^*(t)dt + c_0$ i c_0 konstanta. Kako je $\|f_\theta^*\|_p = \|f^*\|_p$, $f_\theta^* \in L^p$ i $u^* \in L^q$, $F^* \in L^\infty$, sledi da (37) važi.

b) Tumarkin je primetio da ovaj postupak ne daje dokaz dela B) teoreme 17.
c) Ako $f \in H^p, p \leqslant 1$, onda je $|\hat{f}(n)| = o(n^{\frac{1}{p}-1})$.

Dajović je razmatrao i pretpostavku:

$$\text{Za } f \in H^p, \text{ postoji } \delta > 0 \text{ tako da je } |\hat{f}_n| \geqslant \delta. \tag{40}$$

Ako je $0 < p < 1$ uslov (40) definiše podklasu klase H^p.

S obzirom da za $p \geqslant 1$, $|\hat{f}_n| \to 0$, kada $n \to \infty$ u ovom slučaju možemo pokušati da uslov (40) korigujemo na sledeći način:

$$\text{Za } f \in H^p, p > 1, \text{ postoje } \varepsilon, \delta > 0 \text{ tako da je } n^{\varepsilon + 1/q}|\hat{f}_n| \geqslant \delta. \tag{41}$$

7.4. Udžbenici i studenti

Profesor Dajović je objavio udžbenik [6] iz koga navodimo jedan interesantan detalj koji se odnosi na dokaz Principa maksimuma modula (PMM) pomoću teoreme o srednjoj vrednosti.

Teorema 18. *Neka je funkcija f holomorfna na krugu $D(z_0, r_0)$ i neka važi*

$$|f| \textit{ dostiže lokalni maksimum u } z_0. \tag{42}$$

Tada je f konstantna funkcija.

Sledi skica dokaza iz [6]:

Na osnovu Cauchy-jeve formule, za $0 < r < r_0$ važi

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt$$

i stoga kako je

$$|f(z_0)| \leqslant I(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|dt < |f(z_0)|, \tag{43}$$

dobijamo kontradikciju.

Napomena 1. U dokazu je prećutno korišćeno da važi:

$$\text{postoji } r > 0 \text{ takvo da je } |f(z)| < |f(z_0)| \text{ za neko } z \in K(z_0, r), \tag{44}$$

gde $K(z_0, r)$ označava kružnicu sa centrom z_0 i poluprečnika r. Pretpostavka da $|f|$ dostiže lokalni maksimum u z_0 znači da postoji $r_1 > 0$ takvo da je (i): $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$ za $z \in D(z_0, r_1)$. Fiksirajmo r, $0 < r < r_1$. Otuda za $z \in K(z_0, r)$ važi $|f(z)| < |f(z_0)|$ ili $|f(z)| = |f(z_0)|$. Ako postoji $z \in K(z_0, r)$ tako da je $|f(z)| < |f(z_0)|$, onda s obzirom na (i) i neprekidnost funkcije $|f(z)|$ na $K(z_0, r)$, sledi $I(r, f) < |f(z_0)|$. Dakle na osnovu formule (43) dolazimo do kontradikcije. Otuda prvo nalazimo $|f(z)| = |f(z_0)|$ za svako $z \in K(z_0, r)$ i stoga:

$$\text{postoji konstanta } c \text{ takva da je } |f(z)| = c \text{ za svako } z \in D(z_0, r_1). \tag{45}$$

Dakle, ako pri pretpostavci (42) ne važi (44) onda važi (45). Postoje razni načini da se dokaže da iz (45) sledi da je f konstanta (videti na primer [21]).

Opštiji stav glasi:

Tvrđenje 21. *Ako je f holomorfna u oblasti D i $|f(z)| = c$ za svako $z \in D$, gde je c konstanta, tada je f konstanta na D, tj. $f(z) = e^{i\alpha}c$ na D, gde je α realna konstanta.*

Dokaz. Navešćemo jednostavan dokaz. Ako je $c = 0$, onda je jasno da je $f = 0$ na D. Pretpostavimo da je $c > 0$. Kako je f holomorfna to je $\overline{f}_z = 0$ na D. Iz $f\overline{f} = c$, sledi $0 = f_z\overline{f} + f\overline{f}_z = f_z\overline{f}$ i otuda $f_z = f' = 0$. Ako je $B = D(z_0, r) \subset D$ krug, na osnovu Taylor-ovog razvoja oko z_0, sledi $f(z) = f(z_0)$, $z \in B$, i otuda, na osnovu Teoreme jedinosti, $f(z) = f(z_0)$ na D. □

Kao što i ovaj primer pokazuje, profesor Dajović je imao veliko pedagoško iskustvo, davao je kratke i prozračne dokaze i izbegao preteranu strogost.

U udžbeniku [6], dao je i interesantan prikaz Abel-ove teoreme [20].

Kroz sledeći primer želim da ilustrujem odnos profesora Dajovića prema ruskim matematičarima.

[20] Abel-ova teorema je bila omiljena tema profesora Dajovića.

Student na ispitu iz Kompleksne analize dobija pitanje „Princip maksimuma modula" (videti teoremu 18). Nikić na predavanjima za dokaz principa maksimuma modula[21] koristi teoremu o otvorenom preslikavanju. Student na konceptu ispisuje dokaz pomoću teoreme o otvorenom preslikavanju. Profesor Dajović nije zadovoljan i vraća studenta da popravi dokaz. Student kaže da je radio po predavanjima profesora Nikića. S obzirom da je Nikić bio učenik Dajovića i da je tek postao docent, asistent shvata da je student nespretno odgovorio. Asistent se snalazi i diskretno kaže profesoru da je dokaz „iz Šabat-a" i situacija se menja. Profesor Dajović je na visini zadatka i kaže studentu zašto ste tako nesigurni, hteo sam samo da vas proverim. Trebalo je da se suprostavite i zato minimalna ocena šest.

Koristio je poslovice i kao da ga vidim kako, kada neko postavi nerealne ciljeve, govori „*Mnogo je mačku goveđa glava*"; ili, kada neko previše žuri: „*Ne treba se izuvati pre vode*" ili „*Nije šećer pao u vodu*", „*Kada nema mačke miševi kolo vode*". Držao se Zmajevog načela „*Ako daješ malo, i ne možes više, mnogo ti se piše*". U šali je govorio „*Matematičari ili umiru kao apsolventi, ili dugo žive*". Voleo je da koristi i poslovice „*Po poruci vuci meso ne jedu*", „*Sve što je brzo to je i kuso*", „*Svaki je majstor najbolji u svom selu*", ...

Iako je zaslužan za stvaranje mlade naučne elite, profesor Dajović je bio antielitista (npr. podržavao je i birao asistente i iz radničkih i seoskih sredina). Ponekad je bio duhovit. Kada je Lazar Milin došao kod njega u vezi sa poslom rekao je prvo sedi Lazare, a onda ustani Lazare. Kada je Lazar ustao, rekao je: „Mislio sam na pesmu *Ustani care Lazo od Srbije glavo* ".

7.5. Beogradski seminar za kompleksnu analizu

Ponovimo, profesor Dajović je posebno cenio sovjetske matematičare. Voleo je da spomene Kolmogorov-a, Šabat-a, Privalov-a... Dao mi je da proučavam knjigu [31] Privalov-a. Tako sam se zainteresovao za Hardy-jeve prostore. Podržao je ideju Miličića da se iz Gimnazije u Čačku dovede M. Pavlović. Uticao sam na Pavlovića da se zainteresuje za ovu oblast [22].

Shvatio sam da treba kao bibliju da proučavam i Šabat-ove knjige [40]. Jednom prilikom profesor Dajović me je pozvao u njegov stan. Na njegovoj ogromnoj polici za knjige sam našao i knjigu [10] Goluzin-a. Bio sam oduševljen geometrijskom teorijom funkcija (gtf) i Grötzsch-ovim argumentom. Zamolio sam profesora Dajovića da mi pozajmi knjigu Goluzin-a. Pitao me je šta će mi ta knjiga, verovatno je mislio da je dovoljno da proučavam knjigu [31] Privalov-a, a i knjiga Goluzin-a ima „teških" delova. Ahlfors,[23] jedan od očeva teorije kvazikonformnih (qc) preslikavanja, je boravio u Beogradu pre Drugog svetskog rata, a njegov mentor Nevanlinna posle Drugog svetskog rata [24]. Naime, Vladimir Mićić, učenik profesora Zoriča [25] i Dajovića, kao što sam na početku pomenuo, dao mi je knjigu sa konferencije održane u Canterbury-ju[26] u kojoj sam našao Gehring-ov problem. Tako je počelo moje interesovanje za kvazikonformna preslikavanja.

Po odlasku profesora Dajovića u penziju, grupa za kompleksnu analizu (M. Mateljević, M. Pavlović, M. Jevtić, M. Obradović) razmatra probleme vezane za prostore analitičkih funkcija i polako stiče međunarodnu reputaciju. Posle mog povratka iz SAD-a 1990. godine, počeo sam da radim sa N. Lakićem u oblasti kvazikonformnih preslikavanja. Lakić ubrzo odlazi u SAD i dobija značajne rezultate iz oblasti Teichmüller-ovih prostora. Seminar za Kompleksnu analizu ima međunarodnu reputaciju, govori se i o beogradskoj školi[27]. Izgledalo je da je kompleksna analiza u Beogradu dostigla najvišu tačku. Ali iznenađenja se nastavljaju. Na seminaru se pojavljuju V. Marković i V. Božin (smatram ih svojim učenicima). Zajedno sa Lakićem rešavamo Teichmüller-ov problem ekstremalnih dilatacija [28]. V. Marković [29] je svetski lider u teoriji qc preslikavanja i 3-dimenzionalnoj topologiji i geometriji i profesor na Cambridge-u [30]. D. Kalaj i D. Šarić stiču međunarodnu reputaciju. Na seminaru

[21] Kao što je to urađeno u mnogim savremenim udžbenicima.

[22] Tako smo dobili „srpskog" Hardy-ja; neki si govorili da se prvo „u Beogradu pojavio" Littlewood (Hardy-jev koautor u mnogim radovima).

[23] Dobitnik nagrade „Fields Medal" 1936. godine.

[24] Tako da se i „njihov duh pojavio na ovim prostorima i izgleda potisnuo Littlewood-a".

[25] Vladimir A. Zorich je istaknuti profesor matematike na Univerzitetu u Moskvi. Rešio je problem globalnog homeomorfizma za prostorna kvazikonformna preslikavanja što je omogućilo dalekosežne generalizacije. Autor je izvanrednih knjiga Matematička analiza I i II.

[26] Proceedings of the Symposium on complex analysis: Canterbury 1973.

[27] Na konferencijama: Reich, Krushkal, Cazacu, Stanojević i drugi, a posebno Olli Martio prilikom gostovanja u Beogradu 2009. godine.

[28] „Ahlfors-ov duh je ponovo u Beogradu".

[29] 2014. godine izabran za člana Britanskog (engleskog) kraljevskog društva (engleski Royal Fellow of the British Royal Society).

[30] Sadlerijan profesor na Univerzitetu Cambridge; ovu poziciju imao je i Hardy.

su počeli i D. Vukotić [31] i N. Šešum [32]. Trenutno na seminaru aktivno učestvuju M. Marković, M. Knežević, M. Svetlik, N. Mutavdžić, B. Karapetrović, P. Melentijević. Za seminar (ili za grupu iz kompleksne analize) su vezani i M. Jevtić, M. Pavlović, M. Arsenović, S. Stević, I. Anić, M. Laudanović, O. Mihić [33], V. Manojlović [34], N. Babačev, A. Abaob, A. Shkheam, D. Đurčić, S. Nikčević, V. Grujić kao i studenti koji su izlagali na izbornim predmetima: M. Milović, N. Lelas, M. Lazarević, V. Stojisavljević, S. Gajović, F. Živanović, D. Kosanović, D. Špadijer, Z. Golubović i S. Radović. U rad seminara uključivali su se i D. Kečkić, R. Živaljević, D. Milinković, D. Jocić, Đ. Milićević, D. Damjanović, D. Ranković, V. Baltić, N. Jozić (Baranović) i M. Albijanić [35]. Ipak, može se smatrati da klica svega toga potiče od profesora Dajovića.

7.6. Alas-Tadija-Vojin

Mihailo Petrović je doktorirao pred komisijom u kojoj su bili Hermite, Picard i Penleve. Profesor mu je bio i Poincaré. Misao koja se nameće odnosi se na matematičare koji su gradili matematičku vertikalu. Veliki Gauss kaže: „*Matematika je kraljica nauka*" i nadahnuto nastavlja: „*Pored jezika i muzike, matematika je jedna od glavnih oblasti stvaralaštva. Prava matematika je lepa i istinita. Najznačajniji rezultati u matematici su trijumf ljudskog uma, i sadrže ne samo istinu nego i najveću lepotu*". O lepoti matematike Hardy kaže: „*Matematičar je kao i slikar ili pesnik, kreator modela... Matematički modeli, kao i slikarski ili pesnički, moraju biti lepi*". U tom duhu Hardy je vaspitavao svoje učenike i naslednike. Za Poincaré-a kažu da ga niko u lepoti pisanja još nije nadmašio, a imao je naročitu sposobnost da na jednostavan način predstavi matematiku drugima. Kod nas, podsticaj mladim ljudima, koji žele da šire znanje i samostalni rad, nesumnjivo je dao Mihailo Petrović. On je kreator Beogradske matematičke škole koju čini plejada matematičara koji su doktorirali kod Mike, a zatim nastavili matematičku vertikalu.

Dajovićev mentor je Tadija Pejović (1892 - 1982), a Tadiji je mentor bio Mihailo Petrović Alas (1868 - 1943)[36]. Alas je dao doprinos u određivanju prirode nula i polova rešenja linearnih jednačina u oblasti koja se po njegovom mentoru Penleve-u, naziva Penleve-ovi transcedenti i Penleve-ove jednačine. Možda ima smisla lanac iz naslova proširiti na Penleve - Alas - Tadija - Vojin - Miodrag - Vladimir.

Ponovimo, profesor Dajović je rođen 1914. godine i kao i drugi koji su rođeni te godine vezan za značajnu godinu i događaje iz novije srpske istorije. Te godine su Mihailo i Tadija prešli albansku golgotu i stigli na Krf.

Dozvolite mi, s obzirom na važnost ove godine, da napravim malu digresiju.

Godine 1914. i 2014. Pre tačno 100 godina, 28. jula 1914., Predsednik srpske vlade Nikola Pašić je u jednoj niškoj kafani pročitao poruku da je Beč objavio rat Srbiji: „Austrija nam je objavila rat. To je njen kraj. Bog će nam dati pobedu.". Srbija je, zavisno od procena, izgubila između 1 100 000 i 1 300 000 stanovnika; 60% muške populacije. Milutin Bojić je posvetio pesmu „*Plava grobnica*" drugovima koji su ostali u vodama na ostrvu Vido. Pesma počinje stihovima: „*Stojte, galije carske! Sputajte krme moćne! Gazite tihim hodom! Opelo gordo držim u doba jeze noćne nad ovom svetom vodom.*". Od 2014. godine više fizički nije sa nama još jedan Milutin (naš profesor analize, Dostanić).

Možemo reći da u fizičkom nestajanju postoji besmrtno ili kao što kaže Rostan: „*Vidi se da se poraz ko uspeh pokaže kada postanete slave sin; Vidi da lepota puna bleska stupa, Kad najdostojnije večnost slavom kupa.*".

Ipak, vreme je 1914. podsticalo vizije životnog besmisla, prolaznosti i konačnosti svega što postoji.

U avgustu 2014. posetio sam Vido, ali još uvek me pohode Bojićevi i Disovi stihovi: „*Noćas su me pohodili mrtvi. Nova groblja i vekovi stari; Prilazili k meni kao žrtvi, Kao boji prolaznosti stvari*". Disova pesma „*Naši dani*" iz 1910., kao da je danas pisana: „*Umrli su svi heroji i proroci. Razvilo se crno vreme opadanja. Budućnosti zatrovasmo sve izvore, A poraze proglasismo za pobede. Na visoko podigli se sutereni, Svi podmukli, svi prokleti i svi mali Postali su danas naši suvereni.*".

Godine 2014. ekonomska kriza i katastrofalne poplave zahvatile su Srbiju, koja se ponovo bori za opstanak.

[31] Profesor na Universidad Autónoma de Madrid, España.

[32] Profesor na Univerzitetu Rutgers - State University of New Jersey New Brunswick, NJ., pozivno predavanje u sekcji ICM2014, Seoul, Korea.

[33] Uspostavila saradnju sa Shamoyan-om.

[34] Intenzivirala je saradnju sa finskom školom koju sam započeo; dovela Villani-ja (dobitnik nagrade „Fileds medal" za 2010. godinu) u Beograd.

[35] Kao direktor Zavoda za udžbenike i urednik za matematiku dao značajan doprinos u publikaciji matematičke literature, izdao veliki broj knjiga profesora Matematičkog fakulteta.

[36] Mihailo Petrović (Mika Alas) je bio uticajan srpski matematičar i pronalazač. Bio je istaknuti profesor na Univerzitetu u Beogradu, akademik, ribar, pisac, publicista, muzičar, biznismen, putnik i dobrovoljac u Prvom i Drugom svetskom ratu. Učenik je Poincaré-a, Hermite-a i Picard-a. Značajno je doprineo teoriji diferencijalnih jednačina, a izumeo je i jedan od prvih prototipova analognog računara.

Kako preživeti? Srbi su se pokazali u istoriji kao vitalan narod pun duha i optimizma. Već 1916., pošto su se oporavili, u kabareu Orfeum prepričavali su, sa specifičnim srpskim humorom, sve što se dešavalo na putu do Krfa: „*Pregurasmo Albaniju, Prebrodismo svu Adriju, Čak do Krfa dogurasmo, i to, kažu, sve zbog klime, Jer na Krfu nema zime.*".

Kao što voda uvek prokopa korito i nastane reka i mi ćemo tražiti put. Moramo se boriti za preporod, mada nema jasne vizije. Istorija ljudskog društva puna je preokreta. Na primer, iznenada u obrazovanju pojavljuju se i pozitvni znaci. Na ovogodišnjoj Šangajskoj listi, koja od 2003. godine rangira vrhunske akademske institucije iz celog sveta, našli su se univerziteti iz regiona. Univerzitet u Beogradu zauzeo je rang od 301. do 400. mesta i tako popravio prošlogodišnji plasman. Univerzitet u Beogradu je takođe, po prvi put rangiran i u jednom od naučnih polja - matematici, između 101. i 150. mesta. Prema broju radova u top 20% časopisa beogradska matematika i Matematički fakultet su u ravni sa vodećim američkim univerzitetima (Berkeley, Harvard, Princeton) i ispred Cambridge-a.

Peti simpozijum „Matematika i primene" - nacionalna konferencija s međunarodnim učešćem, održaće se 17. i 18. oktobra 2014. u organizaciji Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu i Srpske akademije nauka i umetnosti (SANU). U okviru simpozijuma planiramo i sekciju koja se odnosi na mali jubilej. Možda će neko od učesnika dotaći i pitanje da li sam se najzad popeo uz Balkansku ulicu [37] i da li mogu mirno da pijem kafu kod hotela Moskva?

Posle rešenja Gehring-ovog problema zaboravio sam na ulančane krive. Nisam poznavao prilike u svetskoj matematici i nisam predvideo šta će se događati. Intuicija i oprez kao da su tada zatajili i izgleda da sam promašio put koji je išao u dobrom pravcu.

Kada sam završio ovaj članak tražio sam na internetu verziju Virtinger-ove leme u sfernoj geometriji, u nameri da protumačim deo o Virtinger-ovoj lemi u sfernoj geometriji (W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig, 1916, p. 130- 132, ruski prevod 1967). Nekoliko puta se pojavio Osserman-ov članak (R. Osserman, The isoperimetric inequality, Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), 1182-1238). Pretražujući članak iznenada sam naišao na prikaz Gehring-ovog problema za ulančane krive (i teoremu koja daje rešenje), a onda i na radove čiji su autori Gage, Edelstein i Schwarz, Eremenko, Bombieri i Simon, kao i na druge radove. Gehring-ov problem izazvao je pažnju istaknutih matematičara, koji su publikovali radove i uglednim časopisima.

Nisu citirali moj rad [17] iz Matematičkog Vesnika. Ne mogu rečima da opišem kako se osećam, nešto između neraspoloženja i sete. Mogao sam nešto učiniti. Pokušaću da napišem pregledni članak (M. Mateljević, Note on F. Gehring's problem on linked curves, pojaviće se u Filomatu) i povratim izgubljeno.

Umesto objašnjenja jednostavnije je citirati Njegoša: „ *Iz grmena velikoga lafu izać trudno nije, u velikim narodima geniju se gnijezdo vije. Al' heroju Topolskome - Karadjordju bezsmrtnome sve prepone na put bjehu... k cilju dospje velikome. Sabljom mu se Turci kunu, kletve u njih nema druge!*"

i Einstein-a:

„ *Osoba koja nikada nije napravila grešku nikada nije pokušala nešto novo . Ako ne možete objasniti jednostavno, ne razumete dovoljno dobro. Ne brinite o vašim teškoćama u matematici. Mogu da vas uverim moje su još veće. Sve je relativno.*"

Zahvalnica. *Zahvaljujem se koleginici Oliveri Mihić, kolegi Miloljubu Albijaniću i profesoru Vladimiru Mićiću na korisnim sugestijama. Posebno ističem ulogu kolege Mareka Svetlika koji je uložio ogroman trud i znanje u pripremu ovog rada, nekoliko puta pažljivo čitao i korigovao grube verzije teksta (ovo je verzija 35), pomogao da se otklone razne greške, izradio slike i tehnički pripremio rad za štampu.*

Bibliografija

[1] **D. Adnađević, Z. Kadelburg.** *Matematička analiza II* , Beograd, 1991.

[2] **S. Aljančić.** Uvod u realnu i funkcionalnu analizu. *Građevinska knjiga, Beograd*, 1968.

[3] **J.M. Anderson, K.F. Barth, D.A. Brannan.** *Research Problems in Complex Analysis*, Bull. London Math.Soc., 9 (1977), 129-162.

[4] **M. Berger's.** Geometry Revealed: A Jacob's Ladder to Modern Higher Geometry, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[5] **V. Dajović.** Sur l'existence des values limites de la resultante des fonctions appartenant a la classe H_δ ($\delta > 1$). *Vesnik Društva matematičara i fizičara* VIII, 1-2, 1956.

[37] Nisam gostovao u emisiji „Balkanskom ulicom".

[6] **V. Dajović.** Teorija funkcija kompleksne promenljive sa primenama. Beograd, 1977.
[7] **P.L. Duren.** Theory of H_p Spaces, New York, Academic Press, 1970.
[8] **Z. Damjanović.** Vojin Dajović 1914-1993.*Spomenica preminulim članovima Akademije*, CANU, sv. 19, 30-34, 1995.
[9] **M. Edelstein, B. Schwarz.** On the length of linked curves. *Israel J. Math.* 23 (1976), no. 1, 94-95.
[10] **G.M. Goluzin.** Geometric theory of functions of a complex variable. *Translations of Mathematical Monographs, Vol. **26** American Mathematical Society*, Providence, R.I. 1969 vi+676 pp.
[11] **V.I. Gorbaichuk and V.I. Kuzminch.** On some properties of the Hadamard products of functions which are regular in the unit disc. *Ukrainian Mathematical Journal*, January-February, 1975, Volume 27, Issue 1.
[12] **G.H. Hardy.** On the mean value of the modulus of an analytic function. *Proceedings of the London Mathematical Society 14*, 269-277, 1915.
[13] **J. Karamata.** Kompleksan broj sa primenom na elementarnu geometriju. *Naučna knjiga, Beograd* 1950.
[14] **D.A. Kryjanovsky.** Izoperimetry. *Fizmatgiz*, Moskva, 1959.
[15] **M. Maplangoto, M. Marjanović, S. Todorčević.** Prof. dr Đuro Kurepa, Povodom stogodišnjice osnivanja Međunarodne komisije za nastavu matematike. *Nastava matematike*, LVII, 1-2, Beograd, 2012.
[16] **M. Marković.** Nejednakosti izoperimetrijskog tipa u prostorima analitickih funkcija. *Doktorska disertacija, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu*, 2013.
[17] **M. Mateljević.** *On linked Jordan curves in* $\mathbb{R}^3$, Mat. Vesnik (12) (27), 1975, 285-286.
[18] **M. Mateljević.** Nejednakosti u H^p prostorima i njihova ekstremalna svojstva. *Magistarski rad, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Beogradu*, 1976.
[19] **M. Mateljević.** Ocene normi i ekstremalni problemi u H^1. *Doktorska disertacija, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Beogradu*, 1979.
[20] **M. Mateljević.** The isoperimetric inequality and some extremal problems in H^1. *Lect. Notes Math.*, 798, 1980, 364-369.
[21] **M. Mateljević.** Kompleksne Funkcije 1 & 2. *Društvo matematičara Srbije*, 2006.
[22] **M. Mateljević.** Kompleksna analiza 2 (Kompleksna integracija, Analitičke funkcije, Konformna preslikavanja i Ekstremalna qc preslikavanja). Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.
[23] **M. Mateljević.** Topics in Conformal, Quasiconformal and Harmonic maps. Zavod za udžbenike, Beograd 2012.
[24] **M. Mateljević, N. Jozić, M. Svetlik.** Istraživanjem do minimuma ili maksimuma. *Zbornik radova, Treći simpozijum Matematika i primene, Matematički fakultet, Beograd 25.-26.05.2012.*, 35-54, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet 2013.
[25] **M. Mateljević, M. Pavlović.** New isoperimetric inequality and some generalizations. *JMAA*, 98, 1984, 25-30.
[26] **M. Mateljević, M. Pavlović.** Behavior of power series with positive coefficients and Hardy spaces. *Proc. Amer. Math.* Soc. Vol. **87** No.2 (1983), pp 309-316.
[27] **M. Mateljević, M. Pavlović.** *L^p-behaviour of the integral means of analytic functions*, Studia Mathematica Vol. 77 (1983), 219 - 237.
[28] **M. Mateljević, M. Pavlović.** *Multipliers of H^1 and BMOA*, Pacific Journal of Mathematics 146 (1990), 71-84.
[29] **V. Mićić, M. Nikić.** Vojin Dajović 1914-1993. *Mat Vesnik*, 45(1993), 71-74.
[30] **D. Mitrinović (urednik)** Mihailo Petrović - čovek, filozof, matematičar. *Matematička biblioteka*, 1968.
[31] **I.I. Privalov.** Boundary Properties of Analytic Functions, 2nd ed., GITTL, Moscow-Leningrad, 1950.
[32] **W.Rudin.** *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co, 1966.
[33] **F. Riesz.** Über die Randwerte einer analytischen Funktion. *Math. Z. 18*, 87-95, 1923, doi:10.1007/BF01192397.
[34] **M. Taibleson.** Fourier coefficients of functions of bounded variation, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 766.
[35] **V.M. Tikhomirov.** Stories about Maxima and Minima. AMS-MAA, 1990.
[36] **S. Vrećica.** On polygons and polyhedra. *Teaching of Mathematics* 2005, Vol. VIII, 1, pp. 1-14.
[37] **R.A. Whiteman.** A converse form of Daiovitch's theorem, *Duke Math. J.* Volume 31, Number 2 (1964), 321-324; http://projecteuclid.org/euclid.dmj/1077375224
[38] **V. Zorič.** Analiza II, Moskva, 1984.
[39] **A. Zygmund.** Trigonometric Series, vol. 1, Chapter 8, Theorem 1.13, p. 300.
[40] **B.V. Šabat.** Uvod u kompleksnu analizu I, II 1976.

Simposium MATHEMATICS AND APPLICATION, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, 2013 ,Vol. IV(1)

Two new classes of relations

Daniel A. Romano

Faculty of Education, East Sarajevo University, b.b, Semberski Ratari Street, 76300 Bijeljina, Bosnia and Herzegovina

e-mail: bato49@hotmail.com

Abstract. In this paper the concepts of two new classes of relations on sets are introduced. Characterizations of this relations are obtained.

Keywords: Relations, type of relation, bi-quasiregular relation, bi-normal relation

1. Introduction

The regularity of binary relations was first characterized by Zareckiǐ ([11]). Further criteria for regularity were given by Markowsky ([7]), Schein ([10]) and Xu Xiao-quan and Liu Yingming ([12]) (see also [1] and [2]).

The concepts of conjugative relations, dually conjugative relations and dually normal relations were introduced by Guanghao Jiang and Luoshan Xu ([3], [4]), and the concept of normal relations was introduced and analyzed by Jiang Guanghao, Xu Luoshan, Cai Jin and Han Guiwen in [5]. The concepts of quasi-regular relations and dually quasi-conjugative relations are introduced and analyzed by this author in his recent published article [8].

In this paper, we introduce and analyze two new classes of relations, a class of bi-quasiregular relations and a class of bi-normal relations.

2. Preliminaries

For a set X, we call ρ a binary relation on X, if $\rho \subseteq X \times X$. Let $\mathcal{B}(X)$ denote the set of all binary relations on X. For $\alpha, \beta \in \mathcal{B}(X)$, define

$$\beta \circ \alpha = \{(x, z) \in X \times X : (\exists y \in X)((x, y) \in \alpha \wedge (y, z) \in \beta)\}.$$

The relation $\beta \circ \alpha$ is called the composition of α and β. It is well known that $(\mathcal{B}(X), \circ)$ a semigroup. In this semigroup, element $Id_X = \{(x, x) : x \in X\}$ is the identity. For a relation α on a set X, define $\alpha^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in \alpha\}$ and $\alpha^C = (X \times X) \setminus \alpha$.

Let A and B be subsets of X. For $\alpha \in \mathcal{B}(X)$, set

$$A\alpha = \{y \in X : (\exists a \in A)((a, y) \in \alpha)\},\ \alpha B = \{x \in X : (\exists b \in B)((x, b) \in \alpha))\}.$$

It is easy to see that $A\alpha = \alpha^{-1}A$ and that $(\alpha^C)^{-1} = (\alpha^{-1})^C$ holds. Specially, we put $a\alpha$ instead of $\{a\}\alpha$ and αb instead of $\alpha\{b\}$.

Notions and notations which aren't explicitly exposed but are used in this article, reader can find them from book [6] and articles [3], [4], [5] and [12], for an example.

Let α be a relation on set X. We have $\alpha = \bigcup_{y \in X}(\alpha y \times \{y\})$. Therefore, a relation α on X can be naturally defined by specifying the values $\alpha(y) = \alpha y$ for all $y \in X$, or by specifying the domain D_α and $\alpha(y)$ for all $y \in D_\alpha$. In particular, the composite relation $\beta \circ \alpha$ can be naturally defined such that $(\beta \circ \alpha)(y) = \beta(\alpha(y))$ for all $y \in X$. Thus, we also have the same equality for the set B instead of the point y.

Beside the composition product $\beta \circ \alpha$, the *box product* may also be used.

Definition 2.1. Let α and β be arbitrary elements in $\mathcal{B}(X)$. The *box product* of relation α and β is the relation defined by

$$(\alpha \,\Box\, \beta)(x, y) =$$
$$\alpha(x) \times \beta(y) = \{(u, v) \in X \times X : (x, u) \in \alpha \wedge (y, v) \in \beta\}$$

for all $(x, y) \in X^2$.

For this approach we due to professor Arpad Szaz (Institute of Mathematics University of Debrecen, Hungary).

We have the following representation of composition of tree relations using this new notion.

Lemma 2.1. *Let α, β and γ be relations on set X. Then*

$$\gamma \circ \beta \circ \alpha = (\alpha \,\square\, \gamma^{-1})(\beta).$$

Proof.
$$\begin{aligned}(u,v) \in \gamma \circ \beta \circ \alpha &\Longleftrightarrow (\exists a, b \in X)((u,a) \in \alpha \,\wedge\, (a,b) \in \beta \,\wedge\, (b,v) \in \gamma)\\ &\Longleftrightarrow (\exists (a,b) \in \beta)(u \in \alpha a \,\wedge\, v \in \gamma^{-1} b)\\ &\Longleftrightarrow (\exists (a,b) \in \beta)((u,v) \in \alpha a \times \gamma^{-1} b)\\ &\Longleftrightarrow (\exists (a,b) \in \beta)((u,v) \in (\alpha \,\square\, \gamma^{-1})(a,b))\\ &\Longleftrightarrow (u,v) \in (\alpha \,\square\, \gamma^{-1})(\beta).\end{aligned}$$
□

3. Some researched classes of relations

Elements in the semigroup $\mathcal{B}(X)$ which have been investigated are the following classes, for example:

– *regular* if there exists a relation $\beta \in \mathcal{B}(X)$ such that

$$\alpha = \alpha \circ \beta \circ \alpha.$$

– *normal* ([5]) if there exists a relation $\beta \in \mathcal{B}(X)$ such that

$$\alpha = \alpha \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1}.$$

– *dually normal* ([4]) if there exists a relation $\beta \in \mathcal{B}(X)$ such that

$$\alpha = (\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ \alpha.$$

– *conjugative* ([3]) if there exists a relation $\beta \in \mathcal{B}(X)$ such that

$$\alpha = \alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha.$$

– *dually conjugative* ([3]) if there exists a relation $\beta \in \mathcal{B}(X)$ such that

$$\alpha = \alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}.$$

– *quasi-regular* ([8]) if there exists a relation $\beta \in \mathcal{B}(X)$ such that

$$\alpha = \alpha^C \circ \beta \circ \alpha,$$

– *dually quasi-regular* ([8]) if there exists a relation $\beta \in \mathcal{B}(X)$ such that

$$\alpha = \alpha \circ \beta \circ \alpha^C.$$

– *quasi-conjugative* ([9]) if there exists a relation $\beta \in \mathcal{B}(X)$ such that

$$\alpha = \alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha^C.$$

Using the concept of 'box product' of relations, above mentioned types of relations, can be represented by the following ways:

– α is a 'regular' relation $\Longleftrightarrow (\exists \beta \in \mathcal{B}(X))(\alpha = (\alpha \,\square\, \alpha^{-1})(\beta))$;

– α is a 'normal' relation $\Longleftrightarrow (\exists \beta \in \mathcal{B}(X))(\alpha = ((\alpha^C)^{-1} \,\square\, \alpha^{-1})(\beta))$;

– α is a 'dually normal' relation $\Longleftrightarrow (\exists \beta \in \mathcal{B}(X))(\alpha = (\alpha \,\square\, \alpha^C)(\beta))$;

– α is a 'conjugative' relation $\Longleftrightarrow (\exists \beta \in \mathcal{B}(X))(\alpha = (\alpha \,\square\, \alpha)(\beta))$;

– α is a 'dually conjugative' relation $\Longleftrightarrow (\exists \beta \in \mathcal{B}(X))(\alpha = (\alpha^{-1} \,\square\, \alpha^{-1})(\beta))$;

– α is a 'quasi-regular' relation $\Longleftrightarrow (\exists \beta \in \mathcal{B}(X))(\alpha = (\alpha \,\square\, (\alpha^C)^{-1})(\beta))$;

– α is a 'dually quasi-conjugative' relation $\Longleftrightarrow (\exists \beta \in \mathcal{B}(X))(\alpha = (\alpha^C \,\square\, \alpha^{-1})(\beta))$.

Put $\alpha^1 = \alpha$. The idea, exposed in above definition is the following: α is a relation of type $\{a, b, c, d\}$ on a set X if there exists a relation $\beta \in \mathcal{B}(X)$ and elements $a, c \in \{1, -1\}$ and $b, d \in \{C, 1\}$ such that

$$\alpha = (\alpha^a)^b \circ \beta \circ (\alpha^c)^d.$$

According to this observation, in this paper we analyze relations by $\{1, C, 1, C\}$-type and relations by $\{-1, C, -1, C\}$-type.

4. Two new classes of relations

In this section we introduce and analyze two new classes of elements in $\mathcal{B}(X)$, a class of bi-quasiregular relations and a class of bi-normal relations:

Definition 4.1. A relation $\alpha \in \mathcal{B}(X)$ is a *bi-quasiregular* relations on X if there exists a relation $\beta \in \mathcal{B}(X)$ such that

$$\alpha = \alpha^C \circ \beta \circ \alpha^C.$$

Example 4.1. (a) The family of all bi-quasiregular relations on set X is not empty. For example, the relation ∇_X on X, defined by $(x, y) \in \nabla_X \iff x \neq y$, is a bi-quasiregular relation because the following equation

$$\nabla_X \ = Id_X \circ \nabla_X \circ Id_X = \nabla_X^C \circ \nabla_X \circ \nabla_X^C.$$

holds.
(b) Besides, for relation α on X such that α^C is a bijective relation, we have

$$\begin{aligned} \alpha &= Id_X \circ \alpha \circ Id_C = (\alpha^C \circ (\alpha^C)^{-1}) \circ \alpha \circ ((\alpha^C)^{-1} \circ \alpha^C) \\ &= \alpha^C \circ ((\alpha^C)^{-1} \circ \alpha \circ (\alpha^C)^{-1}) \circ \alpha^C = \alpha^C \circ \beta \circ \alpha^C. \end{aligned}$$

So, such relation α is a be-quasiregular relation.

Definition 4.2. A relation $\alpha \in \mathcal{B}(X)$ is a *bi-normal* relations on X if there exists a relation $\beta \in \mathcal{B}(X)$ such that

$$\alpha = (\alpha^{-1})^C \circ \beta \circ (\alpha^{-1})^C.$$

Example 4.2. (a) Also, the family of all bi-normal relations is not empty, because the following equation

$$\nabla_X \ = Id_X \circ \nabla_X \circ Id_X = (\nabla_X^{-1})^C \circ \nabla_X \circ (\nabla_X^{-1})^C.$$

holds since the relation ∇_X is symmetric.
(b) Besides, since for bijective relation α^C we have

$$\begin{aligned} \alpha &= Id_X \circ \alpha \circ Id_X = ((\alpha^C)^{-1} \circ \alpha^C) \circ \alpha \circ (\alpha^C \circ (\alpha^C)^{-1}) \\ &= (\alpha^C)^{-1} \circ (\alpha^C \circ \alpha \circ \alpha^C) \circ (\alpha^C)^{-1} = (\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1}, \end{aligned}$$

such relation α is a bi-normal relation.

Further on, our concepts of these two new relations can be described by the following ways.

Proposition 4.1. *A relation $\alpha \in \mathcal{B}(X)$ is a bi-quasiregular relation if there is a relation $\beta \in \mathcal{B}(X)$ such that*

$$\alpha = (\alpha^C \,\square\, (\alpha^C)^{-1})(\beta).$$

Proposition 4.2. *A relation $\alpha \in \mathcal{B}(X)$ is a bi-normal relation if there is a relation $\beta \in \mathcal{B}(X)$ such that*

$$\alpha = ((\alpha^C)^{-1} \,\square\, \alpha^C)(\beta).$$

Our next two propositions are our adaptations of Schein's result exposed in [10], Theorem 1. (See, also, [2], Lemma 1.)

Theorem 4.1. *For a relation $\alpha \in \mathcal{B}(X)$, relation*

$$\alpha^* = ((\alpha^C)^{-1} \circ \alpha^C \circ (\alpha^C)^{-1})^C$$

is the maximal element in the family of all relation $\beta \in \mathcal{B}(X)$ such that

$$\alpha^C \circ \beta \circ \alpha^C \subseteq \alpha.$$

Proof. It is clear that

$$max\{\beta \in \mathcal{B}(X) : \alpha^C \circ \beta \circ \alpha^C \subseteq \alpha\} = \cup\{\beta \in \mathcal{B}(X) : \alpha^C \circ \beta \circ \alpha^C \subseteq \alpha\}.$$

Let $\beta \in \mathcal{B}(X)$ be an arbitrary relation such that $\alpha^C \circ \beta \circ \alpha^C \subseteq \alpha$. We will prove that $\beta \subseteq \alpha^*$. If not, there is $(x, y) \in \beta$ such that $\neg((x, y) \in \alpha^*)$. The last gives:
$(x, y) \in (\alpha^C)^{-1} \circ \alpha^C \circ (\alpha^C)^{-1} \Longleftrightarrow$
$(\exists u, v \in X)((x, u) \in (\alpha^C)^{-1} \wedge (u, v) \in \alpha^C \wedge (v, y) \in (\alpha^C)^{-1}) \Longleftrightarrow$
$(\exists u, v \in X)((u, x) \in \alpha^C \wedge (u, v) \in \alpha^C \wedge (y, v) \in \alpha^C) \Longrightarrow$
$(\exists u, v \in X)((u, x) \in \alpha^C \wedge (x, y) \in \beta \wedge (y, v) \in \alpha^C \wedge (u, v) \in \alpha^C) \Longrightarrow$
$(\exists u, v) \in X)((u, v) \in \alpha^C \circ \beta \circ \alpha^C \subseteq \alpha \wedge (u, v) \in \alpha^C)$
We got a contradiction. So, must be $\beta \subseteq \alpha^*$.

On the other hand, we should prove that

$$\alpha^C \circ \alpha^* \circ \alpha^C \subseteq \alpha.$$

Let $(x, y) \in \alpha^C \circ \alpha^* \circ \alpha^C$ be an arbitrary element. Then, there are elements $u, v \in X$ such that $(x, u) \in \alpha^C$, $(u, v) \in \alpha^*$ and $(v, y) \in \alpha^C$. So, from

$$(x, u) \in \alpha^C, \neg((u, v) \in ((\alpha^C)^{-1} \circ \alpha^C \circ (\alpha^C)^{-1}), (v, y) \in \alpha^C,$$

we have $\neg((x, y) \in \alpha^C)$. Indeed. Suppose that $(x, y) \in \alpha^C$. Then, we have

$$(u, x) \in (\alpha^C)^{-1} \wedge (x, y) \in \alpha^C \wedge (y, v) \in (\alpha^C)^{-1},$$

i.e. we have $(u, v) \in (\alpha^C)^{-1} \circ \alpha^C \circ (\alpha^C)^{-1}$, which is impossible. Hence, we have to $(x, y) \in \alpha$ and, therefore, $\alpha^C \circ \alpha^* \circ \alpha^C \subseteq \alpha$.

Finally, we conclude that α^* is the maximal element of the family of all relations $\beta \in \mathcal{B}(X)$ such that $\alpha^C \circ \beta \circ \alpha^C \subseteq \alpha$. $\square$

Theorem 4.2. *For a relation $\alpha \in \mathcal{B}(X)$, relation*

$$\alpha_\star = (\alpha^C \circ \alpha^C \circ \alpha^C)^C$$

is the maximal element in the family of all relation $\beta \in \mathcal{B}(X)$ such that

$$(\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha.$$

Some properties of relations $\alpha_\star$ and $\alpha^\star$ are given in the following proposition.

Theorem 4.3. *For relation $\alpha \in \mathcal{B}(X)$, we have:*
(a) $\alpha^\star = \{(x, y) \in X \times X : \alpha^C \circ \{(x, y)\} \circ \alpha^C \subseteq \alpha\}$
$= \{(x, y) \in X \times X : \alpha^C x \times (\alpha^C)^{-1} y \subseteq \alpha\}$;
$= \{(x, y) \in X \times X : (\alpha^C \square (\alpha^C)^{-1})(x, y) \subseteq \alpha\}$;
$= (((\alpha^C)^{-1} \square \alpha^C)(\alpha^C))^C$.
(b) $\alpha_\star = \{(x, y) \in X \times X : (\alpha^C)^{-1} \circ \{(x, y)\} \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha\}$
$= \{(x, y) \in X \times X : (\alpha^C)^{-1} x \times \alpha^C y \subseteq \alpha\}$
$= \{(x, y) \in X \times X : ((\alpha^C)^{-1} \square \alpha^C)(x, y) \subseteq \alpha\}$
$= ((\alpha^C \square (\alpha^C)^{-1})(\alpha^C))^C$.

Proof. (a) Let (x, y) be a pair of elements x and y of set X such that $\alpha^C \circ \{(x, y)\} \circ \alpha^C \subseteq \alpha$. Thus $\{(x, y)\} \subseteq \alpha^\star$ and therefore we have $(x, y) \in \alpha^\star$. Opposite of that, let $(x, y) \in \alpha^\star$ be an arbitrary element. Then, by definition of $\alpha^\star$, there exists a relation $\beta \in \mathcal{B}(X)$ such that $\alpha^C \circ \beta \circ \alpha^C \subseteq \alpha$ with $(x, y) \in \beta$. Since we have $\alpha^C \circ \{(x, y)\} \circ \alpha^C \subseteq \alpha^C \circ \beta \circ \alpha^C$, we conclude that $(x, y) \in \alpha^\star$. Finally, we have $\alpha^\star = \{(x, y) \in X \times X : \alpha^C \circ \{(x, y)\} \circ \alpha^C \subseteq \alpha\}$.

At the other hand, we have

$$\begin{aligned}(u, v) \in \alpha^C \circ \{(x, y)\} \circ \alpha^C &\Longleftrightarrow (u, x) \in \alpha^C \wedge (y, v) \in \alpha^C \\ &\Longleftrightarrow u \in \alpha^C x \wedge v \in (\alpha^C)^{-1} y \\ &\Longleftrightarrow (u, v) \in \alpha^C x \times (\alpha^C)^{-1} y \\ &\Longleftrightarrow (u, v) \in (\alpha^C \square (\alpha^C)^{-1})(x, y).\end{aligned}$$

(b) Also, we can without difficult prove that
$\alpha_\star = \{(x,y) \in X \times X : (\alpha^C)^{-1} \circ \{(x,y)\} \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha\}$
= $\{(x,y) \in X \times X : (\alpha^C)^{-1}x \times \alpha^C y \subseteq \alpha\}$.
holds. □

In the following proposition we give an essential characterization of bi-quasiregular relation.

Theorem 4.4. *For a relation α on a set X, the following conditions are equivalent:*
(1) *α is a bi-quasiregular relation.*
(2) *For all $x, y \in X$, if $(x,y) \in \alpha$, there exists $(u,v) \in X^2$ such that:*
  (a) $(u,x) \in (\alpha^C)^{-1} \wedge (v,y) \in \alpha^C$,
  (b) $(\forall s,t \in X)((u,s) \in (\alpha^C)^{-1} \wedge (v,t) \in \alpha^C \Longrightarrow (s,t) \in \alpha)$.
(3) $\alpha \subseteq \alpha^C \circ \alpha^* \circ \alpha^C$.

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (2). Let α be a bi-quasiregular relation, i.e. let there exists a relation β such that $\alpha = \alpha^C \circ \beta \circ \alpha^C$. Let $(x,y) \in \alpha$. Then there exist elements $(u,v) \in X^2$ such that

$$(x,u) \in \alpha^C,\ (u,v) \in \beta,\ (v,y) \in \alpha^C.$$

Follows that there exist element $u, v \in X$ such that $(u,x) \in (\alpha^C)^{-1}$ and $(v,y) \in \alpha^C$. This proves condition (a).

Now, we check the condition (b). Let $s,t \in X$ be arbitrary elements such that $(u,s) \in (\alpha^C)^{-1}$ and $(v,t) \in \alpha^C$. Now, from $(s,u) \in \alpha^C$, $(u,v) \in \beta$ and $(v,t) \in \alpha^C$ follows $(s,t) \in \alpha^C \circ \beta \circ \alpha^C = \alpha$.
(2) $\Longrightarrow$ (1). Define a binary relation

$$\alpha' = \{(u,v) \in X \times X : (\forall s,t \in X)(((u,s) \in (\alpha^C)^{-1} \wedge (v,t) \in \alpha^C) \Longrightarrow (s,t) \in \alpha)\}$$

and show that $\alpha^C \circ \alpha' \circ \alpha^C = \alpha$ is valid. Let $(x,y) \in \alpha$. Then there exist elements $u,v \in X$ such that the conditions (a) and (b) are hold. We have $(u,v) \in \alpha'$ by definition of relation α'.

Further, from $(x,u) \in \alpha^C$, $(u,v) \in \alpha'$ and $(v,y) \in \alpha^C$ follows $(x,y) \in \alpha^C \circ \alpha' \circ \alpha^C$. Hence, we have $\alpha \subseteq \alpha^C \circ \alpha' \circ \alpha^C$. Contrary, let $(x,y) \in \alpha^C \circ \alpha' \circ \alpha^C$ be an arbitrary pair. There exist elements $u,v \in X$ such that $(x,u) \in \alpha^C$, $(u,v) \in \alpha'$ and $(v,y) \in \alpha^C$, i.e. such that $(u,x) \in (\alpha^C)^C$ and $(v,y) \in \alpha^C$, Hence, by definition of relation α', follows $(x,y) \in \alpha$ since $(u,v) \in \alpha'$. Therefore, $\alpha^C \circ \alpha' \circ \alpha^C \subseteq \alpha$. So, the relation α is a bi-quasiregular relation on X since there exists a relation α' such that $\alpha^C \circ \alpha' \circ \alpha^C = \alpha$.
(1) $\Longleftrightarrow$ (3). Let α be a bi-quasiregular relation. Then there is a relation β such that $\alpha = \alpha^C \circ \beta \circ \alpha^C$. Since $\alpha^* = max\{\beta \in \mathcal{B}(X) : \alpha^C \circ \beta \circ \alpha^C \subseteq \alpha\}$, we have $\beta \subseteq \alpha^*$ and $\alpha = \alpha^C \circ \beta \circ \alpha^C \subseteq \alpha^C \circ \alpha^* \circ \alpha^C$. Contrary, let holds $\alpha \subseteq \alpha^C \circ \alpha^* \circ \alpha^C$, for a relation α. Then, we have $\alpha \subseteq \alpha^C \circ \alpha^* \circ \alpha^C \subseteq \alpha$. So, the relation α is a bi-quasiregular relation. □

Finally, in the following proposition we give an essential characterization of bi-normal relation.

Theorem 4.5. *For a relation α on a set X, the following conditions are equivalent:*
(1) *α is a bi-normal relation.*
(2) *For all $x, y \in X$, if $(x,y) \in \alpha$, there exists $(u,v) \in X^2$ such that:*
  (a) $(u,x) \in \alpha^C \wedge (v,y) \in (\alpha^C)^{-1}$,
  (b) $(\forall s,t \in X)((u,s) \in \alpha^C \wedge (v,t) \in (\alpha^C)^{-1} \Longrightarrow (s,t) \in \alpha)$.
(3) $\alpha \subseteq (\alpha^C)^{-1} \circ \alpha_* \circ (\alpha^C)^{-1}$.

References

[1] **H.J. Bandelt.** *Regularity and complete distributivity.* Semigroup Forum 19(1980), 123-126.
[2] **H.J. Bandelt.** *On regularity classes of binary relations*. In: Universal Algebra and Applications. Banach Center Publications, vol. 9(1982), 329-333
[3] **Jiang Guanghao and Xu Luoshan.** *Conjugative Relations and Applications*. Semigroup Forum, 80(1)(2010), 85-91
[4] **Jiang Guanghao and Xu Luoshan.** *Dually normal relations on sets*; Semigroup Forum, 85(1)(2012), 75-80
[5] **Jiang Guanghao, Xu Luoshan, Cai Jin and Han Guiwen.** *Normal Relations on Sets and Applications*; Int. J. Contemp. Math. Sciences, 6(15)(2011), 721 - 726
[6] **J.M. Howie.** *An introduction to semigroup theory*, Academic Press, 1976

[7] **G. Markowsky.** *Idempotents and product representations with applications to the semigroup of binary relations*. Semigroup Forum, 5(1972), 95-119

[8] **D.A. Romano.** *Quasi-regular relations - A new class of relations on sets*; Publications de l'Institut Mathématique, 93(107)(2013), 127-132

[9] **D.A. Romano.** *Quasi-conjugative relations on sets*; Mat-Kol, XIX (3) (2013), 5-10

[10] **B.M. Schein.** *Regular elements of the semigroup of all binary relations*. Semigroup Forum 13(1976), 95-102

[11] **A. Zareckiĭ.** *The semigroup of binary relations*. Mat. Sbornik, 61(3)(1963), 291-305 (In Russian)

[12] **Xu Xiao-quan and Liu Yingming.** *Relational representations of hypercontinuous lattices*, in: *Domain Theory, Logic, and Computation*, Kluwer Academic Publisher, 2003, 65-74.

Pricing options using the binomial model - practical application

Božidar Radivojević

Matematički fakultet, Univerziteta u Beogradu
e-mail: bozidar_radivojevic@yahoo.com

Miljan Knežević

Matematički fakultet, Univerziteta u Beogradu
e-mail: kmiljan@matf.bg.ac.rs

Abstract. Pricing the option for a given financial instrument is a non-trivial task, considering the volatility and unpredictability of factors which have impact on the open market. Analytic solutions of systems of partial differential equations, using *Black Scholes* model, which is widely used in option pricing, can be found only in finite number of very special cases, where most of the input parameters are either roughly approximated or taken as constants. While it is possible to determine the price of the European options, using either analytical or numerical methods, by taking some of the market variables as constants, the efficient valuation of American options is done mostly using numerical approximations, which often rely on binomial calculation model. As a part of this project, a simple option pricing calculator has been written in C#/WPF programming language, intended for pricing of European and American options, and demonstration of possible profit made by early exercising of American put options. The code behind the program utilizes the binomial model for numerical solution of *Black Scholes* pricing model.

Keywords: Options, Binomial option pricing model, Option pricing calculator.

1. Option definitions

Options are derived financial instruments, or in other words, financial derivatives, that can be traded both on stock and over the counter markets ([1]). The option is a contract which gives the option holder a right, but not the obligation to buy/sell a asset specified in a contract (*underlying asset*) for a prearranged price (*strike price*), at or until a specified future time (*maturity time/expiry time*). Term "underlying asset" can refer not only to typical assets such as company stocks, commodities or foreign currencies, but also to a more exotic types of financial instruments, assets and occurrences, such as stock market indexes, interest rates etc. Underlying assets can also be completely abstract or non tradable things, like the average height of snow in a ski center during season or standard poverty index. In that case, the option is exercised and treated in a similar way to a standard bet ([2]). There are many types of option contracts, each type with its own set of rights granted to the option holder and rules considering option exercise. The most common and most frequently traded types of options are:

- American options - can be exercised on any trading day, before the date specified as an expiry date. For example, Bermudan options can be exercised on any of the specified trading days, before the date specified as an expiry date.

- European options - can be exercised only on the specified date of maturity of option contract.

Besides the types listed above, there are many other types of option contracts, that are constructed using a combination of their properties, or by introducing additional criteria for exercising the option contract.

The prefix *call* in the option type name signifies that the option grants the holder right to buy the underlying asset from the option writer in some future time and, on the other hand, the prefix *put* signifies that the option holder has right to sell the underlying asset to the option writer at the time specified by the contract terms. The prefix *long* signifies that the portfolio is observed from the perspective of the option buyer/holder, while prefix *short* signifies the portfolio is observed from the perspective of the option writer (see [1]).

Most of the options traded on a free market are of the American type (see [3]). Most commonly traded options are those whose underlying assets are company stocks, where, if not told otherwise, one option represents a contract on buying and selling 100 stocks of a certain type/company (see [1]).

Option holder has right but not the obligation to exercise option, while, on the other hand, option writer is obliged to make option exercise possible or in other words, to provide the underlying asset specified by call option, or to provide financial means to buy the asset specified by put option contract.

2. History of option trading

Studying history and evolution of trading financial instruments such as options is extremely difficult and often inaccurate, considering the resemblance of these instruments with other types of combined contracts, including games of chance. It is the well known fact that since the ancient times there was a market for contracts whose fulfilment was to be expected not immediately, but at some point in future instead. First records of trading of assets that resemble to options are found in the text from the ancient Greece. Aristotle, in his work "Politics" gives an example of the great philosopher Tales, who allegedly paid the right to a priority rental of olive presses, several months before the start of the olive season. When the demand for the presses at the start of a very successful olive season rose rapidly, Tales used his high priority right of presses rental, lending them immediately for a much higher price, acquiring large amount of profit. It is also known that option-like contracts where used in ancient Rome and Phoenicia by sailors and marine traders. For details see [4].

In the modern era, contracts with characteristics of options emerged in Netherlands in the XVII century, as arrangements that guaranteed the right to trade tulip bulbs when they are ready for harvesting. Because of the numerous speculations and lack of market controlling mechanisms, in 1637 the extremely fast and artificial inflation of tulip bulb prices lead to a crash of the entire market system, and to adopting more rigorous regulations and outlawing trading of option-like contracts ([5, 6]). At the end of the XVII century, option trading became a regular praxis in London, but more and more government officials were against option trading every day, because of natural speculative potential of option contracts perceived during the Dutch "Tulipmania". Increasing opposition to option trading finally succeeded in making option trading officially illegal in 1733. The prohibition of option trading was in force in United Kingdom until the late 1860-es. After the reintroduction of option trading in London Stock Exchange, option trading gained on its popularity and it was possible to hear expressions *call* and *put* for the names of the option types (see [7]).

Until the seventies of the XX century, options were traded almost exclusively over the counter, each option was specially arranged between three contract sides: the option buyer, the option writer and the "middleman". Options were unique,they usually granted the holder the right to buy/sell 100 stocks of an underlying asset, with maturity/expiry time of 6 months and 10 days after the contract was signed. The process of option trading began when the potential buyer of underlying stock would have contacted the broker who would have then accepted the role of the middleman. Broker would then find an appropriate writer of option on an underlying stock, arranged the strike price and the option price, and then passed the option to the option buyer. After the arranged time, if the buyer decided to exercise the option, he would have then contacted the broker and sold him the option contract. Broker would than exercise the option, buy the underlying asset for the arranged strike price, and then immediately resell it on a free market for its regular market price, greater than the earlier arranged strike price. The moment when the broker-middleman sells the underlying asset acquired by exercising the option of a option buyer is critical from the aspect of market regulation. This trade is not free, executed because the broker decided that the state of the market was adequate, but because it was caused by the activity and will of the option holder. Theoretically speaking, by exercising multiple call options on the same underlying asset, it would be possible to create artificial downward pressure on the option price, by creating an artificial demand on the market and thus lowering the price. Until the seventies of the XX century, trading with over the counter options was not developed enough to compromise the freedom and unpredictability of the free market and lead to speculative actions, particulary if we take to consideration the fact that expiry dates of options were uniformly distributed, additionally lowering the probability of spontaneous exercise of large number of options on the same asset in the short period of time (see [8]).

The first steps towards standardization of option trading and broadening the spectrum of financial instruments that could be legally considered an underlying asset were made in April, 1973 in the US market, by legalization of *listed* call options, by the American SEC (*Securities and Exchange Commission*) on the 34 types of most commonly traded stocks on the New York Stock Exchange. Listed options are option contracts with standardized strike prices and expiry dates, usually printed in series of 100, named by the month of their expiry (for example: the January series). Founding of CBOE (*Chicago Board Options Exchange*) and OCC (*Options Clearing Corporation*) and introducing of listed put options trading an all available assets and legalization of option trading in stock exchanges worldwide, lead to a significant increase in option trading. Development of *Black Scholes* model for option pricing gave the necessary formal proof that options are not exclusively speculative instruments, considering that before the formal introduction of this model, option prices were determined almost instinctively, based on the broker's experience and known rates of supply and demand (see [8, 9]).

3. Pricing of American and European options using binomial model

3.1. Determining the option price. *Black-Scholes* model

Value of option depends from many variables, some of them dependant on the characteristics of the option itself, others on the state of the market where the option is written. Each option is characterized by the following:

- Data determining the underlying asset.
- Date of maturity/expiry T. For example, for American options, the date after which the option can no longer be exercised - expiry date. For European options, the date when the option can be exercised - maturity date.
- Strike price X - prearranged price for buying/selling of underlying asset.

Besides the listed properties that characterize the option, which are known and constant, the real value and payoff of the option is affected by (see [2]):

- Risk-free interest rate at the time t, denoted as r_t (depends of the market movements).
- Volatility rate of the market, denoted as σ. Here we use that this parameter is no affected by time.
- Underlying asset's price at the time t, denoted as $S_t = S(t)$.

Each of the listed factors can be observed as a random variable, considering that large and unpredictable amount of other factors are influencing their value often unquantifiable. The unpredictability of factors which affect the state of the market makes option pricing for the underlying financial instrument a nontrivial task, possible only if large amount of entry parameters are approximated or taken as constant (see [3]).

Black Sholes(-Merton) model, dating from 1973, published in the article "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", of the Journal of Political Economy, whose application derives a partial differential equation for analytic determination of optimal price for European put and call options is one of the most commonly used theoretical models for option pricing. Following assumptions must be made in order to derive a solvable equation from a Black Sholes model:

- Asset price is continuous variable of time and follows a completely random path, i.e. it follows the generalized Wiener process $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t \varepsilon \sqrt{dt}$, where the variable ε has standard normal distribution. Precisely, the stock (underlying asset) price S_t has a log-normal distribution. That is, if S_t is the price of the stock at a time t, $t \geqslant 0$, then the variable $\log S_t$ has a normal distribution with the mean $\log S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$ and the standard deviation $\sigma\sqrt{t}$, where μ is the stock expected rate of return (when $\sigma = 0$). Obviously, here we used that the volatility σ of a stock price is defined so that $\sigma\sqrt{\triangle t}$ is the standard deviation of the return on the stock price in a short period of time of length $\triangle t$ (see (10)).
- Short selling is allowed (selling of commodities which are unobtainable at the moment, but will be in possession at the time that follows).
- There are no transaction fees, i.e. differences between minimal price threshold of seller and maximal price threshold of buyer. Also, there are no tax fees.
- Portfolio can be adjusted continuously in function of time and amount of asset available (asset is perfectly dividable).
- Asset does not payoff discrete dividends during the lifespan of the option.
- There is zero possibility for arbitrage, i.e. there are no riskless arbitrage opportunities.
- Loans can be taken with risk-free interest rate.
- Risk-free interest rate r_t is constant in time and independent from maturity/expiry time. Thus, $r_t = r$, $t > 0$.
- Liquidity od the market is limitless.
- There is no risk that the other contract partner will fail to meet the contract requirements.

Now, when all the assumptions listed above are made, the option price can be calculated by solving the partial differential equation

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S_t,t)+\frac{1}{2}\sigma^2{S_t}^2\frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}(S_t,t)+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S_t}(S_t,t)-rV(S_t,t)=0 \tag{1}$$

by parameter $V_t = V(S_t,t)$, which represents the value of the option, where q is constant dividend yield per annum. For example (see subchapter 3.2), in the case of a European call option, the value $V_t = V(S_t,t)$ of that derivative has to be calculated subject to the boundary condition $V_T = V(S_T,T) = max(S_T - X, 0)$. On the other hand, if we are dealing with a European put option, the boundary condition looks as $V_T = V(S_T,T) = max(X - S_T, 0)$.

Limitations of practical application of this model are obvious, therefore the other, numerical methods for option pricing needed to be discovered, which would allow more efficient solving of Black Scholes model and with less reductional assumptions. Considering that the Black-Scholes equation (1) is parabolic equation, so it is possible to reach approximate solution using finite difference method (see [10]). Numerical solving is applicable to a much wider variety of option types, making it generally more useful than the analytic methods. For simple subtypes of European options, analytic solution is often used as a way to assess the accuracy of a numerical solution (see for example [3]). For American options, the solution of Black-Scholes equation (1), in general case, cannot be found analytically because the moment when the early exercise of an option is optimal is completely unknown from the data available.

3.2. Determination of possible profit

Options, by their definition, grant the owner the right, **but not the obligation** to exercise the option in the contracted time span before her expiry date (American type option) or on the date of maturity (European type option). According to that, option holder will exercise the option if and only if it suits him, or in other words, if the market state is such that exercising the option would bring profit (see [2]). Let us introduce the following notation

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{if } x \leq 0. \end{cases}$$

Let the X be the strike price of the option, S_t asset price at the market at the moment t. Now the value of the call option at the moment of exercise T can be determined as

$$(S_T - X)^+. \tag{2}$$

Also, the value of the put option at the moment of exercise T can be determined as

$$(X - S_T)^+. \tag{3}$$

The both quantities are estimated from the perspective of the option buyer. It is clear that the profit is always nonnegative from the perspective of the option buyer, if no starting fee was paid for obtaining the option. If the option itself had no price, the investor holding it would in no case lost the money, he would have made profit any time the expressions (2) or (3) would be positive, which is contrary to a non-arbitrage principle (see [2]). If it is assumed that the risk-free interest rate is of constant value r, and the compounding method is continuous, then the profit of each of the contract sides at the moment T of option exercise, whose initial price was C_0, can be determined using following equations:

- Buyer of call option
$$(S_T - X)^+ - C_0e^{rT}. \tag{4}$$
- Writer of call option
$$C_0e^{rT} - (S_T - X)^+. \tag{5}$$
- Buyer of put option
$$(X - S_T)^+ - C_0\mathrm{e}^{rT}. \tag{6}$$

- Writer of put option

$$C_0e^{rT} - (X - S_T)^+. \tag{7}$$

Let us notice that the potential loss for the buyer of call or put option is always limited above, to the value of starting price of the option, while the potential loss for the option writer can be much higher, or even unlimited in the case of a call option (see for example [1, 2]).

3.3. Basics and application of binomial model

In the foundation of the binomial tree option pricing model lays the following important assumption: the price of an asset, which value at the time t is S_t, at the moment $t+\delta$ can take only one of two possible values, either uS_t or dS_t, with probability p or $1-p$, respectively, $\delta = \triangle t > 0$. By using Taylor series expansion (see the relation (11)), approximation of the realistic volatility of a random process of an asset price changing is achieved through adequate setting of the parameters u, d and p. The model also requires that the risk-free interest rate is of a constant value r, $d < e^{rT} < u$, during the time span of option validity period, thus the conditional expectation, in the risk neutral world, of the random variable $S_{t+\delta} = S(t+\delta)$, if the value of S_t is known, can be calculated using the formula

$$\begin{aligned} E[S(t+\delta)|S_t] &= pS_tu + (1-p)S_td \\ &= \mathrm{e}^{(r-q)\delta}S_t, \end{aligned} \tag{8}$$

where $E[X|Y]$ is value of the conditional expectation of a variable X, if the realization of a variable Y is known, and q is dividend yield given. If we define

$$\tilde{S_t^\delta} := E[S(t+\delta)|S_t], \tag{9}$$

then, when we pass to the conditional variance, we get

$$\begin{aligned} E[(S(t+\delta) - \tilde{S_t^\delta})^2|S_t] &= E[S(t+\delta)^2|S_t] - (\tilde{S_t^\delta})^2 \\ &= p(S_t)^2u^2 + (1-p)(S_t)^2d^2 - (pS_tu + (1-p)S_td)^2 \\ &= (S_t)^2\sigma^2\delta. \end{aligned} \tag{10}$$

Note that here we used that (see section 3.1)

$$\sigma^2\delta = pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2. \tag{11}$$

Further, following the *Cox-Ross-Rubinstein* famous model, we suppose that the parameters u and d are linked by the relation $u = 1/d$, so the solution the previous system (see the relations (8) and (11)) of the nonlinear equations with parameters u, d and p can be determined by approximation, using the Taylor series expansion of the exponential function in terms of the variable δ. Finally, the parameters u, d and p have the following expressions

$$u = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\delta}}, \tag{12}$$

$$d = \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\delta}} \quad \text{and} \tag{13}$$

$$p = \frac{\mathrm{e}^{(r-q)\delta} - d}{u - d}. \tag{14}$$

If one step binomial tree is used in determination of the parameters u, d and p, it would be possible to calculate the option price, but the possible error would be too high, making the result completely useless. Instead of that, the time interval of option life span is divided into N equal time steps, such that $\delta = \triangle t = T/N$. Then, one could construct a recombinant binomial tree (see [1]) in a manner that on the depth $k \in \{0, 1, 2, ..., N\}$ the stock price at the node $i \in \{0, 1, ..., k\}$ has the value $S_0u^id^{k-i}$. After the tree is populated with stock price values, option value is easily calculated in leafs of that tree as the discounted value of its one step ahead expected payoff (see [1] and [2]). It is possible to calculate the payoffs, because the option values is known at the moment

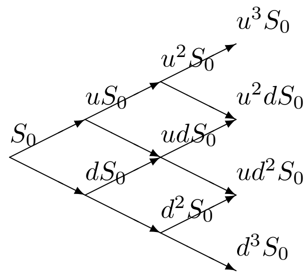


Figure 1. Recombinant binomial tree with the first three steps

of its maturity/expiry. Thus, the option price V_i^k, in non-leaf nodes of the binomial tree, is calculated by going backwards through the branches, using the recurrent formulas below.

- For European options, by using backward induction, we have $V_i^{k-1} = \mathrm{e}^{-r\delta}(pV_{i+1}^k + (1-p)V_i^k)$, $k \in \{0, 1, 2, ..., N\}$, $i \in \{0, 1, ..., k\}$, where $V_i^N = (u^i d^{N-i} S_0 - X)^+$, in the case of a call option, or $V_i^N = (X - u^i d^{N-i} S_0)^+$, in the case of a put option, $i \in \{0, 1, ..., N\}$.
- For American options, again by using backward induction, we have $V_i^{k-1} = \max(\mathrm{e}^{-r\delta}(pV_{i+1}^k + (1-p)V_i^k), P(S_i^{k-1}))$, $k \in \{0, 1, 2, ..., N\}$, $i \in \{0, 1, ..., k\}$, where $P(S_i^{k-1}) = (X - u^i d^{k-1-i} S_0)^+$, $k \in \{0, 1, 2, ..., N\}$, $i \in \{0, 1, ..., k\}$, is the option payoff at the node of the tree when the underlying stock has the value $S_i^{k-1} = u^i d^{k-1-i} S_0$. Recall that $V_i^N = (u^i d^{N-i} S_0 - X)^+$, in the case of a call option, or $V_i^N = (X - u^i d^{N-i} S_0)^+$, in the case of a put option, $i \in \{0, 1, ..., N\}$.

After the entire procedure is complete, the wanted option value is V_0^0. Because the parameter p denotes the probability value, condition $0 \leq p \leq 1$, must be met, so it must be $\delta < \frac{\sigma^2}{(r-q)^2}$. For arbitrary small value δ, real life continuity of the process will be simulated with satisfying accuracy. In the model used by the code behind the binomial calculator, it is assumed that $q = 0$, which makes the simulation more time efficient, but less accurate. Most of the options traded at the market are of American type. Therefore, an accurate and efficient valuation of American options is very important. Because an American option can be exercised at any time, its value can never be less than the payoff. Otherwise it would be exercised immediately. On the other hand, the following important property of an American call option holds (for the proof see [1] and [2]), so the interesting ones are American put options.

Theorem 1. *It is never optimal to exercise an American call option on non-dividend paying stock before expiry.*

4. Application of binomial calculator for option pricing

As a part of this project, a simple option pricing calculator has been written in C#/WPF programming language, intended for pricing of European and American options, and demonstration of possible profit made by early exercising of American put options. The code behind the program utilizes the binomial model for numerical solution of *Black Scholes* pricing model, according to formulas listed in the previous section. The application itself can be downloaded from http://alas.matf.bg.ac.rs/ mr11011/A.exe at any time. The figures 2, 3 and 4 represent the appearance and functionality of the written program.

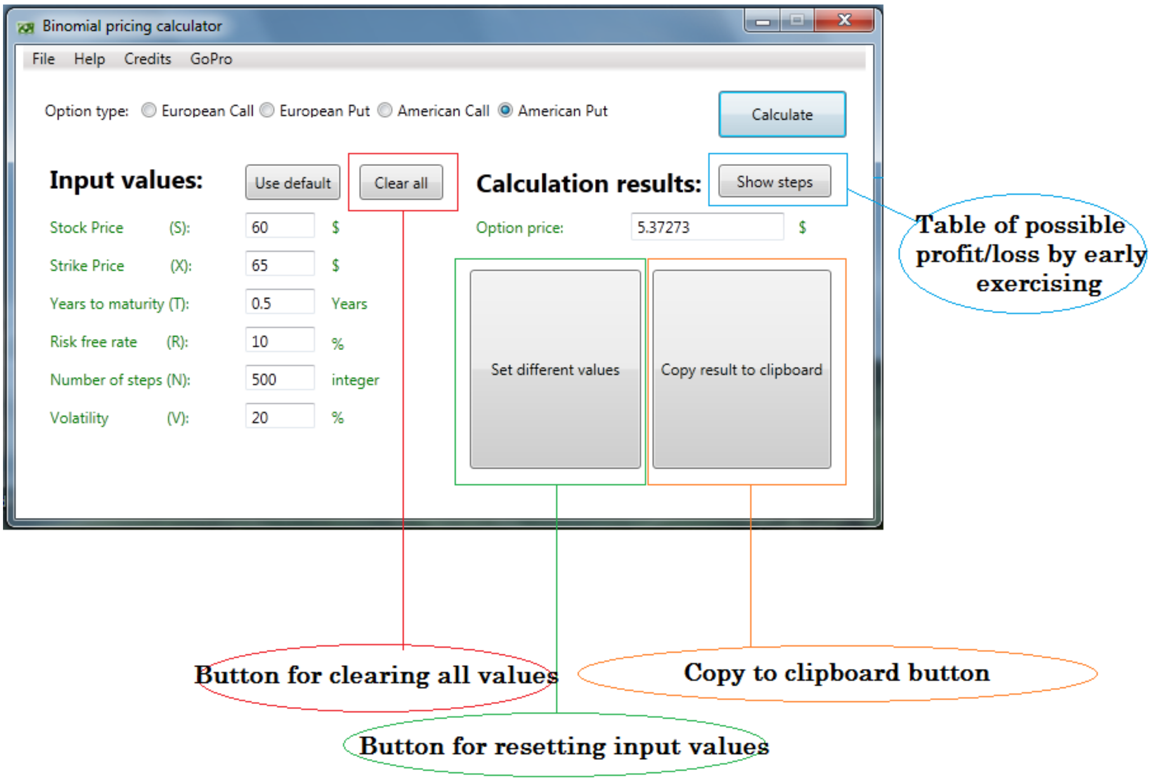


Figure 2. Main form window, after the calculation of the American put option value is complete

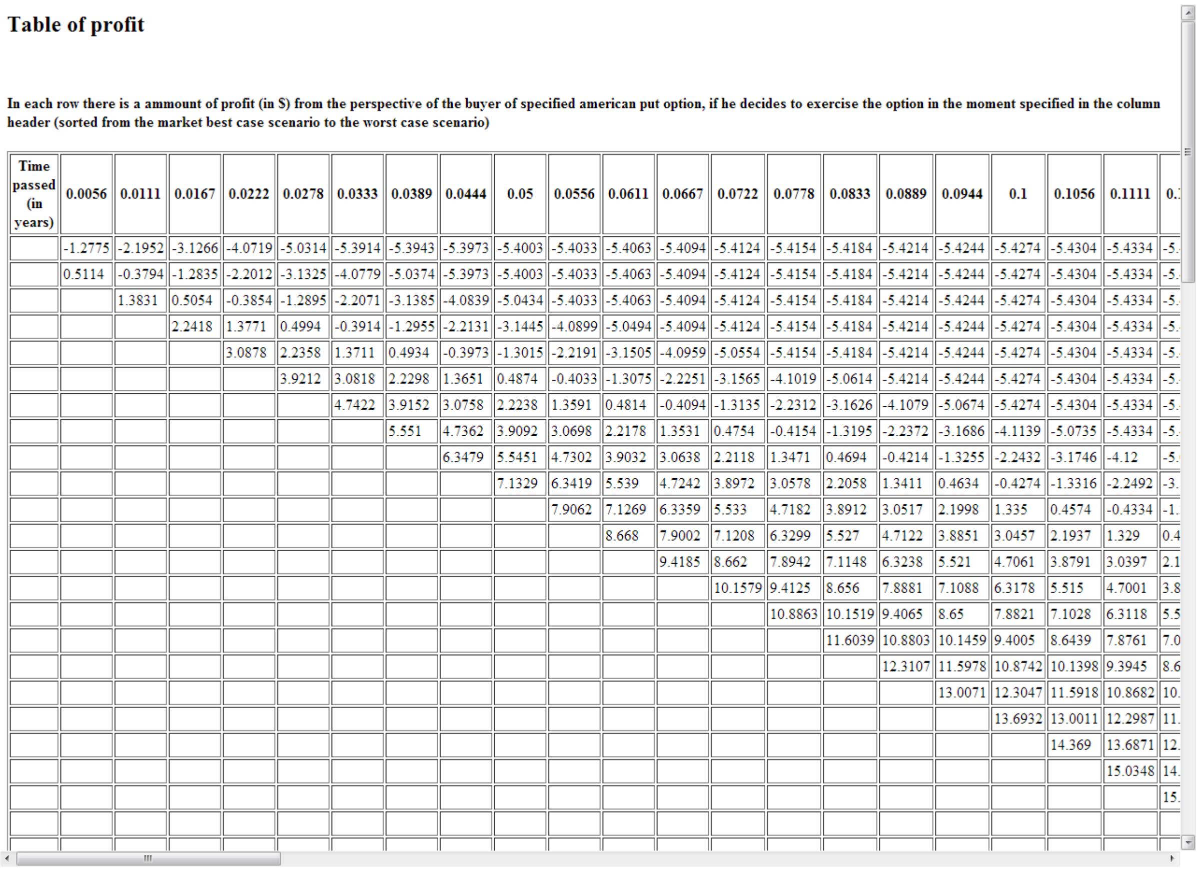


Table of profit

In each row there is a ammount of profit (in $) from the perspective of the buyer of specified american put option, if he decides to exercise the option in the moment specified in the column header (sorted from the market best case scenario to the worst case scenario)

Time passed (in years)	0.0056	0.0111	0.0167	0.0222	0.0278	0.0333	0.0389	0.0444	0.05	0.0556	0.0611	0.0667	0.0722	0.0778	0.0833	0.0889	0.0944	0.1	0.1056	0.1111	0.
	-1.2775	-2.1952	-3.1266	-4.0719	-5.0314	-5.3914	-5.3943	-5.3973	-5.4003	-5.4033	-5.4063	-5.4094	-5.4124	-5.4154	-5.4184	-5.4214	-5.4244	-5.4274	-5.4304	-5.4334	-5.
	0.5114	-0.3794	-1.2835	-2.2012	-3.1325	-4.0779	-5.0374	-5.3973	-5.4003	-5.4033	-5.4063	-5.4094	-5.4124	-5.4154	-5.4184	-5.4214	-5.4244	-5.4274	-5.4304	-5.4334	-5.
		1.3831	0.5054	-0.3854	-1.2895	-2.2071	-3.1385	-4.0839	-5.0434	-5.4033	-5.4063	-5.4094	-5.4124	-5.4154	-5.4184	-5.4214	-5.4244	-5.4274	-5.4304	-5.4334	-5.
			2.2418	1.3771	0.4994	-0.3914	-1.2955	-2.2131	-3.1445	-4.0899	-5.0494	-5.4094	-5.4124	-5.4154	-5.4184	-5.4214	-5.4244	-5.4274	-5.4304	-5.4334	-5.
				3.0878	2.2358	1.3711	0.4934	-0.3973	-1.3015	-2.2191	-3.1505	-4.0959	-5.0554	-5.4154	-5.4184	-5.4214	-5.4244	-5.4274	-5.4304	-5.4334	-5.
					3.9212	3.0818	2.2298	1.3651	0.4874	-0.4033	-1.3075	-2.2251	-3.1565	-4.1019	-5.0614	-5.4214	-5.4244	-5.4274	-5.4304	-5.4334	-5.
						4.7422	3.9152	3.0758	2.2238	1.3591	0.4814	-0.4094	-1.3135	-2.2312	-3.1626	-4.1079	-5.0674	-5.4274	-5.4304	-5.4334	-5.
							5.551	4.7362	3.9092	3.0698	2.2178	1.3531	0.4754	-0.4154	-1.3195	-2.2372	-3.1686	-4.1139	-5.0735	-5.4334	-5.
								6.3479	5.5451	4.7302	3.9032	3.0638	2.2118	1.3471	0.4694	-0.4214	-1.3255	-2.2432	-3.1746	-4.12	-5.
									7.1329	6.3419	5.539	4.7242	3.8972	3.0578	2.2058	1.3411	0.4634	-0.4274	-1.3316	-2.2492	-3.
										7.9062	7.1269	6.3359	5.533	4.7182	3.8912	3.0517	2.1998	1.335	0.4574	-0.4334	-1.
											8.668	7.9002	7.1208	6.3299	5.527	4.7122	3.8851	3.0457	2.1937	1.329	0.4
												9.4185	8.662	7.8942	7.1148	6.3238	5.521	4.7061	3.8791	3.0397	2.1
													10.1579	9.4125	8.656	7.8881	7.1088	6.3178	5.515	4.7001	3.8
														10.8863	10.1519	9.4065	8.65	7.8821	7.1028	6.3118	5.5
															11.6039	10.8803	10.1459	9.4005	8.6439	7.8761	7.0
																12.3107	11.5978	10.8742	10.1398	9.3945	8.6
																	13.0071	12.3047	11.5918	10.8682	10.
																		13.6932	13.0011	12.2987	11.
																			14.369	13.6871	12.
																				15.0348	14.
																					15.

Figure 3. Possible profit/loss at discrete time moments after early exercise of a American put option

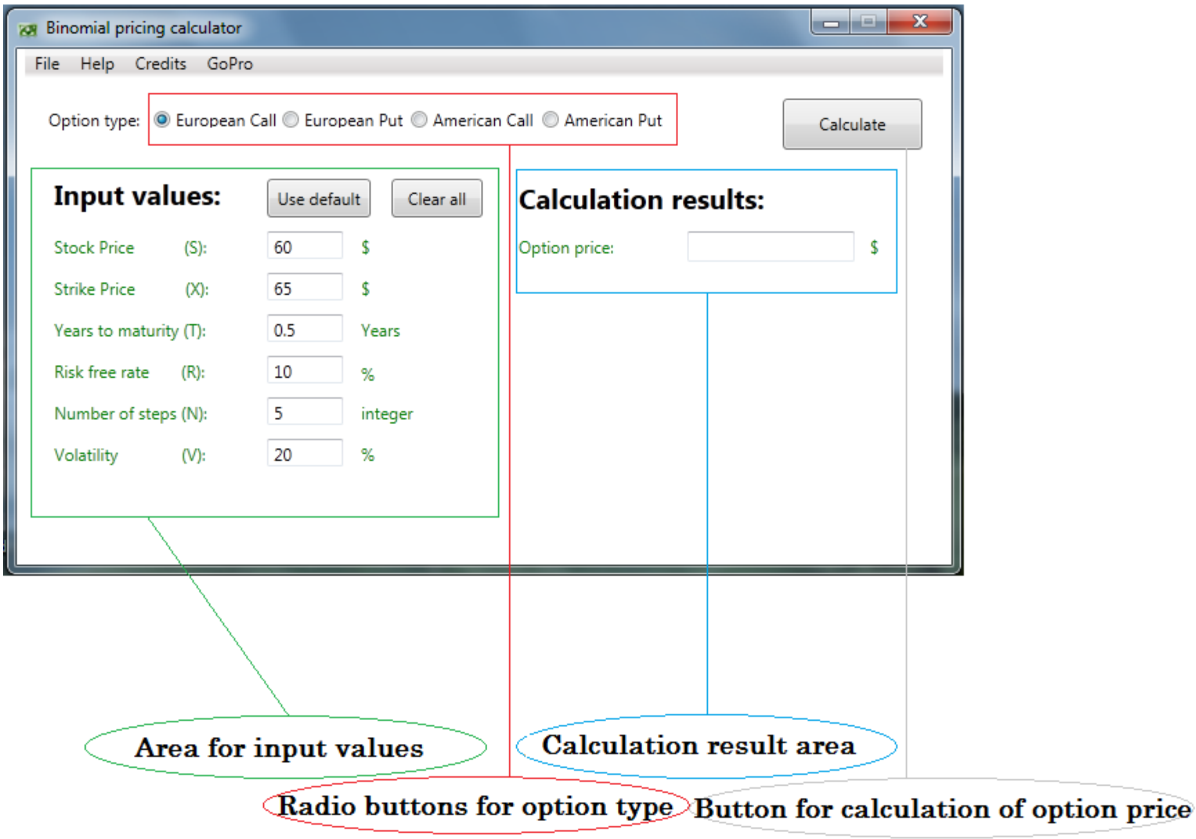


Figure 4. Main form window, immediately upon starting

References

[1] **John C. Hull.** Options, futures and other derivatives. *Pearson educational international*, 2009.

[2] **Tomasz Zastawniak Marek Capiński.** Mathematics for Finance An Introduction to Financial Engineering. *Springer*, 2003.

[3] **Dr. Christian Hoffmann.** Valuation of American Options. *PhD thesis, University of Oxford, Department for Continuing Education*, 2001.

[4] **Geoffrey Poitras.** The early history of option contracts. *Seminary work*, 2008.

[5] **Peter M. Garber.** Tulipmania. *Journal of Political Economy*, 97:535–560, 1989.

[6] **Peter M. Garber.** Famous first bubbles: The fundamentals of early manias. *The Journal of Economic Perspectives*, 4(2):35–54, 1990.

[7] **Miljan Knežević.** Finansijski derivati - prezentacija. *Prezentacije uz kurs Uvod u finansijsku matematiku, na Matematičkom fakultetu, Univerziteta u Beogradu*, 2007.

[8] **Marjorie A. Platt John C. Edmunds, Harlan D. Platt.** S.e.c induced distortion in stock prices. *MTA Journal*, 20:23–27, 1985.

[9] **Andrea Kramer.** Options turn 40: A walk down memory lane. *Članak napisan povodom 40-godišnjice osnivanja CBOE*, 2013.

[10] **W.H. Press et al.** Numerical recipes in C. *Cambridge University Press*, 1997.

Simpozijum MATEMATIKA I PRIMENE, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2013 ,Vol. IV(1)

Hardijev pristup izračunavanju površine

Miloljub Albijanić

Univerzitet Singidunum – FEFA
e-mail: malbijanic@singidunum.ac.rs

Danijela Milenković

Univerzitet Singidunum – FEFA
e-mail: dmilenkovic@fefa.edu.rs

Dobrilo Tošić

Univerzitet u Beogradu – ETF
e-mail: dobrilot@gmail.com

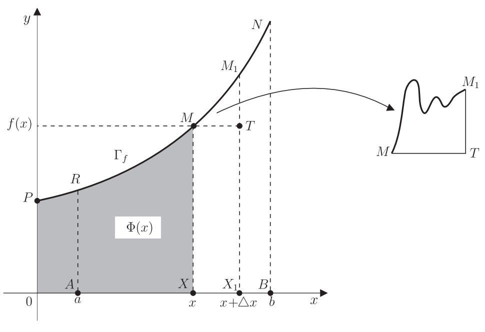
Apstrakt. Njutnov i Lajbnicov proboj do neograničene *mathesis universalis* bilo je shvatanje da naročito manipulisanje pogodnom jednačinom može da dovede do tačne vrednosti nagiba krive linije koja je predstavljena tom jednačinom. Ovaj metod manipulacije je suština diferenciranja. Drugi postupak koji se izvodi sa jednačinom (postupak od tada nazvan integracija) vodi matematičara do površine ispod krive koja je predstavljena tom jednačinom. Za ova dva postupka, diferenciranje i integraciju, zajednički termin je kalkulus, ili infinitezimalni račun, a oni predstavljaju moćno oružje u rukama matematičara i naučnika. Rad pokazuje Hardijev pristup u izračunavanju površine ograničene neprekidnom funkcijom i povezanost sa Njutn-Lajbnicovom formulom.

Ključne reči: Hardi, površina, Njutn-Lajbnicova formula.

1. Površina ravne figure

Jedna od najvažnijih primena integrala jeste izračunavanje površine ravne figure ograničene linijama. Za elementarne figure, kao što je je trougao, površina se izračunava korišćenjem standardnih formula i tehnika. Ako je figura malo složenija ali se može podeliti na trouglove, opet je računanje dosta jednostavno.

Pretpostavimo da je površina određene figure ograničena grafikom neprekidne nenegativne funkcije $y = f(x),\ x \in (0, K),\ K > 0$, (čiji grafik Γ_f je iznad x-ose), y-osom, ordinatom tačke x i x-osom.



Slika 1. Određeni integral

Geometrijski, problem izračunavanja navedene površine je zapravo određivanje površine krivolinijskog trapeza $P(OXMP)$.

Pretpostavimo da tačke grafika Γ_f imaju sledeće koordinate

$$P\big(0, f(0)\big), R\big(a, f(a)\big), M\big(x, f(x)\big), M_1\big(x + \Delta x, f(x + \Delta x)\big), N\big(b, f(b)\big).$$

Ako se posmatra krivolinijski trapez $OXMP$ njegova površina je funkcija od x, u oznaci $\Phi(x)$.

Jasno je da važi

$$\begin{aligned}\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x) &= P(XX_1M_1M)\\ &= P(XX_1TM)+P(MTM_1)\\ &= \Delta x\cdot f(x)+P(MTM_1).\end{aligned}$$

Površina $P(MTM_1)$ je manja od površine $|\Delta x|\lambda(\Delta x)$ gde je $\lambda(\Delta x)$ najveće rastojanje tačke luka $\ell(MM_1)$ od prave $p(MT)$.

Sa druge strane, kako je $f(x)$ neprekidna, onda $\lambda(\Delta x)\to 0$ kad $\Delta x\to 0$. Na taj način,

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\Delta x\big(f(x)+\mu(\Delta x)\big)$$

gde je $|\mu(\Delta x)|\le\lambda(\Delta x)$ i $\lambda(\Delta x)\to 0$, za $\Delta x\to 0$. Odavde sledi da je $\Phi(x)$ neprekidna. Važi i više od toga

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x)+\mu(\Delta x)\big)=f(x).$$

Zaključujemo da je ordinata krive $y=f(x)$ jednaka izvodu površine $\Phi'(x)$, pa površina $\Phi(x)$ predstavlja integral ordinate $f(x)$.

Sada se može formulisati pravilo za nalaženje površine krivolinijskog trapeza $(OXMP)$.

Najpre se izračuna $\Phi(x)$ kao integral od $f(x)$, pri čemu se proizvoljna konstanta C bira tako da je $\Phi(0)=0$. Tada je $\Phi(x)$ tražena površina.

2. Njutn-Lajbnicova formula

Neka je f neprekidna nenegativna funkcija, i neka je figura ograničena linijama Γ_f (grafikom funkcije f), $x=a$, $x=b$ i x-osom.

$F(x)$ je integral od $f(x)$ ako je

$$F'(x)=f(x),\ F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ako je $f\ge 0$, tada je površina figure jednaka $F(b)-F(a)$.

Prema prethodnom razmatranju, figura $(OXMP)$, ograničena sa grafikom funkcije f, pravom $x=0$, ordinatom x i x-osom, ima površinu $F(x)$.

Analognim razmatranjem površina figure $(OARP)$ je $F(a)$ i površina figure $(OBNP)$ je $F(b)$.

Razlika $F(b)-F(a)$ je površina figure $(ABNR)$.

Zbog praktičnog računanja površine pogodno je imati oznaku, jer možemo uvek eksplicitno naći $F(x)$, pa se zato uobičajeno piše

$$P(ABNR)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Broj $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ zove se određeni integral; a i b su donja i gornja granica; $f(x)$ je podintegralna funkcija, a interval (a,b), interval integracije.

Veoma je impresivno da određen integral zavisi od vrednosti funkcije F u krajnjim tačkama integracije a i b.

Funkcija $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x$ često se zove i neodređen integral. Povezanost određenog i neodređenog integrala data je Njutn-Lajbnicovom formulom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

Kao što je pokazano, površina do ordinate a figure $(OARP)$ je $F(a)$, a površina do ordinate x figure $(OXMP)$ je $F(x)$, pa je površina između ordinata a i x figure $(AMXR)$ jednaka $F(x)-F(a)$. Na osnovu definicije određenog integrala je

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{i važi}$$

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x).$$

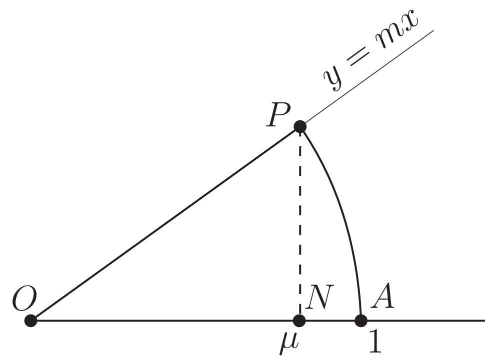
Na ovaj način dokazana je, u specijalnom slučaju $f \geq 0$, *osnovna teorema integralnog računa*:

Teorema 1. *[Osnovna teorema integralnog računa] Neka je funkcija f neprekidna na $[a, b]$. Funkcija $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ x \in [a, b]$, ima izvod jednak $f(x)$.*

Iz toga sledi da je $F(x)$ neprekidna funkcija.

Primer 1. *Površina dela jediničnog kruga i trigonometrijske funkcije.*

Šta predstavlja x u formulama za $\sin x$ i $\cos x$? Za odgovor na to pitanje može se odrediti mera ugla. Neka je $f(AP)$ dužina luka kružne linije sa centrom u O, poluprečnika 1, odnosno $OA = OP = 1$. Tada je dužina x luka AP mera ugla AOP.



Slika 2.

Međutim, može se uvesti mera ugla AOP kao dvostruka površina isečka AOP jediničnog kruga. Pretpostavimo da je OA na x-osi, a OP pripada pravoj $y = mx$, $m > 0$. Površina isečka je funkcija od m i biće označena sa $F(m)$. Tačka P ima koordinate $(\mu, m\mu)$ i važi $\mu^2 + (m\mu)^2 = 1$, odnosno

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}},\ \sqrt{1-\mu^2} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}},\ m = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}.$$

Površina isečka je zbir površine ΔONP i površine $P(NAP)$ krivolinijskog trougla.

$$
\begin{aligned}
F(m) &= \frac{1}{2}\mu(m\mu) + \int\limits_{\mu}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mu \cdot \sqrt{1-\mu^2} - \int\limits_{1}^{\mu} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\mu} &= \frac{1}{2}\sqrt{1-\mu^2} - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sqrt{1-\mu^2}} - \sqrt{1-\mu^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}m} &= \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m} = -\frac{1}{2}\;\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \cdot \Big(- \frac{1}{1+m^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+m^2}} \cdot 2m \Big) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \cdot \frac{m}{(1+m^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+m^2} \\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}m} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+m^2} \\
F(m) &= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{m} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
2F(m) &= \int\limits_{0}^{m} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} m.
\end{aligned}
$$

Na osnovu navedene teorijske postavke može se definisati funkcija $\operatorname{arctg} x$ na sledeći način

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_{0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

čije vrednosti argumenta su između $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$ za $x \in \mathbb{R}$.

Specijalno, $\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$, pa se može definisati i broj π kao

$$\pi = 4\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Na sličan način,

$$\int\limits_{0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x,\ -1 < x < 1,\ -\frac{\pi}{2} < \arcsin x < \frac{\pi}{2}.$$

Primer 2. *(a)* $\int\limits_{a}^{b} x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_a^b = \frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1).$

(b) $\int\limits_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a \qquad (a, b > 0).$

(c) $\int\limits_{a}^{b} \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_a^b = -\cos b + \cos a = \cos a - \cos b.$

(d) $\int\limits_{a}^{b} \cos x\mathrm{d}x = \sin x\Big|_a^b = \sin b - \sin a.$

3. Osobine određenog integrala

Pretpostavimo da je $f(x)$ neprekidna funkcija i da je $a < b$. Za određeni integral važe sledeće osobine:

(1) $\int\limits_{a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$ *jer je* $F(a) - F(a) = 0$

(2) $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{b}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$ *jer je* $F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big)$

(3) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

(4) $\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

(5) $\int\limits_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

(6) *Ako je* $f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$ *tada je* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

(7) *Ako je* $H \leq f(x) \leq K$, $a \leq x \leq b$, *tada*

$$H(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq K(b-a).$$

Za dokaz se koristi osobina (6) primenjena na funkcije $f(x)-H$ i $K-f(x)$.

(8) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi)$, $\xi \in (a,b)$. (*Prva teorema o srednjoj vrednosti*).

Ova osobina izlazi iz Lagranžove teoreme primenjene na primitivnu funkciju $F(x)$. Važi $F(b)-F(a) = (b-a)F'(\xi)$. Kako je $F(b)-F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ i izvod $F'(\xi) = f(\xi)$, dobijamo (8).

(9) Ako je $g(x) > 0$ i $H \leq f(x) \leq K$ tada važi (*Opšta teorema o srednjoj vrednosti*):

$$H\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq K\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{i} \quad \int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,\ \xi \in (a,b).$$

Teorema se dokazuje pomoću (6) primenjeno na integrale

$$\int\limits_a^b \big(f(x)-H\big)g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{i} \quad \int\limits_a^b \big(K-f(x)\big)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(10) $\Big|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

(11) *Ako je* $|f(x)| \leq M$, *onda* $\Big|\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leq M\int\limits_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x.$

(12) $\int\limits_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int\limits_0^a f(x)\,\mathrm{d}x, & \textit{ako je } f(x) \textit{ parna funkcija} \\ 0, & \textit{ako je } f(x) \textit{ neparna funkcija} \end{cases}$

Primer 3. *(a)* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\mathrm{d}x = 0$, *za* $m,n \in \mathbb{N}$ *i* $m \neq n$.

Ovaj integral se rešava rastavljanjem proizvoda sinusa na razliku kosinusa, tj.

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,\end{aligned}$$

(važno je da $m \neq n$*). Za* $m = n$ *se dobija*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} 2\sin^2 mx \,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} (1-\cos 2mx)\,\mathrm{d}x$$
$$= x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2m}\sin 2mx\Big|_0^{\pi} = \pi - \frac{1}{2m}\underbrace{\sin 2m\pi}_{=0} = \pi.$$

Bibliografija

[1] **C. Deschamps, A. Warusfel.** *Mathèmatiques* I. Dinod (2003).
[2] **Г. М. Фихтенгольц.** Курс дифференциаль ного исчисления И. Физматгиз (1962).
[3] **G. H. Hardy.** *A Course of Pure Mathematics.* Cambridge University Press (1945).
[4] **W. Rudin.** *Principles of Mathematical analysis.* McGraw-Hill (1976).
[5] **D. Tošić, M. Albijanić, D. Milenković.** *Elementi diferencijalnog i integralnog računa*, Službeni glasni, Beograd, (2012).
[6] **В. А. М. Зорич.** Математический анализ. ФАЗИС; Наука (1997).

Simpozijum MATEMATIKA I PRIMENE, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2013, Vol. IV(1)

Formuliranje matematičkih definicija i iskaza teorema u svrhu kritičkog promišljanja i zaključivanja

Nives Jozić
Filozofski fakultet, Split, Teslina 12
njozic@ffst.hr

Apstrakt. U nastavi matematike često čujemo komentar učenika „Što će meni ovo u životu?". Taj i slični komentari upućuju na stav da je besmisleno učiti one sadržaje koji se ne mogu direktno primijeniti u realnom životu i radu. No, prenaglašavanjem i stalnim traženjem primjene matematike u realnim situacijama gube se iz vida temeljna načela matematike koja su itekako potrebna za svrhovito i učinkovito funkcioniranje pojedinaca u profesionalnom i osobnom životu i radu.

Jedna od temeljnih zadaća (suvremene) nastave matematike je razvijanje logičkog mišljenja i zaključivanja koje je neophodno u osposobljavanju učenika za kritičko promišljanje i samostalno djelovanje u društvu informacijske krize[1] i brzog tehnološkog razvoja. Tu zadaću moguće je ostvariti pravilnim uvođenjem matematičkih pojmova i teorema, a posebno procesom dokazivanja teorema jer su upravo pojmovi, teoremi i njihovi dokazi rezultat osnovnih oblika mišljenja: poimanja, prosuđivanja i zaključivanja.

Na primjerima iz nastave matematike, uz kraće teorijske postavke, ovim radom želi se ukazati na teškoće i propuste koji se javljaju u nastavi matematike i to u procesu uvođenja pojmova (formuliranje matematičke definicije) te u radu s teoremima (razumijevanje iskaza teorema, postavljanje obrata teorema, negacije i kontrapozicije). Zbog tih i sličnih teškoća i propusta mnogi učenici matematičke sadržaje uče bez razumijevanja, što za posljedicu ima nemogućnost stjecanja trajnih i operativnih znanja.

Postupak ispitivanja i dokazivanja istinitosti raznih tvrđenja važan je i neizostavan čimbenik u životu svakog čovjeka. Dokazivanje istinitosti tvrđenja o nekom matematičkom objektu značajno doprinosi razvoju (apstraktnog) mišljenja i neizostavni je dio procesa zaključivanja. Zbog toga svaki učenik treba učiti dokazivati barem osnovne poučke (teoreme) koji se obrađuju u nastavi matematike osnovne i srednje škole te razlikovati karakteristike direktnog i indirektnog dokazivanja, a da bi to uspješno provodio treba dobro poznavati matematičke pojmove i njihova svojstva opisana teoremima.

Ključne riječi: Matematički pojam**,** matematička definicija, kritičko promišljanje, iskaz teorema.

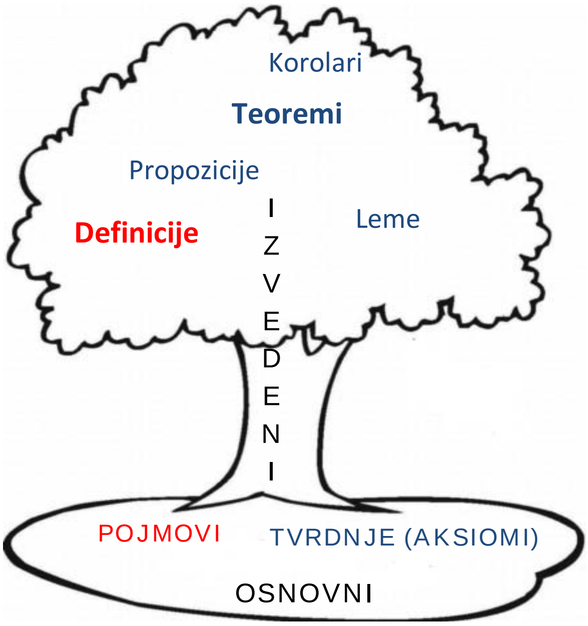
1. Uvod

Svaka konstrukcija (betonska, staklena…) treba imati dobre i čvrste temelje, da bi opstala u naletima raznih (ne)prilika, svaka biljka treba imati duboke i zdrave korijene da bi preživjela na udaru vremenskih (ne)prilika. Na sličan način, svaka matematička teorija treba biti izgrađena na neoborivim osnovama kako bi njezina utemeljenost opstala u promjenjivom svijetu ideja i svijetonazora.

Proces strukturiranja sadržaja jedne matematičke discipline započinje odabirom osnovnih pojmova i tvrdnji, a nastavlja se postupnim uvođenjem izvedenih pojmova i izvedenih tvrdnji. Izvedeni pojmovi se opisuju definicijama u skladu s pravilima definiranja novog pojma, a svojstva pojmova se opisuju izvedenim tvrdnjama (teoremi), koji se potom i dokazuju. Na sličan način strukturiraju se i sadržaji nekog matematičkog predmeta. Da bi proces učenja matematičkih sadržaja bio uspješan, korisno je uočiti i poznavati opisanu strukturu i zakonitosti uspostavljanja odnosa, koje strukturu čine čvrstom.

Opisana se struktura zorno može prikazati u obliku stabla (Slika 1). Njegovo korjenje su osnovni pojmovi i tvrdnje (aksiomi), a krošnja buja zahvaljujući izvedenim pojmovima (definicije) i izvedenim tvrdnjama (teoremi). Stablo se dobro i zdravo razvija kada su korjeni dobri, a krošnja opstaje kada se izvedeni pojmovi i tvrdnje donose na temelju prosuđivanja i pravilnog logičkog zaključivanja.

[1] Zbog velike količine informacija nastaje problem kako sakupljati, obrađivati, čuvati, prenositi i pronalaziti potrebne informacije. Kako doći do prave informacije u pravo vrijeme. Taj problem je poznat pod nazivom ***informacijska kriza***.



Slika 1. Struktura matematike

Unutar ove slike, primjenu matematike u realnom svijetu mogli bi zamisliti kao plodove stabla, koji kako znamo mogu biti zakržljali, nerazvijeni i nedozreli, ali i zreli za uporabu. Iskustveno znamo da samo zdravo i dobro ukorijenjeno stablo donosi dobar plod. Slično tome možemo reći i za one koji uče matematiku: samo oni koji dobro i s razumijevanjem savladaju temeljne matematičke sadržaje, mogu korisno i praktično primjenjivati to znanje u svakodnevnom životu i radu, a šablonsko i kampanjsko učenje matematike može dati samo zakržljali i nedozreli plod primjene.

Cilj ovog rada je ukazati na neke slabe točke koje se javljaju još od korjena stabla, a kojima se ne posvećuje uvijek dovoljno pozornosti u nastavi matematike (bilo zbog neuočavanja ili svjesnog marginaliziranja) te pokazati kako upravo radom na njima učenici mogu graditi trajna znanja. Samo se na čvrstim temeljima i stabilnim odnosima može graditi bujna krošnja definicija i teorema, a tek nakon toga ostvariti dobar i zreo plod.

2. Osnovni i izvedeni pojmovi

Općenito, znamo da se svi matematički pojmovi dijele na osnovne i izvedene pojmove. **Osnovni pojmovi** se ne opisuju pomoću drugih pojmova, niti se definiraju. Oni se smatraju intuitivno jasnima, a najčešće se objašnjavaju kroz primjere, opisivanjem ili različitim prikazima. Osnovni pojam koji se gotovo neizbježno koristi je *skup*. Čak i slikovnice za djecu sadrže zadatke u kojima iz skupa slika (voća, igračaka, životinja…) treba izbaciti uljeza, čime se sugerira čak i pojam *pripadnosti* nekog elementa skupu, ali i pojam *kriterija pripadnosti*.

Iako znamo da se točka, pravac, ravnina i prostor smatraju osnovnom geometrijskim pojmova, nerijetko se događa da u udžbenicima nalazimo njihove razne definicije, umjesto da misao učenika usmjerimo na to kako ih možemo prikazati, predočiti itd. Tako npr. nalazimo da je pravac ravna neomeđena linija, a potom se od učenika traži da nacrtaju pravac iako to nije moguće. No, gotovo nigdje nema obrazloženja da crtanjem vizualno prikazujemo samo dio pravca.

Nakon što smo razlučili koji su pojmovi osnovni, uvodimo ostale – izvedene pojmove. Svi **izvedeni pojmovi** se jasno i precizno trebaju definirati pomoću osnovnih pojmova ili ranije definiranih pojmova. Izvedeni pojam koji je gotovo nezaobilazan u svakoj matematičkoj disciplini je *funkcija*, a uvodi se na intuitivnoj razini već u prvom razredu osnovne škole kroz razne primjere. Tako npr. kada se učenici upoznaju s nekim prometnim znakovima uočavaju da su oni točno određenog geometrijskog oblika: oblika trokuta, kvadrata ili kruga. Među njima, postoje prometni znakovi jednakog oblika, ali postoje geometrijski oblici koji nisu pridruženi nijednom prometnom znaku (Slika 2).

Slika 2. Intuitivno uvođenje pojma funkcije

Već na ovom jednostavnom primjeru pridruživanja geometrijskih likova prometnim znakovima uočavamo funkciju: svaki prometni znak je samo jednog oblika (pravilo funkcije). Više prometnih znakova može biti istog oblika, ne postoji prometni znak koji nije oblikovan u jednom od predviđenih oblika (tada nemamo funkciju), a postoje i oblici u kojima znakovi nisu oblikovani (slika funkcije je podskup kodomene).

Ako već na toj razini dijete može intuitivno razumjeti pojam funkcije, kako je moguće da nakon 12 godina matematičkog obrazovanja i obrade elementarnih funkcija, vrlo malo učenika razumije ili primjenjuje taj pojam?

1. Općenito o pojmovima

Pojmovima se općenito bavi znastvena disciplina *Logika* pa se njezinim spoznajama koristimo i u matematici za opis matematičkog pojma. Općenito, **pojam** se tumači kao misao o bitnim karakteristikama onoga o čemu mislimo. Misao je posljedica psihološkog procesa mišljenja, a bitne karakteristike su ona obilježja koja su nužna i dovoljna za stvaranje valjane misli baš o promatranom pojmu (vidjeti [6]). Analogno tome, **matematički pojam** je misao o bitnim karakteristikama određenog matematičkog objekta.

Na primjer, da bi netko izgradio valjanu misao o pojmu *trokut* općenito, potrebno je znati koje su karakteristike tog pojma bitne, a koje sporedne, tj. koje karakteristike ga jednoznačno i nedvojbeno određuju, a koje ne. Karakteristike koje se vezuju za pojam *trokut* su: tupokutan, pravokutan, jednakostraničan; obojan u plavo, crveno; određen s tri vrha, omeđen s tri stranice itd. Među njima ključne su dvije: određuju ga tri točke (vrha; ne pripadaju istom pravcu) i omeđuju ga tri dužine (stranice; krajnje točke su im vrhovi). Onaj tko zna da su ove bitne karakteristike pojma *trokut,* može izgraditi valjanu misao (predodžbu) o tom pojmu.

Učenici, studenti pa i odrasli često pod pojmom *matematika* stvaraju predodžbu hrpe formula i zadataka. Gotovo da nemaju osjećaj što je korektna definicija nekog pojma te pri opisivanju pojmova izgovaraju ono što im je najjasnije ostalo u sjećanju, a da pri tome nisu niti svjesni koliko višak ili manjak njihovih riječi mijenja objekt koji opisuju. Usmjerenim mišljenjem i kritičkim osvrtom na izrečeno doprinosimo učenju matematičkih pojmova s razumijevanjem, a to dalje vodi pravilnom i uspješnijem rješavanju i samih zadataka. Konačno, i predodžba o pojmu *matematika* takvim zalaganjem izgledala bi potpuno drugačije.

2.1.1. Proces formuliranja pojma

Da bi se na pravilan način izgradila valjana misao o nekom pojmu korisno je poznavati proces formuliranja određenog pojma. Do pojma se može doći **izdvajanjem** iz neke šire grupe objekata koristeći upravo neko bitno obilježje po kojem se taj pojam razlikuje od ostalih (vidjeti [5]), a može i **dodavanjem** novih bitnih karakteristika objektima koji su već poznati (vidjeti [1]).

Kada se neki matematički pojam formulira u procesu **izdvajanja**, onda se najprije promatra šira grupa konkretnih objekata i njihove karakteristike, obilježja, svojstva itd. Zatim se izdvajaju oni objekti u grupi koji imaju zajedničke karakteristike i na kraju se od zajedničkih izdvoji bitna karakteristika koja će obilježiti novi pojam. Proces završava definicijom novog pojma.

Primjer 1. Usmjerimo našu misao na brojeve. Među njima promatrajmo samo prirodne brojeve. Zatim, među svim prirodnim brojevima izdvojimo samo proste brojeve te uočimo da među njima postoje oni čija je razlika 2 (npr. 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19…). Za tu grupu brojeva uvodi se novi pojam – brojevi blizanci. Postavimo definiciju: *Za par prostih brojeva čija je razlika 2 kažemo da su brojevi blizanci.*

Primjer 2. Usmjerimo našu misao na geometrijske likove. Među njima promatrajmo samo četverokute. Zatim, među svim četverokutima uočimo da postoje oni kojima su nasuprotne stranice paralelne. Za tu grupu likova uvedimo novi pojam – paralelogrami. Postavimo definiciju: *Paralelogram je četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne (tj. koji ima dva para paralelnih stranica).*

Primjer 3. Usmjerimo našu misao na geometrijska tijela. Među njima promatrajmo samo ona tijela koja su omeđena ravnim plohama (njih nazivamo *uglatim tijelima*, a ravne plohe koje ih omeđuju *stranama*). Zatim, među njima promatrajmo samo one kojima su dvije plohe (n-terokuti) međusobno sukladne i nalaze se u paralelnim ravninama, a ostale plohe su paralelogrami. Za tu grupu tijela uvedimo novi pojam – prizme. Postavimo definiciju: *Prizma je uglato geometrijsko tijelo kojemu su dvije strane sukladni i međusobno paralelni n-terokuti, a ostale strane su paralelogrami*.

Kada se neki matematički pojam formulira **dodavanjem**, onda se kreće od grupe objekata sa određenim svojstvima i dodaju se nova obilježja koja onda nužno vode stvaranju nove grupe objekata, a time i formuliranju novog pojma.

Primjer 4. Usmjerimo svoju misao na prirodne brojeve. Za njih znamo da se mogu oduzimati u skupu prirodnih brojeva samo ako je umanjenik veći od umanjitelja, tj. $(\forall a,b \in N)\, a > b \Rightarrow a-b \in N$. No, sada dopustimo mogućnost oduzimanja bilo kojih dvaju brojeva. Ako oduzimamo od većeg broja manji, onda oduzimanje vršimo na opisani način. Ako oduzimamo dva jednaka broja, onda je rezultat broj nula, tj. $a-a=0$. Ako oduzimamo od manjeg broja veći broj, onda je rezultat onaj prirodan broj kojeg bi dobili da oduzimamo od većeg broja manji, ali sa predznakom minus (–), tj. $(\forall a,b \in N)\, a < b \Rightarrow a-b = -(b-a)$. Na taj način smo izgradili novu grupu objekata za koju uvodimo naziv *skup cijelih brojeva.* Kako je nova grupa izgrađena proširivanjem odabrane grupe objekata, polazna grupa objekata je podskup nove grupe te njena svojstva ostaju sačuvana i u novoj grupi objekata.

2.1.2. Sadržaj i opseg pojma

Kada se razmišlja o pojmovima, korisno je poznavati što čini njegov sadržaj, a što opseg. Za sadržaj pojma odgovaramo na pitanje **kakav** je taj objekt. **Sadržaj pojma** opisujemo bitnim karakteristikama na temelju kojih možemo jednoznačno stvoriti predodžbu o tom pojmu. Za opseg pojma odgovaramo na pitanje **koji** su to objekti. **Opseg pojma** su svi konkretni objekti ili procesi koji ispunjavaju bitne karakteristike opisane sadržajem.

Pored ta dva pojma može se govoriti i o **dosegu pojma**, tj. o broju koji kaže **koliko** ima objekata u opsegu pojma. Kako su matematički pojmovi zbog svoje apstraktnosti nepromjenjivi u realnom vremenu i prostoru, njihov doseg je nepromjenjiv i jednoznačno se može odrediti iz opsega pojma pa se često ne uzima u razmatranje (vidjeti [6]). Pregledno je sve prikazano u tablici 1:

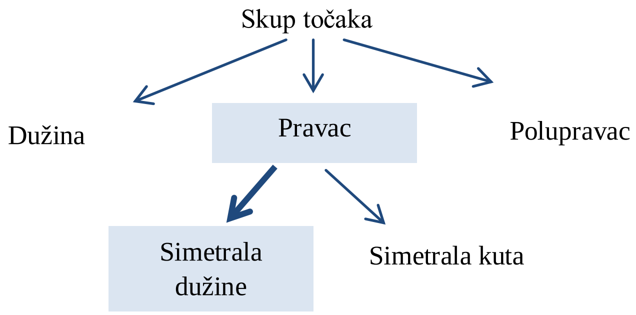
Matematički pojam	Sadržaj pojma - **KAKAV**	Opseg pojma - **KOJI**	Doseg pojma - **KOLIKO**
Prost broj	*Prirodan broj veći od 1, djeljiv samo 1 i sa samim sobom.*	Brojevi: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 …	Beskonačno mnogo prostih brojeva.
Paralelni pravci	*Pravci koji pripadaju istoj ravnini i nemaju zajedničkih točaka.*	Svaka dva para pravaca koji zadovoljavaju uvjete. 	Beskonačno mnogo parova pravaca.
Paralelogram	*Četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne.*	Svaki četverokut sa dva para paralelnih stranica. 	Beskonačno mnogo takvih četverokuta.

Tablica 1. Sadržaj, opseg i doseg pojma

Može se uočiti da sadržaj pojma potpuno određuje opseg pojma i da je zavisnost obrnuto proporcionalna: što je sadržaj zahtjevniji odabirom više bitnih karakteristika to je manje vrsta objekata koji ih ispunjavaju. Kažemo da se dodavanjem neekvivalentnih svojstava sadržaj pojma povećava, a opseg pojma smanjuje.

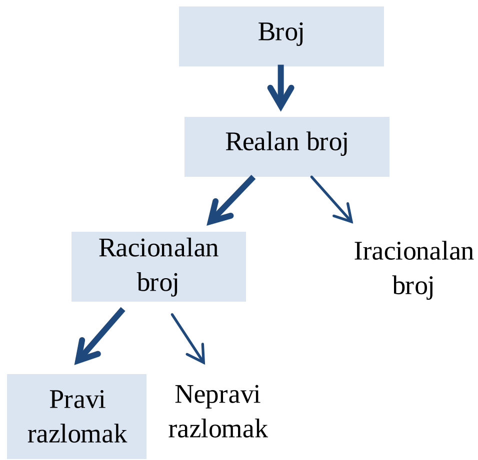
Pri opisu pojma korisno je razlikovati **rod** tog pojma, kojemu je on logički podređen, **vrstu** kojoj taj pojam pripada i **odlike vrste** po kojima se taj pojam razlikuje od ostalih pojmova istog roda.

Tako npr. iz opisa pojma simetrale dužine jasno je da je simetrala dužine vrsta pravca koji ispunjava određene uvjete. Ako fiksiramo jednu dužinu, tada je simetrala te dužine jednoznačno određena bitnim karakteristikama: od svih mogućih pravaca to je onaj pravac koji sadrži polovište dužine i okomit je na tu dužinu. Drugim riječima, pojam *pravac* je rod (lat. *genus proximum* – bliži rod) za pojam *simetrale dužine*. *Simetrala dužine* je vrsta pravca (lat. *species* - vrsta) koji ispunjava određene uvjete. Bitne karakteristike *koji sadrži polovište dužine i okomit je na tu dužinu* su specifične razlike (lat. *diferentia specifica* - specifične razlike vrste, odlike vrste ili vrstne razlike). Na temelju specifičnih razlika, među svim pravcima možemo izdvojiti određenu vrstu. (Slika 3).



Slika 3. Rod i vrsta pojma

Za rod se još kaže da je glavni ili viši rodni pojam, a vrsta je njegov niži rodni pojam. U nekim situacijama, viši rodni pojam određenog pojma i sam može biti niži rodni pojam svog nadređenog pojma, ako takav postoji te određeni niži rodni pojam može biti viši rodni pojam nekog drugog pojma, ako takav postoji (vidi [3]). Tako je npr. *realan broj* niži rodni pojam za *broj*, a viši rodni pojam za *racionalan broj*, dok je *racionalan broj* niži rodni pojam za *realan broj*, a viši rodni pojam za pravi *razlomak* (Slika 4).



Slika 4. Viši i niži rodni pojam

Pregledno se opisano može vidjeti iz tablice 2:

Rod	**Vrsta**	**Odlike vrste**
PRAVAC	*Simetrala dužine*	*Pravac okomit na dužinu koji sadrži njezino polovište.*
ČETVEROKUT	*Trapez*	*Četverokuti koji imaju barem jedan par paralelnih stranica.*
RAZLOMAK (pozitivan racionalan broj)	*Pravi razlomak*	*Brojnik razlomka je manji od njegovog nazivnika.* *Opisuje dio neke cjeline.* *Vrijednost razlomka je manja od 1.*

Tablica 2. Rod, vrsta i odlike vrste

2.1.3. Nosilac pojma

Matematički pojam se izražava simbolima ili riječima (jednom ili više njih), a oni se nazivaju **nosioci pojma**. Kako bi bilo jasno o kojem se pojmu radi, izražavanje pojma pomoću nosioca pojma treba biti jednoznačno. Međutim, događa se da jedna riječ ili simbolička oznaka imaju više značenja (**homonimi**) ili da različite riječi i simboličke oznake imaju isto značenje (**sinonimi**).

Primjer 5. *Suma* ili *zbroj* su pojmovi koji znače rezultat zbrajanja; *modul* ili *apsolutna vrijednost broja* su pojmovi koji geometrijski znače udaljenost tog broja od 0 (ishodišta); $\overline{A}, A^c, C(A)$ su različiti simboli koji označavaju isti pojam - *komplement skupa A*; itd.

Sinonimi su odraz bogatstva nekog jezika, a često se unutar jednog jezika koriste i tuđice iz drugih jezika. Kada se kod nekog pojma pojavljuju sinonimi, dobro ih je znati, ali je radi jasnoće i razumijevanja pri poučavanju korisno koristiti samo jedan od njih unutar određene cjeline. Na primjer, u vjerojatnosti se često koristi pojam komplementa skupa pa je dobro koristiti dosljedno jednu od oznaka.

Iako se određeno značenje homonima javlja unutar odgovarajućeg konteksta, homonime je poželjno izbjegavati jer višeznačnosti mogu dovesti do nejasnoća.

Primjer 6. Pojam *korijen* se može tumačiti kao korijen jednadžbe ili kao kvadratni korijen, ali isto tako kao korijen živca, biljke, rodoslovnog stabla, itd; oznaka AB se može tumačiti kao pravac koji prolazi točkama A i B, kao dužina kojoj su krajnje točke A i B, ali i kao udaljenost između točaka A i B; oznaka ABC može predstavljati trokut, ali i ravninu. Da bi se izbjegle nejasnoće zbog homonimije npr. kod simboličke oznake AB, mogu se koristiti tri različite oznake: AB za pravac, $\overline{AB}$ za dužinu i $|AB|$ za duljinu dužine (vidjeti [5]).

2. Matematička definicija

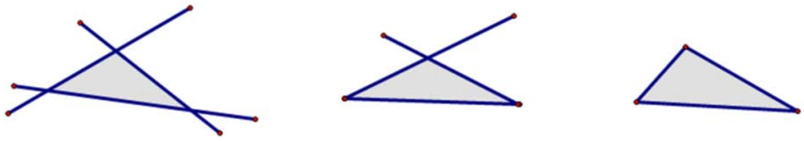
Vidjeli smo da se svi izvedeni pojmovi trebaju jasno i precizno definirati pomoću osnovnih pojmova ili prethodno definiranih pojmova, pa u skladu s prethodno opisanim se može postaviti i definicija pojma matematička definicija.

Za svaku suvislu rečenicu (iskaz) kojom se, navođenjem nužnih i dovoljnih karakteristika, nedvosmisleno može utvrditi značenje novog pojma pomoću već poznatih pojmova kažemo da je *matematička definicija.*
Pri izricanju matematičke definicije postoji određeni stupanj slobode, ali ipak treba poštivati određene zahtjeve kako bi definicija bila korektna i poticala valjanu misao o pojmu koji se definira. Bez obzira na koji način se opiše sadržaj pojma, značenje opisanog pojma treba uvijek dati isti opseg pojma i on ne smije biti prazan skup.

2.2.1. Korektnost definicije

Prije svega, definicija treba biti **jednoznačna i nedvosmislena**, tj. na temelju postavljene definicije, značenje izvedenog pojma bi se trebalo moći nedvosmisleno utvrditi, bez obzira na prethodno znanje ili iskustvo. U suprotnom, definicija nije korektna.

Primjer 7: Definicija koja se često nalazi u udžbenicima za matematiku *Trokut je dio ravnine omeđen trima dužinama* nije korektna definicija jer se može višeznačno tumačiti. Naime, na slici 5. je vidljivo da sa tri dužine možemo omeđiti dio ravnine u obliku trokuta na različite načine, a znamo da pojmu trokuta odgovara samo trokut sa slike, zadnji desno.

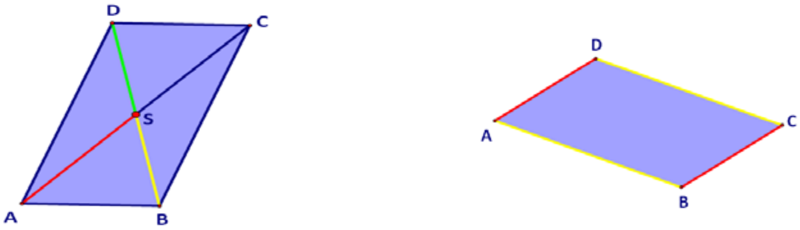


Slika 5. Predožba o pojmu trokut

Nadalje, matematička definicija bi trebala biti iskazana **sažetim i preciznim jezikom** ali tako da obuhvaća **sva bitna (nužna i dovoljna)**, međusobno **neekvivalentna svojstva** pojma. Neprecizno iskazana definicija može stvoriti nejasnoće, neizricanje svih bitnih svojstva dovodi do višeznačnosti, a izricanje više ekvivalentnih svojstava je nepotrebno.

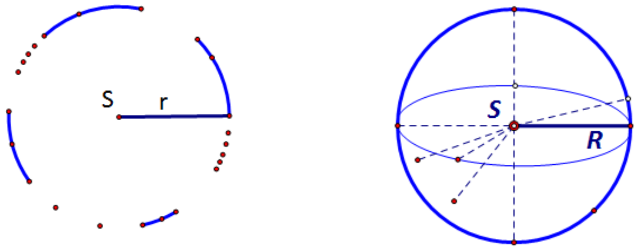
Primjer 8.a. Definicija *Paralelogram je četverokut kojemu se dijagonale sijeku tako da su preostali djelovi jednaki* je neprecizno iskazana jer nije u potpunosti jasno što znači preostali djelovi. Preciznije bi bilo reći *Paralelogram je četverokut kojemu se dijagonale sijeku tako da su dobiveni djelovi svake dijagonale* *međusobno jednaki*. No, sada bi se svi mogli složiti oko toga da je ova rečenica poprilično nezgrapna i duga te da se isto može izreći puno sažetije i elegantnije: *Paralelogram je četverokut kojemu se dijagonale raspolavljaju.* (Slika 6, lijevo)

8.b. Definicija (vidjeti [5]) *Paralelogram je četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne i jednakih duljina* nije korektna definicija jer sadrži dva bitna ekvivalentna svojstva te je jedan višak. Može se reći *Paralelogram je četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne* ili *Paralelogram je četverokut kojemu su nasuprotne stranice jednakih duljina.* (Slika 6, desno)



Slika 6. Dijagonale i stranice paralelograma

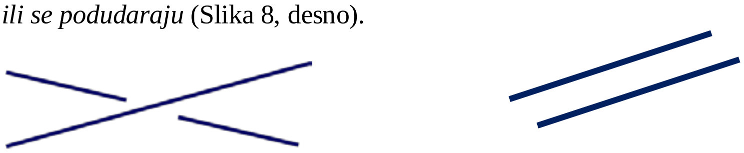
8.c. Definicija *Kružnica je skup točaka koje su jednako udaljene od jedne fiksne točke* nije korektna jer nije obuhvatila sva bitna svojstva (skup <u>svih</u> točaka <u>ravnine</u>) te se može višeznačno tumačiti:



Slika 7. Nepotpuna kružnica i sfera

Na slici 7 lijevo vidimo da su obuhvaćene neke točke ravnine, ali ne sve, dok na slici 7 desno vidimo da opisani objekt može biti i sfera, ako taj skup točaka promatramo u prostoru i uzmemo sve točke.

8.d. Definicija *Pravci su paralelni ako se ne sijeku* je nekorektna definicija jer ne sadrži sva bitna svojstva (pripadnost pravaca ravnini) te se može višeznačno tumačiti. Naime, ni mimosmijerni pravci se ne sijeku, ali oni nisu paralelni (Slika 8, lijevo). Korektno bi bilo reći *Pravci koji pripadaju istoj ravnini su paralelni ako se ne sijeku ili se podudaraju* (Slika 8, desno).



Slika 8. *Mimosmjerni i paralelni pravci*

Izraz *pravci su paralelni ako…* skriva također određene nepreciznosti. Naime, *biti paralelan* je relacija ekvivalencije (refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost), pa iz tog razloga (kada je jedan pravac paralelan drugom, onda je i drugi paralelan prvom) možemo reći da su ta dva pravca paralelna. No, učeniku to ne mora i u mnogo slučajeva nije jasno pa bi bilo korisno to dodatno istaknuti. Isticanje toga je posebno važno jer znamo da sve relacije nisu relacije ekvivalencije.

Pri izricanju definicije korisno je uzeti ona svojstva koja su **prirodno najprihvatljivija** i koja su elementarna ili koja su **iskustveno najbliža** onima koji će se njome koristiti. Tako na primjer pri definiranju pojma paralelograma, prirodnije je koristiti svojstvo stranica nego dijagonala.

S obzirom da se govorni jezik razvija i mijenja, važno je korisitit **suvremene izraze** umjesto arhaičnih ili neprikladnih izraza. Tako nećemo reći da *točke leže na pravcu* jer bi netko mogao pomisliti da tamo i drijemaju, već ćemo reći da *točke pripadaju pravcu* ili *pravac sadrži točke*. Treba voditi računa i o **jezičnoj korektnosti**. Tako nećemo reći da su *stranice trokuta iste* već *jednake duljine*.

Pri definiranju nekih pojmova ponekad se koristi **negacija** nekog drugog pojma. Na primjer, često se koristi definicija: *Iracionalni brojevi su oni brojevi koji nisu racionalni*. Najčešće (iako ne uvijek) ta definicija slijedi neposredno nakon što je uvedena definicija racionalnih brojeva pa se odmah može zaključiti da su iracionalni brojevi takvi brojevi koji se ne mogu zapisati u obliku razlomka, kojima je brojnik cijeli broj, a nazivnik prirodan broj. Međutim, tom definicijom ne saznajemo što iracionalnih brojevi jesu već što oni nisu. Jasnije bi bilo ukazati na to da svi iracionalni brojevi u decimalnom zapisu imaju beskonačno decimala koje se neperiodički ponavljaju. Osim toga, ako nije istaknut skup unutar kojega se radi negacija (u ovom slučaju skup realnih brojeva) onda bi se na temelju ovako postavljene defincije moglo zaključiti da su svi kompleksni brojevi, koji nisu racionalni zapravo iracionalni, što nije točno.

Slično se nakon uvođenja definicije parnih brojeva negacijom uvodi pojam neparnih brojeva: *Neparni brojevi su svi (prirodni) brojevi koji nisu parni*. Budući da znamo da su parni brojevi djeljivi sa 2 iz te definicije saznajemo da neparni brojevi nisu djeljivi s 2. Međutim, kako za neparne brojeve koristimo opći zapis $2n-1, n \in N$ ili $2n+1, n \in N_0$, bolje bi bilo reći da su neparni brojevi svi prirodni brojevi koji pri dijeljenju s 2 imaju ostatak 1. Ako u navedenoj definiciji ne istaknemo da negaciju radimo u skupu prirodnih brojeva, onda definicija nije korektna jer bi na temelju definicije *Neparni brojevi su svi brojevi koji nisu parni* mogli zaključiti da su svi npr. iracionalni brojevi neparni. Općenito, uvođenje pojma negiranjem drugog pojma nije uvijek poželjno posebno kada se može postaviti korektna definicija na drugi način.

Pri iskazivanju pojma pojavljuju se **cirkularne definicije,** a one nisu korektne jer se u njima pojam ne definira, već se *vrtimo u krug* (lat. *circulus vitiosus* – začarani krug). Tako na primjer, ako kažemo da se *Pravci koji zatvaraju pravi kut nazivaju okomiti pravci*, a *Kut čiji su kraci okomiti naziva se pravi kut* nismo definirali ni okomitost pravaca ni pravi kut. Korektno bi bilo najprije definirati pravi kut, a zatim okomitost pravaca: *Pravi kut je kut koji je jednak svom susjednom*[2] *kutu.* i *Okomiti pravci su pravci koji zatvaraju pravi kut* (vidjeti [5]); ili najprije definirati okomitost dvaju pravaca, a zatim koristeći taj pojam, definirati pravi kut.

2.2.2. Definiranje pomoću roda i vrste

Svaka korektna definicija trebala bi sadržavati rodni pojam i specifične razlike. Ako se rodni pojam ili neka bitna karakteristika koja određuje vrstnu razliku izostavi, definicija postaje nekorektna. Pored toga, dobro je koristiti **najbliži rodni pojam** jer je u tom slučaju potrebno minimalno karakteristika za opis specifičnih razlika vrste**.**

Primjer 9. Neka su dane sljedeće četiri definicije kvadrata:

- *Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice jednakih duljina i svi unutrašnji kutovi pravi.*
- *Kvadrat je paralelogram kojemu su susjedne stranice jednakih duljina, a svi unutrašnji kutovi pravi.*
- *Kvadrat je romb, kojemu je jedan unutrašnji kut pravi.*
- *Kvadrat je pravokutnik kojemu su susjedne stranice jednakih duljina.*

Sve četiri definicije su ispravne, ali su prihvatljivije posljednje dvije jer su *pravokutnik* i *romb* bliži rodni pojmovi za kvadrat od pojma *paralelogram.* Međutim, zadnja definicija je prihvatljivija od predzadnje jer je *pravokutnik* prirodniji pojam za kvadrat od pojma *romb.*

Primjer 10. Iskaz *Simetrala dužine je okomita na dužinu i sadrži njezino polovište* je nekorektna definicija jer je izostavljen rodni pojam **-** pravac.

Iskaz *Simetrala dužine je pravac koji dijeli dužinu na dva jednaka dijela* je nekorektna definicija jer je izostavljena nužna karakteristika (specifična razlika) – svojstvo okomitosti na dužinu. Budući da se dužina može podijeliti na dva jednaka dijela na beskonačno mnogo načina (koliko ima pravaca koji sadrže jednu točku, slika 9 lijevo) ovako postavljena definicija ne određuje jednoznačno pravac koji je simetrala dužine.

Iskaz *Simetrala dužine je pravac okomit na tu dužinu* je također nekorektna definicija jer je izostavljena nužna karakteristika (specifična razlika) – svojstvo raspolavljanja dužine. Budući da se može postaviti beskonačno mnogo pravaca okomito na dužinu (koliko ima točaka dužine, slika 9 desno) ovako postavljena definicija ne određuje jednoznačno pravac koji je simetrala dužine.

[2] Za dva kuta kažemo da su *susjedni kutovi* (sukuti) ako imaju zajednički vrh, jedan zajednički krak, a druga dva kraka im se nadopunjuju na pravac. Susjedni kutovi zajedno čine ispruženi kut.

Slika 9. Pravci i dužina

Korektna definicija: *Simetrala dužine je pravac koji je okomit na dužinu i sadrži njezino polovište.*

Na jednom kolokviju iz osnova geometrije na 3. godini učiteljskog studija u Splitu (koji se pisao 15. 5. 2013.), u grupi A (27 studenata) trebalo je definirati i konstruirati simetralu dužine, a u grupi B (38 studenata) definirati i konstruirati simetralu kuta (inače, prvi put se ti pojmovi obrađuju u 6. razredu osnovne škole).

U **grupi A** bilo je postavljeno 10 (**37%**) **korektnih definicija**, 14 (51,9%) nekorektnih definicija, a 3 studenta (11,1%) nisu ponudili nikakvu definiciju. Među nekorektnim definicijama 2 nisu imale rodni pojam, 4 nisu imale svojstvo okomitosti, 1 nije imala svojstvo raspolavljanja, a u 7 definicija svojstvo raspolavljanja se dupliralo.

U **grupi B** bilo je 6 (**15,8%) korektnih definicija**, 27 (71%) nekorektnih definicija, a 5 studenata (13,2%) nije uopće odgovorilo na pitanje. Među nekorektnim definicijama u 8 njih je nedostajao rodni pojam, u 13 njih svojstvo sadržavanja vrha, u 3 svojstvo raspolavljanja, a u 3 definicije svojstvo raspolavljanja se dupliralo.

Iz dobivenih rezultata se može zaključiti da je pojam simetrale dužine ovim studentima jasniji od pojma simetrale kuta što je i očekivano budući se pojam dužine bolje razumije i usvaja od pojma kuta. Međutim, ovi rezultati su loši budući se radi o studentima koji se obrazuju za učitelje. Postavlja se pitanje: ako studenti koji se obrazuju za učitelje imaju takve rezultate, kako će oni poučavati druge i kakvi mogu biti ishodi takvog poučavanja?

2.2.3. Dogovorna definicija

Za neke pojmove se dogovorno određuje značenje i oni se kao takvi prihvaćaju. Tako na primjer, pod pojmom *prazan skup* podrazumijeva se skup bez elemenata. Slično, ako eksponent korijena nije istaknut, onda se uzima da je on dva, a ako u potenciji nije istaknut eksponent onda se smatra da je 1, ako u logaritmu nije istaknuta baza onda se smatra da je 10 itd.

Međutim, u nekim udžbenicima može se naći i dokaz dogovornih definicija, kao da se radi o teoremu. Npr. dogovorno se uzima da je $a^0 = 1,\ a \neq 0$ i to nije potrebno dokazivati, iako neki autori to provode.

2.2.4. Genetička definicija

Genetička definicija je ona definicija kojom se novi pojam uvodi tako da se opiše proces nastanka objekta tog pojma. Ova vrsta definicije se ne smatra matematičkom definicijom u pravom smislu riječi jer se njom ne ističu bitne karakteristike promatranog objekta već proces nastajanja objekta.

Primjer 11. Genetičkom definicijom *Stožac je geometrijsko tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne katete za 360°* ne saznajemo ništa o bitnim karakteristikama stošca, tj. o ravnoj i zakrivljenoj plohi.

Na koji način uvesti određeni pojam u nastavi matematike ne ovisi samo o pravilima definiranja već o mnogim čimbenicima, a između ostalog o predznanju i dobnoj zrelosti učenika. No, bez obzira na sve to, postavljena definicija treba biti korektna u smislu da točno određuje odgovarajući opseg pojma, koji se njom opisuje.

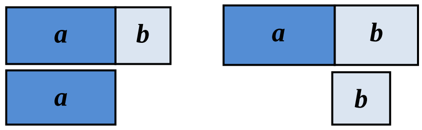
3. Osnovne i izvedene tvrdnje

Promatranjem određene grupe objekata ili relacija te proučavanjem njihovih svojstava, temeljem prosuđivanja i zaključivanja postavljamo tvrdnje (iskaze, sudove) o pojedinim zakonitostima i vezama među njima. Općenito znamo da se sve matematičke tvrdnje dijele na osnovne i izvedene. Osnovne tvrdnje nazivamo aksiomima i njih ne dokazujemo, a izvedene tvrdnje nazivamo teoremima i njih treba dokazati.

3.1. Aksiomi

Osnovne tvrdnje ili aksiomi su činjenice o matematičkim objektima i njihovim odnosima za koje se smatra da su istinite i koje su nam intuitivno jasne. Za njih se još kaže da su ,,očigledne istine'', odnosno iskazi u koje se ne sumnja. Poznato nam je da je Euklid u svojim *Elementima*, osnovne tvrdnje dijelio na aksiome i postulate, gdje su se pod postulatima razmatrale osnovne tvrdnje geometrijskog karaktera (vidjeti [8]).

Primjer 12. Jedan od polaznih Euklidovih aksioma glasio je: *Cjelina je veće od svog dijela*. To se na jednostavan način može zorno prikazati i algebarski zapisati kao što je prikazano na slici 10.

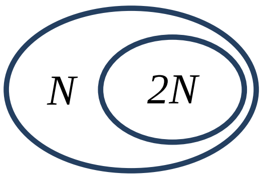


$a+b>a$ $\qquad$ $a+b>b$

Slika 10. Odnos cjeline i njezinog dijela

Međutim, je li ova tvrdnja zaista očigledna i vrijedi li uvijek?

U vrijeme kada je Euklid postavio ovu tvrdnju, razmatrali su se najčešće konačni skupovi, a pojam beskonačnosti se izbjegavao. No, znamo da se skupovi dijele na konačne i beskonačne te se odnos beskonačnih skupova razmatra na temelju njihove brojnosti. Ako uzmemo skup svih prirodnih brojeva i skup svih parnih prirodnih brojeva, znamo da su oni beskonačni i da je skup parnih prirodnih brojeva pravi podskup skupa prirodnih brojeva. Nadalje, među tim skupovima može se uspostaviti obostrano jednoznačno pridruživanje te su oni ekvipotentni, odnosno jednakobrojni pa u kontekstu beskonačnih skupova ovaj aksiom ne vrijedi (vidjeti [7]).



Slika 11. Ekvipotentni skupovi

Na temelju ovog primjera i danih slika može se uočiti da se zor i intuitivna predožba kod konačnih i beskonačnih skupova podosta razlikuju.

3.2. Teoremi

Izvedene tvrdnje ili teoremi opisuju svojstva matematičkih objekata, zakonitosti i veze među njima te se svaka izvedena tvrdnja treba dokazati. Pojam *teorem* uzet je od grčke riječi *theorein* (vidjeti [8]), što znači gledati jer su prvi postavljeni teoremi dobiveni temeljem uočavanja.

Ovisno o ulozi i važnosti pojedine izvedene tvrdnje, koriste se i različiti nazivi. Tako se *teoremi* smatraju važnim tvrdnjama, naziv *propozicija* se koristi za tvrdnje koje su manje važne od teorema, naziv *lema* se koristi za pomoćne tvrdnje koje se najčešće koriste u dokazima nekih teorema, a naziv *korolar* za tvrdnje koje slijede neposredno iz teorema. U školskoj nastavi matematike češće se umjesto *teorema* koristi naziv *poučak*. Općenito, za sve iskaze koji se nazovu teoremom smatra se da su istiniti i da se njihova istinitost može potvrditi dokazom.

3.2.1. Formulacija teorema

Iskaz teorema se može formulirati na različite načine, ali se u formulaciji uvijek bitno razlikuju dva dijela: **pretpostavka ili hipoteza** (**P**) i **zaključak ili teza** (**Q**). Pretpostavkom iskazujemo uvjete koji vrijede za promatrani objekt, na temelju kojih posljedično slijedi zaključak (izvedena tvrdnja) o tom objektu. Međutim, nije uvijek jednostavno razlikovati pretpostavku od zaključka teorema zbog različitih vrsta formulacija. U takvim situacijama, teoremi se mogu formulirati tako da pretpostavku započnemo sa „**ako je**“, a tvrdnju sa „**onda je**“ (vidjeti [4]).

Primjer 13. Uzmimo teorem: *Racionalni broj se može zapisati u decimalnom obliku*. Pretpostavka ovog teorema odnosi se na racionalanost broja (P), tj. promatraju se brojevi koji se mogu zapisati u obliku $\frac{a}{b}, a \in Z, b \in N$. Zaključak teorema je da se takav broj može zapisati u decimalnom obliku, tj. u obliku $r = c.d_1d_2d_3...$, gdje je c cijeli dio broja, a $d_1, d_2, d_3...$ su decimalne znamenke ili decimale (kojih može biti konačno ili beskonačno mnogo). Kada preformuliramo, teorem glasi: ***Ako** je broj racionalan, **onda** se on može zapisati u decimalnom obliku.*

Mnogi učenici pa i studenti nisu u mogućnosti odvojiti pretpostavku od zaključka (dalje u tekstu tvrdnja) teorema, a neki od njih očekuju da se pretpostavka uvijek nalazi u prvom dijelu, a tvrdnja u drugom dijelu rečenice. Takvo očekivanje dodatno otežava njihovo razlikovanje, a nemogućnost odvajanja pretpostavke od tvrdnje dovodi do ozbiljnih teškoća kako u razumijevanju, tako i u daljnjem radu sa tim teoremima.

Primjer 14. Promotrimo teorem: *Umnožak dvaju prirodnih brojeva a i b djeljiv je nekim prirodnim brojem c kada je barem jedan od faktora umnoška $a \cdot b$ djeljiv brojem c*. Sada pretpostavku imamo u drugom dijelu rečenice, a tvrdnju u prvom dijelu. Kada preformuliramo, teorem glasi: ***Ako** je barem jedan od brojeva a i b djeljiv brojem c, $a, b, c \in N$, **onda je** i umnožak tih brojeva $a \cdot b$ djeljiv brojem c.*

Zbog opisanih očekivanja, u nastavnoj praksi se događa da učenici pa i studenti umjesto toga napišu: ***Ako je** umnožak dvaju prirodnih brojeva a i b djeljiv nekim prirodnim brojem c, **onda je** barem jedan od faktora umnoška $a \cdot b$ djeljiv brojem c*, što je zapravo obrat polaznog teorema.

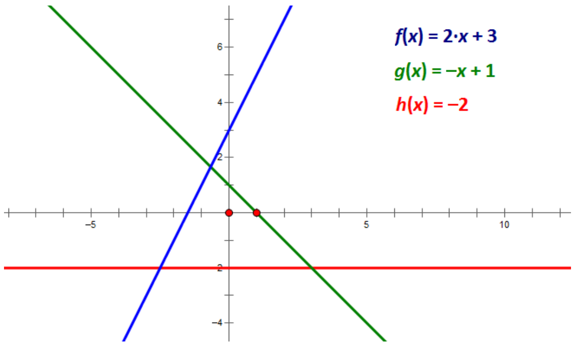
3.2.2. Obrat teorema

Kada u teoremu zamijenimo pretpostavku (P) tvrdnjom (Q), a tvrdnju (Q) pretpostavkom (P) dobivamo iskaz koji se naziva **obrat teorema**. Obrat teorema je sasvim novi iskaz čija se istinitost treba potvrditi ili odbaciti. Ako pri ispitivanju istinitosti iskaza pronađemo barem jedan primjer koji pokazuje da tvrdnja ne vrijedi, možemo zaključiti da tvrdnja općenito ne vrijedi te kažemo da obrat teorema nije istinit. Međutim, ako se na jednom ili više primjera ustanovi da tvrdnja vrijedi, na temelju toga se ne može zaključiti da tvrdnja vrijedi općenito. Da bi potvrdili istinitost obrata teorema, potrebno je provesti matematički dokaz.

Primjer 15. Obrat teorema iz primjera 13 glasi: *Svaki broj zapisan u decimalnom obliku je racionalan* ili *Ako se broj može zapisati u decimalnom obliku, onda je on racionalan*. Ovaj obrat nije istinit jer znamo da se iracionalan broj također može zapisati u decimalnom obliku (beskonačan neperiodički zapis), a iracionalni brojevi nisu racionalni.

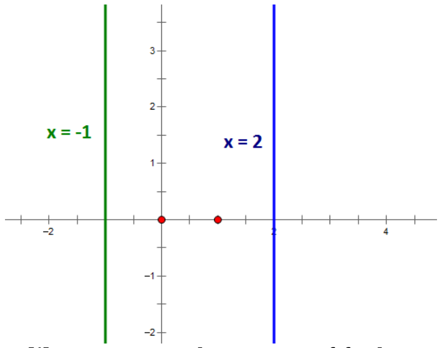
Obrat teorema iz primjera 14 glasi: ***Ako je** umnožak dvaju prirodnih brojeva a i b djeljiv nekim prirodnim brojem c, **onda je** barem jedan od faktora umnoška $a \cdot b$ djeljiv brojem c*. Ni ovaj obrat nije istinit što se može vidjeti na primjeru broja 48 pri djeljenju sa 8. Naime, broj 48, koji je djeljiv sa 8, može se dobiti množenjem brojeva 1 i 48, 2 i 24, 3 i 16, 4 i 12 te 6 i 8. Ako za faktore uzmemo brojeve 4 i 12, onda vidimo da nijedan od njih nije djeljiv sa 8. Na temelju tog primjera može se reći da obrat teorema općenito ne vrijedi, tj. tako postavljen iskaz nije istinit.

Primjer 16. Promotrimo teorem: *Graf svake linearne funkcije je pravac*. Da bi lakše uočili što je pretpostavka, a što tvrdnja, teorem možemo preformulirati na sljedeći način: *Ako je dana linearna funkcija $f(x) = ax + b, a, b \in R$, onda je njezin graf pravac $y = ax + b$* (Slika 12).



Slika 12. Graf linearne funkcije

Obrat teorema glasi: *Svaki pravac je graf neke linearne funkcije.* Sa slike 13. se može uočiti da obrat ne vrijedi jer pravac $x=2$ nije graf niti jedne funkcije budući da se jednoj te istoj vrijednosti nezavisne varijable x pridružuje više vrijednosti zavisne varijable y (vidjeti [9]).



Slika 13. Pravac koji nije graf funkcije

Primjer 17. Većina učenika i osnovne i srednje škole usvoji i uspješno primjenjuje teorem: *Ploština pravokutnog trokuta računa se po formuli* $P=\frac{a\cdot b}{2}$, *gdje su* a *i* b *duljine kateta tog trokuta.* Međutim, vrlo mali broj njih na pravilan način iskazuje obrat ovog teorema, a još manje njih ga koristi u zadacima, iako je istinit. Obrat se može zapisati na sljedeći način: *Ako se ploština trokuta može odrediti po formuli* $P=\frac{a\cdot b}{2}$ *,gdje su* a *i* b *duljine stranica tog trokuta, onda je taj trokut pravokutan, pri čemu su* a *i* b *duljine katete tog trokuta.*

Jako je važno usmjeravati učenike na pravilnu primjenu teorema i obrata teorema, posebno što za neke teoreme obrat ne vrijedi. No, ako za neki teorem vrijedi i njegov obrat onda kažemo da teorem ,,vrijedi u oba smijera" te ga izričemo u obliku ekvivalencije, najčešće koristeći izraz „ako i samo ako" ili skraćeno **akko**.

Primjer 18. Uzmimo teorem o djeljivosti brojem 15: *Ako je prirodan broj djeljiv brojem 15, onda je djeljiv sa 3 i 5.* Njegov obrat je također istinit: *Ako je prirodan broj djeljiv sa 3 i 5, onda je djeljiv i sa 15.* Stoga se ova dva teorema mogu zapisati koristeći relaciju ekvivalencije: *Prirodan broj je djeljiv s 15 ako i samo ako je djeljiv s 3 i 5.*

Mnogi učenici imaju teškoću prepoznati teorem i njegov obrat kada je iskaz dan sa relacijom ekvivalencije, što dodatno može otežati razumijevanje napisanog, a onda i primjenu tog teorema, bilo u dokazivanju ili rješavanju odgovarajućih zadataka.

Ako bi se ovo pravilo djeljivosti nekog složenog broja htjelo primjeniti na ostale složene brojeve, mogu također nastupiti teškoće. Naime, ako uzmemo broj 24, znamo da se on može rastaviti na različite načine kao umnožak dvaju brojeva ($24=2\cdot 12=3\cdot 8=4\cdot 6$), međutim samo za par relativno prostih brojeva (3 i 8) može se formulirati sličan teorem.

3.2.3. Negacija

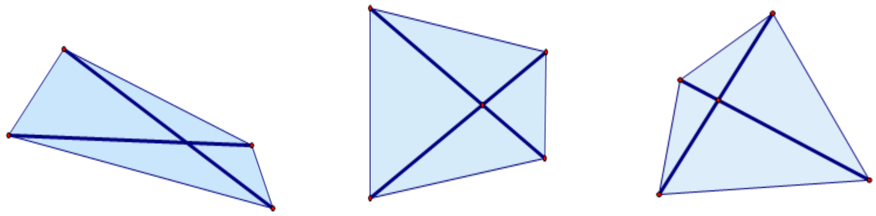
S obzirom da formulacija svakog teorema ima dva dijela, pri postavljanju negacije, može se razmatrati negacija pretpostavke, negacija tvrdnje (zaključka), ali i negacija cijelog teorema. Ukoliko je tvrdnja teorema istinita, tada negacija te tvrdnje nije istinita. Vrijedi i obratno.

Primjer 19. Uzmimo sljedeći teorem: *U pravokutniku su dijagonale jednakih duljina.* Kako bi istaknuli što je pretpostavka, a što tvrdnja, zapišimo rečenicu u drugom obliku: *Ako je četverokut pravokutnik, onda su njegove dijagonale jednakih duljina.*

Negacija pretpostavke: *Ako četverokut nije pravokutnik, onda su njegove dijagonale jednakih duljina.* Iskaz koji smo dobili negacijom samo pretpostavke usmjerava nas da ispitamo postoji li još koja vrsta četverokuta koja ima dijagonale jednakih duljina. Takvih četverokuta ima beskonačno mnogo, npr. svi jednakokračni trapezi imaju dijagonale jednakih duljina. Ipak, ima i onih četverokuta koji nemaju dijagonale jednakih duljina (npr. svi rombovi koji nisu kvadrati) pa ovako postavljen iskaz općenito ne vrijedi.

Negacija tvrdnje: *Ako je četverokut pravokutnik, onda njegove dijagonale nisu jednakih duljina.* Iskaz koji smo dobili negacijom samo tvrdnje ne vrijedi jer ako nešto pod određenim uvjetima vrijedi, ne može pod tim istim uvjetima istodobno i ne vrijediti. Svi pravokutnici imaju dijagonale jednakih duljina.

Negacija cijelog teorema: *Ako četverokut nije pravokutnik, onda njegove dijagonale nisu jednakih duljina.*



Slika 14. Trapezoid, jednakokračni trapez, deltoid

Sa slike 14 vidimo da postoje četverokuti koji nisu pravokutnici, a ipak imaju dijagonale jednakih duljina pa iskaz koji smo dobili negacijom teorema ne vrijedi.

Negacija se ne mora nužno ostvariti dodavanjem riječi ne ili neke njezine inačice, već se može postići uporabom komplementarnog pojma. Za izraz *biti negativan*, komplementaran pojam je *nenegativan*, ali i *pozitivan ili jednak nuli*. Za izraz *biti paran* komplementaran pojam u skupu prirodnih brojeva je *biti neparan* (ali ne i za funkcije). Za izraz *biti racionalan* komplementaran pojam u skupu realnih brojeva je *biti iracionalan*.

Primjer 20. Negirajmo iskaz zapisan simbolički: $(\forall x \in Z)(\exists y \in Z)(y < x)$. Znamo da pri negiranju univerzalni kvantifikator prelazi u egzistencijalni i obrnuto, pa je negacija iskaza: $(\exists x \in Z)(\forall y \in Z)(y \geq x)$.

Međutim, interpretacija tih tvrdnji učenicima zna predstavljati silnu teškoću, posebno kada se može čitati na više različitih načina i iskazivati rečenicama koje su stilski oblikovane. Ako bi ovaj iskaz čitali doslovno, onda možemo reći da *Za svaki cijeli broj* x *postoji cijeli broj* y *koji je od njega manji*, ali ako to hoćemo malo stilski oblikovati onda iskaz može glasiti: *Od svakog cijelog broja postoji manji cijeli broj*, ali i *Ne postoji najmanji cijeli broj*. Vidimo da se u posljednjem iskazu na određeni način koristi i negacija, ali to nije negacija polaznog iskaza već njemu ekvivalentan iskaz. Negacija polaznog iskaza u ovom slučaju uopće ne mora sadržavati riječ **ne** jer može glasiti: *Postoji najmanji cijeli broj*.

Korisno je s učenicima uvježbavati postavljanje obrata ili negacije teorema koristeći raznovrsne primjere kako bi u tome postigli potrebnu vještinu i brzinu, ali i određenu razinu razumijevanja.

3.2.4. Kontrapozicija

Kada iskaz teorema preoblikujemo tako da negiramo i pretpostavku i tvrdnju, a zatim postavimo obrat tih negacija, tj. da iz negacije tvrdnje teorema slijedi negacija pretpostavke, dobivamo **kontrapoziciju** polazne izjave. Teorem i kontrapozicija su uvijek istovremeno ili oboje istiniti ili oboje neistiniti pa za njih kažemo da su ekvivalentne tvrdnje. Ako bi postavili obrat kontrapozicije dobili bi iskaz ekvivalentan obratu teorema. Sve to pregledno se može vidjeti u sljedećoj tablici (vidjeti [9]):

	Teorem P- pretpostavka Q – tvrdnja	Obrat teorema	**Kontrapozicija** $\neg P$ negacija prepostavke $\neg Q$ negacija tvrdnje	Obrat kontrapozicije
	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$\neg P \Rightarrow \neg Q$
1.	*Ako su kutovi susjedni onda su i suplementarni.*	*Ako su kutovi suplementarni onda su i susjedni.*	*Ako kutovi **nisu** suplementarni onda **nisu** ni susjedni.*	*Ako kutovi nisu susjedni onda nisu ni suplementarni.*
2.	*Ako je n prirodan broj onda je on i cijeli broj.*	*Ako je n cijeli broj onda je on i prirodan broj.*	*Ako n nije cijeli broj onda on nije ni prirodan.*	*Ako n nije prirodan broj onda nije ni cijeli broj.*
	Istinita tvrdnja	Tvrdnja nije istitnita	**Istinita tvrdnja**	Tvrdnja nije istitnita

Tablica 3. Teorem, kontrapozicija i obrati

Poznavanje kontrapozicije je važno i korisno jer se pomoću nje neki teoremi mogu vrlo jednostavno dokazati.

Primjer 21. Dokažimo teorem: *Ako je kvadrat nekog prirodnog broja neparan, onda je i on sam neparan.*

Ekvivalentna tvrdnja iskazana po kontrapoziciji glasi: *Kvadrat svakog parnog broja je paran.* Kako se svaki paran broj a može zapisati u obliku $a = 2n, n \in N$, njegovim kvadriranjem se lako uočava da je i kvadrat paran broj: $a^2 = 4n^2 = 2\left(2n^2\right) = 2m,\ m \in N$.

4. Zaključak

Umjesto zaključka citirala bih matematičara Devidéa: ***Osobno sam duboko uvjeren da je još uvijek postojeća i raširena averzija prema matematici u velikom broju mladih ljudi uzrokovana ne njihovom nesposobnošću da je razumiju, niti suhoćom matematike kao takve, već prvenstveno promašajima u nastavi – u udžbenicima, metodici i materijalu koji im se kao takav prezentira*** (vidjeti [2]).

Kada bi svaki nastavnik radio tako da njegovi učenici mogu izgrađivati *čvrste* koncepte matematičkih pojmova i njihovih svojstava, tada bi svaka sljedeća nadogradnja bila stabilna, a konstrukcija izgrađena na čvrstim temeljima ne bi se lako rušila.

Bibliografija

[1] **Borzan, Božičević, Devidé, Duković, Krnić, Kronfeld, Mardešić, Matulić-Bedenić, Pavlić, Pavlović, Stošić.** Razgovori o matematici. *Školska knjiga*, Zagreb, 1971.

[2] **V. Devidé.** Stara i nova matematika. *Školska knjiga*, Zagreb, 1975.

[3] **S. Kovač**. Logika za gimnazije. *Hrvatska sveučilišna naklada*, Zagreb, 2000.

[4] **Z. Kurnik.** Poučak ili teorem. *Matematika i škola br. 8.*, Element, 2000.

[5] **Z. Kurnik.** Matematički pojam. *Matematika i škola br. 11.*, Element, 2001.

[6] **M. Jakić.** Logika – udžbenik za 3. razred gimnazije *Školska knjiga*, Zagreb, 2007.

[7] **Ž. Pauše.** Matematika i zdrav razum. *Školska knjiga*, Zagreb, 2007.

[8] **Z. Lučić.** Ogledi iz istorije antičke geometrije. *Službeni glasnik*, Beograd 2009.

[9] **N. Jozić**. Matematika 1, Skripta u pripremi. Split, 2012.

Izvod funkcije i njegove primene – zadatak u slici

Valentina Kostić
Gimnazija Pirot, Srpskih vladara 128, 18300 Pirot
e-mail: 22mathgim@gmail.com

Apstrakt. U radu je prikazan metodski pristup sistematizacije gradiva primene izvoda funkcije, u čijoj se realizaciji primenjuju grafički postavljeni problemi. Učenici na osnovu prikazanih grafika funkcija i osobina funkcija diskutuju o osobinama izvodnih funkcija i obrnuto – na osnovu grafika izvodnih funkcija određuju osobine funkcije. Ovako postavljeni zadaci razvijaju geometrijsku intuiciju i grafičku pismenost učenika. Isto tako pomažu dubljem razumevanju ključnih pojmova i stavova matematičke analize i primeni tih znanja. Predavanje je pripremljeno po uzoru na ruske udžbenike: Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа, 10-11 класс, задачник, Москва 2009. i Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. и др. Алгебра и начала математического анализа, 10-11 класс, Москва 2008, koji se koriste u Srednjoj školi 644 Primorskog okruga Sankt Peterburga u Rusiji.

Ključne reči: grafik funkcije, izvod funkcije, geometrijska interpretacija, monotonost, ekstremne vrednosti.

1. Uvod

Pojam izvoda funkcije i njegova primena u ispitivanju osobina funkcija obrađuju se u četvrtom razredu gimnazije. Izvod funkcije je jedan od osnovnih pojmova, pa je zato bitno da se on pravilno usvoji i primenjuje u ispitivanju osobina funkcija. Učenici imaju poteškoće u prihvatanju samog geometrijskog tumačenja prvog izvoda. Još veći problemi nastaju kada treba primeniti osnovne teoreme matematičke analize koje povezuju prvi izvod funkcije sa monotonošću i ekstremnim vrednostima funkcije. Najkompleksniji zadaci koji podrazumevaju primenu znanja o osobinama funkcija i izvodnih funkcija su oni u kojima treba ispitati tok i nacrtati grafik funkcije. Nastavnici se često žale da, iako su sa učenicima uradili veliki broj zadataka, oni i dalje ,,ne vide" kako da svojstva funkcija ispitana analitičkim putem prenesu na grafik. Još jedna poteškoća sa kojom se susrećemo u ovakvim zadacima jeste nizak nivo grafičke pismenosti učenika.

Pregled sadržaja udžbenika i priručnika, koji se koriste u našim srednjim školama, pokazuje da su zadaci koji se odnose na izvod funkcije uglavnom usmereni ka tehnici diferenciranja i ispitivanju osobina funkcija analitičkim putem.

Ruski udžbenici [1], [2] i [3], po kojima se radi u Srednjoj školi 644 Primorskog okruga Sankt - Peterburga, osim analitički postavljenih zadataka koji se odnose na izvod funkcije, sadrže i zadatke u kojima su neki od uslova prikazani grafički. Funkcija, odnosno izvodna funkcija, ne zadaje se analitički već grafički. Grafici su dati u koordinatnoj mreži i pri tom je, na osnovu slike, moguće očitavanje podataka koji su potrebni za rešavanje postavljenog zadatka. Ako je prikazan grafik funkcije, onda se pitanje koje je postavljeno u zadatku odnosi na izvodnu funkciju. Kada je u zadatku grafički prikazana izvodna funkcija, postavljeno pitanje odnosi se na funkciju. Ovakva vrsta zadataka je, na jedinstvenom državnom testiranju u Rusiji, označena kao zadaci B8. Na kraju 11. razreda učenici polažu ispit iz matematike koji sadrži dve grupe zadataka (B i C). Zadaci B1 – B14 su lakši u odnosu na zadatke C1 – C6. Zadaci tipa B8 pripadaju srednjem nivou složenosti [4].

U ovom radu su prikazani zadaci tipa B8 i mogućnost njihove primene u sistematizaciji gradiva o izvodu funkcije. Metodski pristup čije je težište na grafički postavljenim zadacima omogućava sistematizaciju i proveru funkcionalnosti znanja učenika u ovoj oblasti, povezivanje gradiva različitih matematičkih oblasti kao i podizanje nivoa grafičke pismenosti učenika.

2. Geometrijska interpretacija prvog izvoda

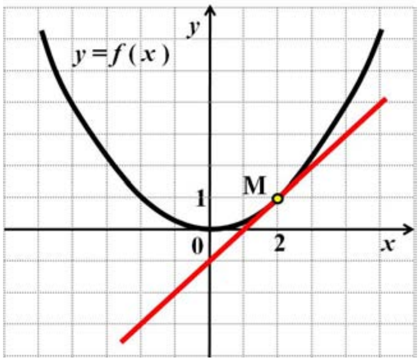
Najpre treba obnoviti sa učenicima geometrijsko tumačenje prvog izvoda funkcije. Najčešće je znanje o geometrijskom značenju prvog izvoda samo na formalnom nivou poznavanja činjenica. Jedan od razloga je i to što je većina zadataka u srednjoškolskim udžbenicima formulisana tako da je funkcija zadata analitički i da se traži jednačina tangente u tački koja pripada grafiku ili koja je paralelna (normalna) sa datom pravom. Uvežbavanjem takvih zadataka učenici nauče da koriste dve formule $k = f'(x_0)$ i $y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$ i određenu standardnu ,,šemu” rešavanja. Većina njih bi rešila sledeći zadatak :

Zadatak 1. *Odredi koeficijent pravca tangente grafika funkcije* $y = \frac{x^2}{4}$ *u tački* $M(2,\ 1)$.

Rešenje. Određivanjem prvog izvoda $f'(x) = \frac{x}{2}$ i primenom stava da $f'(x_0)$ predstavlja koeficijent pravca tangente grafika funkcije $y = f(x)$ u tački $(x_0,\ f(x_0))$, dobija se da je $k = f'(2) = 1$. $\triangle$

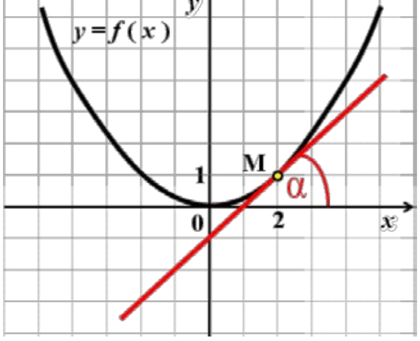
Isti zadatak možemo da postavimo tako da je funkcija zadata svojim grafikom, odnosno kao grafički problem. Ovako postavljen problem je teži učenicima jer je potrebno da na osnovu grafičkog prikaza očitaju potrebne podatke.

Zadatak 2. *Na slici 1. je prikazan grafik funkcije* $y = f(x)$ *i tangenta grafika u tački* $M(2,\ 1)$. *Odredi* $f'(2)$.



Slika 1.

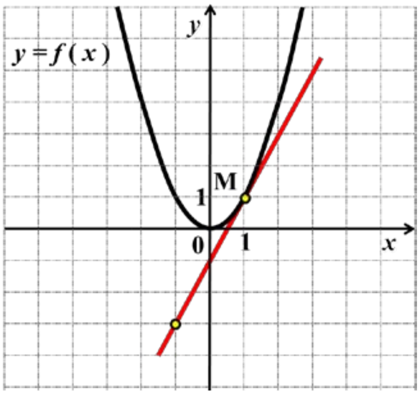
Rešenje. Kako je $f'(2)$ koeficijent pravca tangente grafika funkcije $y = f(x)$ u tački $x_0 = 2$, problem se svodi na određivanje koeficijenta pravca prikazane tangente.



Slika 2.

- Koeficijent pravca prave je tangens ugla α koji prava gradi sa pozitivnim delom $x-$ose, tj. $k = tg\,\alpha$.
- Na osnovu grafičkog prikaza u koordinatnoj mreži učenici lako mogu da uoče da je $\alpha = 45°$.
- Dakle: $f'(2) = k = tg\,45° = 1$. $\triangle$

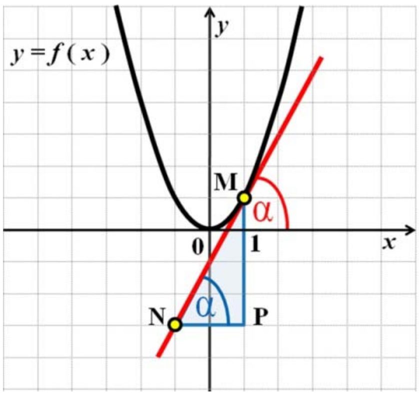
Zadatak 3. *Na slici 3. je prikazan grafik funkcije $y = f(x)$ i tangenta grafika u tački $M(1,\ 1)$. Odredi $f'(1)$.*



Slika 3.

Rešenje. U rešavanju zadatka učenik, na osnovu analize vizuelnih informacija, treba da primeni znanja različitih matematičkih oblasti.

- $f'(1)$ je koeficijent pravca tangente grafika funkcije $y = f(x)$ u tački $x_0 = 1$, tj. $f'(1) = k$ (matematička analiza).
- Određivanje koeficijenta pravca tangente je čest problem koji imaju učenici. Kako nisu rešavali ovako grafički postavljene zadatke, treba ih uputiti da se određeni podaci dobijaju očitavanjem sa koordinatne mreže i da koriste znanja iz drugih matematičkih oblasti: geometrije, trigonometrije i analitičke geometrije.



Slika 4.

Prvi način:

- Koeficijent pravca prave je tangens ugla α koji prava gradi sa pozitivnim delom $x -$ ose, tj. $k = tg\,\alpha$ (analitička geometrija).
- Uočiti ugao α koji tangenta gradi sa pozitivnim delom $x -$ ose (grafički).
- Uočiti pogodan pravougli trougao (MNP) čiji je jedan ugao jednak uglu α (grafički).
- $\measuredangle N = \alpha$ uglovi sa paralelnim kracima (geometrija).
- U pravouglom trouglu MNP, je

$$tg\,\alpha = \frac{MP}{NP} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \text{(trigonometrija).}$$

Dakle: $f'(1) = k = tg\,\alpha = 2$. △

Drugi način:

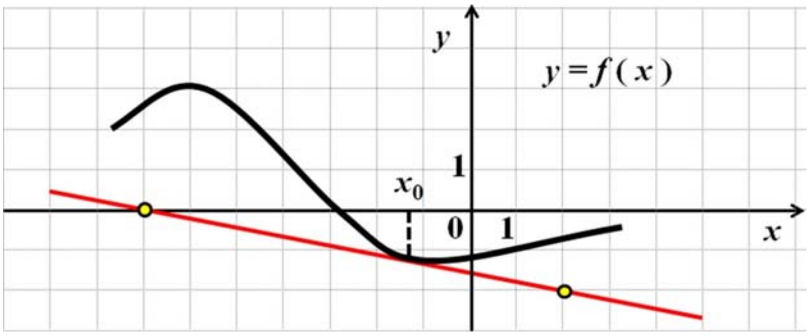
- Uočimo dve pogodne tačke (sa celobrojnim koordinatama) koje pripadaju tangenti. To su $M(1,\ 1)$ i $N(-1,-3)$ (grafički).
- Koeficijent pravca prave kroz dve tačke $M(x_M,\ y_M)$ i $N(x_N,\ y_N)$ je

$$k = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{1+3}{1+1} = 2 \qquad \text{(analitička geometrija).}$$

Dakle: $f'(1) = k = 2$. △

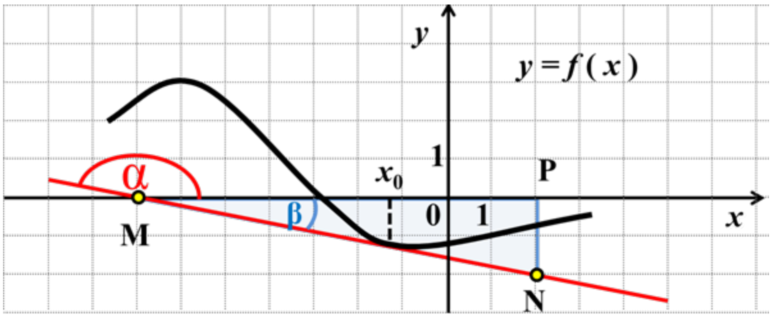
Nakon ovakve kratke obuke, možemo da zadamo sličan zadatak za samostalno rešavanje, ali da tangenta gradi tup ugao sa pozitivnim delom $x -$ ose.

Zadatak 4. *Na slici 5. je prikazan grafik funkcije $y = f(x)$ i tangenta u tački s apscisom x_0 . Odredi vrednost izvoda funkcije u tački x_0 .*



Slika 5.

Rešenje. Određivanje koeficijenta pravca tangente u ovom zadatku složenije je u odnosu na prethodni zadatak, ako primenjujemo prvi način. Svakako treba sa učenicima rešiti i na ovaj način, jer je to prilika da se obnove još neke činjenice iz trigonometrije.



Slika 6.

- Tangenta gradi tup ugao α sa pozitivnim delom $x -$ ose, pa posmatramo njegov uporedni ugao β, koji je oštar.
- Da bi odredili $tg\,\beta$ treba uočiti pogodan pravougli trougao čiji je jedan ugao jednak uglu β .

  Uočimo trougao MNP u kome važi da je $tg\,\beta = \dfrac{NP}{MP} = \dfrac{2}{9}$.
- Pošto je $\alpha = 180° - \beta$, svođenjem na prvi kvadrant, dobijamo

$$tg\,\alpha = tg\,(180° - \beta) = -tg\,\beta = -\frac{2}{9}.$$

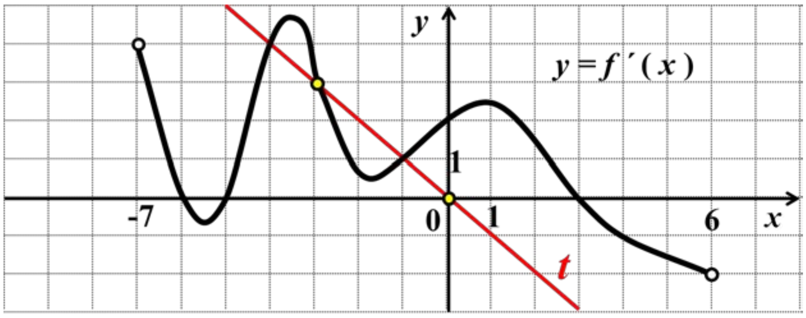
- Dakle: $f'(x_0) = k = tg\,\alpha = -\dfrac{2}{9}$.

Ako se zadatak rešava na drugi način, treba uočiti tačke $M(-7,\ 0)$ i $N(2, -2)$ koje pripadaju tangenti.

Koeficijent pravca tangente je $k = \dfrac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = -\dfrac{2}{9}$, pa je $f'(x_0) = k = -\dfrac{2}{9}$. △

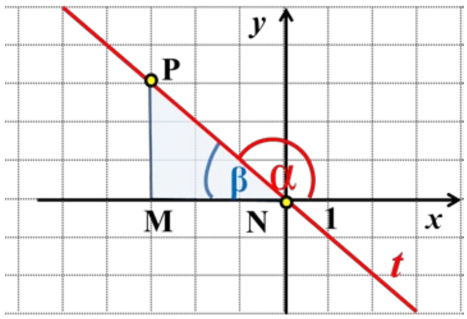
Naredni zadatak je složeniji od prethodnih. U istom koordinatnom sistemu prikazani su tangenta grafika funkcije $y = f(x)$ u tački čija je apscisa x_0 i grafik izvodne funkcije $y = f'(x)$. Osim određivanja koeficijenta pravca tangente $f'(x_0)$ na osnovu njenog grafika (postupak koji je sproveden i u prethodnim zadacima), potrebno je i očitavanje podataka sa grafika izvodne funkcije.

Zadatak 5. *Funkcija $y = f(x)$ je definisana na intervalu $(-7,\ 6)$. U tački s apscisom x_0 je konstruisana tangenta. Na slici 7. je prikazana tangenta i grafik izvodne funkcije $y = f'(x)$. Izračunaj vrednost izraza $x_0 + f'(x_0)$.*



Slika 7.

Rešenje. Najpre se posmatra tangenta i određuje se njen koeficijent pravca, tj. $f^{'}(x_0)$. Nakon toga, posmatranjem grafika izvodne funkcije treba odrediti x_0.

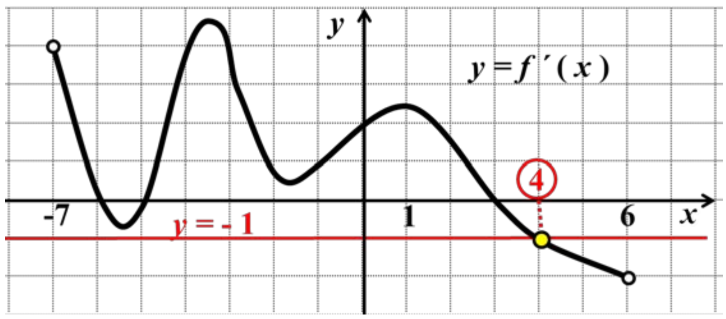


Slika 8.

- Učenici mogu samostalno da odrede da je

  $f^{'}(x_0) = k = tg\ \alpha = -1.$

Napomenimo im da, na osnovu grafičkog prikaza, vidimo da je tangenta simetrala II i IV kvadranta i da je njena jednačina $y = -x$, pa je njen koeficijent pravca jednak -1.



Slika 9.

- Da bi odredili onu vrednost argumenta, za koju je vrednost prvog izvoda jednaka -1, učenici posmatraju grafik izvodne funkcije.

  Sa grafika očitavaju da je $f^{'}(x_0) = -1$ ako je $x_0 = 4$.

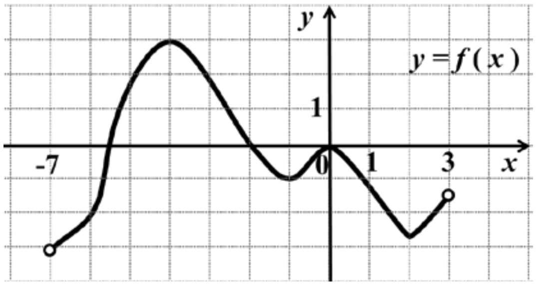
  Vrednost traženog izraza je

  $x_0 + f^{'}(x_0) = 4 - 1 = 3$ △

3. Monotonost funkcije

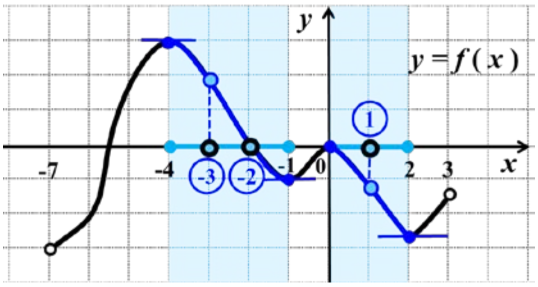
Pre nego što se pristupi rešavanju zadataka, sa učenicima treba ponoviti teoreme koje povezuju monotonost funkcije i prvi izvod. Posebno treba naglasiti da ako je funkcija monotono rastuća (opadajuća) na intervalu $(a,\ b)$, onda prvi izvod ne mora da bude pozitivan (negativan) za sve vrednosti koje pripadaju intervalu $(a,\ b)$. Kao primere možemo da navedemo funkcije koje su monotono rastuće na skupu realnih brojeva, ali prvi izvod nije pozitivan za sve realne brojeve: $y = x^3$ (ako je $x = 0$, onda je prvi izvod jednak nuli) i $y = \sqrt[3]{x}$ (funkcija nije diferencijabilna u nuli).

Zadatak 6. *Funkcija* $y = f(x)$ *je definisana i diferencijabilna za* $x \in (-7,\ 3)$. *Na slici 10. je prikazan njen grafik. Za koliko celobrojnih vrednosti je prvi izvod funkcije negativan?*



Slika 10.

1) *jedna*
2) *dve*
3) *tri*
4) *četiri*
5) *više od četiri*

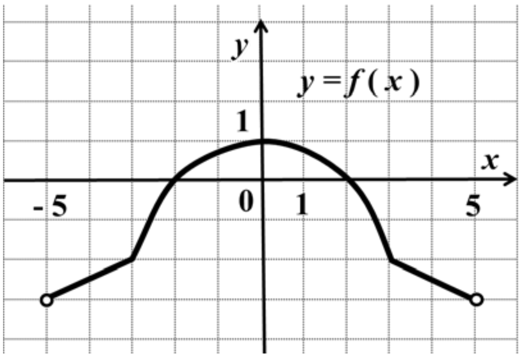


Slika11.

Rešenje.

- Potreban uslov da je prvi izvod na nekom intervalu negativan, jeste da je funkcija opadajuća.
- Učenici treba da uoče delove grafika gde je funkcija opadajuća i odrede da su intervali na kojima funkcija opada $[-4,-1]$ i $[0,\ 2]$.
- Pošto je funkcija diferencijabilna, iz ovih intervala treba isključiti celobrojne vrednosti u kojima je prvi izvod jednak nuli. Prvi izvod je jednak nuli ako je x jednako $-4,\ -1,\ 0$ i 2 jer su tangente paralelne sa $x-$ osom. Za celobrojne vrednosti $-3,-2$ i 1 prvi izvod je negativan jer tangente grade tup ugao sa pozitivnim delom $x-$ ose, pa je tačan odgovor pod 3. $\triangle$

Zadatak 7. *Na slici 12. je prikazan grafik funkcije $y=f(x)$, definisane na intervalu $(-5,\ 5)$. Odredi dužinu najdužeg intervala na kome je izvodna funkcija $y=f'(x)$ pozitivna.*



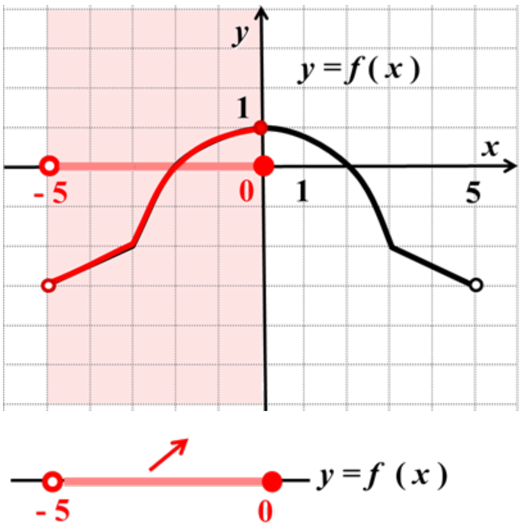
Slika 12.

Rešenje.

- Učenici najpre treba da uoče deo grafika funkcije gde je ona rastuća. Interval na kome funkcija raste je $(-5,\ 0]$.

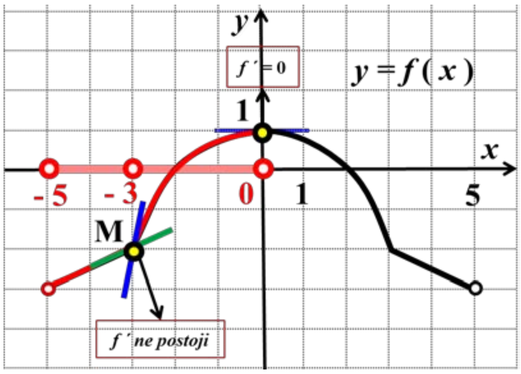
Česta greška učenika je da interval na kome funkcija raste poistovećuju sa intervalom gde je prvi izvod pozitivan. Zato je veoma čest netačan odgovor da je prvi izvod pozitivan na intervalu dužine 5.

- Iz intervala gde je funkcija rastuća treba isključiti tačke gde je prvi izvod jednak nuli ili nije definisan.

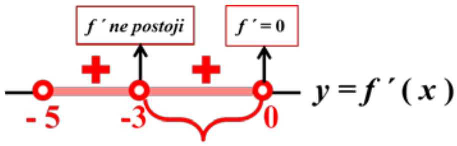


Slika 13.

- Za $x = 0$ vrednost prvog izvoda je jednaka 0, jer je tangenta grafika u toj tački paralelna sa $x -$ osom.
- Ako uočimo tačku M koja pripada grafiku funkcije, vidimo da su leva i desna tangenta dve različite prave. One imaju različite koeficijente pravaca, pa su različiti levi i desni izvod funkcije u tački $x = -3$. Dakle, za $x = -3$ prvi izvod nije definisan.
- Intervali na kojima je $f'(x)$ pozitivan su $(-5, -3)$ i $(-3,\ 0)$, pa je dužina najdužeg intervala gde je izvodna funkcija pozitivna jednaka 3. △



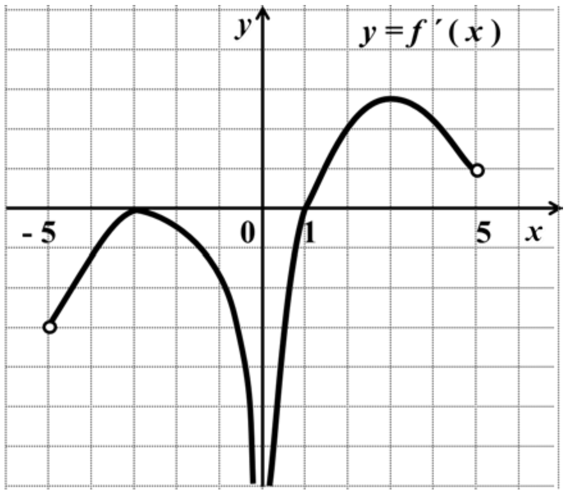
Slika 14.



Slika 15.

Zadatak 8. *Funkcija* $y = f(x)$ *je definisana i neprekidna na intervalu* $(-5,\ 5)$. *Na slici 16. je prikazan grafik njene izvodne funkcije* $y = f'(x)$. *Koji od ponuđenih intervala je najduži interval na kome funkcija opada ?*

1) $(-3,\ 0)$
2) $(-3,\ 1)$
3) $(-5,\ 0)$
4) $(-5,\ 1)$



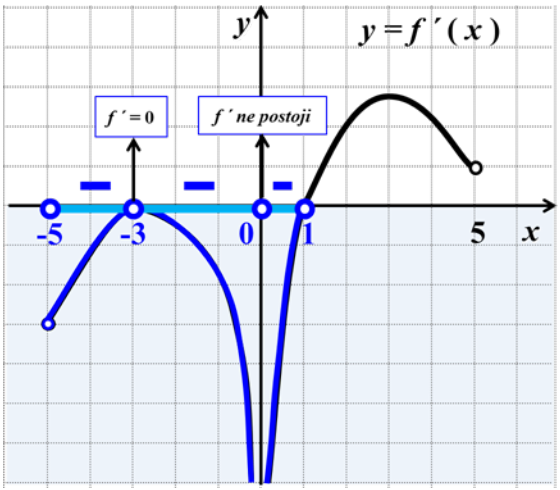
Slika 16.

Rešenje.

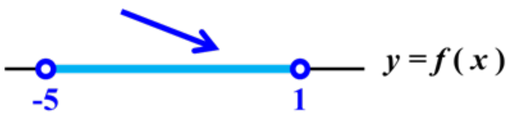
- Intervali gde je izvodna funkcija negativna su $(-5, -3)$, $(-3,\ 0)$ i $(0,\ 1)$.

Najčešća greška učenika je da interval $(-3,\ 0)$ odrede kao najduži interval gde je funkcija opadajuća.

- Na osnovu grafika izvodne funkcije vidimo da je $f'(-3) = 0$, a da prvi izvod za $x = 0$ nije definisan.
- Na intervalu $(-5,\ 1)$ izvodna funkcija je negativna u svim tačkama, osim za $x = -3$, (jednaka je nuli) i za $x = 0$ (nije definisana).
- Kako je funkcija $y = f(x)$ definisana i neprekidna za $x = -3$ i $x = 0$ to je funkcija opadajuća na celom intervalu $(-5,\ 1)$, pa je tačan odgovor pod 4. △



Slika 17.

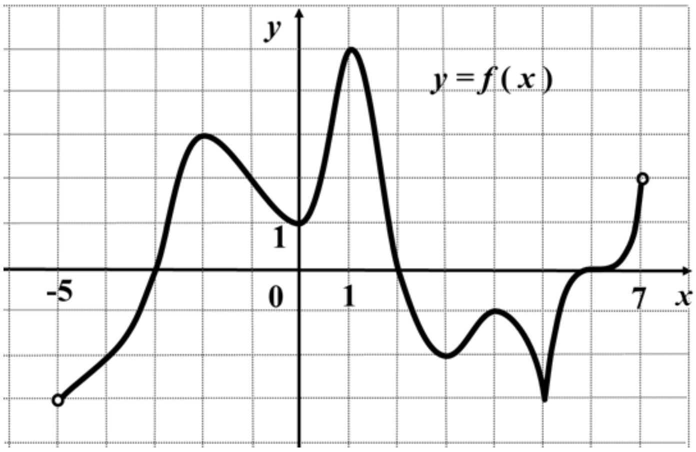


Slika 18.

4. Ekstremne vrednosti funkcije

Učenici najpre ponavljaju teoreme koje daju potreban i dovoljan uslov za postojanje lokalnog ekstrema funkcije, kao i postupak određivanja najmanje i najveće vrednosti funkcije (globalni ekstremi). Funkcionalnost njihovog znanja o ekstremima možemo da proverimo u zadacima kada je dat grafik funkcije ili grafik izvodne funkcije.

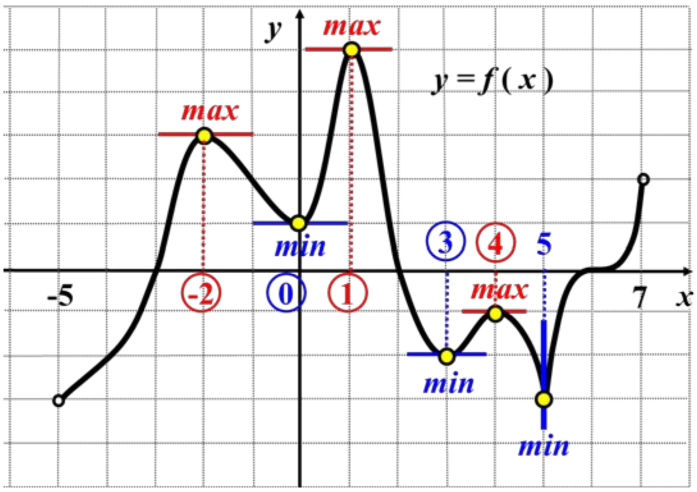
Zadatak 9. *Na slici 19. je prikazan grafik funkcije* $y = f(x)$, *definisane na intervalu* $(-5,\ 7)$. *Zbir svih vrednosti argumenta* x *za koje je funkcija diferencijabilna i ima lokalnu ekstremnu vrednost je:*



Slika 19.

1) 11
2) 8
3) 6
4) 3

Rešenje.



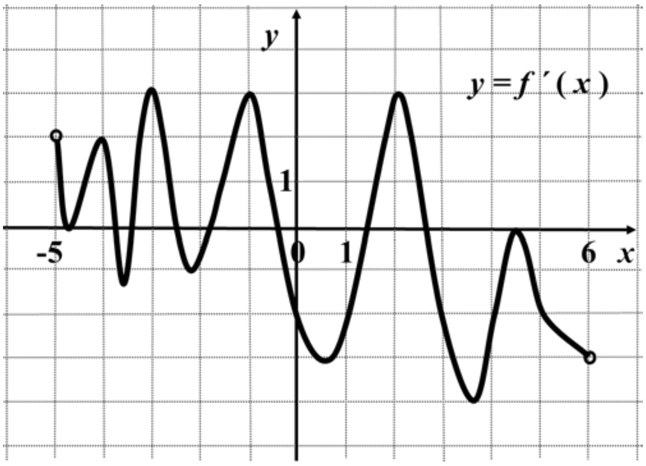
Slika 20.

- Na osnovu prikazanog grafika učenici određuju da funkcija ima lokalni maksimum ako je: $x = -2,\ x = 1,\ x = 4$ i lokalni minimum ako je $x = 0,\ x = 3,\ x = 5$.
- Kako je funkcija zadata grafikom, učenici ispitaju diferencijabilnost tako što u tačkama lokalnih ekstrema crtaju tangente, a zatim razmatraju njihove koeficijente pravaca.
- U tački grafika, čija je apscisa $x = 5$, tangenta je paralelna sa $y -$ osom pa prvi izvod nije definisan, tj. funkcija nije diferencijabilna. U tačkama gde su tangente paralelne sa $x -$ osom, vrednost prvog izvoda je 0 i zbog toga je funkcija u tim tačkama diferencijabilna.
- Uslovi zadatka su ispunjeni ako je $x = -2,\ x = 0,\ x = 1,\ x = 3,\ x = 4$ i njihov zbir je 6, pa je tačan odgovor pod 3. △

Napomena 1. „Čitanje diferencijabilnosti'' sa grafika nije formalan dokaz, ali je i te kako važno za razumevanje ovog pojma.

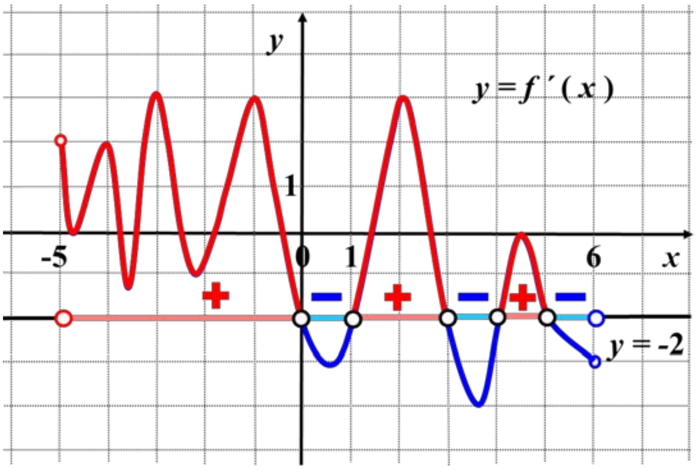
U narednom zadatku izvodna funkcija je zadata grafički, a postavljeno pitanje se odnosi na funkciju. Prilikom rešavanja je potrebno izvršiti translaciju grafika funkcije ili koordinatnog sistema, što učenicima može da oteža rešavanje zadatka.

Zadatak 10. *Funkcija* $y = f(x)$ *je definisana na intervalu* $(-5,\ 6)$. *Na slici 21. je prikazan grafik njene izvodne funkcije* $y = f^{'}(x)$. *Odredi u koliko tačaka funkcija* $y = f(x) + 2x$ *ima lokalni maksimum.*



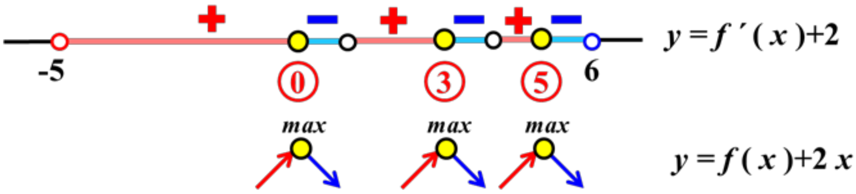
Slika 21.

Rešenje. Da bismo odredili lokalne maksimume funkcije, najpre treba ispitati znak njene izvodne funkcije, $y^{'} = f^{'}(x) + 2$. U zadatku je dat grafik funkcije $f^{'}(x)$. Da bismo dobili grafik $f^{'}(x) + 2$, treba da izvršimo translaciju grafika izvodne funkcije za dve jedinične duži naviše. Nakon toga očitavamo znak na osnovu položaja grafika $f^{'}(x) + 2$ u odnosu na $x -$ osu.



Slika 22.

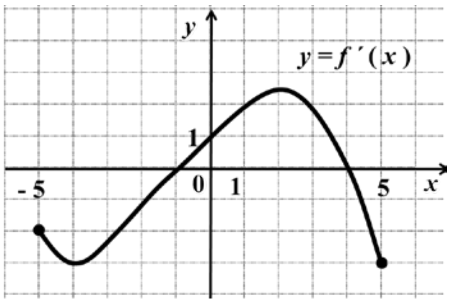
- U ovom slučaju je, translacija grafika izvodne funkcije za dve jedinične duži naviše, ekvivalentna translaciji $x -$ ose za dve duži naniže.
- Očitavamo na kojim intervalima je grafik izvodne funkcije iznad (ispod) prave $y = -2$. Na tim intervalima je funkcija $f^{'}(x) + 2$ pozitivna (negativna).



Slika 23.

- Dakle, funkcija ima lokalni maksimum ako je $x = 0$, $x = 3$ i $x = 5$, odnosno u tri tačke. $\triangle$

Zadatak 11. *Funkcija* $y = f(x)$ *je definisana na intervalu* $[-5,\ 5]$. *Na slici 24. je prikazan grafik njene izvodne funkcije* $y = f^{'}(x)$. *U kojoj tački domena funkcija* $y = f(x)$ *dostiže najveću vrednost, ako je poznato da je* $f(-5) \leq f(5)$ *?*



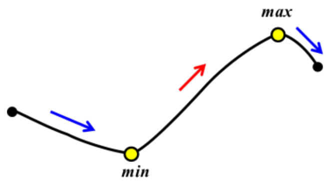
Slika 24.

Rešenje.

- Ispitivanjem znaka izvodne funkcije učenici određuju da funkcija ima lokalni minimum za $x = -1$ i lokalni maksimim za $x = 4$.

Slika 25.

- Da bi odredili najveću vrednost funkcije treba da nacrtaju grafik funkcije koja ispunjava uslove zadatka. Prvo crtaju krajnje tačke grafika, tako da je $f(-5) \leq f(5)$. Na osnovu intervala monotnosti i tačaka lokalnih ekstrema koje su odredili, crtaju deo grafika između krajnjih tačaka.



Slika 26.

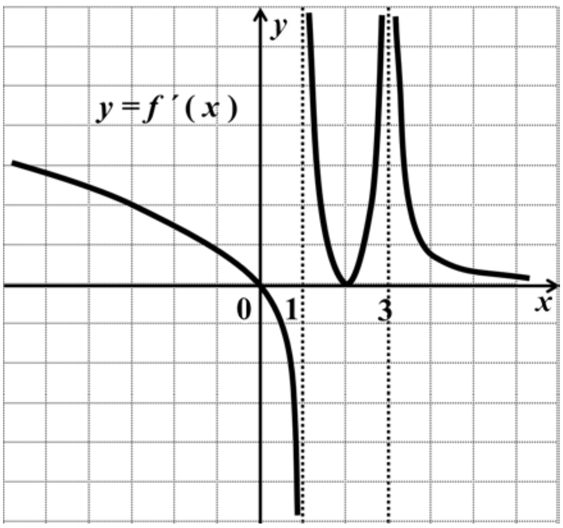
- Sa nacrtanog grafika očitavaju da funkcija ima najveću vrednost na segmentu ako je $x = 4$. $\triangle$

Napomena 2. Uslov $f(-5) \leq f(5)$ je bitan u postavci zadatka, zato što obezbeđuje jedinstveno rešenje zadatka. Učenicima možemo postaviti zadatak u kome je uslov $f(-5) \leq f(5)$ izostavljen ili zamenjen uslovom $f(-5) > f(5)$. U tom slučaju zadatak nema jedinstveno rešenje (funkcija može da ima najveću vrednost za $x = -5$ ili za $x = 4$).

5. Jedna slika, više pitanja

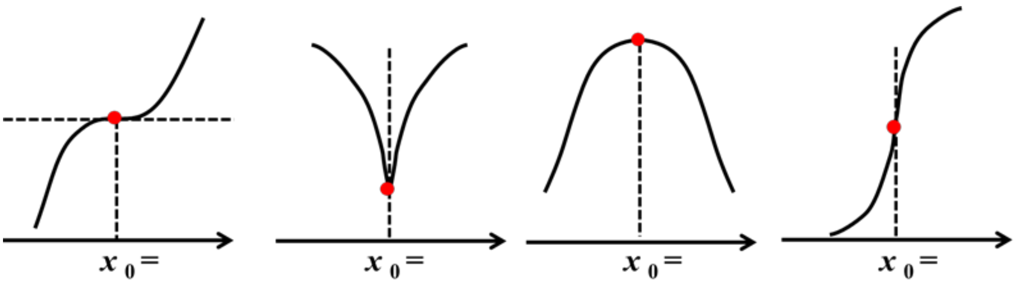
Jednom slikom možemo da izvršimo sistematizaciju više pojmova i stavova koji se odnose na izvod funkcije, zadajući pitanja o geometrijskom tumačenju izvoda, monotonosti i ekstremima.

Zadatak 12. *Funkcija $y = f(x)$ je definisana i neprekidna na skupu realnih brojeva. Na slici 27. je prikazan grafik njene izvodne funkcije.*



Slika 27.

1) *U koliko tačaka je tangenta grafika funkcije paralelna sa pravom $y = x - 3$?* __________ .
2) *Funkcija $y = f(x)$ je monotono opadajuća akko je $x \in$* ____________________________ .
3) *Funkcija $y = f(x)$ je monotono rastuća akko je $x \in$* ____________________________ .
4) *Funkcija $y = f(x)$ ima lokalni maksimum ako je $x =$* ____________________________ .
5) *Funkcija $y = f(x)$ ima lokalni minum ako je $x =$* ____________________________ .
6) *Funkcija $y = f(x)$ ima najveću vrednost na intervalu $[1,\ 3]$ ako je $x =$*_______________ .
7) *Pored svake slike upiši koordinatu one tačke u čijoj je okolini prikazan grafik funkcije $y = f(x)$.*



Slika 28.

6. Zaključak

Prikazani zadaci mogu da se koriste prilikom sistematizacije, ali i tokom obrade gradiva o izvodu funkcije i njegovoj primeni. Pogodni su da se proveri koliko učenici suštinski shvataju pojmove i stavove u ovoj oblasti i koliki je nivo funkcionalnosti njihovog znanja. Osim primene znanja iz različitih matematičkih oblasti podrazumevaju i određen nivo grafičke pismenosti.

Prednost ovakvih zadataka je i u tome što, nakon kraće obuke, učenici prilikom rešavanja ukratko zapisuju postupak ili odgovaraju na postavljeno pitanje i bez pisanja postupka. Za kratko vreme mogu da reše veći broj zadataka. Kako su zadaci sasvim drugačiji u odnosu na standardne zadatke koji se rade u ovoj oblasti, predstavljaju promenu i ,,osveženje" za učenike. Izradu zadataka doživljavaju kao neku vrstu igre sa slikama, što može povećati njihovu motivisanost.

Bibliografija

[1] **Мордкович А.Г.** Алгебра и начала математического анализа, 10-11 класс, задачник, *Мнемозина, Москва* 2009, 78-100

[2] **Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. и др.** Алгебра и начала математического анализа, 10-11 класс, *Просвещение, Москва* 2008, 306-325

[3] **Мордкович А.Г., Тульчинская Е.Е.** Алгебра и начала анализа 10 классы, задачник,часть2, *Мнемозина, Москва* 2007

[4] **Ященко И.В., Захаров П.И.** ЕГЭ 2013, Математика, Задача В8, Рабочая тетрадь , *МЦХМО, Москва* 2013

Симпозијум МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ, Математички факултет, Универзитет у Београду, 2013 ,Vol. IV(1)

Аритметички и геометријски низ у настави математике и програмирања

Драган Крстић

Гимназија Крушевац
e-mail: dkkrca@gmail.com

Александра Филиповић

Гимназија Крушевац
e-mail: filipovicalexandra@gmail.com

Апстракт. За разлику од прва два разреда гимназије, циљеви, задаци и садржаји предмета математика и рачунарство и информатика у трећем разреду гимназије природно-математичког смера су веома повезани. То даје простора наставницима да организују часове интердисциплинарне наставе и омогућава корелацију у настави ових предмета. Интердисциплинарни приступ настави подразумева повезивање садржаја различитих дисциплина (предмета) у логичке целине организоване око једног проблема или теме. Може се дефинисати и као јединствен поглед на заједничко у знању, које је основа за изналажење нових односа, стварање нових модела, система и структура или као примењена методологија и језик више дисциплина с циљем преиспитивања централне теме, проблема или искуства. Централна тема одржаног часа је била аритметички и геометријски низ. Ученици су исте задатке решавали на два различита начина, математички и писањем алгоритма (и програма у Паскалу), где су и примењивали већ стечена знања о наредбама циклуса. За почетак су изабрани једноставни примери аритметичког низа и геометријског низа, а за крај часа пример који је различите тежине у зависности да ли се решава математички или програмерски. Ученици су исту тему сагледали из различитих углова, уочили разлику у приступима, као и њихова ограничења.

Кључне речи: интердисциплинарна настава; аритметички и геометријски низ; наредбе циклуса.

1. Увод

Циљеви и задаци рачунарства и информатике као предмета су, по важећем плану и програму за гимназије, у значајној корелацији са циљевима и задацима математике и то највише у трећем разреду а посебно у природно-математичком, општем и информатичком смеру. Неки од задатака наставе математике који на то указују су да ученици:

- стичу знања и вештине корисне за трансфер у друге предмете и развијају способности за правилно коришћење стручне литературе;
- формирају свест о универзалности и примени математичког начина мишљења;
- развијају способности потребне за решавање проблема и нових ситуација у процесу рада и свакодневном животу, итд.

С друге стране, задаци наставе рачунарства и информатике су да код ученика:

- јачају способност за прецизно и концизно дефинисање проблема;
- упознају се са алгоритамским начином решавања проблема и основним алгоритмима;
- јачају способност решавања проблема развојем логичког и критичког мишљења; итд.

Поред сличних задатака и прописани садржаји програма су у корелацији. Постоји више тема које се проучавају из оба предмета. Програм рачунарства и информатике је увод у програмирање, односно садржи основе алгоритмизације, програме руковођене догађајима, типове података, наредбе гранања, наредбе циклуса, низовни тип, итд. У свакој од ових области евидентно је да ученици морају имати основна математичка знања. У начинима остваривања програма се и истиче потреба да треба поћи од математичких појмова (нпр. бројеви, интервали, операције, променљиве), па објаснити и указати на разлике у математичком и програмерском приступу. Сви ови поменути основни математички појмови су већ добро познати ученицима на овом узрасту. Наравно, треба обратити пажњу да је и за наставу математике препоручено да, где год је то могуће, садржаји математике претходе садржајима других предмета у којима се математика примењује. Теме из математике, као што је математичка индукција, омогућиће примену у писању програма са циклусима, а низови (аритметички и геометријски) боље разумевање низовног типа података. То заправо значи да математичку индукцију и низове из математике треба обрадити док се из програмирања обрађују наредбе циклуса, а свакако пре низовног типа. Оваква реализација наставе захтева договор наставника математике и рачунарства и информатике и омогућава бољу хоризонталну корелацију тема ових предмета и оставља могућност извођења интердисциплинарне наставе.

2. Интердисциплинарна настава

Интердисциплинарни приступ настави подразумева повезивање садржаја различитих дисциплина (предмета) у логичке целине организоване око једног проблема или теме. Знања различитих дисциплина су у функцији вишестраног расветљавања проблема или теме која се истражује. Интердсиплинарна настава је по свом карактеру увек и тематска, јер повезује и организује различите садржаје у тематске целине, садржаје који су слични или заједнички различитим дисциплинама. Тематска настава не мора увек бити и интердисциплинарна, на пример, када обједињује сродне појмове једне дисциплине [5].

У различитим истраживањима у свету интегративна или интердисциплинарна настава дефинише се као: (1) опсежно истраживање знања у различитим предметима које се односи на аспекте средине у којој деца живе; (2) пречица кроз предмете, која повезује различите аспекте наставе у логичне целине на холистички начин који одражава реални интерактивни свет; (3) јединствен поглед на заједничко у знању, које је основа за изналажење нових односа, стварање нових модела, система и структура; (4) примењена методологија и језик више дисциплина с циљем преиспитивања централне теме, проблема или искуства; (5) комбиновање неколико школских предмета у један активан пројекат по угледу на начин на који деца савладавају предмете у реалном свету, сједињене у заједничку активност; (6) нови начин мишљења; (7) образовање изнутра за пренос знања употребом модела мишљења.

Тематска интердисциплинарна настава повезана је с педагошким циљевима због: (1) увођења ученика у интегративне процесе данашње, (2) примене знања у пракси која надилази дисциплине и сведочи о усвојености знања, (3) сагледавања појмова и садржаја градива у целини, (4) подстицања флексибилности мишљења, односно тражења нових путева приликом решавања проблема, (5) блискости с природним сазнавањем кроз игру и (6) интегралности са стваралачким процесима истраживача, уметника и детета које још увек реагује на свет не фиксираним шемама, већ отвореношћу и радозналошћу за збивања која га окружују [6].

Интердисциплинарна настава може се организовати из два или више предмета који имају заједничку тему коју обрађују. Два или више наставника реализују заједничку, тимску наставу која треба да омогући лакше повезивање сродних наставних садржаја. Они предају различите предмете, говоре о истој теми, али сваки са аспекта свог предмета. Наставници деле одговорност за припремање, планирање, реализацију и вредновање наставе. Оваква настава захтева од наставника договарање пре реализације часа због заједничког наступа пред ученицима. У добро припремљеној тимској, интердисциплинарној настави се могу примењивати разни облици рада од индивидуалног, преко рада у паровима и мањим групама, до фронталног са великом групом ученика. Трајање оваквих наставних активности уз добру организацију рада не мора бити строго ограничено на један наставни час, већ се може планирати и више часова.

Остваривање интердисциплинарне наставе у предметној настави у средњој школи, захтева од наставника договор о теми часа која ће се разматрати с различитих аспеката, дефинисање циљева, осмишљавање активности на часу, припремање наставних материјала, као и договор термина реализације који треба ускладити с распоредом наставника и одељења које ће бити укључено у такву наставу. Активности на часу се морају добро испланирати да би се планирани садржаји тачно уклопили у временски оквир једног или више часова. Из наведеног се види да интердисциплинарна настава од наставника захтева доста ангажовања и сарадње, што иде у прилог чињеници да је много лакше планирати и организовати традиционалну наставу. Ипак, треба имати на уму да је повезивање садржаја различитих предмета потребно ради бољег остваривања предвиђених наставних циљева. Из вертикалног и хоризонталног повезивања наставних предмета долази до интердисциплинарног приступа наставном процесу у којем се повезују наставни садржаји различитих наставних тема у оквиру појединих предмета [3].

Тематска интердисциплинарна настава се у нашим школама примењује углавном у млађим разредима основне школе, али налази своје место и у старијим разредима и средњим школама. Неретко је увођење интердисциплинарне наставе предвиђено школским развојним планом школе, тако да наставници треба током једне или више школских година да осмисле и одрже неколико интердисциплинарних часова.

3. Пример интердисциплинарног часа

Интердисциплинарни час *Аритметички и геометријски низ (вежбање)* заједно су планирали, припремили и реализовали наставници математике и рачунарства и информатике у одељењу трећег разреда природно-математичког смера. Математичка индукција и низови из математике омогућавају да се веза прикаже кроз велики број задатака који се могу решавати математички, али и програмерски, писањем програма и коришћењем циклуса у програмском језику предвиђеним планом и програмом рачунарства и информатике. Ученицима се показује, и то кроз веома једноставне задатке, да се математика може применити, а математички задаци решавати на различите начине. Изабрани су једноставни примери аритметичког низа и геометријског низа и пример који је различите тежине у зависности да ли се решава математички или програмерски.

3.1. Задаци

Поставићемо неколико задатака које ћемо решавати математичким и алгоритамским путем. Осим састављања алгоритама од ученика очекујемо и да напишу програм који ће извршити на рачунару и тиме проверити тачност добијеног решења. Овде ћемо као програмерско решење представити само алгоритам записан у псеудокоду. (Ученици лако могу за вежбу написати одговарајуће Паскал програме.) Пођимо од математичких задатака основног нивоа из аритметичког и геометријског низа и завршимо са задацима средњег или напредног нивоа:

Задатак 1. *Аритметички низ је дефинисан првим чланом $a_1 = 7$ и разликом $d = 5$. Колико чланова тог низа треба сабрати да би збир био 243?* [1]

Решење. Из $S_n = 243$ тј. $\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 243$, стављањем датих вредности за a_1 и d, добијамо квадратну једначину по $n \in N$: $5n^2 + 9n - 486 = 0$ чије решење је $n = 9$. Примећујемо да програме, по правилу, пишемо тако да решавају класу задатака, па формулацију задатка уопштавамо, тј. радимо са општим бројевима. У математици овај приступ обично подразумева средњи или виши ниво знања, док је у програмирању то основни. Алгоритам се заснива на условном циклусу (бројачки циклус није могућ):

Алгоритам 1 Одређује n број првих чланова аритметичког низа чијим сабирањем се добија дати број S, за дати први члан низа a и разлику d

```
n ← 0
clan ← a
zbir ← 0
while zbir ≠ S do
   zbir ← zbir + clan
   n ← n + 1
   clan ← clan + d
end while
print n
```

△

Напомена 1. Приметимо да решење задатка не мора да постоји, тј. за дате бројеве a и d, број S не може бити произвољан; некоректно задат број S у алгоритму доводи до бесконачног циклуса. Овде се може разматрати и да ли уопштени задатак може имати два решења (ако може, под којим условима) и проблем алгоритма да нађе оба решења (ако постоје).

Задатак 2. *Колики је збир свих троцифрених бројева дељивих са 11?* [4, стр. 271]

Решење. Пошто је $9 \cdot 11 = 99$, то је $110 = 10 \cdot 11$ први троцифрен број дељив са 11. Слично, $990 = 90 \cdot 11$ је последњи троцифрен број дељив са 11 (јер $91 \cdot 11 = 1001$). Дакле, троцифрених бројева дељивих са 11 има $90 - 10 + 1 = 81$. Они образују аритметички низ ($a_1 = 110,\ d = 11$) код кога је $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, тј. $S_{81} = \frac{81}{2}(110 + 990) = \frac{81}{2} \cdot 1100 = 81 \cdot 550 = 44500$.

Програмерско решење са минималном применом математике (самим тим и са минималном ефикасношћу) проверава дељивост са 11 сваког троцифреног броја (користећи бројачки циклус):

Алгоритам 2 Одређује збир свих троцифрених бројева дељивих са 11

```
zbir ← 0
for broj = 100 to 999 do
   if broj mod 11 = 0 then
      zbir ← zbir + broj
   end if
end for
print zbir
```

△

Задатак 3. *Колико најмање узастопних степена броја 2, почев од нултог, треба сабрати да би се добио збир који није мањи од 200?*

Напомена 2. Приметимо да је могуће дати и овакву, више програмерску, формулацију задатка: Одредити минимални број битова (бинарних цифара) за записивање декадног броја 200 у бинарном бројевном систему.

Решење. Дакле, тражи се најмање n тако да $S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \geq 200$. Имамо збир првих $n - 1$ чланова геометријског низа ($a_1 = 2,\ q = 2$): $S_{n-1} = a_1 \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} = 2(2^{n-1} - 1)$ одакле

је $S = 1 + S_{n-1} = 1 + 2^n - 2 = 2^n - 1$. Дакле, тражимо најмање $n \in N$ тако да важи $2^n - 1 \geq 200$ тј. $2^n \geq 201$. Како је $128 = 2^7 < 201 \leq 256 = 2^8$, то је $n = 8$.
Опет уопштавамо задатак, уместо 200 стављамо број S.

Алгоритам 3 Одређује најмање $n \in N$ тако да $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \geq S$, за дато S

```
n ← 0
clan ← 1
zbir ← 0
while zbir < S do
   zbir ← zbir + clan
   n ← n + 1
   clan ← clan * 2
end while
print n
```

△

Задатак 4. *За дато $n \in N$, одредити збир* $1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n}$. [4, стр. 116]

Решење. Приметимо да збир има n сабирака.
Математичко решење је мање очигледно:

$$S = \underbrace{\frac{9}{9} + \frac{99}{9} + \frac{999}{9} + \cdots + \frac{\overbrace{99\ldots9}^{n}}{9}}_{n} =$$

$\frac{1}{9}\left((10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \cdots + (10^n-1)\right) =$
$\frac{1}{9}\left(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n - n\right) = \frac{1}{9}\left(10\frac{10^n-1}{10-1} - n\right) = \frac{1}{81}\left(10^{n+1} - 10 - 9n\right).$
Напоменимо да се решавање задатка може свести на решавање диференцне једначине $S_{n+1} = 10S_n + n + 1$.
Ученици лакше проналазе програмерско решење:

Алгоритам 4 За дато $n \in N$, одређује збир $S = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n}$

```
S ← 0
clan ← 1
for i = 1 to n do
   S ← S + clan
   clan ← clan * 10 + 1
end for
print S
```

△

Напомена 3. Приметимо, ипак, предност математичког решења, тј. ману програмерског: већ за 11 бројева збир је већи од 2^{31} па ће при рачунању помоћу рачунара (ако се користи целобројни тип податакa који се импленентира са 4 бајта) доћи до прекорачења.

У прва три задатка математичко решење је једноставно, а ефикасност програмерског решења је директно сразмерна примени математичких знања у алгоритму. Међутим, веома мали број ученика је у стању да реши четврти задатак математички (ако већ негде није видео решење сличног задатка), док велики број ученика је у стању да састави алгоритам за решавање тог задатка.

3.2. Веза између математике и програмирања

Ако се крене од најшире дефиниције рачунара по којој је то машина која може да се програмира да извршава различите задатке свођењем на елементарне операције над бројевима, јасно је да је програмирање у тесној вези са математиком. Данашњи рачунари су наследници различитих механичких, електромеханичких и електронских машина које су настајале управо због потребе да се различите математичке процедуре аутоматизују и да се велике количине података брже и лакше обраде. Програмирање у савременом смислу постало је практично могуће тек развојем првих рачунара фон Нојманове архитектуре. Главни математички доприноси развоју (настанку) рачунарства су Булова алгебра (1854.) и Тјурингова машина (1936.). Први алгоритми за решавање математичких проблема постојали су још у време античких цивилизација, док су примери алгоритама познати у готово свим математичким дисциплинама.

Теорија алгоритама је такође математичка дисциплина, тако да се донекле може рећи да је онда и програмирање део математике. Ипак, можда би се могло рећи и обрнуто, да је математика део програмирања. У ствари, најтеже је успоставити праве границе између повезаних дисциплина. Могуће је, наравно, разликовати различите приступе и погледе математике и програмирања. Разлика је у предмету и приступу – математика се бави мање-више теоремама, бесконачним процесима, статичним односима, а програмирање се бави мање-више алгоритмима, коначним конструкцијама и динамичким односима. [2] Очигледна веза математике и програмирања је у нумеричкој анализи, логици, теорији бројева, дискретној математици, геометрији, векторима, теорији графова ...

Програмирање је једна од најважнијих дисциплина данашњице. Програми се пишу, по правилу, да реше неки од проблема из реалног света. Математичка позадина решавања проблема се може видети у сваком кораку, почев од прецизног дефинисања и формалног описивања, најчешће математичком формулацијом, преко бирања и разраде одговарајућег математичког модела, чиме се остварује апстракција проблема, до алгоритмизације самог проблема. Математичка анализа алгоритма, временска и просторна сложеност алгоритма омогућава прави избор решења.

Када је реч о програмирању, ако је у питању неки једноставни програм примена математике можда није неопходна, али уколико се ради о неком захтевнијем програмерском проблему, математичко размишљање и знање ће до доћи до изражаја.

4. Закључак

Циљ овог интердисциплинарног часа математике и рачунарства и информатике је уочавање могућности повезивања знања из ових предмета, разумевање предности и ограничења математичког и програмерског приступа и примена у решавању задатака. Ученици су исту тему сагледали из различитих углова, уочили разлику у приступима, као и све могућности за решавање различитих задатака. На самом часу су коментарисали које решење је њима лакше, логичније, чега су се прво сетили, чега се не би сетили и сл. Настави је, од 27 ученика одељења, присуствовало њих 24, који су учествовали и у евалуацији часа. Наставници су подстакли ученике да напишу своје мишљење о часу и да сами формулишу своје утиске водећи се следећим питањима: Да ли им је час био занимљивији од уобичајених или не? Због чега? Да ли би волели да имају више таквих часова? Шта треба променити да би час био њима интересантнији? и сл. Коментари ученика се могу поделити у 4 групе. У првој групи су 4 коментара (16,67%) у којима се наводи: „Немам коментар”, „Није ми се свидело”, „Не волим ни математику, ни информатику, а кад се саставе то је још горе”. Другу групу чине 3 коментара (12,5%): „Било је интерсантније него на одвојеним часовима, али не знам добро низове”, „Да сам боље знао, више би ми се свидело”. Ове две групе чине ученици који имају тешкоћа у савладавању градива ових предмета. Разликују се, ипак, по томе што у другој групи са интересовањем прихватају интердисциплинарни приступ настави, али свакако увиђају да је недостатак знања проблем. У трећу групу се могу сврстати 4 коментара (16,67%) у којима се каже: „Идеја није лоша, али је напорно пратити ове предмете истовремено”, „час је био напоран, нисам баш најбоље могла да се „пребацујем" са математике на информатику", „Можда је требало да буде мање задатака". Из оваквих коментара се може видети да ученици нису навикли на овакав начин рада, да тешко излазе из познатог шаблона учења и да имају потешкоћа да повезују знање из различитих предмета. Последњу, четврту групу чини 13 коментара (54,16%) у којима је час описан као „занимљив", „инспиративан", „добро осмишљен", да је „занимљивије него на одвојеним часовима"; „Видео сам да постоје везе између два не толико блиска предмета"; „Уочила сам паралелу између градива математике и информатике", и препоруке да се „чешће организују овакви часови" и то не само из ових предмета, већ и „за остале сродне предмете". Већина позитивних коментара указује да ученике можемо заинтересовати оваквом наставом и да им је пријемчива бар као и традиционална настава, на коју су навикли, ако не и више.

Ма колико се нама, као наставницима, чинило да су везе између предмета очигледне, ипак их треба истаћи и експлицитно показати на оваквим часовима.

Библиографија

[1] **Ј. Кечкић.** Математика са збирком задатака за трећи разред средње школе. *Научна књига, Београд*, 1992, 221.

[2] **D. E. Knuth.** Computer Science and Its Relation to Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, vol. 81, 1974, 323-343.

[3] **Ж. Лукић Радојчић.** Интегративна настава у савременом образовном процесу. *Образовна технологија*, 2011, 4, 367-378.

[4] **С. Огњановић.** Математика 4+ . *Круг, Београд*, 2012.

[5] **Ј. Шефер.** Интердисциплинарни тематски приступ настави, Учитељ у пракси. *Републички завод за унапређивање васпитања и образовања Србије, Београд*, 1991, 246-263.

[6] **Ј. Шефер.** Креативне активности у тематској настави. *Институт за педагошка истраживања, Београд*, 2005.

Uloga domaćih zadataka u obrazovanju

Slaviša Radović
Student doktorskih studija, Matematički fakultet, Beograd
e-mail: radovic.slavisa@gmail.com

Miroslav Marić
Matematički fakultet, Beograd, Studentski trg
e-mail: maricm@matf.bg.ac.rs

Apstrakt. Sa razvojem tehnologija koje su primenljive u obrazovanju, nastavnici imaju na raspolaganju veliki izbor programa kojima mogu podstaći učenje i motivaciju učenika. Prikazaćemo istorijski pregled zadavanja domaćih zadataka, programske pakete koji se mogu koristiti u izradi elektronskih domaćih zadataka i predstavićemo edukativnu platformu „eZbirka“ http://ezbirka.math.rs. Platforma eZbirka je razvijena u okviru projekta „Platforma eZbirka kao podrška efikasnosti nastave“, Ministarstva spoljne i unutrašnje trgovine i telekomunikacija Republike Srbije i Društva matematičara Srbije, predstavlja elektronsku zbirku zadataka za starije razrede osnovne škole i veoma uspešno se može upotrebiti kao platforma za domaće zadatke iz matematike.

Ključne reči: eZbirka, domaći zadatak, GeoGebra, interaktivnost, elektronski materijali.

1. Uvod

Velike mogućnosti koje informaciono - komunikacione tehnologije (IKT) pružaju nedovoljno su iskorišćene. Primena ovih tehnologija u prošlosti je bila ograničena tehničkom opremljenošću škola, ali i nedovoljnom obučenošću nastavnika za njihovu primenu. Opremanje škola kabinetima za informatiku i postavljanje računara u učionice, kao i usavršavanje nastavnika za rad na računaru omogućili su veću primenu IKT na časovima. U nastavnim aktivnostima tradicionalne nastave najzastupljeniji je frontalni oblik rada sa naglašenom predavačkom funkcijom nastavnika što ne ostavlja prostora za interakciju učenika niti ostavlja vremena za samostalne aktivnosti učenika u funkciji boljeg izučavanja nastavnih sadržaja [12]. Tradicionalna nastava je razvijala pokornost, poslušnost i zavisnost od autoriteta koji predstavlja nastavnik.

Činjenica je da se danas obrazuje „generacija Z“, koja odrasta u digitalnom okruženju. Upotreba određenih računarskih programa pomaže deci da pamte informacije koje kasnije mogu povezivati. Korišćenjem računara i interneta u nastavi različitih predmeta moguće je unaprediti klasičnu nastavu, podići je na viši nivo. Pokazalo se, na primer, da učenici koji su koristili računar za ispitivanje toka funkcije brže i jednostavnije rešavaju zadatke, bolje razumeju tok funkcije i imaju više uspeha od učenika koji računar nisu koristili u te svrhe [3].

Poslednjih desetak godina, masovnijom upotrebom računara u školama stvoreni su uslovi za kvalitetnije obrazovne tehnologije [12]. Tako učenici imaju mogućnost da samostalno napreduju u ovladavanju nastavnim sadržajima, mogu da ponavljaju sadržaje koji im nisu dovoljno jasni, da dobijaju povratne i dodatne informacije u skladu sa svojim mogućnostima i interesovanjima [10]. U tradicionalnoj nastavi, bez obzira na cilj da učenik bude u centru vaspitanja, dominira frontalni oblik rada sa jednosmernom komunikacijom nastavnika i učenika.

2. Domaći zadaci

Cilj domaćih zadataka je ponavljanje, utvrđivanje, usvajanje nastavnih sadržaja, proširivanje i produbljivanje znanja, odnosno pripremanje za usvajanje novog gradiva i formiranje radnih navika. Domaći zadaci i rad kod kuće su povezani sa radom učenika na času, tako da nastavni čas i domaći rad čine didaktičko jedinstvo. Nastavni proces se ili nastavlja samostalnim domaćim radom, učenjem i izradom zadataka različite vrste i težine ili se njime podstiče i priprema. U opštoj pedagogiji se smatra da je najvažnija didaktička funkcija domaćih zadataka razvijanje sposobnosti za samostalan rad i učenje, kao i razvijanje navika da se uči redovno, planski i usredsređeno [9].

3. Kratka istorija

Istorija rasprava o značaju domaćih zadataka može pružiti osnovu za razvoju i unapređenje tog dela obrazovnog procesa. U Kaliforniji, građanskim zakonom, 1901. godine doneta je uredba zabrane zadavanja domaćih zadataka za učenike mlađe od 15 godina. Zabrana je važila za sve škole. Ova uredba je odraz uverenja da je domaći rad forma „školskog imperijalizma“ [1]. Tenzija oko domaćih zadataka je rasla, Edvard Bok, urednik Ladies Home Journal, se smatra za jednog od glavnih protivnika domaćih zadataka. Svojim člankom iz 1900. godine „Nacionalni zločin ispred Američkih roditelja” [4], Bok je izneo činjenice protiv domaćih zadataka, predstavljajući ih kao varvarski deo obrazovnog sistema.

Argumenti protiv domaćih zadataka su bili fokusirani na problem štetnosti po zdravlje: teške torbe, nedostatak svežeg vazduha, sunca, veći broj sati provedenih sedeći [2]. Do 1930-ih, istican je značaj igre i slobodnog vremena, koje domaći uskraćuje. Domaći zadaci, takođe, smanjuju vreme provedeno u porodičnom okruženju. Rasprave između tradicionalnih i progresivnih didaktičara su se nastavile kako se zemlja spremala za rat, pa i tokom rata.

Obrazovnu politiku je dramatično promenilo lansiranje Sputnika 1957. godine. Amerikanci su bili pobeđeni u „svemirskom programu” od Rusa i tada su škole bile pozvane da urade „nešto”. Smatralo se da je obrazovni sistem kriv za neuspeh koji su Amerikanci doživeli. Domaći zadaci su bili viđeni kao način povećanja znanja i povećanja vremena učenja matematike. Sledeća velika promena obrazovnih ideja bila je tokom šezdesetih, kao reakcija na aktivnosti posle lansiranja Sputnika i povećanja obaveza učenika. Obrazovni časopisi su bili puni opomena o problemima u vezi domaćih zadataka. Krajem šezdesetih, Američka asocijacija za Obrazovna istraživanja i Nacionalna prosvetna asocijacija objavljuju uredbe o ograničenjima domaćih zadataka [5].

Iako se poslednjih 20 godina 20. veka postigao široki konsenzus o vrednosti domaćih zadataka, nisu nestala drugačija mišljenja. Roditelji u nekim zajednicama su imali osećaj da je domaći štetan jer ugrožava porodični život. U Kanadi je 2006. godine postojao predlog da se zabrane domaći zadaci, pokrenuta je nacionalna rasprava i poslat je poziv pokrajinama za ograničavanje obaveza. Australijski savet državnih škola je počeo da razmatra praksu sa idejom izbacivanja domaćih zadataka u nižim razredima. Sadašnje rasprave o domaćim zadacima se mogu posmatrati kao nastavak debata sa početka 20. veka. Međutim, kao društvo ostajemo nesigurni u ulogu domaćih zadataka, potrebne su nam nove ideje, razmišljanja i planovi o svrsi domaćih zadataka u životu učenika.

4. Dobre i loše strane domaćih zadataka

U svojoj knjizi The Battle Over Homework [7], Kuper navodi da je u eksperimentalnim istraživanjima prosečan učenik imao najviše koristi radeći domaće zadatke. Domaći zadaci mogu imati pozitivne uticaje na rad kod kuće. U istraživanjima, Koven i Halam [11] navode da roditelji veruju da ih domaći zadaci informišu o kurikulumu i pružaju im mogućnost da povećaju uključenost u obrazovanje dece. Takođe, povećava se komunikacija između njih i škole. Kuper tvrdi da je domaći rad bitan deo obrazovnog procesa uz pomoć koga roditelj može da bude uključen u obrazovanje svog deteta. Na ovaj način, učenici su svesni povezanosti škole i porodice, a roditeljima je omogućeno da budu informisani o napretku svoje dece [7].

Dobrobiti od domaćih zadataka mogu biti raspoređeni u četiri kategorije: trenutna akademska korist, dugoročna akademska korist, neakademska korist i uključenost roditelja u obrazovanje svoje dece. Najzastupljeniji razlog za davanje domaćih zadataka je trenutna akademska korist, a dok je glavni razlog povećanje vremena koje učenik provodi učeći. Pozitivni efekti do kojih dolazi a koji su vezani za neposredno učenje su: poboljšano zadržavanje znanja, bolje razumevanje gradiva, kritičko razmišljanje, želja za učenjem u slobodno vreme, bolji odnos prema školi i učenju, povećanje radoznalosti i nezavisnosti [5]. Veza između vremena provedenog na izradi domaćih zadataka i postignućima učenika ne može se uzeti kao dokaz da više sati provedenih na izradi domaćih zadataka nužno vodi ka boljim rezultatima u školi.

Svrha obrazovanja i vaspitanja je u razvijanju maksimalnih mogućnosti svakog učenika pripremajući ga za slobodan život u vremenu u kom živi i u civilizaciji u kojoj se kreće. Danas je to sposobnost učenja, razvijanje spremnosti čoveka da permanentno uči i usavršava se. Shvatanje da se obrazovanje završava profesionalnom diplomom dominiralo je u XX veku. Danas to ne važi, diploma treba da posluži kao dokaz kompetencije za dalji rad, usavršavanje i učenje. Ma koliko dobra bila tradicionalna škola, mora se menjati kako bi zadovoljila potrebe svakog pojedinca i društva u celini.

5. Internet sistemi predviđeni za domaće zadatke

Postoji veliki broj kvalitetnih internet sistema za domaće zadatke koji se koriste kako bi podržali nastavni proces. WeBWork[1] je sistem za domaće zadatke i ocenjivanje. Sadrži preko 20000 problema i podržava kurseve algebre, analize, diskretne matematike, verovatnoće i statistike. Više od 100 koledža i srednjih škola koriste taj sistem. On pruža studentima automatsku povratnu informaciju i ocenjuje njihov rad. Problem ovog sistema je sto je on namenjen samo matematici i profesori nemaju mogućnost zadavanja svojih zadataka.

CALM[2] je razvijen na Univerzitetu u Indijani, njegovo korišćenje je besplatno. Razvijen je kao pomoć studentima prve godine koji studiraju hemiju na pomenutom Univerzitetu. Studenti koriste CALM kako bi završili obaveze koje su imali za domaći i kao pripremu za vežbe. Zadatke mogu raditi više puta, do kraja roka, bez negativnih poena za pogrešne odgovore.

Blackboard[3] je platforma namenjena organizaciji kurseva, koristi se na velikom broju Univerziteta. Iako je platforma napredna i pruža puno mogućnosti, studenti zameraju nedostatak povratnih informacija i problematično unošenje odgovora.

1 WeBWork (http://webwork.maa.org/index.html)
2 Computer Assisted Learning Meccethod (http://calm.indiana.edu/)
3 Blackboard (http://www.blackboard.com/)

WebAssign[4] je sistem koji je razvijen na Univerzitetu u Severnoj Karolini za učenje i rešavanje domaćih zadataka iz fizike putem interneta. Danas sadrži brojne kurseve, testove, kvizove, simulacije i ponose se time što imaju materijale iz 150 udžbenika. Nastavnici mogu sami da kreiraju zadatke, a povratna informacija učenicima o tačnosti rešenja je ograničena.

Jedna od glavnih prednosti ovakvih sistema, koji su namenjeni učenicima, je trenutna povratna informacija i automatsko ocenjivanja koje je namenjeno njihovim nastavnicima. Ovakav način pregledanja zadataka, podstiče učenike da domaći zadatak shvate ozbiljno zato što znaju da će njihov rad biti pregledan a ocene poslate nastavniku. Iako ovakvi veb sistemi mogu biti od koristi, oni imaju nedostatke, na primer ne uzimaju u obzir rad učenika već samo rešenje, a nastavnici mogu imati problema da otkriju gde učenici greše.

6. Edukativna platforma eZbirka

eZbirka je veb platforma na kojoj učenici mogu da rade elektronske domaće zadatke (Slika 1). Kada učenik uradi domaći zadatak, potrebno je da upiše svoje ime, elektronsku adresu i šifru nastavnika i da domaći pošalje. Ceo domaći zadatak se snima u bazu podataka i prikazuje se nastavniku kada on pristupi administrativnom delu platforme.

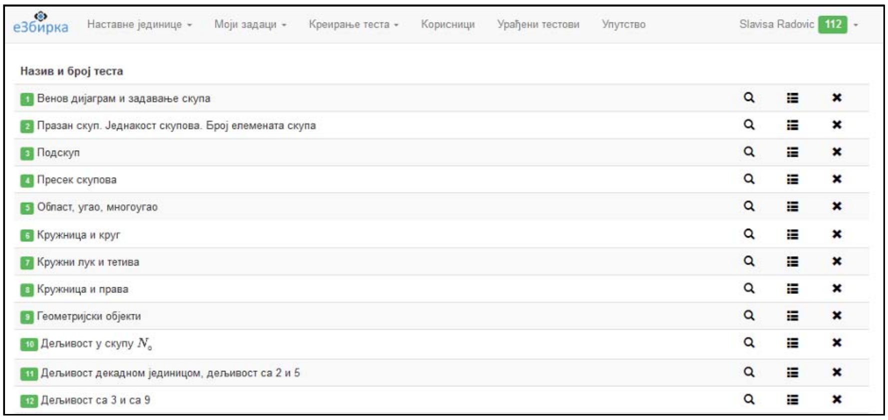
Slika 1. Početni izgled platforme

Osim što treba da reši sve zadatke, učenik ima mogućnost da na kraju domaćeg zadatka ostavi komentar na zadatke, odnosno da napiše da li mu je nešto bilo teško ili nejasno i da li je imao problema u radu. Na ovaj način se nastavnik upoznaje sa problemima svakog učenika posle svakog domaćeg rada. Komentarisanje domaćih zadataka nastavnicima može da posluži kao odgovor na to koliko su učenici u toku sa gradivom, šta više vežbati na časovima, na šta obratiti pažnju u toku dodatnih i dopunskih nastavnih aktivnosti. Nastavnici dobijaju informacije na osnovu kojih mogu da bolje planiraju rad u odeljenju. Ovakav način komunikacije, korišćenjem multimedijalnih programa i aplikacija, učenicima je jako blizak i kao takav im ne predstavlja problem.

Kada se nastavnik odluči koji domaći zadatak učenici treba da urade – potrebno je da učenicima zada zadatak. Učenici, koristeći pretraživač treba da posete http://ezbirka.math.rs i da na početnoj strani u polje za broj testa unesu broj koji im je nastavnik zadao. Svaki učenik dobija zadatke koji imaju identičnu formu i strukturu ali različite podatke, početne informacije i promenljive koje se pojavljuju u tekstu zadatka. Postoji 260000 različitih kombinacija jednog domaćeg zadatka, tako da je verovatnoća da će dva učenika dobiti isti domaći zadatak svedena na minimum. Za učenike koji nemaju mogućnost korišćenja računara i interneta, svaki domaći zadatak nastavnik ima mogućnost da štampa i da učenicima podeli papirnu verziju.

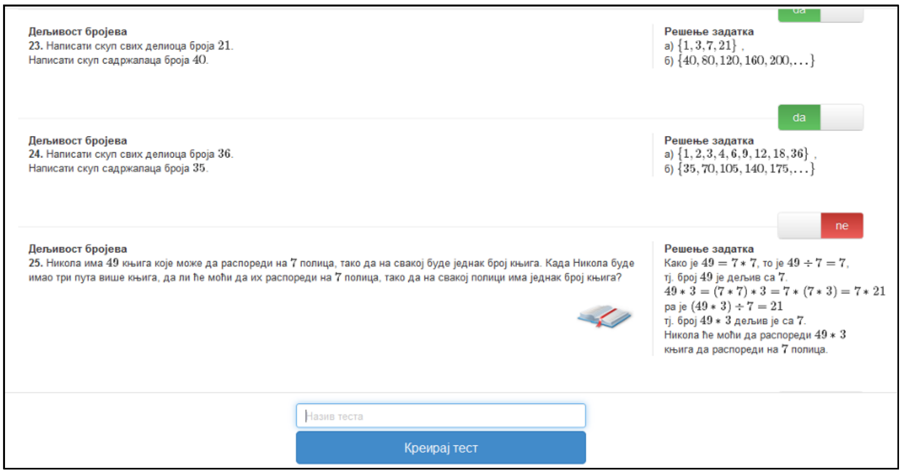
4 WebAssign (http://webassign.net/)

Koristeći eZbirku, učenici imaju mogućnost da rade domaće zadatke koji već postoje i koji su raspoređeni po razredima i po nastavnim oblastima, prateći nastavni plan i program koji je propisalo Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije za nastavni predmet matematika (Slika 2). Nastavnik ne može birati zadatke koji se nalaze u određenom domaćem zadatku, ali u svakom trenutku ima uvid u zadatke koje će učenici dobiti.



Slika 2. Spisak domaćih zadataka za 5. razred osnovne škole

Druga mogućnost koju imaju nastavnici je da sami kreiraju domaći zadatak, tako što će dodati nove zadatke ili će za test birati zadatke koje već postoje na platformi (Slika 3). Ovako napravljen domaći zadatak može poslužiti i kao test ili provera znanja u okviru cele nastavne oblasti. Domaći zadatak koji nastavnik napravi nije vidljiv drugim nastavnicima.



Slika 3. Forma kojom nastavnik može napraviti svoj domaći zadatak.

Koristeći platformu učenici rade isti domaći zadatak ali sa različitim početnim podacima, pa je prepisivanje rešenja zadataka svedeno na minimum. Učenici ostavljaju komentare o zadacima koje rešavaju, što nastavnicima može značajno da olakša planiranje nastave. Nastavnici imaju mogućnost da analiziraju sve odgovore učenika. Na osnovu tačnosti zadataka i učestalosti grešaka imaju mogućnost da zaključe koji zadaci učenicima predstavljaju problem i da planiraju naredne časove matematike.

7. Zaključak

Ono što karakteriše inovativnu, modernu nastavu jesu uslovi u kojima učenik postaje subjekat nastavnog procesa, a njena suštinska usmerenost je ka razvoju mentalnih, posebno misaonih sposobnosti i celovite ličnosti učenika. Razvoj učenika postaje glavni cilj ne samo nastavnika već i učenika. Kada učenik oseti potrebu i sposobnost za usavršavanjem i motiv za samostalni razvoj - nastavni proces za njega dobija jasno određenu svrhu. Uloga domaćih zadataka je da đaci ostanu u kontaktu sa gradivom, i ako je to samo rutina koja se obavlja onda nema efekata. U svakom uzrastu treba da ima saznajni doprinos za dete. Današnja deca brže misle, ali su kraće koncentrisana, impulsivnija su i zahtevnija, pa je pomoć odraslog člana porodice u učenju ponekad neophodna. Dosadašnja iskustva primene platforme eZbirka u nastavi pokazuju da učenici pozitivno reaguju na korišćenje računara za izradu domaćih zadataka i svoje aktivnosti shvataju ozbiljno. Ovakav način pristupa domaćim zadacima omogućava da nastavnik detaljno planira nastavne aktivnosti u zavisnosti od rada učenika tokom izrade domaćih zadataka.

Zahvalnica. *Rad je deo projekta „Platforma eZbirka kao podrška efikasnosti nastave", Ministarstva spoljne i unutrašnje trgovine i telekomunikacija Republike Srbije i Društva matematičara Srbije i projekta 174010, Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije.*

Bibliografija

[1] **B. P. Gill, S. L. Schlossman.** Homework and the elusive voice of parents: Some historical perspectives. *Teachers College Record,* 2003, 105(5), 846-871.

[2] **B. P. Gill, S. L. Schlossman.** The lost cause of homework reform. *American Journal of Education,* 1996, 109(1), 27-62.

[3] **Đ. Takaci, J. Radovanovic.** Uloga racunara u ispitivanju toka funkcija. *Pedagoška stvarnost,* 2006, 1(2), 37-44.

[4] **E. Bok.** First step to change the public schools. *Ladies Home Jurnal,* 1903, 30(1), 3-4.

[5] **E. Kralovec, J. Buell.** The end of homework: How homework disrupts families, overburdens children, and limits learning. *Boston, MA: Beacon Press,* 2000.

[6] **H. Cooper.** Homework for all? *Educational Leadership,* 2001, 58(7), 34-38.

[7] **H. Cooper.** The battle over homework: Common ground for administrators, teachers, and parents. *Thousand Oaks, CA: Corwin Press,* 2007.

[8] **J. Epstein, B. S. Simon, K. C. Salinas.** Involving Parents in Homework in the Middle Grades. *(Research Bulletin No. 18) Baltimore, MD: Johns Hopkins University, Center for Evaluation, Development and Research,* 1997.

[9] **M. Kuka.** Opšta pedagogija i pedagoška psihologija. *Autorsko izdanje, Beograd* 2005.

[10] **M. Maric, M. Maric, S. Radovic.** Izrada i primena didaktickog materijala primenom programskog paketa GeoGebra. *Nauka i tradicija,* 2012, 7(3), 177-186.

[11] **R. Cowan, S. Hallam.** What do we know about homework? *Institute of Education, University of London,* 1999.

[12] **S. Radovic.** Teaching Materials Surface Area of Geometric Figures. *European Journal of Contemporary Education,* 2013, 4(2), 72-80.

Simpozijum MATEMATIKA I PRIMENE, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2013, Vol. IV(1)

Praćenje napretka učenika primenom elektronskih testova za završni ispit

Marija Radojičić
Matematički fakultet
e-mail: marijaradojicic@gmail.com

Slaviša Radović
Matematički fakultet
e-mail: radovic.slavisa@gmail.com

Slađana Jovčić
Matematički fakultet
e-mail: sladjajovcic@gmail.com

Miroslav Marić
Matematički fakultet
e-mail: maricm@matf.bg.ac.rs

Apstrakt. Nakon osnovnoškolskog obrazovanja učenici se susreću sa polaganjem završnog ispita koji ima funkciju svedočanstva o usvojenim i utemeljenim znanjima kao i kompetencijama koje stiču tokom obrazovanja. U ovom radu razmatraju se razni načini za pripremu učenika za polaganje završnog ispita, sa posebnim osvrtom na korišćenje informacionih tehnologija. Posebna pažnja posvećena je internet aplikaciji „Završni ispit", kreiranoj na Matematičkom fakultetu. Osim elektronskih testova, ova aplikacija omogućava nastavnicima i učenicima praćenje napretka učenika tokom procesa učenja kao i kreiranje sopstvenih testova u cilju uvežbavanja određenih tipova zadataka.

Ključne reči: Završni ispit; Informacione tehnologije; Elektronski testovi.

1. Uvod

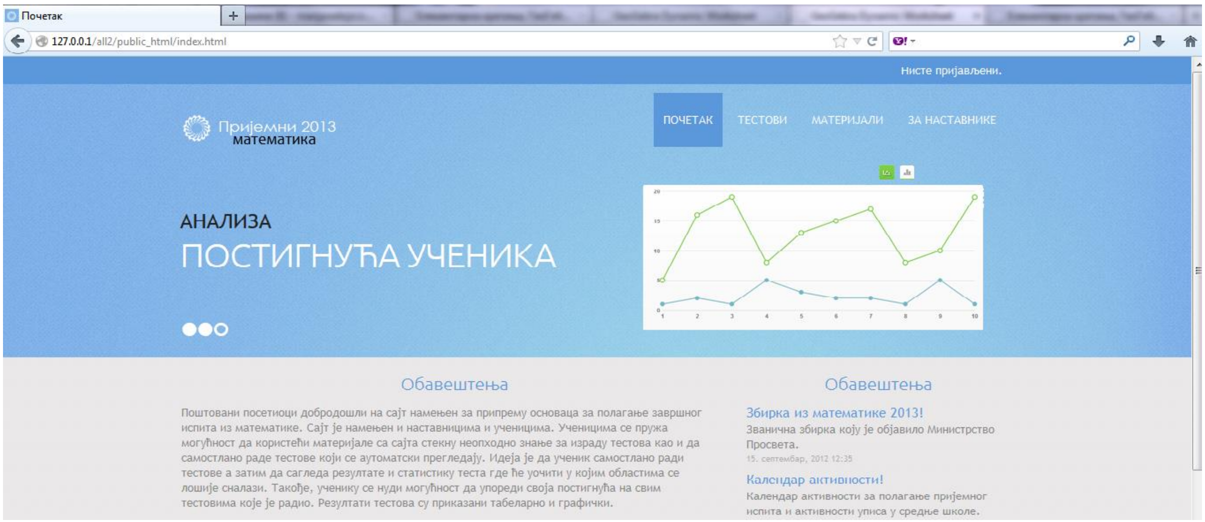
Donošenjem zakona o osnovama obrazovanja i vaspitanja, koji nalaže polaganje male mature, koja se ogleda u polaganju završnog ispita na kraju osnovnoškolskog obrazovanja, učenici se prvi put susreću sa takvom vrstom ispita. Na kraju osnovnoškolskog obrazovanja učenici će biti u obavezi da polažu test iz maternjeg jezika, test iz matematike i test iz nauka koji će sadržati pitanja iz istorije, geografije, biologije, fizike i hemije. Završni ispit ima za cilj da uporedi školska postignuća, dok rezultati treba da budu podsticaj za rad na poboljšanju nastave na nivou pojedinačnih škola, opština, gradova i zemlje u celini. Projekat ministarstva „Završni ispit" postupno se uvodi od školske 2010/2011. godine. Postupnost se ogleda u postepenom povećavanju broja nepoznatih zadataka na testovima, sa namerom da školske 2013/2014., učenici polažu tri navedena testa koja će sadržati potpuno nepoznate zadatke. Uobičajna je praksa da učenici zasnivaju pripremu za završni ispit na zbirkama koje su namenjene pripremi za završni ispit izdatim od strane Ministarstva prosvete. Takođe u gotovo svim osnovnim školama održava se pripremna nastava za polaganje završnog ispita. Zbog malog broja časova, prevelikih grupa, i nedostatka vremena nastavnici su često suočeni sa frontalnim načinom izlaganja. A kao dodatna poteškoća javlja se i nemogućnost nastavnika da isprati napredak svakog učenika i otkrije koje su to oblasti i zadaci koje učenik teško savladava.

2. Elektronski materijali za učenje

Napredak savremenih informacionih tehnologija kao i njihovo prodiranje u sve sfere društva doprineli su razvoju obrazovnih softvera. Međutim njihova primena u školama u Srbiji nije na zavidnom nivou [1]. Razlozi za to mogu biti mnogobrojni, a jedan je svakako i to što je besplatnih obrazovnih softvera dostupnih na srpskom jeziku ima jako malo [5]. Upotreba obrazovnog softvera tj. interaktivnih nastavnih materijala izaziva mnoštvo pozitivnih efekata. Interaktivni nastavni materijali mogu imati značajnu ulogu kod razvijanja učeničke motivacije i istraživačkog duha [2]. Takođe savremeni programski paketi omogućavaju očiglednije i preciznije predstavljanje pojedinih nastavnih sadržaja pa informacione tehnologije mogu svakako biti svrsishodne u nastavnom procesu. Pojedini interaktivni nastavni materijali kreirani su tako da zahtevaju aktivnost učenika. Koristeći tako kreirane materijale učenik postaje aktivan čitalac, prilagođavajući tempo učenja sopstvenim sposobnostima [4]. Kao jedna vrsta interaktivnih nastavnih materijala izdvajaju se elektronski testovi. Osetna je sve češća primena elektronskih testova kako u sferi obrazovanja tako i u drugim oblastima. Zaposleni u svetski poznatim kompanijama često su izloženi obavezi popunjavanja elektronskih anketa, upitnika i testova [6]. Primetno je da ovakav način prikupljanja podataka i testiranja postaje sve prihvatljiviji . Kada je reč o obrazovanju, elektronski testovi se još uvek ne koriste u velikoj meri ali njihova primena postaje sve češća a testovi se sa razvojem informacionih tehnologija unapređuju. Za sada su, uglavnom, aktuelni testovi zatvorenog tipa. Ključna prednost elektronskih testova je što nastavnika oslobađa rutinskih poslova pregledanja, a učenik automatski i blagovremeno dobija rezultate testa. Ovakav vid testova ima i svojih nedostataka. Zapravo, postoje predmeti poput matematike gde je postupak rešavanja zadataka bitan za nastavnika, pa u tom cilju treba unaprediti testove koji će sadržati zadatke otvorenog tipa [7]. Takođe, eleminisanje nastavnika iz procesa pregledanja nosi svoje posledice, tj. nastavnik nema uvid u greške svojih učenika, što ga onemogućava da utvrdi koje su to oblasti i zadaci sa kojima učenik ima poteškoća. Jedno od rešenja je predloženo u u radu „Blended e-assessment: Migrating classical exams to the digital world“ [6], gde je prikazana kombinovana metoda testiranja. Ideja je da učenici rade testove na papiru kao i do sada, potom se skeniraju testovi a nakon toga ih nastavnik pregleda i postaju dostupni učenicima putem interneta. Takođe učenik može da pošalje eventualna pitanja nastavniku i u svakom trenutku pogleda sopstveni test. Ovakvim načinom testiranja otklonjeni su pojedini nedostaci elektronskog testiranja ali je nastavnik i dalje opterećen pregledanjem velikog broja testova.

3. Internet aplikacija završni ispit

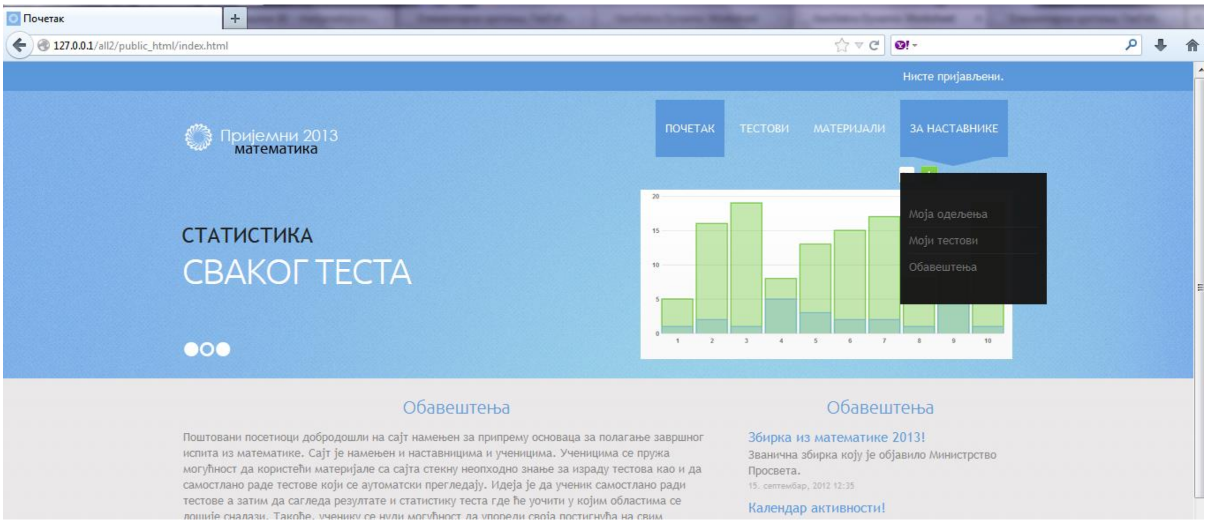
Imajući u vidu prednosti i nedostatke već postojećih elektronskih testova, kreirana je aplikacija „Završni ispit “ koja je namenjena nastavnicima i učenicima na kraju osnovnoškolskog obrazovanja kao pomoć i podrška prilikom pripreme učenika za završni ispit. Primetna je pirsutnost nekolicine obrazovnih softvera koji se bave završnim ispitom, uglavnom zasnovanim na audio-vizuelnom prezentovanju rešenja zadataka iz zbirke za završni ispit. Ključna prednost aplikacije koju smo kreirali je što omogućava nastavnicima praćenje napretka učenika i utvrđivanje pojednih oblasti i zadatka sa kojima učenik ima poteškoća, bez pojedinačnog pregledanja testova. Takođe nastavnik ima uvid u kompletnu statistiku uspešnosti učenika na testovima na nivou odeljenja ili pojedinačnog učenika. Učenik ima mogućnost da radi test koji ima formu kao i test na samom završnom ispitu, a takođe pružena mu je mogućnost i da vežba pojedinu oblast i nivo.



Slika 1. Početna stranica internet aplikacije “Završni ispit”

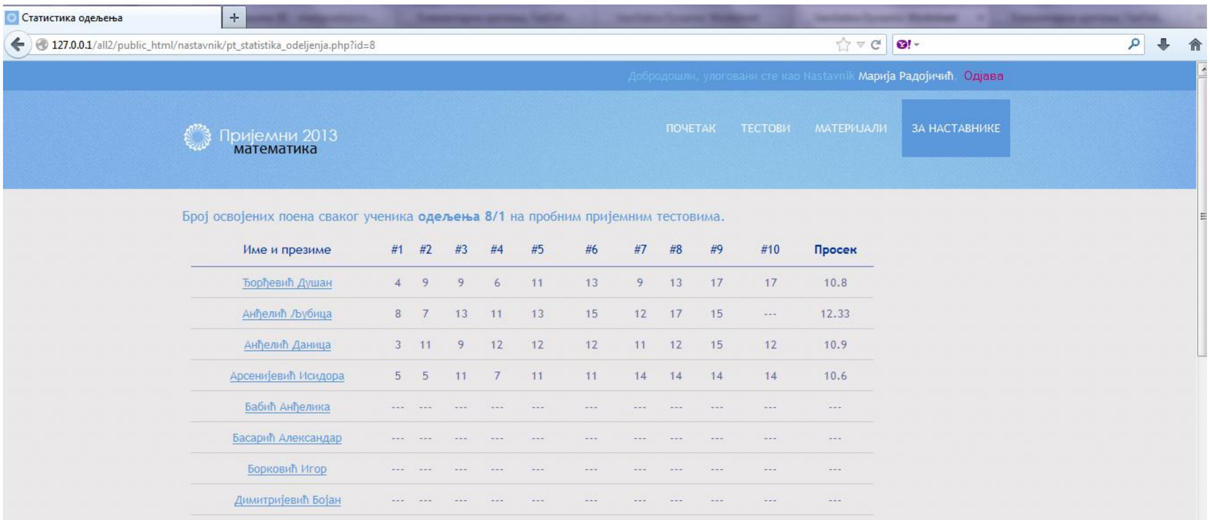
4. Struktura i mogućnosti aplikacije

Internet aplikacija „Završni ispit” nudi korisniku četiri moguća pristupa aplikaciji. Aplikaciji možete pristupiti kao nastavnik, učenik, administrator i student. Ovom prilikom detaljnije će biti opisana prva dva načina pristupa. Prvi, ukoliko aplikaciji pristupate kao nastavnik, neophodno je da kreirate korisnički nalog a potom i da se ulogujete kako biste mogli da koristite mogućnosti aplikacije. Samo kreiranje korisničkog naloga je vrlo jednostavno uz jasna upustva koja prate sam taj proces.



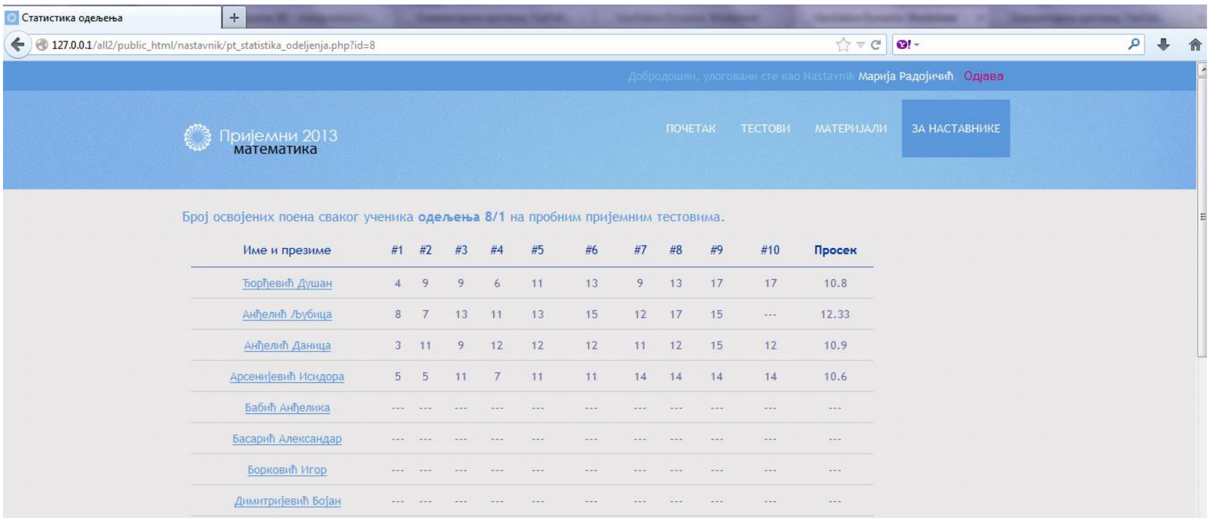
Slika 2. Kreiranje korisničkog naloga i logovanje

Nakon kreiranja korisničkog naloga i logovanja, nastavniku se pruža mogućnost da kreira sopstveno odeljenje i dodaje učenike u to odeljenje. Prilikom dodavanja učenika u odeljenje, automatski se generiše identifikacioni broj učenika koji ima značajnu funkciju. Ideja je da nastavnik svim učenicima prosledi odgovarajuće identifikacione brojeve koji će učenicima služiti za pristup aplikaciji.



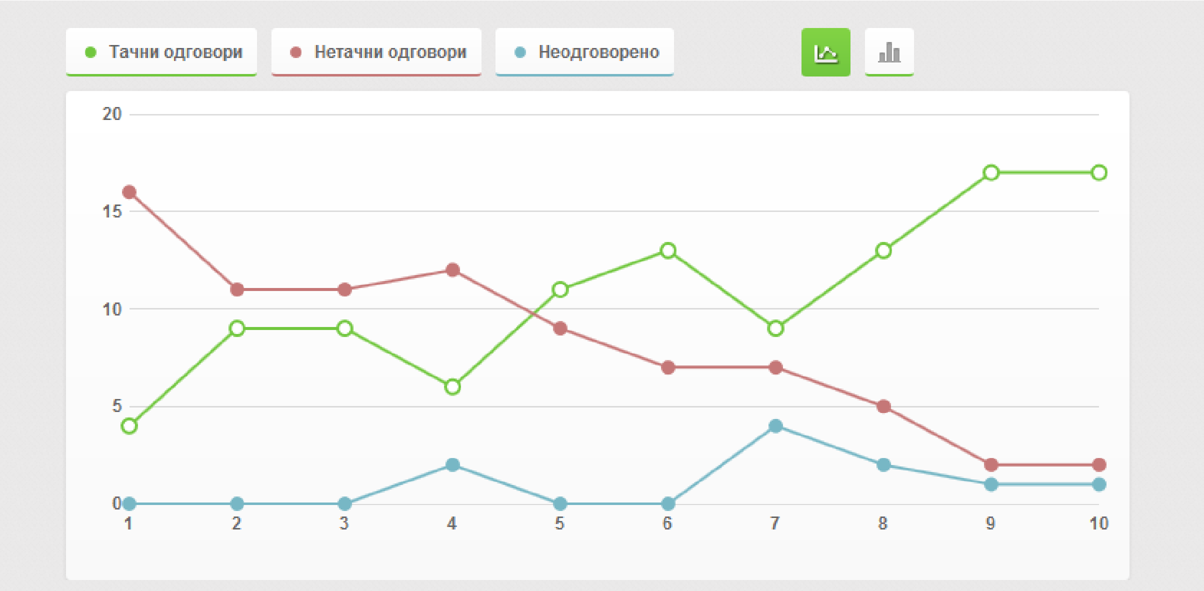
Slika 3. Spisak učenika jednog odeljenja

Učenici će pristupati internet aplikaciji putem identifikacionog broja i raditi testove, dok će se automatski beležiti statistika za te učenike. Nastavnik može pogledati statistiku na nivou odeljenja ili za jednog učenika.



Slika 4. Statistika na nivou jednog odeljenja

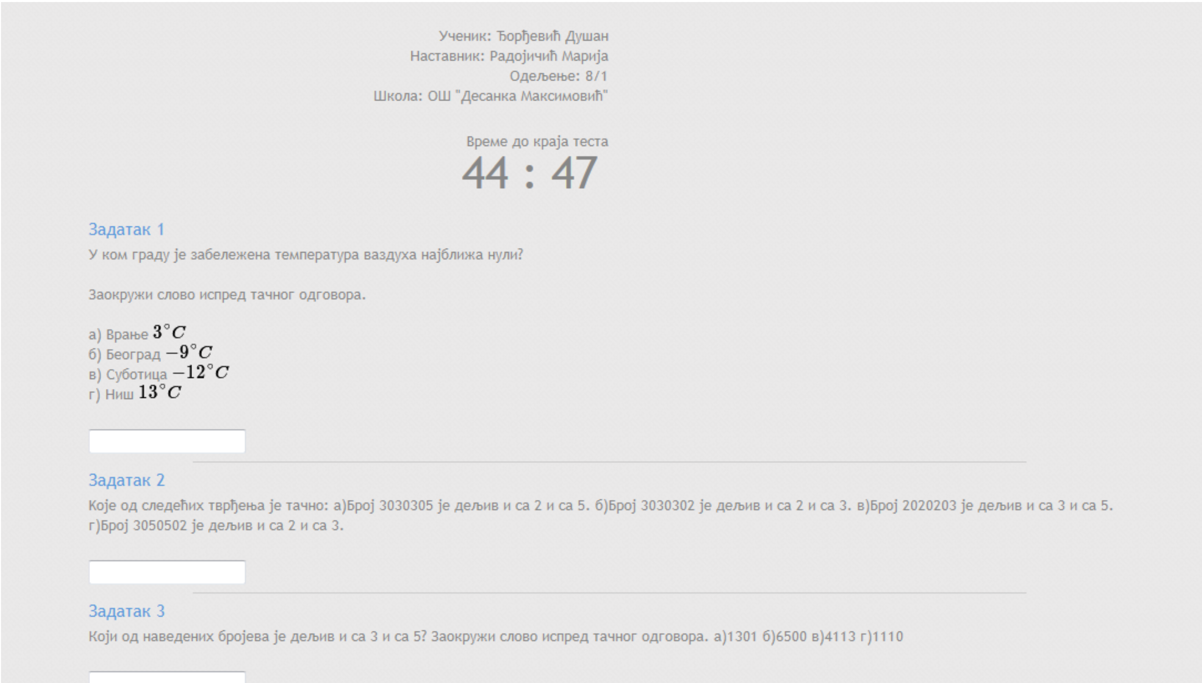
Jedna od ključnih prednosti aplikacije je što nudi korisniku praćenje napretka jednog po jednog učenika. Važno je napomenuti da svaki od testova koje rade učenici, a koji ulaze u statistiku, sadrže pet grupa zadataka iz oblasti: *brojevi i operacije sa njima, algebra i funkcije, geometrija, merenje i obrada podataka,* kao što je učinjeno i u zbirci za završni ispit izdatoj od strane Ministarstva prosvete. Takođe u testovima su zastupljeni zadaci sa sva tri nivoa: osnovnog, srednjeg i naprednog. Svaki od testova koji učenici rade je različit, tj. svaki od zadataka na testu se bira metodom slučajnog izbora iz tačno određene grupe zadataka, što zapravo znači da, recimo, prvi zadatak mora biti izabran iz oblasti brojevi i operacije sa njima-osnovni nivo, dok recimo dvadeseti zadatak mora biti izabran iz grupe zadataka obrada podataka-napredni nivo. Ovo saznanje je bitno za nastavnika jer će moći na osnovu automatskih rezultata testova i bez rutinskog pregledanja svakog testa da zaključi koje su to problematične oblasti i zadaci za svakog učenika.



Slika 5. Statistika za jednog učenika

Još jedna od mogućnosti koja nastavniku stoji na raspolaganju je i kreiranje sopstvenih testova, gde nastavnik ima priliku da kreira sopstveni test sa izabranim zadacima koje će svi učenici raditi. Aplikacija je kreirana tako da iziskuje minimalno vreme i napore nastavnika za kreiranje jednog takvog testa.

Učenici, takođe, imaju nekoliko mogućnosti na raspolaganju, tj. oni mogu raditi neki od testova koji po strukturi podsećaju na testove za završni ispit, potom mogu izabrati da rade neki od testova koje je kreirao njihov nastavnik, zatim da uvežbavaju određenu oblast i nivo ili da urade neki od testova koji je prethodnih godina bio na završnom ispitu. Da bi bila zabeležena statistika za određenog učenika, neophodno je da učenik unese identifikacioni broj. Ukoliko učenik ne unese identifikacioni broj koji je dobio od nastavnika on svakako može raditi testove, ali u tom slučaju statistika za tog učenika neće biti sačuvana.



Slika 6. Izgled testa

5. Zaključak

Rezultati istraživanja na temu zastupljenosti računara u nastavi [3], pokazuju da se u školama računari ne koriste u dovoljnoj meri, kao i učeničku želju i spremnost da učestvuju u ovakvom vidu nastave koja zahteva korišćenje računara i informacionih tehnologija. Jasno je izražena potreba za kreiranjem obrazovnih softvera koji će biti svrsishodni našem obrazovnom sistemu. U tom cilju nastaje nekoliko aplikacija Geogebra centra Beograd, među kojima je i aplikacija „Završni ispit".

Za sada se radi na razvoju aplikacije „Završni ispit" koja se odnosi na završni test iz matematike. Aplikacija je kreirana tako da se može unaprediti da postane funkcionala i za pripremanje učenika za test iz srpskog jezika i nauka. Ono što je prednost pored već pomenute mogućnosti praćenja napretka učenika i utvrđivanja problematičnih oblasti i zadataka za pojedinačnog učenika, je što ovakav vid pripreme može znatno uticati na razvijanje učeničke motivacije, kao i pozitivnog stava prema informacionim tehnologijama u nastavi. Ovakvim pristupom pripremnoj nastavi, eliminisana je mogućnost učenja zadataka napamet ili prepisivanja. Nastavnik dobija sve informacije i saznanja kao da je individualno radio sa učenicima a čitav proces odvija se automatski. Sada je uloga nastavnika izmenjena, jer je nastavnik oslobođen rutinskog pregledanja, a dobija ulogu stratega, organizatora i koordinatora procesa pripremanja. Za sada aplikacija je testirana na malom broju učenika, koji su iskazali vrlo pozitivne reakcije i postigli zavidne rezultate na završnom ispitu. U planu je i izrada interaktivnih nastavnih materijala koji će pratiti svaku od oblasti uz odgovarajuća vežbanja. Cilj je da učenik postane aktivan čitalac materijala koji će mu pomoći da razume nastavne sadržaje i koji će ga motivisati i podsticati na dalji rad.

Naučno-tehnološka revolucija i neprestano napredovanje informacionih tehnologija znatno utiču na razvoj mnogih segmenata društva pa se očekuju inovacije na polju obrazovanja. Neophodno je obezbediti savremeno, svrsishodno i inovativno obrazovanje koje će moći da odgovori potrebama savremenog čoveka. Učenja iz različitih izvora, korišćenjem različitih pristupa kao i pogodnosti informacionih tehnologija svakako su jedan od segmenata koji znatno utiče na unapređivanje nastavnog procesa koji će obezbediti kvalitetnije obrazovanje učenika.

Zahvalnica. *Zahvaljujemo se studentima četvrte godine i master studija, Matematičkog fakulteta, smera Profesor matematike i računarstva koji su učestvovali u izradi pojedinih delova aplikacije.*

Bibliografija

[1] **R. Pećanac, D. Lambić, M. Marić** The influence of the use of educationalsoftware on the effectiveness of communication models in teaching. *The NewEducational Review, Vol.* 26, No. 4. pp 60-70 2011.

[2] **J. Preiner**, Introducing dynamic mathematics software to mathematics teachers: case of GeoGebra. *Salzburg: Faculty of Natural Sciences, Dissertation in Mathematics Education*

[3] **I. Anić, M. Radojičić, A. Arsić, S. Radović, N. Milivojević, J. Milenković, M. Vučićević,** Zastupljenost računara u nastavi, *Simpozijum Matematika i primene. Matematički fakultet, Beograd*

[4] **M. Marić, M. Marić**, Izrada hipertekstualno, interaktivnog nastavnog materijala napravljenog korišćenjem paketa GeoGebra, *Stručno naučni skup u organizaciji Društva za informatiku Srbije, Informatika 2011 - 10. maj 2011. Beograd*

[5] **M. Marić, M. Radojičić, A. Arsić, S. Radović,** GeoGebra- alat za modelovanje idinamičke konstrukcije. *Simpozijum Matematika i primene. Matematički fakultet, Beograd*

[6] **M. Nistal, J. Femandez-Iglesias, J. Gonzales-Tato, F. Mikic-Fonte,** Migrating classical exam to digital World *Computers and Education, 2013.*

[7] **D. Daniel, V. Douglas-Woody ,** E-text book and what costs? Performance and use E-text book v. print text *Computers and Education, 2013.*

Hands in mathematics: Appropriate use of software in teaching and research

Tatjana Stanković
School of electrical engineering "Nikola Tesla", Pančevo
MaksimaGorkog 7, 26000 Pančevo, Serbia
e-mail: t.stankovic12@gmail.com

Nils Dalarsson
Royal Institute of Technology, SE-100 44 Stockholm, Sweden
e-mail: nilsdal@kth.se

Olga Jakšić
Institute of Chemistry, Technology and Metallurgy,
University of Belgrade, Njegoševa 12, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: olga@nanosys.ihtm.bg.ac.rs

Abstract. This paper focuses on the use of mathematical software in teaching and research in the context of enhancing the student comprehension of the subject or solving a specific problem in research. Based on experience, it has been shown in the pro et contra form, that the success in achieving predetermined objectives might be missed unless the software is used as a supplementary aid and not as the only tool. It has also been shown that sometimes one software package may not suffice. Examples are given for the use of computer-generated results in classroom and research, along with tips and tricks for making the most of it. One example is the use of GeoGebra for the analysis of a given function in a classroom with the reflection on the amount of acquired conceptual and procedural knowledge of students. Another example is the use of Wolfram Mathematica and MathWorks MATLAB in research concerning limiting performances of adsorption based plasmonic sensors with reflection on numerical error propagation and the benefits from analytical solutions together with numerical simulations to the analysis of physical phenomena in general.

Keywords: analytical thinking; conceptual knowledge; numerical errors; research methodology; teaching strategies.

1. Introduction

During the last two decades we have experienced major advances in the field of Information Technologies (IT). The development of new technologies and more importantly the wide commercial launch of consumer products based on these technologies in the society (e.g. cellular phones, personal computers, GPS, computer pads etc.) have created a whole new environment in our cities, our working places and our homes. One arena where the new IT-technologies have been widely introduced is the variety of educational institutions ranging from kindergartens to graduate education at the universities. While it is commonly accepted that the IT-tools are used for teaching Mathematics and Technology at the university level, in the public discourse it is much more controversial to introduce the IT-tools (computers, computer pads etc.) for teaching kindergarten children to read and write, but also even to learn elementary Mathematics. Some discussions about teaching children mathematics using IT-tools are presented in [1,2].

The widespread use of IT-technologies in education includes all fields of study and the minor paradox is that the new IT-technologies are sometimes more extensively used in the studies of languages, social sciences or even theology while they are sometimes less extensively used in the process of teaching and learning Mathematics. This constitutes a paradox in a sense that the IT-technologies are originally very strongly related to and based on mathematical sciences.

IT-technologies can be used not only for actual learning but also for the assessment of learning [3]. The (computer-aided) didactical method itself can also be assessed and evaluated. The common point of view for that evaluation is the amount of acquired knowledge and learning objectives but there are situations when students use acquired mathematical concepts and skills well while answering queries during their school time but are unable to apply that knowledge later in real life situations. Many professions rely on solving problems that can be formulated in a mathematical manner; a research-based profession is the best example. It is important then to find out is that ability to apply mathematical background for solving problems in real life situations a matter of talent or it can be learned too? Is there a method suitable for adopting the ability for such knowledge transfer?

This paper addresses the use of software in teaching mathematics, its advantages and weaknesses, from two different aspects: the first one focuses on learning objectives and acquiring knowledge, the second one focuses on the ability to properly apply the acquired/latent knowledge later in practice.

2. IT-tools (GeoGebra) in the Mathematics education

Any didactical method or tool has its place in the process of teaching. For instance, frontal teaching is suitable for introductory lessons contrary to group work and student-centred or hands-in learning which are more suitable for specific topics. So, we address here mathematical software as a didactical tool first. Later, we speculate on ways it could be used in classroom.

There are currently a number of dedicated Computer-based tools (software products) which are targeting the teachers at all levels of compulsory educations (kindergartens, elementary schools, middle schools and high schools) offering the possibilities to facilitate teaching and boost the learning process of Mathematics for young students. This is particularly important since the political leadership and lawmakers in many countries are given information that the Mathematics proficiency of young students in their respective countries is deteriorating and that this process puts the entire countries future competitiveness at risk [4]. Thus the politicians and lawmakers are exercising pressure on the educational system to try the new teaching methods including the use of Computer-based tools, in order to improve the results of Mathematics education in their respective countries.

A logical question arises then – when does the use of computers enhances the process learning and teaching? Different research studies [1] indicate that the effectiveness of using the IT-technologies in the classroom often varies as a consequence of the variety of the available technical equipment in schools (both hardware and software), the variety of teachers IT-skills, the fact that a successful use of technology is not an isolated issue but is affected by the current reforms (curriculum, teacher professional development, ...) etc. Thus in addition to being expensive, it is also difficult to conduct rigorous studies to document the effects of technology deployment. Thus such studies are relatively rare. Another difficulty with such studies is their inherently multidisciplinary nature. In other words: in order to obtain reliable results not only the work by educational scholars but also the work by education-skilled IT-professionals is needed.

Another important factor in Mathematics education is the generally observed anxiety on the part of the students, but unfortunately also on the part of many teachers, about the Mathematics as a subject. Students, and many teachers, feel that their own Mathematics skills are insufficient and that it is very difficult (if not impossible) to really understand Mathematics. In order to get help then the use of IT-tools is considered by some teachers and students as a possible remedy [5]. Some studies [5] recognize that IT-tools in Mathematics education can be applied both in learning of procedural and practical skills and in encouraging conceptual understanding. As the benefits of using IT-tools in teaching mathematics they indicate that students are more active in the learning process, that the technology provides instant feedback and that it may contribute in reduction of anxiety related to Mathematics education. One such IT-based tool is GeoGebra. It can be used to improve conceptual understanding of mathematics.

GeoGebra is an interactive geometry, algebra, and calculus application, intended for teachers and students. Most parts of GeoGebra are free software. GeoGebra is written in Java and thus available for multiple platforms. Many parts of GeoGebra have been ported to HTML5 by using the Google Web Toolkit. The creator of GeoGebra, Markus Hohenwarter, started the project in 2001 at the University of Salzburg, continuing it at Florida Atlantic University (2006–2008), Florida State University (2008–2009), and now at the University of Linz, under the leadership of Michael Borcherds, together with the help of open-source developers and translators all over the world. In Serbia, GeoGebra Centre Belgrade [6] and GeoGebra Institute in Novi Sad [7] contribute to a wider use of GeoGebra and improvement of this software by providing training, support, free teaching materials, by conducting research about the effects of the application of GeoGebra in teaching and by collaborating with other GeoGebra institutes.

During their senior year at the high school, the students are studying the flow and graphs of functions of one variable. Investigation of the flow of given function is a procedural skill and students, depending on their skills, easily and quickly learn the required algorithms. Difficulties occur when the student is required to graphically interpret the derived results. Also, a number of students experience difficulties in the interpretation of function's properties that is based solely on a given graph of the function. In other words they have difficulties to understand the properties of a function from a given graph of the function. At a recent mid-term exam in School of electrical engineering "Nikola Tesla" in Pančevo, in the experimental group for telecommunication technicians (fourth grade, 2012-2013 school year), the students were given a problem where they were required to determine the properties of a function given in both an analytic and graphic form (See Fig. 1). Most students have automatically chosen the algorithmic solution of the problem, and just a few students have tried to read the function's properties using the graph. This example indicates that students have difficulties in determining the properties of functions based on its graph and are therefore reluctant to leave the algorithmic thinking aside.

2.1. Examples: mid-term exam problems

In Fig. 1 a graph of the function $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$ is shown.

Based on the graph determine:

a) domain of the function

b) zeroes of the function (intersection of given function with the x-axis)

c) intersection of the function with the y-axis
d) sign of the function
e) parity of the function
f) asymptotes of the function
g) intervals of monotonicity and extreme values of the function
h) intervals of convexity and concavity and inflection points of the function

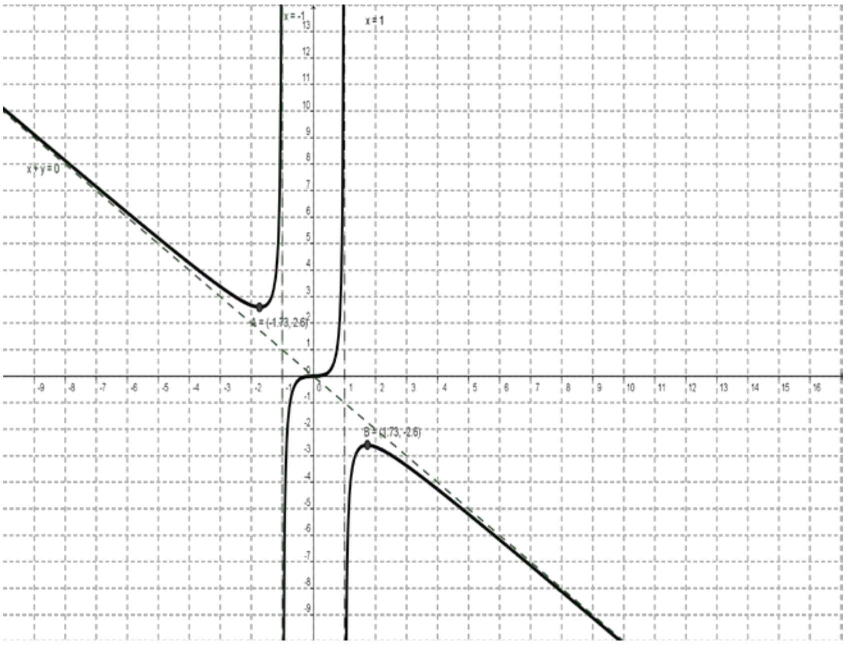


Figure1. The graph of the function created by the use of GeoGebra

Using GeoGebra, it may be possible to direct the students to a different way of thinking. On introductory lessons, when a student still does not know how to draw a graph of a given function, the use of GeoGebra and appropriate teachers' instructions can help her/him to learn how to determine the function's properties by using the given graph of the function (See Fig. 2).

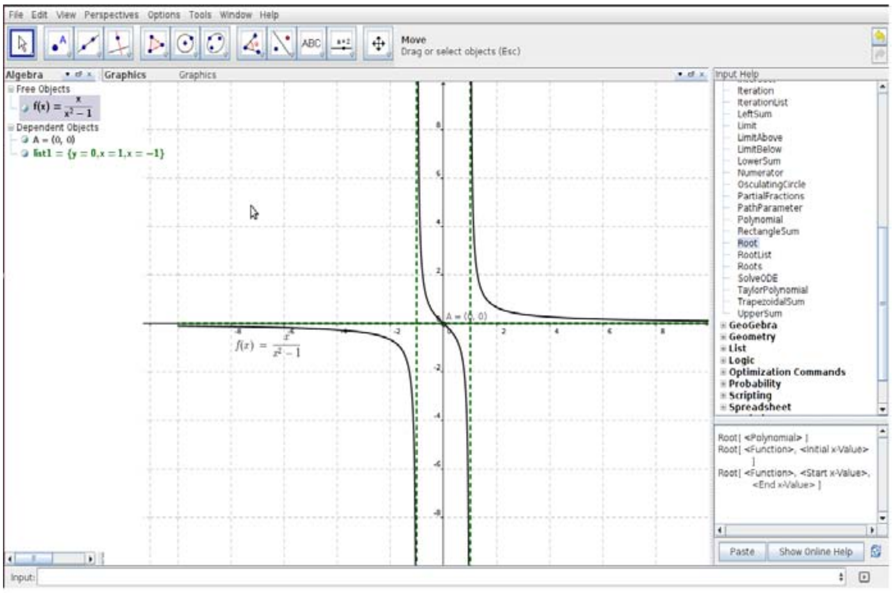


Figure2. The Example of a function plot in GeoGebra used in investigation of function properties

By reducing the time needed for drawing a graph of a function and providing the possibility of plotting any function, GeoGebra provides an opportunity for the student to discuss and grasp various examples of function graphs. It enriches the personal experience related to interpretation of the functions' properties by using their graphs. In this way the student is prepared for the graphical interpretation of the results obtained by investigating the flow function. Later, when plotting of functions' graphs is done by using the analytical investigations of the functions' flows, a student can use GeoGebra for a quick validation of the results.

Although, as indicated above, GeoGebra helps in learning Mathematics, it has some limitations. For example when determining the asymptotes of some irrational and logarithmic functions, we experienced some problems (See Fig.3).

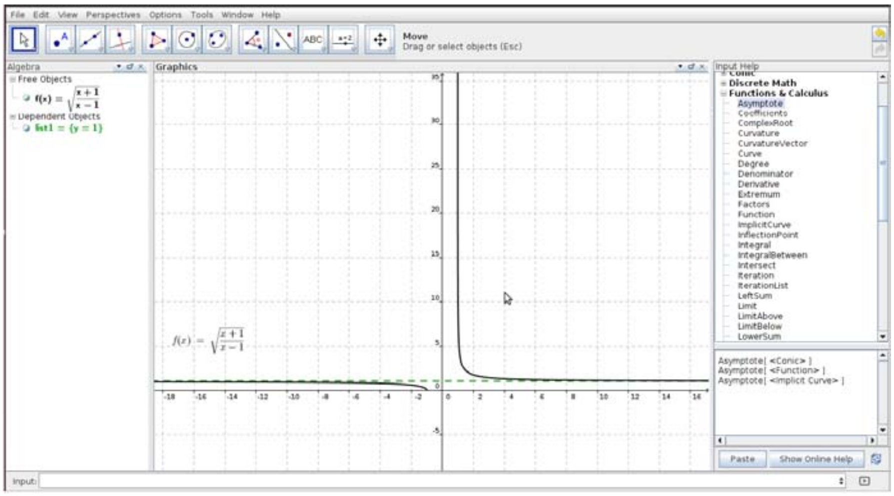


Figure3. The Example of GeoGebras limitations (used version GeoGebra 4.0.19.0)

It is obvious that the given function $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ has a vertical asymptote x=1, but it is not listed in the list of asymptotes and it is not drawn while horizontal asymptote y=1 is listed and drawn.

Therefore, GeoGebra should be used as an aid in Mathematics teaching but we should never forget that its' effects on the learning process will always depend on the creator of teaching.

3. Mathematical software and the knowledge transfer to real life problems

There are many problems that teachers face while doing their job but to motivate the students happens to be the biggest challenge, especially in the environment with omnipresent computer-aided tools. Why would we learn how to find square root of a number if pocket calculator does it? Why would we learn to draw a graph of a function if GeoGebra may do that for us? Why would we learn anything if there is a quicker way to get the result?

The fact is that the more advanced the use of IT is, the greater the knowledge is needed for the interpretation of results and the consequences are more serious. Solving real life problems goes far beyond being thorough, conscientious, meticulous… Although there are many methods to 'put the knowledge into people's heads', pulling the (hopefully lasting) knowledge out (in a proper way!) does not seem to be of such concern. We propose here learning by example and give two examples.

The first example addresses applying the solution to Riccati differential equation in a context of the (computer-aided) plasmonic sensor development and the ability to recognize, correct and prevent the propagation of numerical errors.

The second one addresses solving systems of linear differential equations by the use of symbolic math routines in MATLAB, Mathematica or MAPLE software packages and the ability to apply and transform these solutions into a more convenient form from the practical point of view where the transient or steady-state response of a sensor may be distinctive.

3.1. The propagation of numerical errors in plasmonic sensor research and development

Plasmonic sensor research is performed in many application areas (homeland security, oil industry, food industry, drug industry, environmental protection…) with great expectations referring to extremely high sensitivities (single molecule detection) and fast response (nanosecond dynamics). The operation of these sensors is based on surface sensitive phenomena: adsorbed particles from the surrounding fluid affect surface properties and sensor's read-out, so deterministic time evolution of the number of adsorbed particles is of great interest for the research concerning response time and the steady-state response. Process dynamics in a simple case of mono-component monolayer adsorption in a closed system is modelled by the following second order linear Riccati differential equation.

$$\frac{dN_a}{dt} = k_a\left(N_0 - N_a\right)\left(M - N_a\right) - k_d N_a \tag{1}$$

N_a is the number of adsorbed molecules, N_0 is the initial number of molecules in the system, M is the number of adsorption centres on the sensors active surface area, k_a and k_d are the rates of adsorption and desorption, respectively. Assuming the initial condition zero (at the beginning of the process the surface was clean without any adsorbate molecules), the solution to (1) is [8]

$$N_a\left(t\right) = \frac{\gamma\beta\left(1 - e^{-k_a(\gamma-\beta)t}\right)}{\gamma - \beta e^{-k_a(\gamma-\beta)t}} \tag{2}$$

(2) gives the time evolution of the number of adsorbed molecules where γandβ are calculated according to the following expressions:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{2}\left[\frac{k_d}{k_a} + N_0 + M + \sqrt{\left(\frac{k_d}{k_a} + N_0 + M\right)^2 - 4N_0 M}\right] \\
\beta &= \frac{1}{2}\left[\frac{k_d}{k_a} + N_0 + M - \sqrt{\left(\frac{k_d}{k_a} + N_0 + M\right)^2 - 4N_0 M}\right]
\end{aligned} \tag{3}$$

It is easy to prove that γandβ are real (all constants in (3) are real positive numbers) and that all transient exponential parts in (2) vanish in time leaving β as a stationary state. The typical graph of a time evolution of the number of adsorbed molecules is monotone exponential growth from zero to thatstationary state β. But, for methane adsorption on a golden surface with $M = 6.25 \cdot 10^{14}$ adsorption centres, at the temperature 300 K, with the initial pressure that provides $N_0 = 7.246 \cdot 10^{14}$ gas molecules and with the rate constants being $k_a = 8.39 \cdot 10^{-15}$ and $k_d = 2.988 \cdot 10^{10}$, the result for the stationary state β obtained by using the MATLAB R2012a environment (Windows7 x64, double precision) is **zero**. The procedures for calculating these constants may be found in [8-9]. Zero can hardly be a maximum for the monotone exponential growth of real positive numbers, so what we have here is an obvious example for the propagation of the numerical errors. If the expression for β in (3) is multiplied by

$$\frac{\left(\frac{k_d}{k_a} + N_0 + M\right) + \sqrt{\left(\frac{k_d}{k_a} + N_0 + M\right)^2 - 4N_0 M}}{\left(\frac{k_d}{k_a} + N_0 + M\right) + \sqrt{\left(\frac{k_d}{k_a} + N_0 + M\right)^2 - 4N_0 M}} \tag{4}$$

it remains mathematically the same, but the final result can be transformed to

$$\beta = \frac{1}{2}\left[\frac{4N_0M}{\left(\frac{k_d}{k_a}+N_0+M\right)+\sqrt{\left(\frac{k_d}{k_a}\right)^2+\left(N_0-M\right)^2+2\frac{k_d}{k_a}\left(N_0+M\right)}}\right] \tag{5}$$

The result for β is now $1.27 \cdot 10^5$.This form is more resistant to the propagation of numerical errors. This is not an intuitive step for a young researcher, and even experienced scientists are not always aware of what is to be expected as a result in a new scientific field. It is only the unexpected value that invokes the additional effort in stepping back to examining the even simple solutions and the physically feasible values may not necessarily be the correct ones.

The propagation of numerical errors is not the only danger to the interpretation of results that might be crucial, even life-threatening (like in medical research for instance). Numerical solutions apply to a certain situation specified by a given set of parameters and analytical solution can lead to general conclusions.

3.2. Analytical solutions and numerical simulations

In case the equilibrium constant is low or the initial number of gas molecules greatly exceeds the number of adsorption centres on the surface (for any gas species), the adsorption-desorption process of the mixture of *r* gases is modelled by the following set of equations

$$\frac{dN_{a,i}}{dt} = k_{l,i}\left(M-\sum_{j=1}^{r}N_{a,j}\right)-k_{d,i}N_{a,i} \qquad i=1,\ldots r \tag{6}$$

M is the number of adsorption centres on the surface, $N_{a,i}$ is the number of adsorbed molecules of i_{th} gas species in the mixture of r different gases and $k_{l,i}$ and $k_{d,i}$ are its rates of adsorption and desorption, respectively. The snapshot of the solution to (6) in case of simple bi-analyte mixture, obtained by the use of MathWorks MATLAB's symbolic toolbox is given in Figure 4.

```
>> syms M kl1 kl2 kd1 kd2 y1 y2 Na1 Na2
>> [y1,y2]=dsolve('Dy1==kl1*M-kl1*y1-kl1*y2-kd1*y1','Dy2==kl2*M-kl2*y2-kl2*y2-kd2*y2','y1(0)=0','y2(0)=0')
y1 =
(exp(-t*(kd1 + kl1))*exp(-t*(kd2 + 2*kl2))*(kd2*exp(t*(kd2 + 2*kl2))*((M*kl1^2 + M*kd1*kl1 - M*kd2*kl1 - M*kl1*kl2)/((kd1
+ kl1)*(kd1 - kd2 + kl1 - 2*kl2)) - (M*kl1*exp(kd1*t +kl1*t)*(kd1 - kd2 + kl1 - kl2))/((kd1 + kl1)*(kd1 - kd2 + kl1 - 2*kl2))) -
kd1*exp(t*(kd2 + 2*kl2))*((M*kl1^2 + M*kd1*kl1 - M*kd2*kl1 - M*kl1*kl2)/((kd1 + kl1)*(kd1 - kd2 + kl1 - 2*kl2)) -(M*kl1*
exp(kd1*t + kl1*t)*(kd1 - kd2 + kl1 - kl2))/((kd1 + kl1)*(kd1 - kd2 + kl1 - 2*kl2))) - kl1*exp(t*(kd2 + 2*kl2))*((M*kl1^2 +
M*kd1*kl1 - M*kd2*kl1 - M*kl1*kl2)/((kd1 + kl1)*(kd1 - kd2 + kl1 - 2*kl2)) - (M*kl1*exp(kd1*t + kl1*t)*(kd1 - kd2 + kl1 -
kl2))/((kd1 + kl1)*(kd1 - kd2 + kl1 - 2*kl2))) + 2*kl2*exp(t*(kd2 + 2*kl2))*((M*kl1^2 + M*kd1*kl1 - M*kd2*kl1 - M*kl1
*kl2)/((kd1 + kl1)*(kd1 - kd2 + kl1 - 2*kl2)) - (M*kl1*exp(kd1*t + kl1*t)*(kd1 - kd2 + kl1 - kl2))/((kd1 + kl1)*(kd1 - kd2 + kl1 -
2*kl2))) + kl1*exp(t*(kd1 + kl1))*((M*kl2)/(kd2 + 2*kl2) - (M*kl2*exp(kd2*t)*exp(2*kl2*t))/(kd2 + 2*kl2))))/(kd1 - kd2 + kl1 -
2*kl2)
y2 =
-exp(-t*(kd2 + 2*kl2))*((M*kl2)/(kd2 + 2*kl2) - (M*kl2*exp(kd2*t)*exp(2*kl2*t))/(kd2 + 2*kl2))
```

Figure 4. The Solution for bi-analyte mixture obtained by MATLAB

Biological gas mixtures for aerobic or anaerobic growth consist of three gases, medical gas mixtures for lung diffusion or pulmonary function testing might have up to 5 gases and natural gas standard in oil industry refers to a mixture of 9 gases. From an engineers' point of view, the solution showed in Figure 4 might not be the best choice.

The equations in set (6) are linear: solvable by the use of Laplace transform. So, we try a different approach. After the Laplace transform, the initial set of differential equations in time domain transforms into a set of algebraic equations in a complex domain where the independent variable here is denoted with w.

$$\mathrm{wN}_{\mathrm{a,i}} = k_{l,i}\left(M - \sum_{j=1}^{r}\mathrm{N}_{\mathrm{a,j}}\right) - k_{d,i}\mathrm{N}_{\mathrm{a,i}} \qquad i = 1,\ldots r \tag{7}$$

After solving the system (7) in complex domain, by the use of the inverse Laplace transformation one gets the expressions for the time evolutions of $N_{a,i}$ in time domain. The snapshot of the solution to (7) in case of simple bi-analyte mixture, obtained by the use of MathWorks MATLAB's symbolic toolbox is given in Figure 5.

```
>> syms M kl1 kl2 kd1 kd2 y1 y2 Na1 Na2 w
>> [Na1,Na2]=solve('w*Na1=kl1*(M/w-Na1-Na2)-kd1*Na1','w*Na2=kl2*(M/w-Na1-Na2)-kd2*Na2',Na1,Na2)
Na1 =
(M*kl1*(kd2 + w))/(w*(kd1*kd2 + kd1*kl2 + kd2*kl1 + kd1*w + kd2*w + kl1*w + kl2*w + w^2))
Na2 =
(M*kl2*(kd1 + w))/(w*(kd1*kd2 + kd1*kl2 + kd2*kl1 + kd1*w + kd2*w + kl1*w + kl2*w + w^2))
>> ilaplace(Na1,w)
ans =
(M*kd2*kl1)/(kd1*kd2 + kd1*kl2 + kd2*kl1) - (M*kd2*kl1*exp(-w*(kd1/2 + kd2/2 + kl1/2 + kl2/2))*(cosh(w*(kd1^2/4 - (kd1
*kd2)/2 + (kd1*kl1)/2 - (kd1*kl2)/2 + kd2^2/4 - (kd2*kl1)/2 + (kd2*kl2)/2 + kl1^2/4 + (kl1*kl2)/2 + kl2^2/4)^(1/2)) - (sinh(w*(kd1
^2/4 - (kd1*kd2)/2 + (kd1*kl1)/2 - (kd1*kl2)/2 + kd2^2/4 - (kd2*kl1)/2 + (kd2*kl2)/2 + kl1^2/4 + (kl1*kl2)/2 + kl2^
2/4)^(1/2))*(kd1/2 + kd2/2 + kl1/2 + kl2/2 - (M*kl1*kd2^2 + M*kl1*kl2*kd2 - M*kd1*kl1*kl2)/(M*kd2*kl1)))/(kd1^2/4 - (kd1
*kd2)/2 + (kd1*kl1)/2 - (kd1*kl2)/2 + kd2^2/4 - (kd2*kl1)/2 + (kd2*kl2)/2 + kl1^2/4 + (kl1*kl2)/2 + kl2^2/4)^(1/2)))/(kd1*kd2 +
kd1*kl2 + kd2*kl1)
>> ilaplace(Na2,w)
ans =
(M*kd1*kl2)/(kd1*kd2 + kd1*kl2 + kd2*kl1) - (M*kd1*kl2*exp(-w*(kd1/2 + kd2/2 + kl1/2 + kl2/2))*(cosh(w*(kd1^2/4 - (kd1
*kd2)/2 + (kd1*kl1)/2 - (kd1*kl2)/2 + kd2^2/4 - (kd2*kl1)/2 + (kd2*kl2)/2 + kl1^2/4 + (kl1*kl2)/2 + kl2^2/4)^(1/2)) - (sinh(w*(kd1
^2/4 - (kd1*kd2)/2 + (kd1*kl1)/2 - (kd1*kl2)/2 + kd2^2/4 - (kd2*kl1)/2 + (kd2*kl2)/2 + kl1^2/4 + (kl1*kl2)/2 + kl2^
2/4)^(1/2))*(kd1/2 + kd2/2 + kl1/2 + kl2/2 - (M*kl2*kd1^2 + M*kl1*kl2*kd1 - M*kd2*kl1*kl2)/(M*kd1*kl2)))/(kd1^2/4 - (kd1
*kd2)/2 + (kd1*kl1)/2 - (kd1*kl2)/2 + kd2^2/4 - (kd2*kl1)/2 + (kd2*kl2)/2 + kl1^2/4 + (kl1*kl2)/2 + kl2^2/4)^(1/2)))/(kd1*kd2 +
kd1*kl2 + kd2*kl1)
```

Figure 5. The use of Laplace transform in MATLAB in case of bi-analyte mixture for bi-analyte mixture

Figure 6 shows time evolutions obtained by using the solutions from figure 5. The number of adsorbed molecules in figure 6 is calculated for: methane alone at the pressure of 1 Pa (blue line), benzene alone at the pressure of 0.1 mPa (red line), methane component in their bi-analyte mixture (green circles), benzene component in their bi-analyte mixture (magenta squares) and their bi-analyte mixture (black dots).

The results from figure 6 are unusable, because they do not exist for realistic times (times greater than 1 ns). Knowing the importance of roots for the Laplace transform, we discard the MATLAB solution for the system (7), solve the system (7) by hand and, by letting MATLAB do the inverse Laplace transform. The result of this procedure is shown in Figure 7.

Implemented in Wolfram Mathematica 9 the same procedure gives the same result(Figure 8).

This result is quite satisfactory in many ways. Figure 9 shows graph with full range of successfully calculated data (contrary to figure 6). Mathematically, the solutions from figure 7 and figure 5 are equivalent, but hyperbolic functions from the solution in figure 5 are now transformed into exponential functions in figure 7, which means the propagation of numerical errors is less probable to occur.

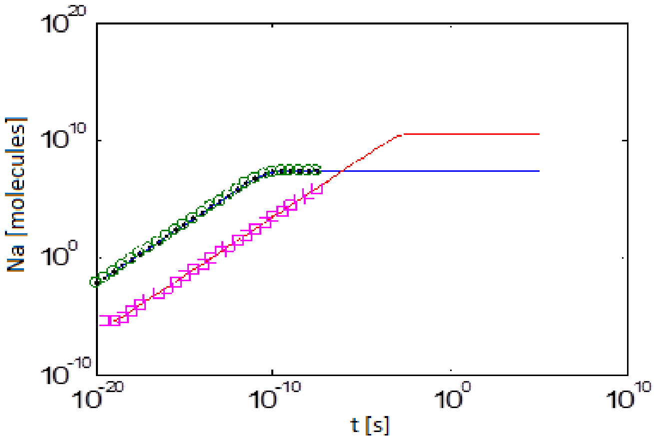


Figure 6. The results for methane-benzene gas mixture, procedure from Figure 5

```
>> syms  M kl1  kl2  kd1  kd2  y1  y2  Na1  Na2  z1  z2
>> Na1=(kl1*M*(s+kd2))/(s*(s-z1)*(s-z2));
>> Na2=(kl2*M*(s+kd1))/(s*(s-z1)*(s-z2));
>> ilaplace(Na1)
ans =
(exp(t*z1)*(M*kd2*kl1  + M*kl1*z1))/(z1*(z1  - z2)) - (exp(t*z2)*(M*kd2*kl1  + M*kl1*z2))/(z2*(z1  - z2)) + (M*kd2*kl1)/(z1*z2)
>> ilaplace(Na2)
ans =
(exp(t*z1)*(M*kd1*kl2  + M*kl2*z1))/(z1*(z1  - z2)) - (exp(t*z2)*(M*kd1*kl2  + M*kl2*z2))/(z2*(z1  - z2)) + (M*kd1*kl2)/(z1*z2)
```

Figure 7. Bi-analyte mixture, Laplace transform with roots in MATLAB

```
InverseLaplaceTransform[(kl2*M*(s+kd1))/(s*(s-z1)*(s-z2)), s, t]
```

$$kl2\,M\left(\frac{e^{t\,z1}\,(kd1+z1)}{z1\,(z1-z2)}+\frac{kd1}{z1\,z2}+\frac{e^{t\,z2}\,(-kd1-z2)}{(z1-z2)\,z2}\right)$$

Figure 8. Bi-analyte mixture, part of solution obtained from Wolfram Mathematica

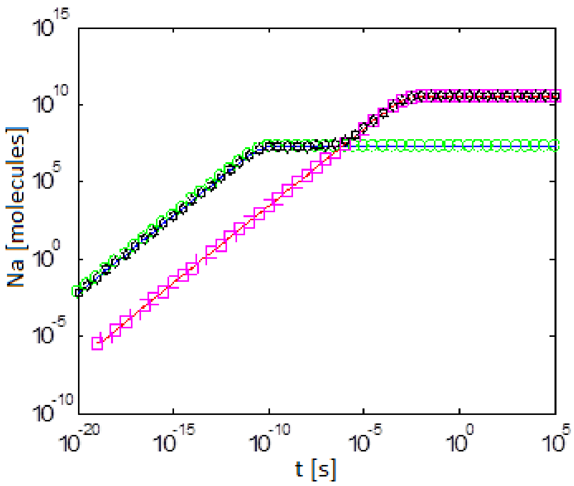


Figure 9. Results for methane-benzene gas mixture, procedure from Figure 7

From an engineer's point of view, expressions with exponential functions are more useful: it is easy to analyse the solution with reflection on roots z_1 and z_2 ('are roots always real positive?' or 'can adsorption-desorption process become oscillatory?'), one can see the transients (the evanescent exponential solutions), the steady-state (stationary) response; one can analyse the impact of rate constants on the temporal response or steady-state of a sensor, the impact of physical parameters like pressure and temperature on different constants ...

The fact is that the procedure in Fig. 5 would give the full scale result like in Fig 7 if only hyperbolic functions would be transformed into exponential form, but simplification in MATLAB does not make that. Mathematica did give these solutions with exponential terms instead of hyperbolic. Analytical solutions are best for drawing general conclusions but in some situations in contemporary science, numerical simulations are the only possible yet.

The cultivation of critical thinking and analytical approach towards the result comprehension or interpretation are not usual learning objectives but they have great practical value for student ability to actualize hers/his knowledge so we propose the use of these examples in teaching corresponding mathematical lessons.

4. Conclusion

This paper addresses different methods of teaching mathematics in an IT environment from two different aspects: first aspect referring to enhancing the student comprehension, the second aspect referring to knowledge transfer to solving problems in real life situations whether in an under/post graduate research or in future professional life.

The advantages and disadvantages of the use of software in various fields (science, education) described in this paper indicate the need for educating students in this direction. Students should be encouraged to use the software in learning process, but they should also be trained to recognize the advantages and disadvantages of particular software packages and based on the tasks' needs to choose the one that will give them the best solution of the problem. In this way, they develop the ability for proper selection of software and the capability of evaluation the results` validity that are obtained by applying certain software.

Acknowledgements. *This work was partly funded by Serbian Ministry of Education and Science through the projects TR 32008. Special thanks belong to Piroška Lukić-Onodi, Principal of School of Electrical Engineering "Nikola Tesla" in Pančevo for encouraging the innovations in teaching.*

References

[1] **J.Roschelle, R. Pea, C. Hoadley, D. Gordin, B. Means.** Changing How and What Children Learn in School with Computer-Based Technologies.*The Future of Children: Children and Computer Technology*, 2000, 10(2), 76-101.
[2] **D. Clements, J. Sarama, A. DiBiase.** Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education.*Lawrence Erlbaum Associates*,2004.
[3] **C. Dassa, J. Vazquez-Abad, D. Ajar.** Formative Assessment in a Classroom Setting: From Practice to Computer Innovations. *Alberta Journal of Educational Research*, 1993, 39, p. 116.
[4] **I. Mullis, M. Martin, E. Gonzalez, S. Chrostowski.** TIMSS 2003 International Mathematics Report Findings From IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades. *TIMSS & PIRLS International Study Centre, Lynch School of Education, Boston College*, 2004.
[5] **Y. Sun, L. Pyzdrowski.** Using Technology as a Tool to Reduce Mathematics Anxiety. *The Journal of Human Resource and Adult Learning*, 2009, 5(2),38-44.
[6] GeoGebra Centar Beograd. *http://geogebra.matf.bg.ac.rs/index.html*
[7] GeoGebra Institute of Novi Sad, Serbia. *http://www.geogebra.rs/*
[8] **O. Jakšić, Ž. Čupić, Z. Jakšić, D. Randjelović, Lj. Kolar-Anić**. Monolayer Gas Adsorption in Plasmonic Sensors: Comparative Analysis of Kinetic Models. *Russian Journal of Physical Chemistry*, 2013, 87(13), 2134–2139
[9] **O. Jakšić, D. Randjelović, Z. Jakšić, Ž. Čupić, Lj. Kolar-Anić.** Plasmonic Sensors in Multi-Analyte environment: rate constants and transient analysis. *Chemical Engineering Research and Design*, 2014, 92, 91–101.

Exe апликација - креирање наставних материјала из математике

Наташа Трбојевић
ОШ „Коста Абрашевић”
e-mail: trbojevic.natasa@gmail.com

Апстракт. Електронско учење у Србији последњих година постаје све присутније и сврсисходније, како кроз употребу електронских наставних средстава, тако и кроз специфичне облике хибридне наставе која комбинује класичну и онлајн наставу. Многима се чини да је веома близу тренутак када ће се наставни процес све више одвијати уз употребу различитих програма који се у потпуности реализују у електронском окружењу. У основном образовању хибридна настава тренутно представља неисцрпну могућност да се истовремено искористе добре стране класичне наставе, али и предности различитих система за управљање учењем и електронких наставних материјала. Циљ овог рада је да представи један од бољих алата за креирање електронских наставних материјала - програм *eXeLearning* и прикаже предности овако насталих материјала у савременом наставном процесу. Описивањем начина инсталирања овог програма, његових основних функција и давањем конкретног примера за обраду једне наставне теме, препоручује се коришћење овог програма свим наставницима математике, чак и онима са основним нивоом обучености за коришћење рачунара.

Кључне речи: електронски наставни материјали; *exeLearning*; математика.

1. Увод

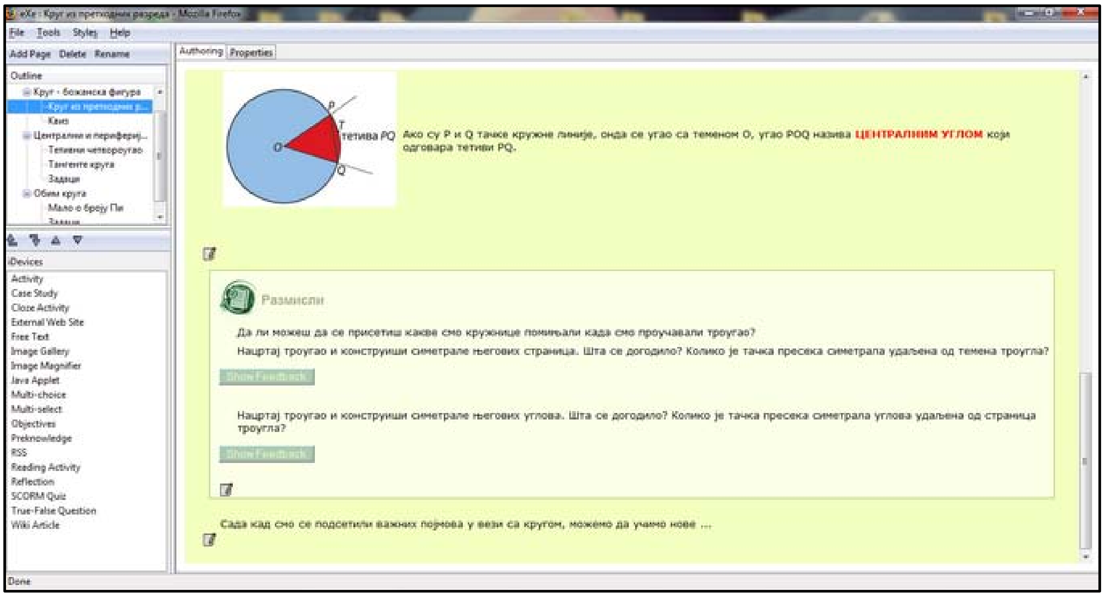
Под наставним материјалима подразумевамо све материјале које наставник користи у настави, било да их креира сам или користи туђе. До скора су се у нашим школама могли срести искључиво штампани наставни материјали. Међутим, са развојем информационих технологија, а пре свега Интернета, све чешће су у употреби електронски наставни материјали. Томе је значајно допринела и све боља опремљеност школа рачунарима. Наставни материјали, било да су штампани или електронски, користе се са циљем да ученике заинтересују за тему, подстакну их на размишљање, критичко промишљање и активан приступ учењу. Да би се све то постигло, потребно је да се задовољи одговарајућа форма, која има јасну логичку структуру, и садржаје представља на педагошки прихватљив и занимљив начин. Тако је, при креирању наставних материјала, потребно издвојити целине у којима истичемо циљеве које желимо да постигнемо, јасно дефинисати активности које ће ученици обављати, а важно је понудити и начине на које ће ученици моћи да сами провере у којој су мери савладали градиво. Садржаје је потребно представљати на интересантан начин, истичући кључне појмове, умећући питања и активности који ће обезбедити одређену динамику и пробудити заинтересованост код ученика, али уједно и обезбедити да до закључака долазе сами, [3].

Развојем Интернета настали су многобројни системи за управљање учењем (енг. learning menagement sistem - *LMS*) који су омогућили да се знањем, као важним људским ресурсом, управља на нов начин. Један од најзаступљенијих система код нас је *LMS MOODLE*. Он је, захваљујући својим разноврсним ресурсима и алатима, као и једноставном коришћењу и администрирању, све присутнији. Важна карактеристика система за управљање учењем јесте да наставни садржаји који се користе морају бити у дигиталном облику. Да би ови материјали били компатибилни са различитим платформама за учење, потребна је њихова стандардизација. Један од најраспрострањенијих пакета који омогућава овакву компатибилност је *SCORM*[1] пакет, а оно што он обезбеђује јесу материјали које карактеришу:

- Доступност - материјал је описан кључним речима, па се може лакше претраживати;
- Економичност - није потребно штампање материјала, употреба папира...
- Преносивост - материјал је могуће користити на различитим платформама;
- Поновна употребљивост - материјали се лако преуређују, мењају и поново користе;
- Трајност - материјал се може користити без обзира на тренутну верзију софтвера, [1].

2. *eXeLearning* - софтвер за креирање електронских материјала

Међу многим алатима за израду електронских материјала изваја се *eXeLearning*. Реч је о једноставном и бесплатном алату отвореног кода, који омогућава наставницима да жељене садржаје представе на педагошки прихватљив и интересантан начин, а без нужног познавања програмирања.



Слика 1. Радна површина алата *eXeLearning*

Наиме, он садржи готове шаблоне назване *„instructional device“* који су педагошки прилагођени и нуде различите могућности за представљање наставних садржаја: унос фотографија, разноврсну обраду текста, убацивање линкова, тестирање... Важно је напоменути да је у питању *WYSIWYG*[2] едитор који подразумева да је садржај током креирања сличан његовом коначном приказу,[2]. Креирани материјали су атрактивни, *SCORM* компатибилни, али истовремено могу да се извезу у друге формате (*HTML*, *IMS...*) и тако поставе на Интернет или користе офлајн.

2.1. Преузимање и инсталација

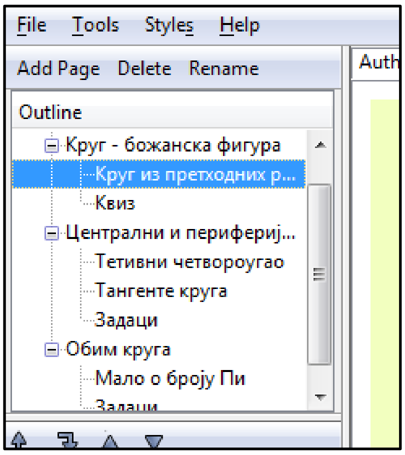
eXeLearning је бесплатан програм отвореног кода. Може се инсталирати на *Windows*, *Mac OS* и *Linux* системима, а инсталирање почиње преузимањем одговарајућег пакета са званичне Интернет странице (http://exelearning.org). На овој страници налазе се и информације о

[1] *SCORM* - **S**harable **C**ourseware **O**bject **R**eference **M**odel
[2] WYSIWYG - **W**hat **Y**ou **S**ee **I**s **W**hat **Y**ou **G**et, [2]

различитим верзијама овог програма које се тренутно развијају у свету, као и пројектима који се реализују помоћу овог алата. Инсталација је једноставна и брза.

2.2. Рад са *eXeLearning* алатом

eXeLearning је дизајниран тако да обезбеди корисницима флексибилност у креирању материјала. Ако, на пример, желимо да најпре скицирамо структуру садржаја, а касније да је попуњавамо детаљима, имамо могућност да направимо организацију страна, при чему нам је омогућено да изградимо жељену хијерархију, али и таксономију (нпр. тема - секције - јединица, или књиге - поглавља - белешке). Стране је могуће додавати, брисати, преименовати, али и премештати из једног у други фајл.

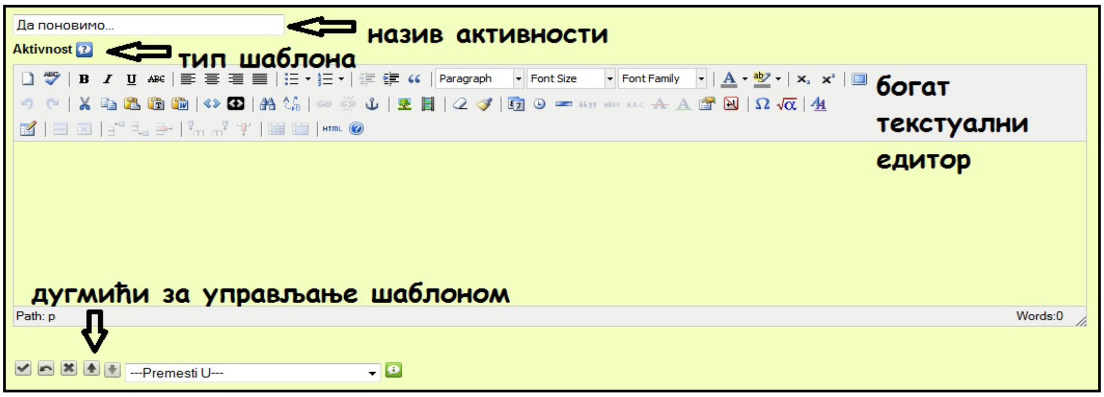


Слика 2. Хијерархија страница

Садржај се на странама организује помоћу шаблона који омогућавају да се на занимљив начин представи одређена тема. Постоји могућност да се изведе и проблемска настава, да ученици истражују, испитују и сами долазе до закључака. Помоћу шаблона се могу истаћи циљеви часа, очекивани исходи, направити осврт на већ усвојена знања, направити галерија фотографија, уметнути фотографија, текст, видео, линк, направити провера усвојених садржаја помоћу квиз питања различитог типа и тако даље. Шаблоне је могуће модификовати, преименовати и превести одређена текст поља на језик који користите. Кориснику је такође омогућено да направи нове шаблоне за активност која му је потребна, [5].

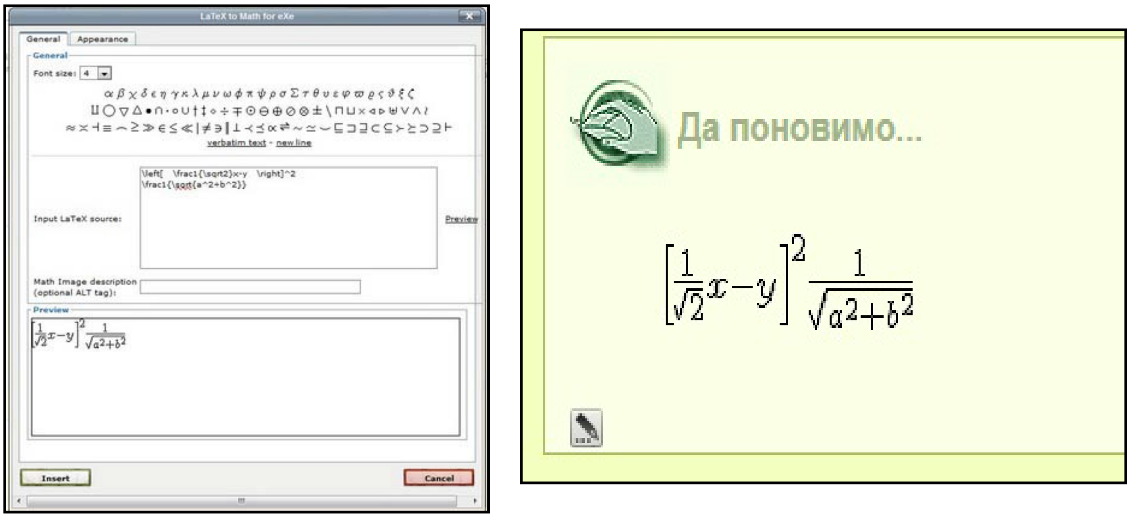
Слика 3. Постојећи шаблони (лево) и креирање нових (десно)

Када одлучимо који ћемо шаблон користити, приступамо креирању садржаја. Шаблони поседују богат текстуални едитор, који нуди стандардне могућности за уређивање текста. Могуће је истаћи одређене речи подебљавањем, обојити текст, уметнути табелу која се затим може лако форматирати, уметнути фотографију, видео запис, линк... Шаблонима се може управљати на једноставан начин, могу се померати, премештати са једне на другу страну, поново уређивати и брисати.



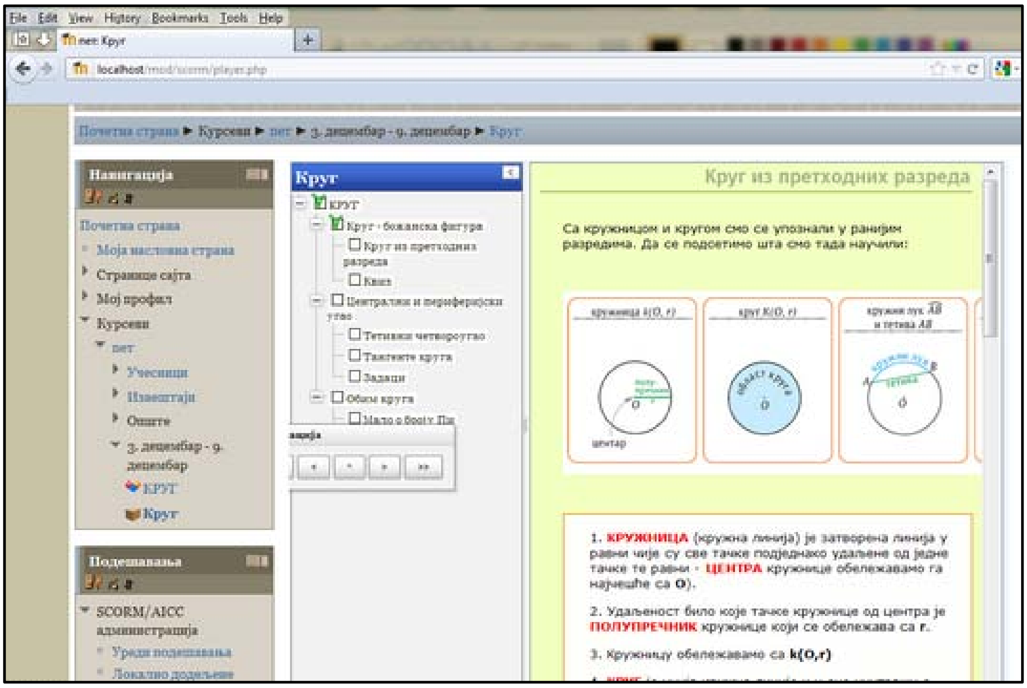
Слика 4. Уређивање шаблона

За математичаре је нарочито драгоцена могућност једноставног уметања формула помоћу *LaTeX*-а. Кликом на одговарајућу икону отвориће се картица на којој се, у одговарајућем простору, може налепити кôд формуле коју желимо да прикажемо. Истовремено нам се пружа могућност да видимо како ће формула изгледати у коначном приказу и направимо исправке уколико су потребне.



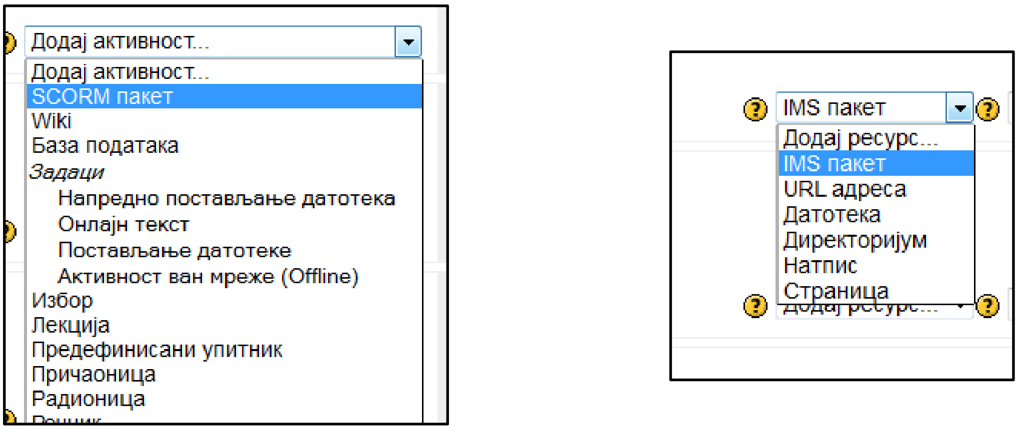
Слика 5. Убацивање математичке формуле и њен коначан приказ

Креирани материјал могуће је снимити као фајл са екстензијом *.elp* што омогућава поновно отварање, мењање и дорађивање. Важна карактеристика овог програма јесте да се креирани садржај може извести у неки од понуђених формата, као зип фајл за *LMS* системе који нуде могућност одпакивања, или једну веб страницу без обзира на број креираних у *eXe* оквиру.



Слика 6. Лекција у Мудлу

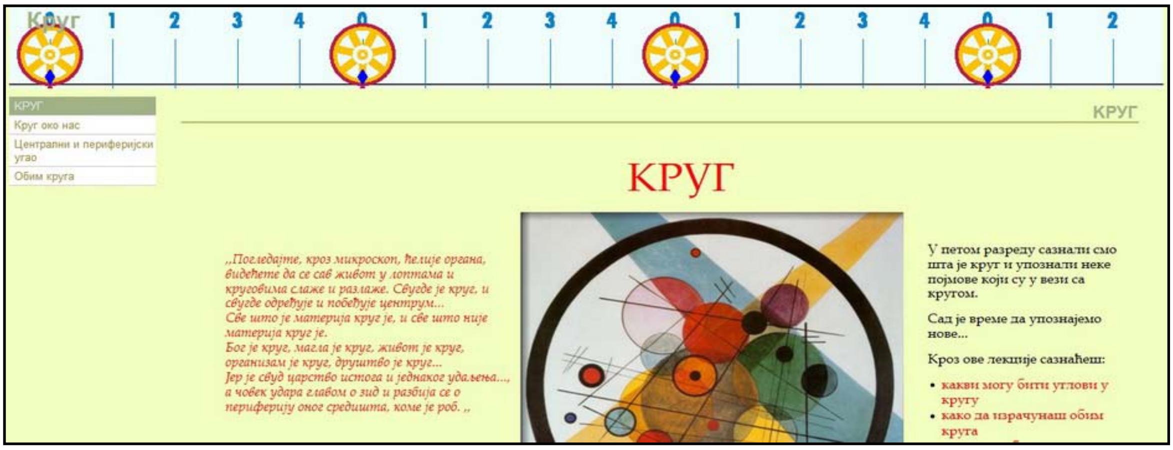
Материјал се извози и као *IMS Content Package* и *Common Cartridge*, а и као *SCORM* пакет. Овакви пакети се на једноставан начин увозе на различите *LMS* платформе. На пример у Мудл курс се *SCORM/AICC* пакети увозе додавањем активности *SCORM/AICC* пакети, док се *IMS* пакет додаје избором *IMS пакет* у падајућој листи ресурса.



Слика 7. Додавање материјала у курс на Мудлу

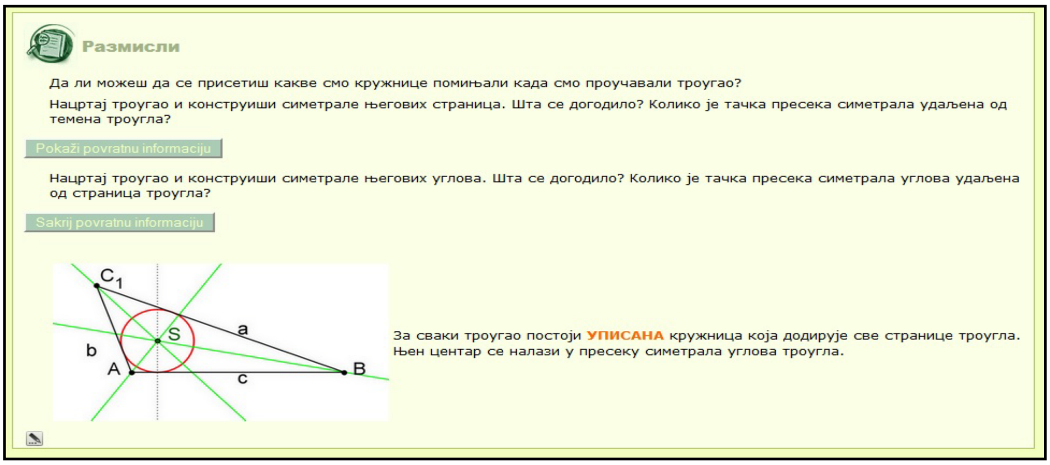
2.3. Креирање електронских наставних материјала из математике

Начин на који се може креирати електронски материјал из математике помоћу *eXeLearning* едитора, могуће је видети на примеру рада **„<u>Круг</u>”,** који је освојио прву награду на конкурсу Дигитални час 2, у конкуренцији радова из математике, рачунарства, информатике и техничког образовања.



Слика 8. Почетна страна лекције

Наставни садржаји су организовани тако да подстичу активну, проблемску наставу. Ученици су, захваљујући могућностима апликације, на интересантан начин, помоћу фотографија, добро организованог текста и примера, упознати са темом, активностима које их очекују, исходима... Велика предност показала се у уштеди времена, јер је на једноставан начин направљен осврт на градиво из петог и шестог разреда на које се наставне јединице о кругу у седмом разреду надовезују. За то нам је иначе потребно пуно времена, цртежа, штампаних материјала, док се овде све то уради много брже и квалитетније. Различитим активностима ученици су подстакнути да сами испитују углове у кругу и њихове односе. Задаци су задати помоћу шаблона који остављају могућност да ученик самостално ради, али и да добије повратну информацију о томе да ли је добро урадио. То је нарочито значајно за оне ученике који изостану са часа, јер им овако припремљен материјал омогућава да код куће, на активан начин проуче лекцију, самостално или са родитељима,[5].

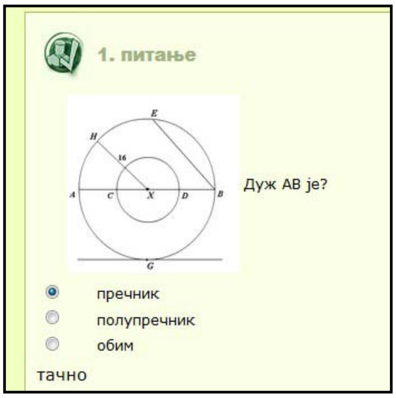


Слика 9. Шаблон креиран да подстакне активану наставу

Поред тога што је могуће увести велики број фотографија и текст обрадити тако да се јасно уоче логичке целине у лекцији и нагласе важни делови, овај програм омогућава и коришћење аплета заснованих на Јави, попут ГеоГебре, што је за часове математике изузетно корисна могућност. При том је могуће уметнути и ГеоГебра фајл, а и везу ка неком аплету са ГеоГебраТуб-а.

Слика 10. ГеоГебра аплет

Апликација нуди разноврсне шаблоне погодне за креирање квиз питања и проверу усвојеног градива. Овако припремљени материјали могу се спајати и уобличавати у целине које прате наставне теме и тако помажу ученику да створи општу слику о теми, у овом случају - о кругу.



Слика 11. Квиз питање са повратном информацијом

3. Закључак

Електронски наставни материјали постају све присутнији у нашем образовном систему. Различите способности и карактеристике ученика намећу потребу да се пронађе начин помоћу којег ће бити могуће на једноставан и квалитетан начин реализовати наставу прилагођену појединцу. Уколико су креирани према стандардима дефинисаним за уџбенике, електронски наставни материјали пружају одличну могућност да се наставни садржаји представе на занимљив и подстицајан начин. Једном направљени, они се могу поново користити, допуњавати и прилагођавати новим ученицима, а обезбеђују и велику уштеду како времена, тако и новца. Данашње генерације су генерације „дигиталних урођеника"[4], потпуно навикнутих да до информација долазе користећи различите електронске уређаје и Интернет. Стога је неминовно да се и ми наставници, као „дигиталне придошлице"[4], адекватно припремимо за време које долази.

Библиографија

[1] **И. Томић.** Алати за креирање наставних материјала. *Стручни рад са 3. Интернационалне Конференције, Техника и информатика у образовању, Технички факултет Чачак*, 2010.

[2] **Д. Дракулић.** Развој електронских уџбеника из математике. *Зборник радова, Симпозијум МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ, Математички фаултет, Универзитет у Београду, Vol.3, 2012,* пп. 27–34.

[3] **К. Милановић.** Учење на даљину и е-учење. *Партнер у учењу, Електронски часопис за наставнике, Београд, фебруар 2007,* пп. 3–5, http://www.microsoftsrb.rs/download/obrazovanje/pil/casopis/PiL_bilten_2007_02.pdf, виђено 19. 5. 2013.

[4] **M. Prensky.** Digital Natives, Digital Immigrants, *On the Horizon, MCB University Press, Vol. 9 No. 5, October 2001*.

[5] **Н. Трбојевић.** Круг. *Зборник радова програма "Дигитални час 2 2011/2012", http://www.digitalnaskola.rs/konkurs/dc2/zbornik/brojPrijavaPoPredmetuIRazredu/razred_7/Matematika/931.html*, виђено 20. 5. 2013.

Критички осврт на идеју примењивог знања у настави математике

Оливера Марковић
Учитељски факултет, Ужице, Универзитет у Крагујевцу
e-mail: markovic@ucfu.kg.ac.rs
Миленко Пикула
Филозофски факултет, Пале, Универзитет у Источном Сарајеву
e-mail:mpikula@paleol. net

Апстракт. У раду су разматрани проблеми везани за актуелне трендове у настави математике којиу први план стављају примењивост математике у свакодневном животу. Урађен је критичкиосврт на PISA тестирање које је осмишљено с циљем да мери колико су ученици послезавршетка основне школе савладали управо ту врсту примењиве математике.У раду су приказани резултати анализе 50 задатака који су се јављали на PISA тестирању од 2000.до 2006. године. Испитали смо у сваком од задатака прецизност и јасност текста задатка, као и тачност и прецизност упутства за бодовање задатка. На крају рада изнели смо оцену о значају PISA тестирања за математичко образовање ученика.

Кључне речи:примењивост знања, математичка писменост, PISA тест

1. Увод

Највећи број савремених научних расправа о образовању као и званичних докумената који се баве образовном политиком имају један заједнички проблем – како учинити да школско знање постане што *функционалније*. Тиме се за полазну претпоставку свих ових расправа, као несумњив узима став да је најважнији квалитет знања његова функционалност, примењивост у животу, корисност. Сви ови квалитети најчешће се изражавају једном синтагмом – *фукционална писменост*. Међутим, шта се тачно под тим појмом подразумева, шта је његов обим и садржај, није увек лако разумети. У овом излагању даћемо критички осврт на идеју примењивог знања у настави математике.

Познато је да се у почетној настави математике мора кренути са посматрањем објеката у свету који нас окружује и који је деци близак. Кроз бројне примере из природног окружења ученици стичу прва сазнања о неким основним математичким појмовима. То је, дакле, много природнији пут него за већ формиране апстракције тражити реалане моделе. Разни тзв. текстуални задаци с којима се деца сусрећу већ од првог разреда основне школе повезују поједине реалне ситуације с математичким апстракцијама. Међутим, у мери у којој математка постаје сложенија, смањују се могућности њене примене на свакодневне животне ситуације које би ученицима биле блиске. Те примене су на нивоу озбиљних проблема којима се баве разне природне или техничке науке. Дакле, како се настава математике усложњава, тако се и њени садржаји удаљавају од примене у „свакодневном животу“ коју би ученици могли да схвате, јер им недостају знања из других научних области, која ће евентуално на вишим нивоима школовања стећи.

Међутим, у савременим трендовима наставе математике, на свим нивоима школовања, инсистира се на примени стеченог знања у свакодневном животу. И у најновијој реформи нашег образовања, чије су основе изложене у „Стратегији развоја образовања у Србији до 2020. године“ подржани су овакви ставови.

Један од разлога таквог креирања образовне политике јесте и улога коју има једно међународно тестирање ученика у нашем образовном систему. Реч је о тестирању познатом под називом *Међународни програм процене ученичких постигнућа*, или скраћено *PISA* тестирање, које се реализује у организацији OECD-аа обухвата *процењивањечиталачке, математичке и природно-научне писмености*.

Поставља се питање - зашто је организација као што је OECD која се бави глобалном тржишном економијом и чији је слоган *За бољу светску економију*, заинтересована за један академски пројекат. „OECD и њене земље чланице нису започеле PISA пројекат зато што их занимају базична истраживања у области образовања или теорије учења. Ова организација је одлучила да инвестира у PISA тестирање зато што је образовање кључно за економију.“ [8]Дакле, OECD не чине непристрасни истраживачи на пољу образовања, већ људи окупљени око неолибералне политичке и економске идеологије и у том контексту треба посматрати овај пројекат.

Велики број критичара PISA пројекта долази са, пре свега, европских универзитета. Тако Г.Лангфелт (Gjert Langfeldt, Agder Universitet) доводи у питање валидност и поузданост резултата PISA тестирања, истичући конструкцијска ограничења, методолошке грешке и културолошку пристрасност које су присутне у овим тестовима [6]. Ј. Вутке (Joachim Wuttke) даје свеобухватну анализу PISA тестирања, с посебним нагласком на необјективност резултата и извесну произвољност у њиховом тумачењу од стране међународних и националних PISA тимова [7]. Т. Јанке (Thomas Jahnke, Universität Potsdam) објашњава, из немачке перспективе, како PISA не успева да заиста процени шта се учи и шта би требало да се учи у школама и како ослањање на PISU може да доведе до пропуста у креирању наставних планова и програма [4]. В. Мајерхефер (Wolfram Meyerhöfer, Universität Potsdam)истиче да детаљна анализа онога што PISA тражи у својим упитницима показује колико је заправо мало тога у PISA тесту повезано са савременом дидактиком[5].

Циљ развоја и увођења PISA пројекта је, како аутори истичу, „утврђивање степена до којег су ученици, који се ближе завршетку обавезног образовања, усвојили нека знања и стекли квалификације које су неопходне за њихово потпуно укључивање у друштво“ [2]. Дакле, у први план се стављају квалификације неопходне за укључивање ученика у друштво, а не знања потребна за даље школовање која морају да буде у првом плану. Ученици после завршене основне школе настављају своје даље школовање и пре свега за то треба да буду припремљени. То је посебно важно кад је у питању математика, јер је применљивост основношколске математике у реалном животу минорна. Процењивање различитих величина, тумачење графикона у медијима или замена новца у мењачници су задаци на којима се у поменутом тесту инсистира а при том се ставља у други план или сасвим занемарује суштинско знање математике, односно главни садржаји овог предмета које би ученик морао да савлада у основној школи.

2. Резултати истраживања

У раду је анализирано 50 задатака који су се јављали на PISA тестирању од 2000. до 2006. године (а неки од њих поновљени су и 2009.) а налазе се у збирци задатака са упутствима за прегледаче теста *Pisa released items – mathematics* (OECD 2006) [12].У раду смо користили метод анализе садржаја. Јединицу анализе представља сваки појединачни задатак у наведеној збирци задатака. Анализирали смо у сваком од задатака прецизност и јасност текста задатка, као и тачност и прецизност упутства за бодовање задатка. Критеријуме на основу којих један задатак може бити „проглашен“ неадекватним, преузели смо из ранијих истраживања (Ивић, Пешикан, Антић, 2008), где је дефинисано шест критеријума које добар задатак мора да испуни. Ми ћемо у овом раду издвојити три критеријума на основу којих ћемо анализирати поменуте задатке:

-*Задаци морају бити коректно језички формулисани* (Задаци који су некоректно језички формулисани су непрецизни, двосмислени, нејасни, неразумљиви или граматички некоректни);

-*Задаци морају бити прилагођени узрасту* (Задацису неприлагођени узрасту ако супретешки или прелаки за узраст коме су намењени);

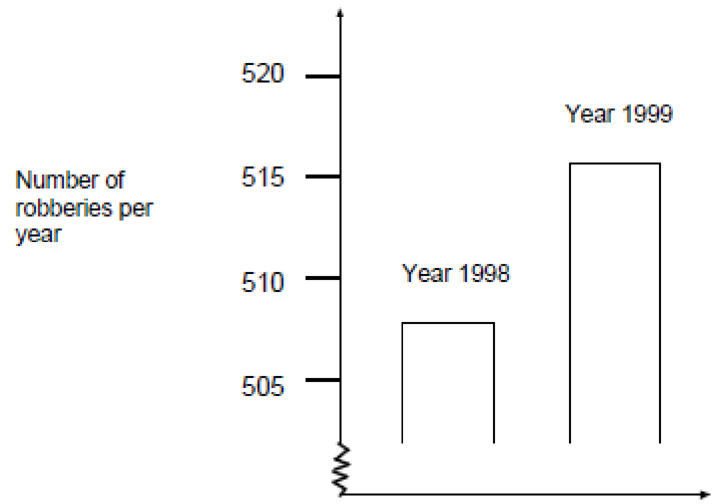
-*Задаци морају бити интелектуално прецизни* (Интелектуално непрецизни задаци су они у којима се користе метафоре и термини који ученицима нису јасни, задаци у којима је нејасно шта се у ствари од ученика тражи)

Од 50 анализираних задатака њих 28 (56%) није задовољило један или више од наведених критеријума. Прецизније, 3 задатка (6%) није задовољило ни један од наведених критеријума; 2 задатка (4%) није задовољило први и други критеријум; 1 задатак (2%) није испунио први и трећи критеријум; 7 задатака (14%) није задовољило други и трећи критеријум; 2 задатка (4%) није задовољило само први критеријум, 10 задатака (20%) само други, а 3 задатка (6%) само трећи критеријум.

Када је реч о упутству за бодовање теста, критеријуми да се упутство прогласи „лошим“ су били: материјалне грешке и неаргументовано процењивање шта све може бити тачан резултат. Разматрана су упутства за 29 од 50 задатака јер у осталим задацима упутства су изостала. Од 29 задатака неадекватна упутства се јављају у 19 задатака (у 4 задатка су присутне материјалне грешке, а у осталих 15 је неаргументовано и непрецизно процењивање резултата).

Да би илустровали претходне резултате погледајмо следеће примере:

М179: Пљачке[1]. *ЈеданTV репортер приказао је следећи графикон и рекао: „Овај графикон показује да је у периоду од 1998. до 1999. дошло до огромног пораста у броју пљачки.*



Да ли сматрате да је репортерова изјава реално тумачење овог графикона? Наведите објашњење којим ћете поткрепити свој одговор.

[1]Сваки задатак у *Pisa released items – mathematics* има своју ознаку и назив који и ми у раду користимо.

Пођимо од самог захтева задатка. Питање гласи - да ли ученици *сматрају* да репортер добро тумачи графикон? То, пре свега, није математичко питање јер се тражи њихов став и лични однос према репортеровој изјави. Такође, можемо поставити и питање: Шта је прецизно значење речи *огромно*?Свако од ученика, као и сам репортер ову реч може тумачити на другачији начин и различите количине „доживети“ као огромне. Како је и само питање непрецизно, тако се и разни непрецизни одговори узимају као тачни. Наведени су следећи примери тачних одговора:

- *Није реална. Требало би приказати целокупан график.*
- *Мислим да није реално тумачење графикона јер да је приказан цели графикон, видело би се да се ради само о незнатном повећању пљачки.*
- *Не, зато што је он искористио само врх графикона, а да се види све од 0 до 520, онда пораст не би био тако велики.*
- *Не, зато што графикон делује као да је пораст велики, али кад погледате бројке, онда то и није неко повећање.*

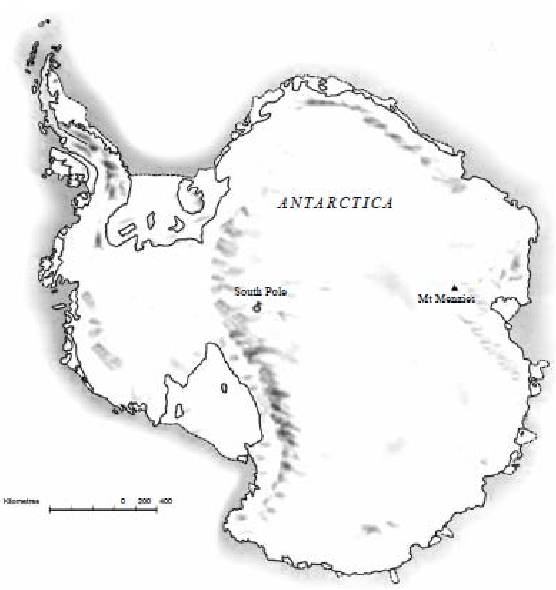
Међутим, било је и оних обазривијих одговора који су такође оцењени као тачни:

- *Не можемо рећи да ли је пораст огроман или не. Ако је у 1997. број пљачки био исти као у 1998, онда бисмо могли рећи да је повећање у 1999. огромно*
- *Не можемо знати шта је то „огромно“ зато што би требало да имате макар две промене да бисте једну сматрали огромном, а другу малом.*

И шта на крају закључујемо из овог графикона и шта је исправно решење овог „задатка“? *Можда* је репортер погрешно закључио, или *можда* није могао ни донети никакав закључак, а ми ћемо додати да је он *можда* и у праву јер држава мора да се бори против пљачки и да их из године у годину смањује, па је свако повећање, заправо - огромно. Превише је овде речи *можда* да би на основу оваквог задатка сматрали да ученик зна или не зна математику.

Дакле, питање је колико је *процењивање* било чије изјаве (као у претходном задатку) или процена неке величине, као у задатку који следи, математички проблем, а колико припада неким другим дисциплинама које се баве испитивањем разних врста ставова.

М148: Површина континента. *Дата је карта Антартика*

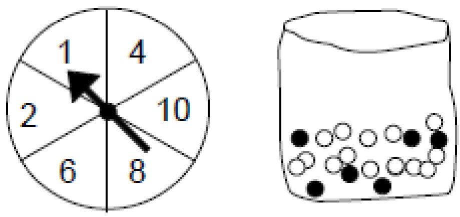


Процените површину Антарктика користећи дату размеру. Прикажите поступак израчунавања и објасните како сте дошли до процене. (Можете цртати преко постојеће мапе ако ће вам то помоћи.)

Замишљено је да се задатак *Површина континента* решава тако да се или континент дели на познате површи чије површине ученици могу рачунати, а *вишкове* да процене *од ока*, или да се већи део континента упише у квадат, правоугаоник или круг па да се поново, након процене за полуострва и усеке, дода та површина. Наравно, то процењивање *од ока* довешће до тога да ће сви ученици имати различита решења, а највероватније нико неће имати тачан резултат што се, уосталом, и не очекује. У кључу за решавање овог задатка стоји да се признаје сваки одговор између 12 000 000 km^2и 18 000 000 km^2. Иначе, површина Антарктика је 14 200 000 квадратних километара. Дакле, ученик који даје одговор 11 800 000 km^2 неће добити максималан број бодова, а онај који напише 18 000 000 km^2 добиће максималан број бодова, иако је објективно он лошије проценио. На основу чега је изабран интервал $(12\,000\,000\ km^2, 18\,000\,000\ km^2)$ у оквиру ког сви одговори носе максималан број поена, као и одлука да се за бројеве који су „близу“ , али мало „испод или изнад“ датог интервала оцене делимичним бројем бодова - не знамо. Заправо овде се ради о слободној процени, али овог пута *састављача теста,* јер постављен интервал нема прецизну математичку аргументацију. Ако је циљ био да се код ученика провери знање размере и уочавање познатих површи унутар задате површи, онда се торешава задавањем такве површи која се до краја може изделити на познате површи па, сходно томе, и тачно израчунати њена површина.

Један број задатака који се константно појављује на PISA тестовима је из области вероватноће. Такви задаци у нашем школству нису прилагођени узрасту петнаестогодишњака, јер се са овим појмом ученици упознају тек у завршном разреду средње школе. Један од таквих задатака је и следећи:

М471: Пролећни вашар. *У једној игри на штанду на пролећном вашару прво се користи точак са стрелицом. Онда, ако се стрелица заустави на парном броју, играч има право да изабере један кликер из кесице. На доњој слици су приказани точак и кликер у кесици.*



Награда се добија када се извуче црни кликер. Сузана хоће да игра само једном. Колика је вероватноћа да ће Сузана освојити награду?

А) Немогуће B) Није много вероватно C) Око 50% D) Врло вероватно E) Сигурно

За матуранте средње школе овај задатак би се могао окарактерисати као једноставан ($P = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{20} = \frac{1}{4}$). Дакле, вероватноћа је¼, или изражено у процентима 25%. То значи да се од ученика очекује да заокруже одговор В-*Није много вероватно*, јер је то од понуђених одговора онај који је најближи правом решењу. Међутим, ученици овог школског узраста нису у могућности да знају за формулу, већ се од њих очекује процена типа: *Црних куглица је много мање него белих, а уз то треба погодити и паран број на точку. Дакле, није много вероватно да се то баш тако догоди*. Овако би без проблема могао да процењује скоро сваки одрастао човек који се више и не сећа да је ишао у школу. Међутим, шта нам та процена говори, или речено у духу тако истицане практичности - чему она служи? Научиће нас да се на пролећном вашару не укључујемо у сличне игре јер ћемо *вероватно* изгубити. То ће бити несумњиво од практичне користи, али неће имати много везе с математиком.

Као што смо поменули, с појмом вероватноће ученици се сусрећу у четвртом разреду средње школе. Нема потребе за ранијим увођењем овог појма, јер да би се он у потпуности схватио ученици се претходно морају упознати с дефиницијом граничне вредности функције. Да ли је могуће да тај садржај пренесемо у основну школу? Размотримо следећи случај: Ученицима се може објаснити да при бацању коцке постоји шест могућих исхода, а шанса да баш падне шестица је 1/6. Међутим шта ће се десити ако они пожеле да *практично* провере добијени резултат, а у наредних 10 или 15 бацања коцка ниједан пут не падне на број шест. Како онда да разумеју да је резултат 1/6? Вероватно ће бити потпуно збуњени. Дакле, основцима бисмо могли дати готову формулу за рачунање вероватноће, они би је без већих проблема примењивали и успешно решавали задатке PISA теста иможда мислили да сада имају више изгледа да буду успешни у кладионици. Ако занемаримо ову последњу *корист* свима је јасно да од овакве *математичке писмености* нико нема користи.

Погледајмо задатак чија је сврха, како аутори истичу, *провера да ли је ученик способан да примени дату формулу*.

М047: Lишајеви. *Једна од последица глобалног загревања јесте и отапање леда на глечерима. Дванаест година после отапања леда, на стенама почињу да расту сићушне биљке зване лишајеви. Сваки лишај има приближно облик круга. Веза између пречника круга и старости лишаја приближно се може описати формулом:*

$$d = 7.0 \times \sqrt{t-12} \text{ за } t \geq 12$$

Где је d пречник лишаја у милиметрима, а t представља број година протеклих од отапања леда. Ана је мерењем утврдила да је пречник једног лишаја 35mm. Пре колико година се лед отопио са тог места? Напишите поступак израчунавања.

Приметимо да је задатак врло једноставан, али преоптерећен сувишним текстом. Његова занимљивост и актуелност јесте у истицању савремене појаве познате као глобално загревање, а једини циљ овог задатка је провера да ли ученици знају да примене готову формулу. За добијање тачног резултата ученици би морали да познају и ирационалне једначине најједноставнијег облика као што је једначина у овом примеру:

$$35 = 7 \cdot \sqrt{t-12}$$

Максималан број бодова, према упутству за прегледаче теста, добија се за одговор *37 година*, без обзира да ли је поступак решавања дат или не, иако се поступак експлицитно у задатку тражи. Иначе у брошури PISA пројекта су наведени примери ученичких одговора и начина како је који одговор бодован уз пропратни коментар. Следећи одговори су бодовани максималним бројем поена

Primjeri odgovora

Kod 2:

$35 = 7 \cdot \sqrt{t-12}$

$5 = \sqrt{t-12}$

$25 = t - 12$

$t = 37$

35 : 7 = 5

$7 \cdot 5 = 7 \cdot \sqrt{25}$

$= 7 \cdot \sqrt{25+12}$

$= 7 \cdot 37$

... 37 godina

$35 : 7 = 5$

$5^2 = 25$

$25 + 12 = 37$

(Nije ispravan algebarski zapis, ali znamo da je učenik dobro mislio.)

t = 15 d = 12.1

t = 25 d = 25.2

t = 40 d = 37

t = 35 d = 33.6

t = 37 d = 35

Dakle, 37 godina nakon nestanka leda.

(Primijetite da je ispravan rezultat uvršten u formulu, što je tačno.)

$756 = 35 = 7 \cdot \sqrt{37-12} = 7 \cdot \sqrt{25} = 7 \cdot 5 = 35$

Дакле, креаторима теста је само важан коначан резултат, али не и начин како се до њега стиже. У претходним одговорима примећујемо материјалне грешке$\left(7 \times \sqrt{25} = 7 \times \sqrt{25+12} = 7 \times 37\right)$ и непрецизности које се ученицима толеришу уз образложење да су „добро мислили" јер су на крају добили тачан одговор. На основу чега прегледачи теста знају *да је ученик добро мислио* - не знамо, а још мање знамо како се то бесмислене једнакости могуоцењивати као суштински небитне и третирати као ситне омашке. Долазак до тачног одговора методом покушаја у овом задатку је потпуно бесмислен јер то значи да ученицима апсолутно није јасан појам квадратног корена.

Међутим, посебно је занимљиво за какве одговоре се ученику даје делимичан број поена. Наводимо примере одговара који су бодовани на тај начин.

Kod 1:

$35 = 7 \cdot \sqrt{t-12}$

$35^2 = 7^2 \cdot t - 12$

49t = 1237

t = 25

$35 = 7 \cdot \sqrt{t-12}$

$5 = \sqrt{t-12}$

25 = t²-12

t = 13

$35 = 7 \cdot \sqrt{t-12}$

$5 = \sqrt{t-12}$

$5 = \sqrt{t} - \sqrt{12}$

Pretеško je!

У сваком од ових случајева начињене су крупне математичке грешке, које се само ономе ко не зна елементарну математику могу учинити небитним, а сам поступак вредним неког бода. Штавише, у трећем случају констатовано је да је поступак претежак а не суштински погрешан, што он у ствари јесте, јер је приказано непознавање основних особина квадратног корена.

Још је проблематичнији начин бодовања у задатку који носи назив *Двориште:*

M267: Двориште.*Никола жели да поплоча правоугаоно двориште своје нове куће. Двориште је дугачко 5,25m и широко 3m. За поплочавање једног квадратног метра потребна му је 81 цигла. Израчунајте колико је потребно цигли за поплочавање целог дворишта.*

BODOVANJE: DVORIŠTE 1

Maksimalan broj bodova

Kod 2: 1275, 1276 ili 1275,75 (jedinice se ne moraju navoditi).

Djelimičan broj bodova

Kod 1: 15,75 (jedinice se ne moraju navoditi)
ILI
1215 cigli za 5m x 3m
(Ovaj kod se koristi za učenike koji su u stanju da izračunaju broj cigli za cijeli broj kvadratnih metara, ali ne i za kvadratne metre izražene razlomcima. Pogledati primjere mogućih odgovora.)
ILI
Greška pri izračunavanju površine, ali je ispravno pomnožena sa 81
ILI
Površina zaokružena na cio broj, ali je ispravno pomnožena sa 81.

Максималним бројем бодова оцењује се било који од три наведена одговора - 1275 или 1276 или 1275,5. Наравно, може бити само један тачан одговор а то је 1275,75 који се добија једноставним множењем датих бројева. У пракси проблем бисмо решили тако што бисмо, заиста, купили 1276 цигли па онда једну циглу секли - али то није било питање. Но како ћемотај проблем решити ако и нетачан одговор 1275 цигли – сматрамо тачним - не знамо! Међутим, пошто је реч о *реалној животној ситуацији,* можемо претпоставити да су аутори мислили да на место на које недостаје цигла ставимо, на пример, саксију цвећа! Такође је важно приметити за какве одговоре се даје делимичан број поена. На пример, ко површину дворишта рачуна множењем бројева 5 и 3 игноришући да је двориште дугачко 5,25m, наравно не добија тачну површину дворишта, али оцењивач процењује да је одговор *ту негде* и да заслужује бар неки бод. Дакле, ученик је, избегавајући да множи с децималним бројем показао елементарно непознавање рачунања, али то није окарактерисано као значајна грешка, јер наравно, ко још данас поред рачунара на сваком кораку, *у реалним животним ситуацијама*, има потребу да самостално рачуна. Ако тако будемо *примењивали математику*, само је питање времена кад ћемо и таблицу множења уврстити у *енциклопедијско знање* и прогласити је сувишном.

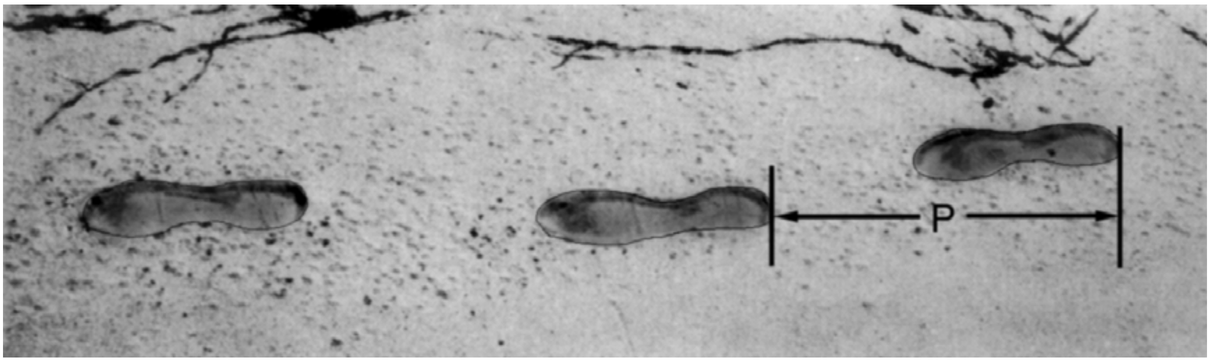
На крају, анализираћемо и задатак *Кораци*.

M124: Кораци. *На слици се виде отисци стопала мушкарца који хода. Корак P представља размак између задњег краја два узастопна отиска. Помоћу формуле,* $\frac{n}{P} = 140$*, код мушкараца, представља се приближан однос између n и P, где је,*

$n =$ *број корака у минути, а*

$P =$ *дужина корака у метрима.*[2]

[2]Задатак је написан исто као у приручнику, иако аутори овог рада имају примедбу на правопис, о чему ће бити речи у даљем тексту.



1. Ако се ова формула примени на Мирков ход и Мирко направи 70 корака у минути, колика је дужина његовог корака. Покажите како сте дошли до резултата.
2. Илија зна да је његов корак дуг 0,80 метара. Формула се може применити и на његов ход. Израчунајте којом брзином Илија хода изражено у метрима по минути и у километрима на час. Покажите како сте дошли до резултата.

Ученик који пажљиво чита задатак, остаће збуњен пред правописно неправилном реченицом која је оптерећена сувишним зарезима (исто је и у енглеској и у српској верзији приручника). Ако ту чињеницу, која се не тиче математике, занемаримо проблем је и понуђена формула $\frac{n}{P} = 140$. Величине n и P које представљају број корака у минуту и дужину корака у метрима, према датој формули су пропорционалне, односно, с повећањем величине P повећава се и величина n. Није тешко приметити да тај однос није логичан и да не одговара „реалној животној ситуацији“, јер у реалности што човек брже иде кораци му постају све краћи, што значи да су величине n и P обрнуто пропорционалне. Наравно, то је проблем само за ученике који размишљају о тексту задатка. За остале, први део задатка је тривијалан јер представља најједноставнију примену формуле. Иначе, задаци у PISA тесту су најчешће „украшени“ сличицама чија је улога углавном декоративна. Међутим, ако слику у овом задатку мало боље погледамо, можемо приметити да ни она не одговара „реалној животној ситуацији“. Наиме, како се у другом делу задатка помиње корак дуг 80cm, то према датој слици можемо закључити да је стопало дуго бар пола метра! Можда ће, у будућности, за коју нас PISA спрема људи и имати толика стопала, али тренутно се за таквог џина не зна.

Проблем лошег бодовања присутан је и у овом задатку. Предвиђено је да се делимичан број поена додељује ученицима који помешају кораке и метре, па уместо тачног одговора који гласи 89,6 метара у минуту, они добију 112 метара у минуту. Не видимо ни један аргумент на основу кога бисмо суштински нетачном задатку доделили било који бод!

3. Закључак

Наравно, нису сви задаци који се јављају у оквиру PISA тестирања спорни, али многи јесу - то је недопустиво код било ког тестирања, а посебно оног иза којег стоји 60 земаља! Не доводећи у питање компетентност његових састављача, морамо да приметимо да је приликом припреме тестова изостала детаљна анализа самих текстова задатака и озбиљна провера резултата који се признају као тачни или делимично тачни. Тиме су морали да се позабаве не само аутори задатака, већ и шира математичка јавност. Један од разлога зашто до је то изостало јесте и тајност самог теста. Тек у последњих пар година неки од задатака са ових тестирања су јавно објављени[3], али и даље комплетни тестови се крију од јавности, што је по нашем

[3] PISA RELEASED ITEMS-MATHEMATICS (www.oecd.org/pisa/38709418.pdf)

мишљењу недопустиво. Сматрамо да би његова транспарентост била од помоћи не само ученицима и наставницима, већ би допринела побољшању квалитета самог теста.

Иначе, као што смо раније истакли, није мали број математичара, пре свега, са европских универзитета, који су уочили бројне слабости PISA тестирања. „Неки од њих верују да се уочене слабости могу превазићи у оквиру самог пројекта (нпр. Allerup, Dolin, Olsen, Sjoberg), други су склони да закључе да PISA пројекат не може да се поправи (нпр. Langfeldt, Meyerhofer, Wuttke) или да је толико битан за одређене политичке сврхе да треба да се посматра као врста истраживања у оквиру формирања политике, а не као научни подухват (нпр. Hopmann, Jahnke, Uljens, Bozkurt/Brinek/Retzl).“ [5]

И на крају намеће се питање: Треба ли нашим ученицима ово тестирање? Нема сумње да добијени резултати PISA могу бити корисни неким истраживачима, посебно када се има у виду да ученици упоредо с овим тестом попуњавају и упитник који се односи на њихову мотивацију, навике у вези са учењем и разне ставове везане за њихово школовање. Такође, резултати овог тестирањаомогућавају разне компаративне анализе неких врста знања међу ученицима из различитих земаља. Међутим, подаци добијени овим тестирањем не дају праву слику знања ученика из области математике,како у Србији, тако и у другим државама где се ово тестирање спроводи и зато слободно можемо рећи да је значај ових података прецењен. Заправо, „PISA тест, мање или више, правилно мери способност ученика да решавају задатке у овом тесту - али ништа друго“ [4]. Сматрамо да образовна политика и стратегија која се гради на резултатима овог тестирања може имати далекосежно лоше последице по математичко образовање, јер и поред тренутне светске актуелности PISA тестирање има, као што претходна анализа показује, превише слабости.

Библиографија

[1] **А. Бауцал, Д. Павловић Бабић.**PISA 2009 у Србији: први резултати. Научи ме да мислим, научи ме да учим, *Институт за психологију и Центар за примењену психологију, Beograd, 2010..*

[2] **А. Бауцал, Д. Павловић Бабић.** Математичка писменост PISA 2003 и PISA 2006, *Министарство просвете Републике Србије, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, Институт за психологију Филозофског факултета Универзитета у Београду, 2009.*

[3] **H. Goldstein.** International comparisons of student attainment: some issues arising from the PISA study. *Assessment in Education 11, 3, 319 – 330, 2004.*

[4] **T. Jahnke, W. Mayerhöfer.** PISA & Co – Kritik eines Programms *Verlag Franzbecker/Hildesheim 2006.*

[5] **S.T. Hopmann, G. Brinek.** Introduction: PISA According to PISA – Does PISA Keep What it Promises? *Rutgers University, Berlin, 2007.*

[6] **G. Langfeldt, M. Trautman.** Why aren't we more like them? Reflectionson the German picture of education in the Nordic countries, *Z Erziehungswiss 12: 733-740, 2009.*

[7] **J. Wuttke.** Uncertainties and Bias in PISA, 2007. (http://www.oxydiane.net/IMG/pdf/Uncertainties_and_Bias_in_PISA.pdf)

[8] **S. Sjoberg.** PISA and "Real Life Challenges": Mission Impossible?*University of Oslo, 2007.*

[9] **И. Ивић, А. Пешикан, С.Антић**. Водич за добар уџбеник– општи стандарди квалитета уџбеника, *Платонијум, Нови Сад, 2008.*

[10] PISA 2009 Assessment Framework Key competencies in reading, mathematics and science, *OECD, 2009.*

[11] Примјери PISA задатака-математика,*Испитни центар, Цетиње, 2006.*

[12] PISA Released Items – Mathematics, *Paris OECD, 2006.*

[13] www. pisa. oecd.org Link: What PISA produces>PISA 2003>Test questions

[14] www. pisa. oecd.org Link: What PISA produces>PISA 2006>Test questions

Personalizovano učenje u tutorskim sistemima

Boban Vesin, Aleksandra Klašnja-Milićević
Visoka poslovna škola strukovnih studija, Novi Sad
vesinboban@yahoo.com, aklasnja@yahoo.com

Mirjana Ivanović. Zoran Budimac
Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad
mira@dmi.uns.ac.rs, zjb@dmi.uns.ac.rs

Apstrakt. Jedan od najvažnijih segmenata u današnjem razvoju i upotrebi Interneta je personalizacija sadržaja i izgradnja korisničkog profila zasnovanog na ponašanju svakog pojedinačnog korisnika. U sistemima elektronskog učenja formirani profil učenika pomaže prilikom izbora sadržaja i informacija koje se u datom trenutku predstavljaju učeniku. U cilju personalizacije procesa učenja i prilagođavanja sadržaja svakom pojedinačnom učeniku, sistemi za elektronsko učenje moraju koristiti strategije kojima će zadovoljiti potrebe učenika. Takođe, ti sistemi moraju koristiti različite tehnologije radi promene okruženja i adaptacije nastavnog materijala na osnovu potreba učenika. Proces adaptacije može biti u formi adaptacije sadržaja, procesa učenja, povratnih informacija ili navigacije. U radu su prikazani karakteristični tipovi tutorskih sistema koji sadrže različite oblike personalizacije nastavnog materijala i procesa učenja.

Ključne reči: elektronsko učenje; personalizacija; tutorski sistemi.

1. Uvod

Elektronsko učenje ili E-učenje (*E-learning*) je interaktivno učenje u kom je nastavni sadržaj dostupan *online* i gde je ponuđena automatska povratna akcija kao odgovor na učenikovu aktivnost [8]. U suštini, to je više učenje uz pomoć računara (*computer-based training*) i davanje instrukcija uz pomoć računara (*computer-aided instruction*) ali je razlika, u odnosu na tradicionalno učenje na daljinu, što je potreban Internet za pristup materijalu kao i za kontrolu učenikovih aktivnosti. E-učenje uključuje sve aspekte i procese učenja koji koriste *World Wide Web* kao osnovnu tehnologiju i medijum za komunikaciju. Učenje preko mreže karakteriše [29]: razdvojenost predavača i učenika; upotreba Veb tehnologija za prezentovanje i distribuciju obrazovnih sadržaja; mogućnosti dvosmerne komunikacije, učenik-učenik, učenik-predavač.

Brojni primeri sistema za elektronsko učenje prilagođenih radu preko mreže razvijeni su u svetu poslednjih godina kao posledica potrebe ubrzanja procesa učenja. Ovakvi sistemi su uglavnom platformski nezavisni i omogućuju pristup nastavnom materijalu sa različitih lokacija [28]. U njima se sakuplja velika količina informacija o korisničkim sesijama čime se omogućuje analiza ponašanja učenika. U sistemima se generiše i velika količina različitih lekcija i nastavnih resursa te je takvom bazom podataka teško ručno manipulisati i prilagođavati nastavni materijal potrebama pojedinačnog učenika. Dva efikasna načina poboljšanja kvaliteta usluga ovih sistema je upotreba inteligenthih tehnika i adaptivnost ka potrebama pojedinačnih korisnika [8]. Uvođenje inteligencije u sisteme za elektronsko učenje dovodi do Inteligentnih tutorskih sistema (*Intelligent tutoring systems* - ITS). U njima se mogu primeniti razne tehnike u cilju postizanja personalizacije. Poslednjih godina u svetu, popularna tehnika prilagođavanja nastavnog materijala, je upotreba sistema za generisanje preporuka [18]. Razni obrazovni sistemi generišu preporuke učenicima, prilagođavajući im nastavni materijal koji će im držati pažnju ili koji će lakše savladati.

Popularan trend u projektovanju tutorskih sistema je i upotreba tehnologija semantičkog veba [3]. Semantički veb je nova generacija veba u kojem se informacije pokušavaju predstaviti na način da ih računari mogu bolje koristiti (često, pomoću inteligentnih agenata) ne samo za prikazivanje nego i za automatizaciju pretrage, integraciju i ponovnu upotrebu između aplikacija [1]. Jedan od osnovnih gradivnih elemenata semantičkog veba je ontologija [4]. Ontologija određenog domena predstavlja terminologiju, skup svih bitnih koncepata u domenu, njihove klasifikacije, taksonomije, njihove veze i sve aksiome domena. Pri modelovanju inteligentnih aplikacija, ontologije predstavljaju važne ponovno upotrebljive gradivne blokove. Informacije koje su sadržane u ontologijama se uz pomoć pravila adaptacije koriste u procesu prilagođavanja sadržaja.

Interaktivni sistemi za elektronsko učenje, grupisani na osnovu tipa personalizacije koje nude, će biti prikazani u drugom poglavlju. Tri karakteristična primera tutorskih sistema i oblici adaptacije nastavnog materijala u njima, biće detaljnije prikazani u trećem poglavlju. Neki rezultati personalizovanog učenja u tutorskim sistemima su prikazani u zaključnom poglavlju.

2. Interaktivni sistemi elektronskog učenja

Savremene informacione tehnologije se intezivno koriste pri izrade različitih tipova obrazovnog softvera. U ovom radu, pažnja je usmerena samo na nekoliko specifičnih tipova tutorskih sistema:

- tutorski sistemi koji prilagođavaju nastavni materijal specifičnim stilovima učenja,
- tutorski sistemi koji koriste različite tehnike za generisanje preporuka sa ciljem da preporuče učeniku odgovarajuće nastavne aktivnosti na osnovu njihovih potreba, znanja kao i putanja kretanja kroz nastavni materijal koji su koristili drugi učenici sa sličnim stilom učenja,
- tutorski sistemi koji su bazirani na tehnologijama semantičkog veba.

2.1 Sistemi sa adaptacijom na individualne stilove učenja učenika

Različiti učenici na različit način pristupaju i koriste nastavni materijal, uče i usvajaju novo gradivo. Stoga je poželjno da sistemi za elektronsko učenje ponude isti nastavni materijal na različite načine, prilagođene svakoj od kategorija potencijalnih korisnika sistema. Postoje mnogi modeli stilova učenja u raspoloživoj literaturi od kojih svaki donosi različite opise i klasifikacije stilova učenja. Neki od najpoznatijih su modeli Coffield-a [6], model Kolb-a [19] i Dunn and Dunn model [10].

Sistemi koji prilagođavaju nastavni materijal stilovima učenja koriste različite metode za utvrđivanje kojoj kategoriji učenici pripadaju. Jedan od načina je da učenik popuni upitnik koji u različitim formama postoji za svaki od stilova učenja [23], [24], [35], [36]. Drugi metod je određivanje stila učenja na osnovu interakcije učenika sa sistemom. Sistem prati tok učenja, stranice koje učenik posećuje i linkove koje pokreće. Na osnovu tih rezultata, sistem formira bazu podataka posećenog nastavnog materijala i donosi zaključke o tome koji materijal odgovara korisnicima sa odgovarajućim stilom učenja [17]. Nakon što se za konkretnog učenika utvrdi stil učenja, ovi sistemi prikazuju nastavni materijal u formi koja je prilagođena za taj stil učenja.

Adaptivnost postojećih sistema je često realizovana u obliku različitog prikaza slika i teksta a jedan od izuzetaka je sistem iWeaver [37] koji nudi i odgovarajući multimedijalni sadržaj. Takođe, sistemi uglavnom prilagođavaju nastavni materijal stilu učenika koji je određen na početku korišćenja sistema i pretpostavlja se da će taj stil ostati nepromenjen. Ipak, istraživanja pokazuju da se stilovi učenja pojedinačnih učenika menjaju u zavisnosti od trenutnih ciljeva ili kvaliteta konkretnog nastavnog materijala. Kontraproduktivno je da se u toku kursa učenik veže samo za jednu kategoriju materijala, tj. da se tokom sesija dodatno ne preispituje odluka o dodeljenom stilu.

Kada se radi o sakupljanju i obradi informacija o individualnim stilovima učenika u tutorskim sistemima mnoga pitanja su i dalje otvorena: način na koji učenici sa različitim stilovima učenja odgovaraju na pitanja na testovima; izvođenje vežbi i razne druge nastavne aktivnosti; kako stilovi učenja utiču na kretanje kroz nastavni materijal; koje su zajedničke osobine učenika sa određenim stilom učenja; na koji način pojedine kategorije učenika biraju i koriste nastavni materijal, itd [34].

2.2 Sistemi sa ugrađenim podsistemima za generisanje preporuka

Sistemi za generisanje preporuka (*recommendation sistems*) koriste mišljenja različitih korisnika sistema u cilju identifikacije potencijalnih interesovanja pojedinačnih korisnika [26]. U sistemima za elektronsko učenje oni se koriste za generisanje preporuka koji nastavni materijal treba prikazati učeniku u cilju što bržeg savladavanja gradiva [11], [21].

Istraživanje o upotrebi sistema *Netlogo* za generisanje preporuka učenicima je predstavljeno u [20]. Autor je prikazao različite forme nastavnog materijala koje utiču na povećanje ili smanjenje motivacije kod učenika. Sličan sistem za generisanje preporuka je dat u [16], međutim, prilikom generisanja preporuka ne uzimaju se u obzir lične karakteristike učenika.

Metodologija poboljšanja već gotovih onlajn kurseva uz pomoć adaptacije je predstavljena u [27]. Takozvani *AHA!* projekat je prvobitno zamišljen kao podrška onlajn kursevima prilikom implementacije adaptivnosti hipermedijalnih kurseva na Tehnološkom univerzitetu u Ajndhovenu [28]. Najvažniji doprinos ovog projekta je adaptacija (pomoću predikcionih pravila) prezentacionog i navigacionog sistema kursa na osnovu nivoa znanja učenika.

Istraživanje o implementaciji tehnika *data mining*-a u sisteme za elektronsko učenje i poboljšanjima procesa učenja koji se time postiže je predstavljen u [33]. Autori su predložili tehniku *data clustering*-a kao način modelovanja studenta. Metoda clustering-a je prikazana i u [13] sa ciljem grupisanja nastavnog materijala na osnovu tema koje obrađuju i sličnosti u njihovoj formi. Tehnike *Data mining*-a kao što su *Association Rule mining* i *Intra-session frequent pattern mining* su primenjene u [38] u cilju izdvajanja korisnih modela ponašanja učenika.

Svi ovi sistemi su prikazani kao inovativni i napredni ali na žalost ni jedan od njih nije ušao u širu upotrebu. Ni jedan od tih sistema ne koristi sve mogućnosti tehnika generisanja preporuka kao što su *collaborative filtering*, *association rule mining* i klasterovanje nego samo najosnovnije tehnike *data mining*-a. Takođe, retki su i sistemi koji uzimaju u obzir različite stilova učenja.

2.3 Tutorski sistemi sa elementima tehnologija semantičkog veba

U skorije vreme sprovode se mnoga istraživanja o upotrebi tehnologija semantičkog veba u sistemima za E-učenje ali većina razvijenih sistema koristi ontologije samo za prikaz nastavnog materijala i podataka o učenicima [5], [12], [22], [25], [30].

Prototip sistema *SMARTIES* se u potunosti zasniva na tehnologijama semantičkog veba [2]. Najnovija verzija sistema sadrži ontologije koje prikazuju samo apstraktni dizajn nastavnog materijala, tj. nije još konkretizovan sadržaj lekcija i celokupno znanje iz domena.

U sistemu *Personal Reader* tehnologije semantičkog veba se koriste u cilju personalizacije nastavnog materijala [9], [15]. Autori predlažu arhitekturu baziranu na RDF-u (*Resource Description Framework*) i ontologijama koje prikazuju nastavne resurse, znanje iz domena kao i podatke o samim učenicima. U [15] autori predstavljaju nekoliko ontologija za izgradnju adaptivnog obrazovnog hipermedijalnog sistema. Međutim, strategija adaptacije nastavnog materijala primenjena u sistemu nije predstavljena ontologijama.

Značajan doprinos u ovoj oblasti predstavlja inteligentni tutorski sistem *QBLS* [7], prilagođen radu na mreži uz primenu tehnologija i standarda semantičkog veba. Sistem preuzima nastavne resurse pronađene na Internetu i služi kao podrška učenju programskog jezika Java.

Autori u [12] su prikazali sistem koji su razvili nastavnici srednje škole i koji koristi ontologije za razvoj i ažuriranje nastavnih planova za svoje časove. Oni opisuju softversku platformu *Gescur* koja implementira procese formiranja, planiranja, usmeravanja i kontrole nastavnih planova i programa.

Experiment sa integracijom modela znanja iz domena dva različita adaptivna sistema korišćenjem ontologija je prikazan u [31]. Ekperimetalna ontologija Java programerskog kursa (*Java Learning Object Ontology* – JLOO) je data u [22]. Definisana ontologija je korišćena kao osnova za razvoj nastavnog materijala početnog Java kursa kao i za integraciju tog materijala u adaptivni sistem za E-učenje. Dodatni predlozi upotreba ontologija prilikom izgradnje pojedinih elemenata sistema za E-učenje: model učenika, ontologija domena, ontologija akcija i dr. se mogu naći u [2], [22], [31].

U navedenim sistema, upotreba ontologija se uglavnom fokusira na modeliranje znanja iz domena i formiranje nastavnog materijala dok su definicija i komunikacija između drugih komponenti sistema izostavljene. Ovi radovi ističu da je najveća poteškoća prilikom modelovanja znanja u sistemima za E-učenje, kreiranje i ažuriranje struktura semantičkog veba (npr. ontologija). Te strukture mogu biti korišćene ne samo za organizovanje nastavnog materijala nego i za definisanje odnosa među njima i definisanja redosleda prikaza materijala učeniku.

3. Karakteristični primeri tutorskih sistema

Nekoliko karakterističnih primera sistema koji koriste različite tehnologije i tehnike za generisanje personalizovanog kursa su prikazani u nastavku.

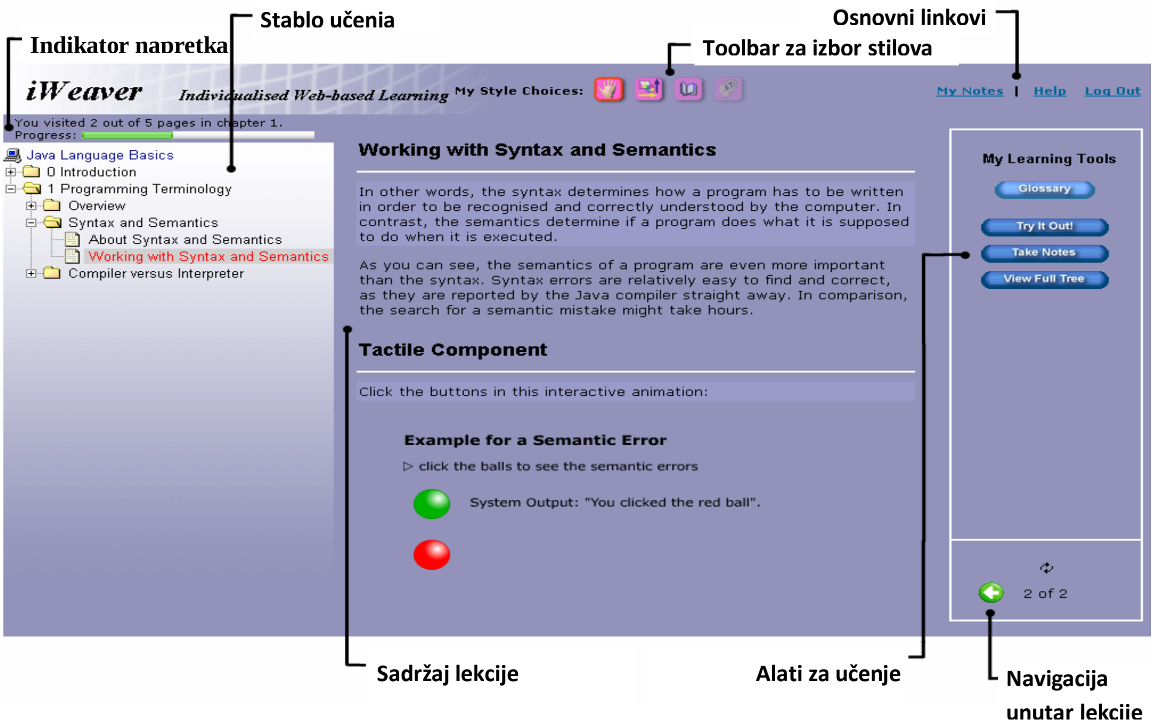
iWeawer - iWeawer je sistem za primenu individualizacije pri učenju programskog jezika Java. Nastao je kao rezultat projekta za realizaciju personalizovanog sistema na Fakultetu za obrazovanje, jezike i društvene nauke u Melburnu, Australija [37]. Sistem prikazuje različite mutimedijalne elemente i formate lekcija iz programiranja uz upotrebu nekoliko adaptivnih tehnika: sortiranje linkova, sakrivanje linkova i uslovni sadržaji stranica [36].

Upotreba sistema **-** Kada učenik pristupi iWeaver sistemu prvi put on mora da popuni standardizovani upitnik (*Building Excellence Inventory*) na osnovu kog se procenjuje njegov početni stil učenja i kreira profil sa 118 pitanja sa ponuđenim odgovorima [10] (*Dunn&Dunn* model stilova učenja). Učenici dobijaju analizu svog profila stilova učenja sa preporukama za personalizaciju. Njima se potom prikazuje sadržaj za učenje koja odgovara njihovom stilu učenja.

Korisniku su, uz pomoć adekvatnog interfejsa (slika 1.), ponuđene osnovne opcije kao i stablo za navigaciju kroz sadržaj. Centralni deo interfejsa je namenjen za prikazivanje sadržaja. Sistem bira adekvatan način za prikaz sadržaja trenutnom korisniku na osnovu njegovog stila učenja. Prečice za prikaz ostalih stilova se postavljaju u *toolbar*-u za izbor stilova. Ponuđeni su sledeći stilovi:

- *Tekstualna lekcija*. Predstavlja najjednostavniju varijantu prikaza sadržaja namenjenu učenicima koji najbolje usvajaju materijal tako što ga jednostavno čitaju.

- *Animacije*. Učenicima kojima najviše odgovara vizuelno učenje prezentuje se odgovarajuća animacija koja prikazuje pojedine koncepte.



Slika 1. Korisnički interfejs iWeaver-a

- *Interaktivni sadržaj*. Ova varijanta sadržaja namenjena je učenicima koji bolje usvajaju gradivo pomoću aktivnog stila učenja. Na primeru *switch* naredbe, učenik može ručno postavljati *break* izraz tako što će manuelno podešavati položaj naredbe u okviru koda.
- *Audio sadržaj*. Namenjena je učenicima koji gradivo najbolje usvajaju kroz slušanje sadržaja. Materija se prezentuje u audio formatu (napr. snimljena *PowerPoint* prezentacija).

Sadržaj koji se uči je podeljen u module (*modules*) koji su dalje podeljeni na jedinice (*units*). Nakon što pređe neku od jedinica, učenik može da odabere da je ponovi ali uz upotrebu drugog stila. Ukoliko učenik odabere prelazak na narednu jedinicu, od njega se traži da oceni varijantu prikaza prethodno pređenog nastavnog sadržaja na osnovu njegovog subjektivnog mišljenja o efikasnosti. Takođe se od učenika traži da oceni svoj napredak pri učenju i opšti utisak o okruženju za učenje.

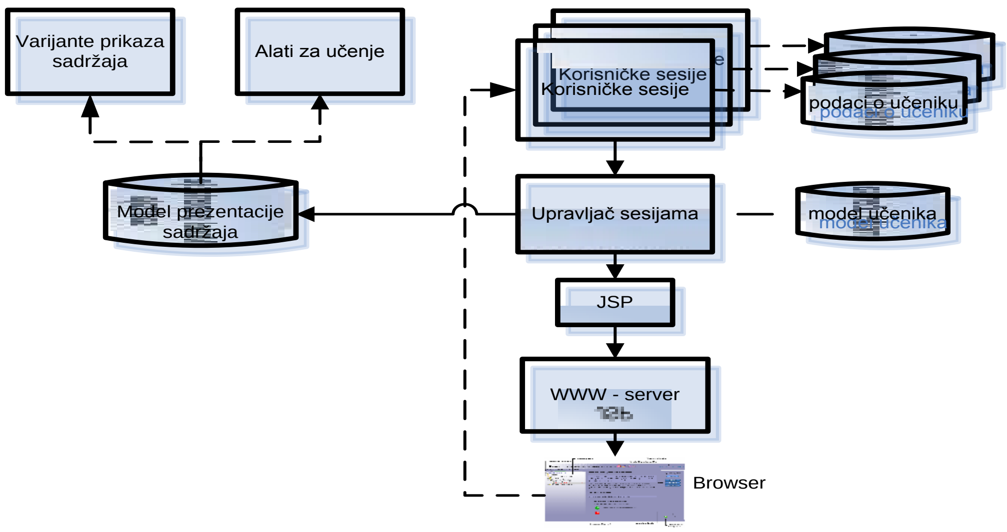
Arhitektura sistema - Arhitektura sistema *iWeaver* [37] je predstavljena na slici 2. Učenik se prijavljuje na sistem preko standardnog veb browsera i pokreće se sesija u kojoj se čuvaju svi relevantni podaci (trenutni stil prikaza, opcije navigacije, upotreba alata, itd).

Upravljač sesijama (*session manager*) je realizovan kao servis koji neprekidno sakuplja podatke kroz sesije učenika. Model učenika se analizira i upoređuje sa modelom prezentacije sadržaja (*Content representation model*). Zatim se pronalazi najbolja kombinacija prikaza sadržaja i alata koja se preporučuje učeniku.

Model učenika definiše stil učenja svakog učenika. Sistem ne uzima u obzir druge faktore, kao što su prethodno znanje i ciljevi učenja (učenici bez znanja iz objektno-orijentisanog programiranja).

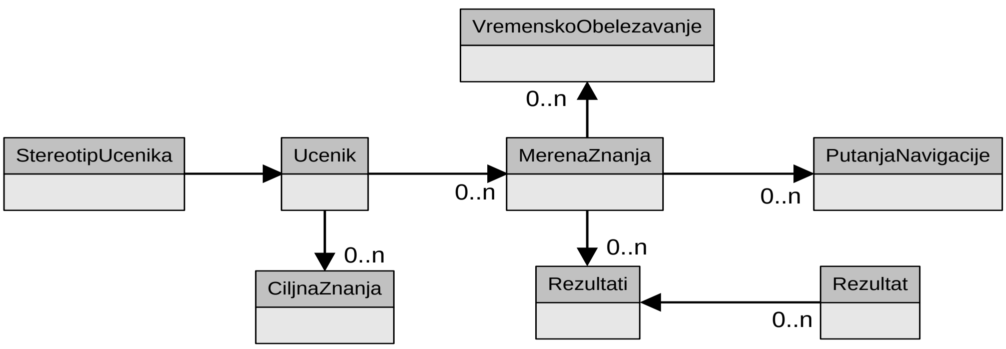
Sistemu iWeaver nedostaje upotreba tehnologija semantičkog veba kojima bi se postigla lakša ponovna upotreba materijala i omogućilo dodavanje novih kurseva kao i opcija personalizacije.

Multitutor - Multitutor je onlajn okruženje za razvoj proizvoljnih kurseva E-učenja [32]. Dizajniran je kao klijentsko-serverski sistem koji koristi ontologije za prikaz osnovnih elemenata sistema. Multitutor omogućuje kreiranje i pohađanje neograničenog broja kurseva tako što predavač definiše poglavlja, lekcije i testove za svoj kurs. Sistem omogućuje učenicima da koriste materijal i testiraju svoje znanje nakon toga, i generiše preporuku materijala u cilju postizanja boljih rezultata. Generisanje preporuka se vrši na osnovu istorije pristupa i prethodnih rezultata učenika.



Slika 2. Arhitektura sistema *iWeaver*

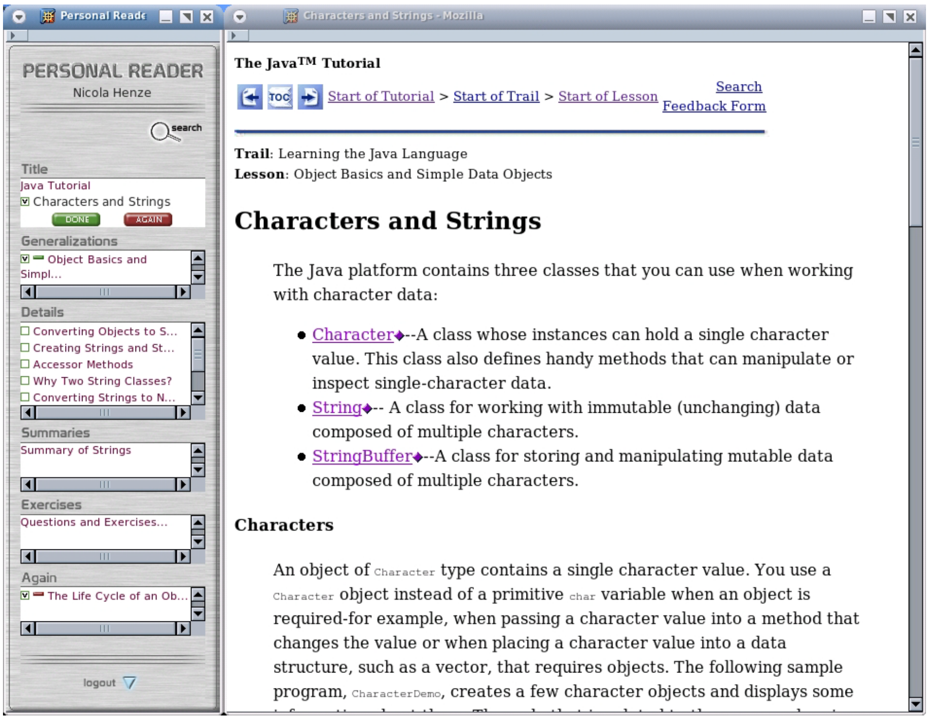
Primer ontologije modela učenika sistema *Multitutor* dat je na slici 3 [32]. Klasa *učenika* sadrži objektivne informacije o učeniku. Kada se učenik registruje u sistemu da bi pohađao kurs on/ona mora da popuni upitnik čime se omogućuje sistemu da postavi incijalne vrednosti u model učenika. Klasa *CiljnaZnanja* povezuje delove ontologije koji ne zavise od domena sa samim ontologijama domena. Osim toga sistem dozvoljava da učenik pohađa više kurseva preko Multitutora, od kojih svaki poseduje svoju ontologiju domena. Kao rezultat, model učenika sadrži početne slojevite podatke u klasi *CiljnaZnanja* i oni su kategorizovani u vidu stereotipa definisanih u klasi *StereotipUčenika.* Tokom vremena, aplikacija ažurira *CiljnaZnanja* i time procenjuje nivo učenikovog znanja. Konkretne vrednosti se čuvaju u klasi *MerenaZnanja*, i svaka od njih je predstavljena kao skup *Rezultata*. Tokom interakcije učenik-sistem prati se navigacija učenika kroz nastavni materijal i vreme provedeno na savladavanju svakog pojedinačnog koncepta. Ti podaci se zatim koriste sa ocenama učenika u cilju adaptivne personalizacije narednog nastavnog materijala.



Slika 3. Primer ontologije modela učenika Multitutora

Multitutor predstavlja uspešnu realizaciju okruženja za E-učenje, međutim iz realizacije su izostavljene brojne potencijalne mogućnosti personalizacije nastavnog materijala.

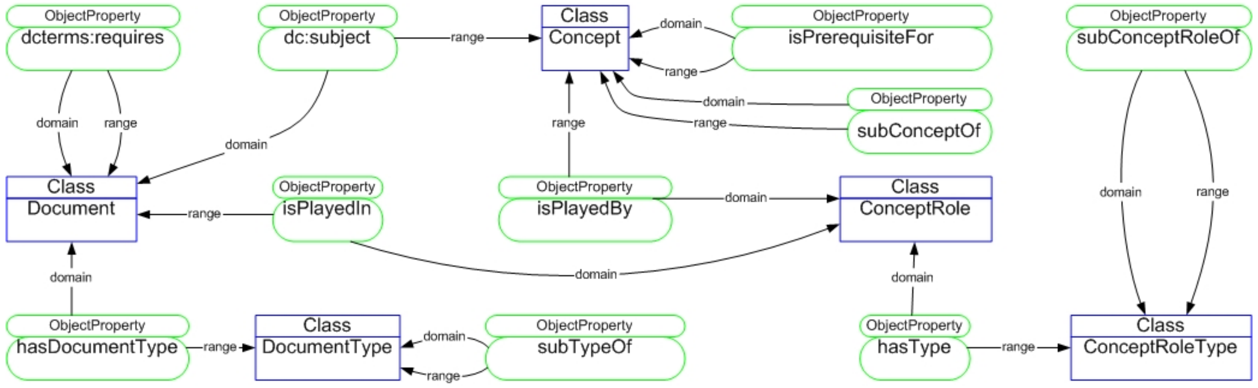
The Personal Reader - *The Personal Reader* predstavlja važan rezultat primene tehnologija semantičkog veba u domenu E-učenja [14]. Sistem nudi okvir za dizajn [15], implementaciju i održavanje veb sadržaja, podržane opcijama personalizacije za svakog pojedinačnog učenika. Arhitektura sistema je zasnovana na jeziku RDF i ontologijama za razmenu informacija o nastavnim resursima, domenu i učenicima. Resursi su definisani uz pomoć ontologija dok su upiti nad bazom i opcije adaptacije prikazani uz pomoć jezika TRIPLE. Autori su koristili tehnologije semantičkog veba za automatsko generisanje hiperlinkova u sistemu (Slika 4). Definisane su ontologije i metapodaci za tri tipa resursa: ontologije domena (*domain ontology*), ontologije korisnika (*user ontology*) i ontologija za praćenje korisničkih sesija (*observation ontology*). Međutim, strategije personalizacije nastavnog materijala nisu definisane pomoću ontologija sistema. Za izgradnju sistema primenjen je pristup zasnovan na logici generisanja obrazovne hipermedije uz pomoć jezika TRIPLE.



Slika 4. Personal Reader

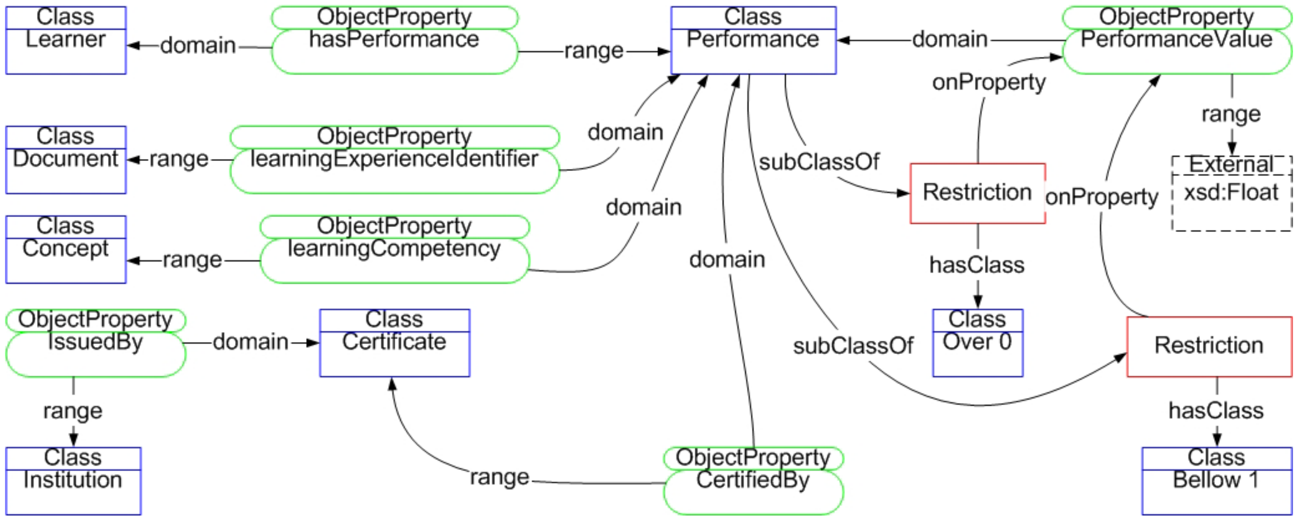
Ovo rešenje personalizovanog sistema sadrži nastavni materijal definisan metapodacima u okviru ontologije domena. U cilju personalizacije prikaza nastavnog materijala, definisana je ontologija za modeliranje učenika i ontologija za praćenje korisničkih sesija koja prati i beleži interakciju učenika sa sistemom. Svaki servis sistema za personalizovano učenje se sastoji od pravila adaptacije (IF-THEN oblika) i ima jasno definisanu svrhu adaptacije. Sistem takođe sadrži ontologiju domena (ontologija dokumenata) prilagođenu hipermedijalnom okuženju kao skup prikaza dokumenata i koncepata u sistemu (slika 5).

Klasa *Dokument* se koristi za definisanje lekcije (koncepta) koja sadrži više nastavnih resursa (tekstualnih ili grafičkih fajlova). Ontologija dokumenata je kreirana da naglasi funkciju nastavnih resursa u sistemu, da definiše raspored prikaza dokumenata kao i uloga pojedinih koncepata u nastavnom procesu. Takođe, definisana je i hijerarhija koncepata, dokumenata i uloga koncepata.



Slika 5. Ontologija dokumenata sistema *Personal Reader*

Na slici 6 je prikazana ontologija profila učenika definisanog u sistemu Personal Reader. Ona prikazuje vezu klase učenika (*Learner*) i klase za praćenje napretka učenika (*Performance*). Sistem prati pristup učenika određenim dokumentima i konceptima, čime se učenici usmeravaju na nove (neposećene) koncepte i dokumente. Nedostatak sistema je što se modeluje samo minimalan broj osobina učenika čime je onemogućena složenija personalizacija u sistemu.

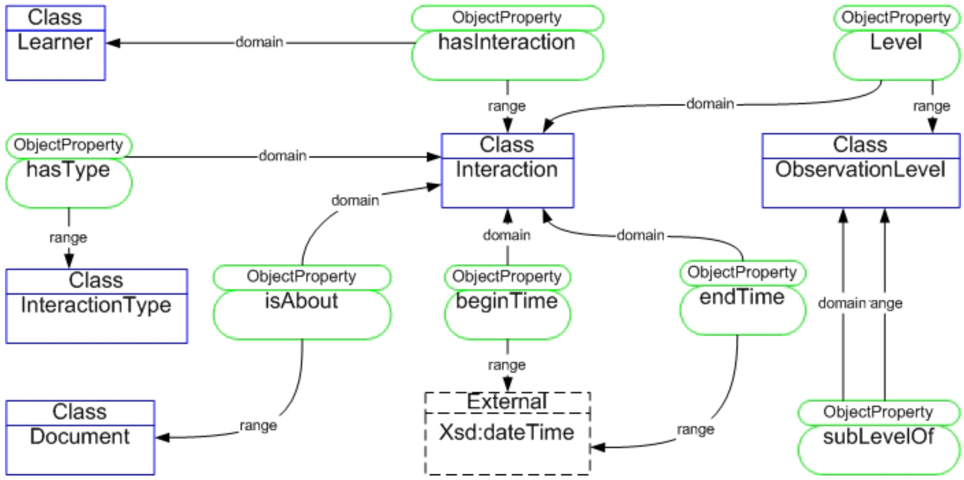


Slika 6. Ontologija profila učenika sistema Personal Reader

Slika 7. prikazuje ontologiju za praćenje korisničkih sesija (*ontology for observations*). Ona sadrži podatke o interakciji učenika sa određenim dokumentom: pristup (*access*) materijalu, postavljanje markera (*bookmark*), obeležavanje (*annotate*) materijala, rešavanje zadataka (*exercise*), itd.

Autori uvode i ontologiju koja se koristi za opis strukture elemenata neophodnih za vizualizaciju kao i sisteme pravila koja se koriste za postavljanje upita nad informacijama sadržanim u ontologijama (prikazanim u jeziku TRIPLE).

Personal Reader generiše personalizovano korisničko okruženje za prikaz nastavnog materijala, ali se sva personalizacija obavlja na osnovu praćenja poseta nastavnim resursima a ne koristi se ni jedan složeniji mehanizam za generisanje preporuka niti personalizacije kao što je identifikacija stilova učenja. *Personal Reader* koristi nastavne resurse sa besplatno dostupnog tutorijala (*Sun Java Tutorijal*), stoga nedostaje posebno razvijeni nastavni material prilagođen studentima.



Slika 7. Ontologija za praćenje korisničkih sesija

4. Zaključak

U radu je predstavljeno nekoliko karakterističnih primera interaktivnih sistema za E-učenje. Pri realizaciji ovih sistema korišćeni su neki od opštih trendova dizajna i razvoja softvera. Prikazani su tutorski sistemi koji prilagođavaju nastavni materijal specifičnim stilovima učenja, kao i sistemi koji koriste različite tehnike za generisanje preporuka sa ciljem da preporuče učeniku odgovarajuće onlajn aktivnosti na osnovu njihovih potreba, želja, znanja i putanja kretanja kroz nastavni materijal drugih učenika sa sličnim karakteristikama.

Opšti trend je upotreba elemenata veštačke inteligencije u cilju personalizacije sistema i prilagođavanja korisničkog interfejsa i nastavnog materijala svakom pojedinačnom korisniku. Elementi semantičkog veba se takođe često upotrebljavaju u ovim sistemima jer se njihovom upotrebom postiže standardizacija i omogućuje ponovna upotreba pojedinih komponenti sistema.

Bibliografija

[1] **Y. Alsultanny.** e-Learning System Overview based on Semantic Web. *The Electronic Journal of e-Learning 4 (2),* 2006, 111 – 118.

[2] **L. Aroyo, R. Mizoguchi.** Process-aware Authoring of Web-based Educational Systems. *In: Proceedings of the International Workshop on Semantic Web and Web-based Education SWWL, Velden, Austria*, 2003, 212-221.

[3] **J. Cardoso.** The Semantic Web Vision: Where are We?, *IEEE Intelligent Systems, 22 (5),* 2007, 84-88.

[4] **B. Chandrasekaran, J.R. Josephson, V.R. Benjamins.** What Are Ontologies, and Why Do We Need Them?, *IEEE Intelligent Systems, 4 (1),* 1999, 20-26.

[5] **Y.L. Chi.** Ontology-based curriculum content sequencing system with semantic rules. *Expert Systems with Applications, 36,* 2009, 7838–7847.

[6] **F. Coffield, D. Moseley, E. Hall, K. Ecclestone.** Should we be using learning styles? What research has to say to practice. *Learning and Skills Research Centre*, London, England, 2004.

[7] **S. Dehors, C. Faron-Zucker.** QBLS: A semantic Web Based Learning System. *In: Proceedings of the World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications,* 2006, 795-802.

[8] **V. Devedžić.** Semantic Web and Education. *Springer Science, New York,* 2006.

[9] **P. Dolog, W. Nejdl.** SemanticWeb Technologies for the Adaptive Web. *The Adaptive Web, LNCS 4321, Springer-Verlag Berlin Heidelberg,* 2007, 697–719.

[10] **R. Dunn, K.Dunn, M.E. Freeley.** Practical applications of the research: responding to students’ learning styles-step one. *Illinois State Research and Development Journal*, 21(1), 1984, 1–21.

[11] **R. Farzan, P. Brusilovsky.** Social navigation support in a course recommendation system. *In: Proceedings of 4th International Conference on Adaptive Hypermedia and Adaptive Web-based Systems, Dublin*, 2006, 91–100.

[12] **J.T. Fernández-Breis, D. Castellanos-Nieves, J. Hernández-Franco, C. Soler-Segovia, M. C. Robles-Redondo, R. González-Martínez, et al.** A semantic platform for the management of the educative curriculum. *Expert Systems with Applications*, 39(5), 2012, 6011–6019.

[13] **K. Hammouda, M. Kamel.** Data mining in e-learning. *In: Samuel Pierre (Ed.), E-Learning Networked environments and architectures: A knowledge processing Perspective Springer Book Series: Advanced Information and Knowledge Processing*, 2006, pp. 374–402.

[14] **N. Henze.** Personal Readers: Personalized Learning Object Readers for the Semantic Web. *In: 12th International Conference on Artificial Intelligence in Education, AIED'05, Amsterdam, The Netherlands.* 2005, 274-281.

[15] **N. Henze, P. Dolog, W. Nejdl.** Reasoning and Ontologies for Personalized E-Learning in the Semantic Web. *Educational Technology & Society,* 7 (4), 2004, 82-97.

[16] **J. Janssen, B. Van den Berg, C. Tattersall, H. Hummel, R. Koper.** Navigational support in lifelong learning: enhancing effectiveness through indirect social navigation. *Interactive Learning Environments*, 15(2), 2007, 127–136.

[17] **D. Kelly, B. Tangney.** Prediciting learning characteristics in a multiple intelligence based tutoring system. *Berlin: Springer-Verlag*, 2004, 9–30.

[18] **A. Klašnja-Milićević, B. Vesin, M. Ivanović, Z. Budimac.** E-learning personalization based on hybrid recommendation strategy and learning style identification. *Computers & Education,* 56, 2011, 885–899.

[19] **D. Kolb.** Individuality in learning and the concept of learning styles. In: *Experiential learning Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.* 1984, 61–98.

[20] **E.J.R. Koper.** Increasing learner retention in a simulated learning network using indirect social interaction. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 8(2), 2005, 18–27.

[21] **A. Kristofic.** Recommender system for adaptive hypermedia Applications. In: *Proceeding of Informatics and Information Technology Student Research Conference, Bratislava,* 2005, 229–234.

[22] **M.C. Lee, D. Yen Ye, T.I. Wang.** Java Learning Object Ontology. In: *Proceedings of the Fifth IEEE International Conference on Advanced Learning Technologies,* 2005, 538-542.

[23] **S.M. Parvez, G.D. Blank.** Individualizing tutoring with learning style based feedback. *Intelligent Tutoring Systems 9th International Conference, Montreal, Springer*, 2008, 291–301.

[24] **C.I. Peña, J.L. Marzo, J.L. de la Rosa.** Intelligent agents in a teaching and learning environment on the web. *In: IEEE International Conference on Advanced Learning Technologies*, 2002, 21–27.

[25] **E. Popescu, C. Badica, P.Trigano.** Rules for learner modeling and adaptation provisioning in an educational hypermedia system. In: *Ninth international symposium on symbolic and numeric algorithms for scientific computing,* 2007, 492–499.

[26] **P. Resnick, N. Lacovou, M. Suchak, P. Bergstrom, J. Riedl.** GroupLens: an open architecture for collaborative filtering of netnews. In: *Proceedings of ACM Conference on Computer Supported Cooperative Work, Chapel Hill, NC,* 1994, 175–186.

[27] **C. Romero, S. Ventura, J.A. Delgado, P. De Bra.** Personalized Links Recommendation Based on Data Mining in Adaptive Educational Hypermedia Systems, *Creating New Learning Experiences on a Global Scale*, 2007, 292-306.

[28] **C. Romero, S. Ventura**. Preface. *In: Romero C. & Ventura S. (eds.), Data mining in e-learning WIT press, Southampton, Boston, UK,* 2006, pp. 3-19.

[29] **B. Ruttenbur, G. Spinkler.** eLearning the Engine of the Knowledge Economy, *Morgan Keegen co, inc*. 2000.

[30] **M.A. Sicilia, M.D. Lytras, S. Sances-Alonso, E. Garcia-Barriocanal, M. Zapata-Ros.** Modeling instructional-design theories with ontologies: Using methods to check, generate and search learning designs. *Computers in Human Behavior,* vol. 27, 2010, 1389-1398.

[31] **S. Sosnovsky, A. Mitrovic, D.H. Lee, P. Brusilovsky, M. Yudelson, V. Brusilovsky.** Towards Integration of Adaptive Educational Systems: Mapping Domain Models to Ontologies. *In: Proceedings of the 6th International Workshop on Ontologies and Semantic Web for E-Learning at ITS,* Montreal, Canada, 2008, 60-64.

[32] **G. Šimić.** The multi-courses tutoring system design. *Computer Science and Information Systems – ComSIS, 1*(1), 2004, pp. 141–155.

[33] **T.Y. Tang, G. McCalla.** Smart recommendation for an evolving e-learning system: architecture and experiment. *International Journal on e-Learning*, 4(1), 2005, 105–129.

[34] **B. Vesin, M. Ivanović, A. Klašnja-Milićević. Z. Budimac.** Protus 2.0: Ontology-Based Semantic Recommendation in Programming Tutoring System, *Experts systems with application* Vol 39, 2012, 12229–12246.

[35] **H.C. Wang, T.Y. Li, C.Y. Chang.** A web based tutoring system with styles matching strategy for learning spatial geometry. *In: International Computer Symposium, Taipei, Taiwan,* 2004, 226–233.

[36] **C. Wolf.** iWeaver: Towards 'Learning Style'-based E-learning in Computer Science Education, *Conferences in Research and Practice in Information Technology Vol. 20, Adelaide, Australia: Australian Computer Society*, 2003, 273-279.

[37] **C. Wolf.** Construction of an Adaptive E-learning Environment to Address Learning Styles and an Investigation of the Effect of Media Choice, *PhD Thesis, RMIT University, Melbourne*, 2007.

[38] **O.R. Zaïane.** Building a recommender agent for e-learning systems. In: *Proceedings of The International Conference on Computers in Education,* ICCE'02, 2002, 55–59.

„Новац у функцији”-математички модел финансијске математике у средњој школи

Наталија Будински

Основна и средња школа са домом ученика „Петро Кузмјак“, Русинска 63, Руски Крстур

e-mail: nbudinski@yahoo.com

Апстракт. У раду је представљено на који начин се тематика новца може обрадити у оквиру средњошколске математике. Дат је пример како се за податке из реалних ситуација прави математички модел који илуструје везу између математичке теорије и штедње новца. Пример је конструисан на основу квалитативне анализе ученичких решења задатка из реалног контекста финансијске математике. За визуелизацију података и математичко моделирање смо користили Geogebra-у.

Кључне речи: математички модел, штедња новца, Geogebra

1. Увод

Према Кентовој [3] дефиницији новац се посматра као било шта што је у заједничкој употреби и опште прихваћено као средство размене или мера вредности. То је универзално средство за упоређивање и размењивање свих производа људског рада (www. sh.wikipedia.org). Новац је незаобилазна тема и због своје универзалности свако би требало да зна елементарне ствари о њему. То треба да је део елементарне културе појединца. Истраживања у којој мери су, на пример, млади који се не баве економијом упознати са елементарним знањима о новцу, као што курс или каматна стопа, нису многобројна.

2. Средњошколци и штедња новца

Да би стекли увид у знање средњошколаца у вези финансијске математике, ученицима првог и другог разреда Основне и средње школе са домом ученика „Петро Кузмјак“, смер туристички техничар, смо поставили више питања из реалног контекста финансијске математике. Туристички техничар је занимање из економско-угоститељске струке и веома је битно да ученици савладају основе финансијске математике. У самом истраживању је учествовало укупно 53 ученика. На тесту је било следећих пет питања:

Курсна листа на данашњи дан је дата у Табели 1:

Табела 1: Курсна листа

	1 € (евро)	*1 $ (амерички долар)*	*1£ британ(ска фунта)*
RSD (динар)	*110*	*85*	*131*

1. Колико је 150 евра у динарима?

2. Ако имаш 1500 динара и 150 евра, колико имаш динара?

3. Колико долара можеш да купиш за 150 евра?

4. Породица Митровић има 73425 динара прихода и следеће расходе: 30% одржавање стана и кола, 25% храна и пиће, 15% одећа, 5% забава, а остало штеди за годишњи одмор. Колико приближно треба времена да се уштеди за летовање које кошта 80000 динара?

5. Ако у банку уложиш 10000 RSD са годишњом каматом 5%, колико ћеш новца имати после 5 година, ако се камата рачуна годишње?

или

Ако у банку уложиш 10000 RSD са годишњом каматом 4%, колико ћеш новца имати после 4 године, ако се камата рачуна годишње?

Ово питања се ослањају на најосновнију, елементарну математику. Ученици су орактерисали задатке као лаке, корисне и интересантане. Међутим, прегледањем радова, утврдили смо следеће резултате приказане у Табели 2.

Табела 2: Резултати ученика

Питање	1.	2.	3.	4.	5.
Број тачних одговора (%)	92,45	81,13	60,37	47,17	18,86

Можемо приметити да је пети задатак најслабије урађен и због тога је тај задатак детаљно анализиран у даљем раду са два аспекта: у чему ученици греше и како побољшати њихово разумевање оваквих проблема.

Прегледањем радова смо утврдили две карактеристичне грешке у решавању задатка 5. Њих ћемо илустровати у даљем тексту на конкретним радовима ученика. Карактеристичне грешке у овом задатку смо анализирали и приказали на Сликама 1 и 2.

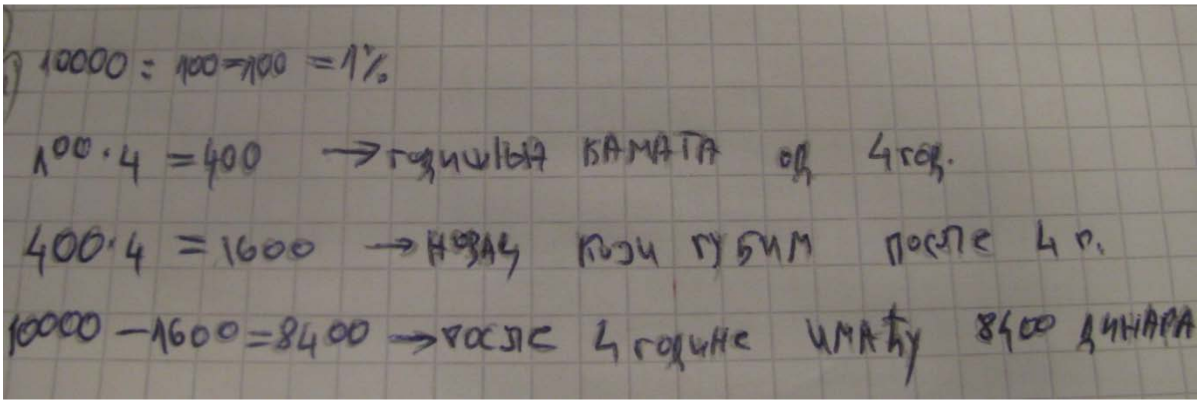
На Слици 1 је приказано решење ученика С. Ц. (први разред). Ученик је уложио доста труда у решавање задатка, али на основу одговора да се „новац приликом штедње губи“ можемо закључити да ученик С. Ц. није добро разумео саму реалну ситуацију и реалан проблем. На начин који је објаснио своје решење, он не схвата концепт штедње новца, јер према његовом одговору, приликом штедње се новац губи.

На Слици 2 видимо покушај ученице Н. Н. (други разред) да реши проблем штедње. Међутим, овде се види да, иако она има представу да се новац придодаје, ипак није направила добар математички модел. Она је покушала пропорционалним рачуном да добије решење. Њен претпостављен модел по принципу простог каматног рачуна није добар јер није добро повезала реалну ситуацију са математичким моделом. Она је тачно израчунала проценат за прву годину, али је погрешила јер је претпоставила да ће онда сваке године бити иста вредност интереса, а не увећана. Како није добро направила математички модел, самим тим није добила ни добро математичко, а ни решење реалног проблема. Иначе, прост каматни рачун је тип камаћења који је потпуно избачен из употребе.

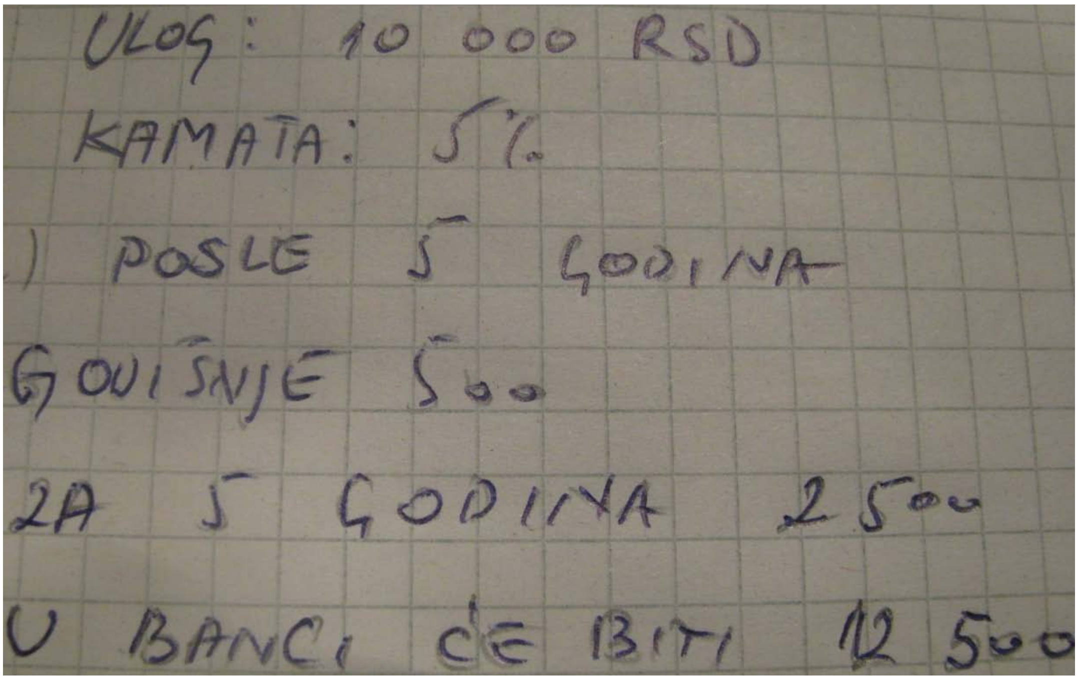
Из овога можемо видети да ученицима није најјаснији задатак везан за штедњу новца.

3. Пример моделирања проблема штедње новца у средњој школи

На основу анализе ученичких решења за пети задатак, осмислили смо пример који повезују математику са реалним контекстом новца. Пример смо узели из непосредног окружења ученика, а осим класичним начином и повезивањем са математичком теоријом, проблеме смо визуелизовали у Geogebra-и. Пример смо урадили са ученицима који су радили задатаке, да би им указали на грешке које су правили, као и да би им помогли да боље савладају наведену тему.



Слика 1. Решење ученика Ц. С.



Слика 2. Решење ученице Н. Н.

Наведени пример представља математичко моделирање реалне ситуације. Учење математике моделирањем ученицима приказује везу између математике и реалног света. Моделирање у настави математике почиње упознавањем ученика са стварним проблемом из живота и преко својих фаза води до решења проблема. Фазе моделирања су: реална ситуација, реалан проблем, математички модел, математичко решење, решење реалног проблема, провера и прихватање или одбијање модела.

Са становишта когнитивне теорије, презентовање математичких појмова кроз реалан контекст доприноси бољем разумевању јер ученицима омогућава:

- лакше усвајање стратегије за решавање проблема [4]
- учење у мањим целинама [1]
- повезивање математике и симулацију свакодневног живота [6]
- усвајање апстрактних појмова који су тежи за разумевање [2]

Увод у проблем почиње *реалном ситуацијом* штедње новца. Да би ученицима приближили сам концепт штедње, искористили смо „онлајн“ калкулатор једне банке која промовише своје кредите. Са ученицима смо на сајту банке анализирали понуду. Ученици су истраживали и постављали питања, јер им поједини термини нису били јасни. На Слици 3 је приказан калкулатор који рачуна штедњу за почетни капитал од 10000 динара. Испробавајући калкулатор, ученици су поставили питање: „На који начин се на орочени капитал од 10000 динара добија камата 862,5 динара, ако је каматна стопа 8%?“ . Наведено питање ученика представља *реалан проблем*. У овом примеру, оно је мотивација за даље изучавање проблема штедње. Ученицима је објашњено да на висину штедње у реалном случају утичу и други фактори, као на пример порез. Самим тим је могуће да се конкретно математичко решење на крају разликује од онога што ћете добити у банци. То је и наглашено, на пример на Слици 3 као „бруто камата“ и „камата минус порез“. Такође, одређена одступања могу да се појаве због начина рачунања и заокруживања бројева. У овом делу моделирања се из фазе реалне ситуације прелази на *математички модел*.

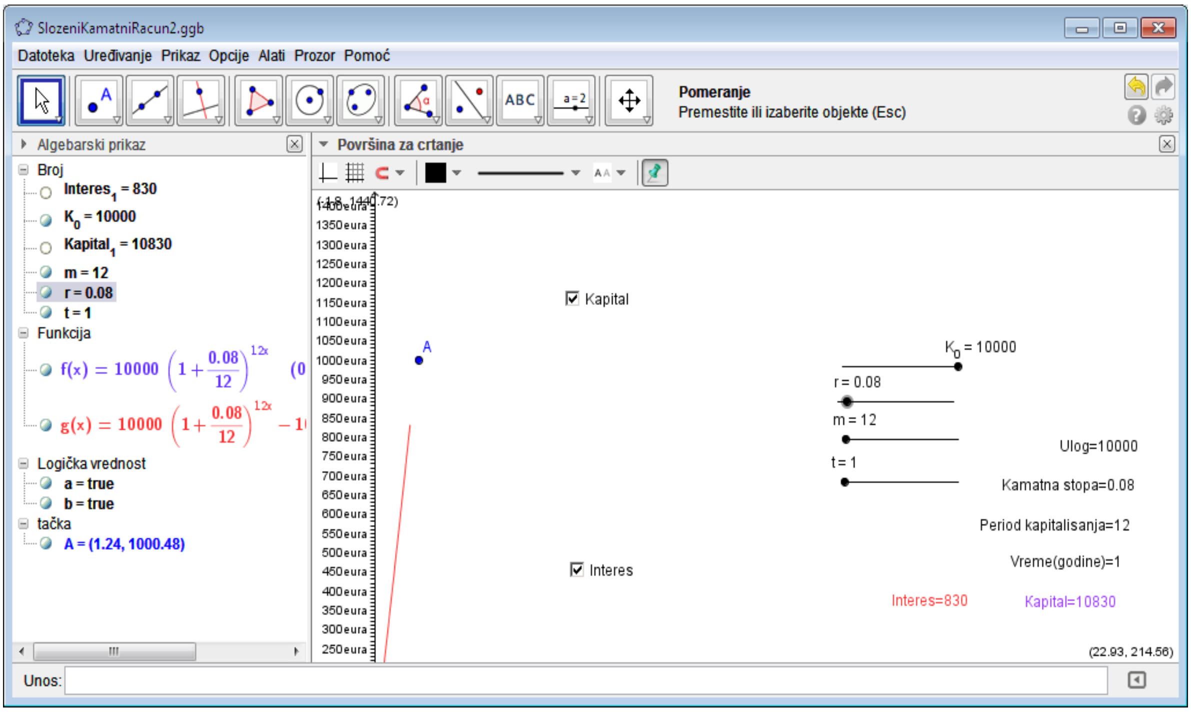
Да би се направио математички модел, ученицима треба објаснити како функционише штедња са математичког аспекта. Зато смо прво ученике упутили да рачунају пораст новца годину за годином. То може урадити на два начина познавањем основних правила процентног рачуна. Први начин је да израчуна 8% од 10000, и да тај резултат дода на улог од 10000 динара. Други начин је да израчуна 108% процента у односу на уложених 10000 динара. На исти начин ученици добију податак о висини штедње након више од једне године. Да не би направили грешку као ученица Н. Н., ученицима смо нагласили да приликом рачунања штедње за другу годину, почетни капитал се увећава за камату из прве године. То важи и за сваку следећу годину.

Међутим, добијање самог математичког модела који ће да функционише, на пример и за месечну штедњу, као на сајту банке, захтева дубље разматрање проблема. У том случају ученици су уочили зависност времена и количине новца. Закључивањем да је новац зависна, а време независна промељива они су ушли у математички контекст и дошли до појма функције. У овом случају то је експоненцијалан функција.

Слика 3. Изглед калкулатора на сајту банке

Облик функције који су тражили, а који ће бити математички модел је $K(n) = 10000 \cdot 1.08^n$. У овом случају *n* је број година, а *K* висина штедње, односно коначна вредност капитала. Даљим разматрањем по аналогији, ученици су уопштили запис функције $K(n) = K_0 \cdot (1+p)^n$, где је *p* проценат за који се увећава уложени износ, а K_0 уложени новац, односно основни капитал. За краће периоде камаћења као што је месец или дан, извели су запис функције у облику $K(n) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{m}\right)^{nm}$, где је m период камаћења.

За лакше *математичко решавање* проблема, добијени математички модел смо са ученицима приказали у Geogebra-и. Модел у Geogebra-и је приказан на Слици 4. Променом вредности параметара почетног улога, каматне стопе, периода или времена камаћења, ученици су добијали *решење реалног проблема*.



Слика 4. Модел штедње у Geogebra-и

Можемо приметити да су на Слици 4 параметри намештени тако да се поклапају са вредностима калкулатора банке (Слика 3). Упоређујући износ са сајта банке и решења добијеног уз помоћ Geogebra-е, ученици су проверили своје решење. *Провера математичког модела и решења* је веома битна у оваквим примерима, јер од ученика захтева критички осврт на цео процес доласка до решења. Њихов закључак је био са се ради о приближно истој суми новца. Једна ученица је проверила решење израчунавајући преко формуле математичког модела и дошла до закључка да се ради само о разлици заокруживања приликом рачунања каматне стопе, као и о одбијеном порезу. Она је тај закључак представила на следећи начин: „Калкулатор на сајту заокружује се на следећи начин: $1 + \frac{8}{1200} \approx 1{,}007$, а на добијени интерес порез од 1,2%“. На сајту банке није експлицитно наведено како калкулатор рачуна, а решење ученице је прихваћено из образовних разлога.

4. Закључак

Наведени пример може да допринесе развијању економске, али и математичке писмености. Посебна предност овог примера је да ученици могу да реше проблем истраживањем, а не по шеми, да у великој мери самостално долазе до решења, као и да раде са реалним подацима из свакодневних ситуација. Повезивање реалног контекста са математичким појмовима на почетку усвајња, односно приликом самог дефинисања омогућава ученицима да боље усвоје сам појам, али и да га касније примене на вишем нивоу и у сложенијим задацима, како у реалном, тако и у математичком контексту [5]. Ученици са којима је рађен овај пример су показали велику заитересованост и ангажованост, а несвакидашњи приступ учењу математике их је мотивисао и подстакао да шире истражују тему.

Успешно образовање доприноси бољем животу, а математика као битан сегмент и образовања и живота треба да допринесе томе. Применом моделирања у настави математике, ученици су у могућности да направе везу између математике коју уче на часовима са реалним контекстом. У овом случају то је новац и проблематика са којом ће се извесно срести у свом животу.

Библиоѓрафија

[1] K.A. Ericsson, W.G. Chase, & S. Faloon. Acquisition of a memory skill, *Science, 208*, 1980, pp.1181-1182.

[2] A.M. Glenberg, T. Gutierrez, J.R. Levin, S. Japuntich, M.P. Kaschak. Activity and imagined activity can enhance young children's reading comprehension. *Journal of Educational Psychology*, *96*, 2004, pp. 424-436.

[3] R. Kent. Money & Banking, 1947, Rinehart and Co. New York.

[4] A.D. Schliemann, D.W. Carraher. The Evolution of Mathematical Understanding: Everyday Versus Idealized Reasoning. *Developmental Review,* 22(2), 2002, pp. 242-266.

[5] M. Tabach, A. Friedlander. The Role of Context in Learning Beggining Algebra. In *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics.* 2008 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), edited by C. Creenes and R. Rubenstain, 2008, pp 223-232. Reston, VA: NCTM.

[6] L. Verschaffel, B. Greer, E. de Corte. Making Sense of Word Problems. *Educational Studies in Mathematics,* 42(2), 2000, 211-213.

Симпозијум МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ, Математички факултет, Универзитет у Београду, 2013, Vol.IV(1)

Иновације у настави информатике у школама кроз рад ученика на Википедији

Ђорђе Стакић
Математички факултет Универзитета у Београду, Београд, Студентски трг 16
e-mail: djordjes@matf.bg.ac.rs

Марина Нешовић
Трећа београдска гимназија, Београд, Његошева 15
e-mail: marina82nesovic@gmail.com

Иван Лазаревић
Земунска гимназија, Земун, Градски парк 1
e-mail: ilazarevic4822@gmail.com

Апстракт. Школске 2012/13. године у Трећој београдској и у Земунској гимназији у склопу наставе информатике реализован је пројекат Вики гимназијалац. Кроз предавања и практичне радионице ученици су упознали основе функционисања Википедије, највеће слободне енциклопедије. Упознали су синтаксу Медијавики софтвера, а затим су кроз семинарске радове учествовали у писању чланака за Википедију на српском језику. Један део чланака се односио на слободне теме, а други део је био везан за стандардно градиво информатике у гимназијама.

Медијавики софтвер са једноставном синтаксом за обележавање текста је погодан да се кроз њега ученици гимназије први пут упознају у склопу редовне наставе информатике у средњој школи. Запажања о успешности реализованог пројекта, утисцима ученика, перспективама и могућностима увођења Википедије у наставу информатике у школама, приказана су у овом чланку. Циљ рада је упознавање већег броја професора информатике са могућностима увођења вики алата као и Википедије у редовну наставу из овог предмета у школама.

Кључне речи: настава информатике; Википедија; практичне радионице.

1. Увод

Замисао да се све знање на свету сакупи на једном месту датира из античког доба, са тим циљем је основана библиотека у Александрији још 300 година п. н. е. Идеја за постојањем енциклопедије која није штампана је пре појаве рачунара била технички немогућа и сматрана доменом научне фантастике. Међутим, са појавом рачунара, и касније интернета, то виђење се мења и настале су техничке могућности за то, и данас се многе енциклопедије налазе на мрежи, а Википедија је највећа међу њима. Осим тога, Википедија је и настала на интернету, и развијала се заједничким уређивањем великог броја корисника на мрежи.

Идеја о могућности увођења Википедије у наставу рачунарства и информатике у средњој школи се појавила приликом обраде наставне теме „Напредно коришћење интернета“. Том приликом се као једна од препорука Завода за унапређење образовања и васпитања наводи и могућност упознавања ученика са вики алатима. Пратећи интересовања ученика и уз малу анкету на тему које сајтове посећују када траже помоћ приликом учења одлучили смо се за вики алате обзиром да се сајт Википедије на српском нашао на првом месту. Ово је био природан избор јер је Википедија на српском језику највећа енциклопедија на српском, према [5], а такође убраја се у значајне ресурсе на интернету на српском језику, према [8] и [10].

Захваљујући колегама из Викимедије Србије и пројекту Вики гимназијалац идеја је успешно реализована и резултати су вишеструко успешни. Овим чланком су постигнути резултати и запажања стављени на увид широј академској заједници, пре свега професорима гимназија и других школа који би ово могли да примене у свом раду.

2. Википедија

Википедија је слободна енциклопедија коју развијају многи крисници уз помоћ Медијавики софтвера. Основана је јануара 2001. године на енглеском језику, у септембру 2013. имала је више милиона чланака на 285 језика, од чега 4,3 милиона чланака само на енглеском језику.

Верзија Википедије на српском језику се налази на веб адреси http://sr.wikipedia.org/ и основана је фебруара 2003. године, у септембру 2013. је имала око 224 хиљаде чланака и по том критеријуму била је на 27. месту међу свим Википедијама. Велику популарност у региону Википедија на српском језику је потврдила и наградом са Веб Феста 2009. године када је заслужно добила признање за најбољи едукативни сајт.

Са око 17 милиона прегледа месечно сајт Википедије заузима седмо место по посећеноти у Србији. Сви ови репрезентативни показатељи су нам били довољан мотив да и саме ученике заинтересујемо и обучимо их да из улоге посматрача и само читаоца Википедијиног садржаја пређу у активног читаоца и уредника чланака и тиме допринесу заједници и поделе своја сазнања са другима.

Више детаља о Википедији може се наћи и на српском језику, хронолошки у радовима [6], [4] и [3].

3. Медијавики софтвер

Вики принцип подразумева да сви посетиоци страница могу да учествују у њиховом креирању и промени. То је релативно нова информатичка тековина настала са развојем интернета. Да би се ово технички омогућило и усавршавало за потребе Википедије је 2002. године креиран Медијавики софтвер. Овај софтвер је настао и развија се под GNU GPL лиценцом, што подразумева да се бесплатно користи, али и да је његов изворни код, иначе написан у језику PHP, свима доступан. Осим тога карактерише га вишејезичност интерфејса, то значи да се системске поруке и друге појединости могу преводити и преводе се на већи број језика, између осталих и на српски.

Писање чланака на Википедији захтева познавање основних елеманата вики синтаксе, као што је на пример навођење наслова, унутрашњих и спољашњих веза, укључивање слика, али и начин приказа текста, додавање табела, категорија и слично. Вики синтакса је добро документована, интуитивна, и погодна за први сусрет ученика са сложенијим системима за обележавање текста као што су на пример HTML, LaTeX и други. Приликом креирања странице на Википедији текст се куца у едитору где је могуће многе од потребних алата видети међу алаткама, чиме је уређивање додатно олакшано. Осим тога пре снимања странице могуће је видети претпреглед у коме се прикаже будући изглед странице без снимања. То помаже да се све потребно исправи и допуни пре него што постане видљиво свим корисницима.

Свака измена се чува у историји странице и пролази кроз верификацију. Историја странице је видљива, па се на тај начин може пратити развој неке енциклопедијске теме кроз време. Постоји бројни механизми који одржавају стабилност Википедије. Осим верификације измена, ту је и могућност закључавања страница, блокирање непожељник корисника, брисање увредљивог или непожељног садржаја и друго. Садржај Википедије је под CC (Creative Commons) лиценцом, то поједностављено речено омогућава слободно копирање и мењање садржаја уз навођење извора.

Медијавики софтвер има добру техничку подршку за писање програмског кода у тексту или за писање математичких формула. На свакој страници аутоматски се генерише њен садржај. Да би се аутори лакше усагласили око формулације текста за сваку страницу постоји и страница за разговор. Како се показао као успешан колаборативни софтвер Медијавики се не користи више само за Википедију, него га свако може инсталирати као вики сајт и користити његову техничку основу за сопствене потребе. Данас постоји велики број сајтова који су направљени на вики принципу и служе за разне намене.

Више детаља о Медијавики софтверу може се прочитати у раду [4].

4. Пројекат Вики гимназијалац

Вики гимназијалац је едукативни пројекат Викимедије Србије који је почео да се развија 2012. године. Викимедија Србије је настала 2005. године као локални огранак Викимедијине Задужбине у Србији, и као таква промовише и подржава стварање, сакупљање и умножавање слободног садржаја на српском језику искључиво на непрофитан начин. Вики гимназијалац је настао из едукативног искуства чланова Викимедије Србије у раду са студентима и сарадњи са факултетима од 2005. године (када је презентован рад [7], и касније [5]). Реализацијом и осмишљавањем едукативних активности Викимедије Србије бави се њен Одбор за академске институције. За разлику од Вики студента овај пројекат је намењен првенствено гимназијалцима и њиховим професорима. Лого Викигимназијалца приказан је на слици 1.

Слика 1. Лого Викигимназијалца

Идеја пројекта је:

- упознавање ученика са Википедијом, њеним значењем, предностима и пре свега уређивањем
- подстицање професора на коришћење модерног приступа у настави
- напредно коришћење интернета

Како је пројекат намењен раду у школама карактеришу га следећи васпитни, образовнани и функционални циљеви.

Васпитни циљеви пројекта:

- развијање свести код ученика о проблематици ауторских права
- развијање свести о етичким нормама
- развијање свести о поштовању права на приватност

- развијање способности за правилно писање и изражавање и поштовање правила лепог понашања у комуникацији

Образовни циљеви пројекта:

- упознавање ученика са коришћењем Медијавики софтвера
- разумевање значаја глобалне енциклопедије
- стицање и проширивање знања кроз читање садржаја са Википедије

Функционални циљеви пројекта:

- оспособљавање ученика да на правилан начин користе и уређују Википедију
- развијање способности ученика да повезују научена знања из различитих наставних дисциплина
- подстицање ученика на примену Википедије у другим наставним областима кроз домаће задатке и реферате

Сам пројекат у потпуности задовољава задатке наставног процеса.

О коришћењу Википедије у едукативне сврхе може се видети више детаља у радовима [1], [2] и [9].

5. Реализација пројекта

Пројекат Вики гимназијалац је први пут почео да се реализује у априлу 2012. године у једном одељењу Седме београдске гимназије када су ученици на часу географије први пут упознали рад на Википедији. Пројекат се затим током школске 2012/2013 године проширио на укупно три београдске гимназије:

- Трећа београдска гимназија
- Седма београдска гимназија
- Земунска гимназија

Док се у Седмој београдској гимназији упознавање са Википедијом одвијало на часовима географије и енглеског језика, у Трећој и Земунској гимназији се упознавање са Википедијом одвијало на часовима информатике.

У сваком одељењу ученици су у форми предавања - презентације прво упознати са тим шта је Википедија. Већина ученика је до тада само чула или понекад користила Википедију као извор информација, али нису и уређивали чланке. После овог дела ученици су у другом делу имали прилику да науче основе уређивања Википедије кроз упознавање са синтаксом Медијавики софтвера. Кроз презентацију и практичне примере могли су да науче како се може уређивати чланак на Википедији. За реализацију ова два дела од технике је било потребно само један рачунар са пројектором и интернетом. Време потребно за реализацију је један или два школска часа, у зависности од процене самог предавача и других околности.

У трећем делу или етапи рада са ученицима, сваки ученик је добијао списак једноставних практичних задатака које је требало да уради на Википедији, на својој корисничкој страници. Током ове вежбе ученици су пролазили кроз све техничке детаље који су им потребни да би написали квалитетан еницклопедијски чланак. На пример, обучени су како да напишу наслове, поднаслове, подебљан и курзиван текст, како се укључују слике, како се додају категорије, унутрашње и спољашње везе, како се наводе референце итд. Од технике ово је подразумевало да сваки ученик ради за посебним рачунаром који има интернет. Време потребно за реализазију је било један школски час. Сваки ученик је креирао налог на Википедији и са својим налогом је вршио све измене. У случају када нема довољно рачунара ученици могу да раде заједно на једном налогу, или да раде на смену са једног па са другог налога, ако предвиђено време то дозвољава.

Сви материјали потребни наставницима и ученицима за рад, као што су презентације и списак задатака, могу се наћи и онлајн на Википедији на месту предвиђеном за то. Ту су и правила која ученицима и професорима олакшавају рад на Википедији.

Након ове обуке ученици су технички оспособљени за унос чланака на Википедију. Идеја је била да схвате да не морају бити само корисници Википедије као обични читаоци него да могу да учествују у стварању слободног знања. Након овога, у следећој етапи, ученици су добили могућност да са свог налога на Википедији напишу чланак на одређену тему као неку врсту домаћег задатка или семинарског рада. Ученицима је дат неки разуман рок за израду семинарског рада, еницклопедијског чланка, у складу са свим правилима Википедије. Рок је обично две недеље, али може да се продужи на месец дана или дуже ако професор процени да су ученици оптерећени другим предметима и обавезама у том периоду.

Том приликом је рађено са 137 ученика и креирано је 108 чланака у три београдске гимназије, тачан број одељења, ученика и чланака по гимназијама приказан је табелом 1.

школа	број одељења	број ученика	број чланака
Трећа београдска гимназија	2	64	71
Земунска гимназија	1	11	6
Седма београдска гимназија	2	62	31

Табела 1. Статистика

У првој итерацији у свим гимназијама ученици су радили чланке тимски - у паровима на тему по слободном избору која је њима била занимљива, а хтели су да са другима поделе своја сазнања, ставове и интересовања. Ученици су своје чланке повезивали са наставом из других наставних предмета чија тематика одговара садржајима који се обрађују чиме је постигнута корелација информатике са другим наставним предметима, што се преко вики алата показало веома успешно. Чланци су писани ван главног именског простора у делу Википедије предвиђеном за семинарске радове, и сваки је био означен на предвиђени начин да би се видело да је у питању семинарски рад и би се знало којој групи ученика припада.

Како је интересовање ученика да допринесу енциклопедији порасло, у Трећој београдској гимназији је реализована и друга радионица где су ученици добили задатак да креирају чланке и обраде теме које се тичу наставног градива из предмета рачунарство и информатика. Том приликом је креирано 20 чланака на тему програмских језика Pascal и Delphi, а за које нису постојали адекватни чланци на српском језику.

Креирајући чланке ученици су користили различите изворе да дођу до занимљивих и корисних података за дату област, на пример белешке са часова наставе, али и уџбеник, стручну литературу у електронском облику, сличне чланке са Википедија на другим језицима итд. Навођење извора и референци у чланцима на Википедији је један од основних принципа који обезбеђује провериљивост информација и тиме поузданост Википедије. Трудили су се да својим чланцима приближе појмове будућим читаоцима, а неки од тих појмова су до тада и њима били нејасни и страни. Ученици су за свој рад на Википедији били адекватно награђени оценом у дневник.

6. Утисци ученика

Вики иновација у настави рачунарства и информатике код ученика је одлично прихваћена. Мотивација да напредују у изради својих чланака је додатно порасла самим сазнањем да могу изазвати и дивљење других предметних професора обрадом наставних тема које су предмет изучавања за те наставне предемете. Наравно одушевљење ученика није могло ни да се сакрије када су презентовали чланке омиљених фудбалских клубова, омиљених јунака, када су чланцима обрађивали свој хоби и та сазнања делили са другим корисницима Википедије.

Ученицима се допао и тимски рад како на самим чланцима са другим ученицима у одељењу, тако и тимски рад са свим другим учесницима у стварању чланака на Википедији. Ово их је учинило корисним члановима шире заједнице. Многи од њих су на крају били одушевљени тиме како уређивање Википедије може бити занимљиво и лако.

7. Закључак

Техничко оспособљавање кроз које су ученици прошли спада у техничко описмењавање које им може помоћи да касније током школовања овладају и сложенијим системима за обележавање текста као што су на пример HTML, LaTeX и други. Реализовани пројекат се потпуно уклапа у обраду наставне теме „Напредно коришћење интернета“ за ученике другог разреда гимназије, где се могу изучавати вики алати. Успешност пројекта реализовнаог у овим гимназијама показује да је овакав приступ изучавању вики алата могуће проширити и на све остале гимназије и да је то природан корак у увођењу вики алата у редовну наставу информатике у гимназијама. Овакав вид иновације у настави ученицима је био занимљив и користан како за даље школовање, тако и за разумевање како функционишу велики интернет системи засновани на слободном приступу као што је Википедија. Трагајући за добрим референцама за своје чланке и наводећи их на адекватан начин ученици се упућују у основе истраживачког рада што им такође може бити од користи у даљем школовању.

Библиографија

[1] **E. Jennings.** Using Wikipedia to teach information literacy. *College & Undergraduate Libraries,* 2008, 15, 4 pp 432-437.

[2] **P. Konieczny.** Wikis and Wikipedia as a teaching tool. *International Journal of Instructional Technology and Distance Learning*, 2007, 4, 1, pp 15-34.

[3] **S. Petkovska.** Upotreba Vikipedije u istraživanju. *Kultura,* 2012, 136, pp 62-84.

[4] **Đ. Stakić.** Wiki technology: Origin, development and importance. (*in Serbian*: Viki tehnologija - nastanak, razvoj i značaj). *Infoteka,* 2009, 10, 1-2, pp 69-78 (Serbian), pp 61a-69a (English)

[5] **Ђ. Стакић.** Википедија и Интернет у настави математике и информатике. *Saopštenja sa konferencije : Sekcija VI (istorija, učenje, metodika matematike) / 12. srpski matematički kongres, Novi Sad, 28. avgust - 2. septembar 2008.*

[6] **Ђ. Стакић, С. Весић, Ф. Маљковић.** Википедија - слободна енциклопедија. *14. телекомуникациони форум Телфор*, 2006, pp 68-70.

[7] **Đ. Stakić.** Vikipedija i ostali Vikimedijini projekti. Izlaganje na Seminaru za računarstvo, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, 29. decembar 2005.

[8] **D . Vitas, Lj. Popović, C. Krstev, I. Obradović, G. Pavlović-Lažetić, M. Stanojević.** Српски језик у европском информационом друштву. *The Serbian Language in the Digital Age,* Springer Berlin Heidelberg, 2012, pp 10-19.

[9] **K. Wannemacher.** Experiences and perspectives of Wikipedia use in higher education. *International Journal of Management in Education,* 2011, 5, 1, pp 79-92.

[10] **D. Radovanović.** Elektronsko izdavaštvo u akademskom okruženju – nove forme i izazovi. Magistarska teza, Univerzitet u Beogradu, 2006.

Симпозијум МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ, Математички факултет, Универзитет у Београду, 2013, Vol.IV(1)

Електронски портфолио у настави математике

Марија Лекић

Факултет за саобраћај, комуникације и логистику, Доње Луге бб, Беране, Црна Гора

e-mail: dlekic@t-com.me

Вучић Дашић

Природно-математички факултет, Џорџа Вашингтона бб, Подгорица

e-mail: z_vebo@yahoo.com

Апстракт. У процесу реформе школства све чешће се користе алтернативни облици процјене знања. Један начин за то је употреба електронског портфолиа. Суштина е-портфолиа јесте да обезбиједи „богатију" слику способности ученика (студента). Једна од предности образовања заснованог на web-у је могућност прилагођавања наставе потребама и могућностима студента. Увођењем информационих технологија темпо, редослед, садржај и метод подучавања могу да се прилагоде на начин који најбоље одговара студентовом стилу учења, интересовањима и циљевима. Имајући ово у виду, у раду ћемо приказати употребу овог начина процјењивања у образовном систему, са посебним освртом на наставу математике.

Кључне ријечи: е-портфолио; образовање; персоналне карактеристике; настава математике.

1. Увод

Е-портфолио се све више препознаје као важан алат за ученике, студенте, наставнике и академске установе. Електронски портфолио, познат и као е-портфолио или дигитални портфолио, је колекција електронске евиденције која се додјељује кориснику и којом корисник управља, обично на web-у. Таква електронска евиденција може садржати текст, електронске фајлове, слике, мултимедију, блогове и хиперлинкове. Е-портфолији су уједно демонстрација корисникових способности и платформи за самоизражавање и, ако су on-line, могу се динамично одржавати с времена на вријеме.

Проблеми који се јављају у процесу учења математике су бројни. На примјер, непознавање специфичних особина и карактеристика особе којој се знање преноси, али и особе која знање преноси, може да проузрокује неодговарајућу комуникацију и приступ, што би могло довести до демотивације, а можда и одвраћања од даљег образовања, што свакако није циљ. Када би ове особине биле познате на самом почетку школовања, проблеми у комуникацији би били смањени, вријеме потребно за упознавање сведено на мању мјеру, а процес учења би добио на квалитету.

Имајући у виду чињеницу да електронски портфолио користе људи различитих способности и компетенција, а да то, поред образовних, хоће да искористе и у разне друге сврхе, аутори су дошли до идеје да би се постојећи систем електронског портфолиа могао адаптирати у циљу спознаје тих способности. Адаптација би за резултат имала могућност процјене (од стране стручног лица) и презентовања специфичних способности и карактеристика корисника везаних за процес учења и наставе математике електронским путем, које се могу даље употријебити у том истом процесу, а ту могућност немају познатији алати за израду е-портфолиа [1].

2. Шта је е-портфолио?

Портфолији су одавно један од најважнијих алата помоћу којих умјетници приказују своје радове, способности и достигнућа. Ако узмемо у обзир да је портфолио збирка докумената који приказују напредак, развој и постигнућа неког појединца, долазимо до дефиниције електронског портфолиа: електронски портфолио је дигитални портфолио, односно дигитална збирка докумената који приказују напредак, развој и постигнућа појединца. Скраћеница „е” у називу означава употребу дигиталне технологије која омогућава прикупљање и организацију садржаја у портфолију у више различитих медијских облика (аудио, видео, графика, текст). Сврха портфолиа (електронског или папирног) је да обезбиједи богатију слику способности. Портфолио треба користити у свим фазама живота, почевши од раног дјетињства, кроз образовање, до професионалних портфолиа.

Свједоци смо промјене природе учења, као и сталних промјена оног ко учи. Из тих разлога, традиционални начин процјењивања знања све више бива замијењен алтернативним. Показатељи знања морају бити непристрасни, а могу се уочити свакодневно, кроз рјешавање разних врста проблема. Е-портфолио омогућава показивање знања насупрот сувопарном прилагању докумената, а игра важну улогу код усавршавања које се наставља кроз сваки животни аспект. Последњих година е-портфолио се све више користи у образовању. Студенти или ученици у великој мјери постају корисници е-портфолиа јер на тај начин могу да прате и документују свој рад, а све са циљем напредовања у каријери. Такође, коришћење е-портфолиа помаже студентима да развијају своју креативност, вјештину писања, као и рачунарску писменост. Због могућности увида у радове путем е-портфолиа, студенти развијају и могућност критичког мишљења, а ако се неки рад постави да га могу видјети и критиковати и остали студенти и наставници, тиме се доприноси његовом квалитету. Студенти током цијелих студија израђују свој е-портфолио и у њега уграђују нова постигнућа и напредак. Слично је и са наставницима. Имајући ово у виду, кроз е-портфолио се може пратити континуирано професионално усавршавање. Ако погледамо у којој мјери се е-портфолио користи у свијету, а све више и код нас, можемо да закључимо да је студентима и ученицима постао неизоставни „пријатељ” током цијелог образовања.

2.1. Е-портфолио студента, е-портфолио наставника, е-портфолио установе

Неке од ставки које се обично могу наћи на е-портфолиу су следеће:

- кратка биографија,
- резиме, копије важних докумената, лиценце, сертификати, тестови, скорије похађани семинари и сл.,
- приказ континуалног образовања и креативности,
- препоруке, процјене и признања,
- фотографија и сл.

Студентски е-портфолио има за циљ да представи студентов рад током образовног процеса. Његовим коришћењем студент документује своја знања и вјештине и развија способности по питању комункација, менаџмента, критичког мишљења, као и употребе мултимедија. Исти е-портфолио може послужити да се студент што боље представи будућем послодавцу. Када је у питању процес учења математике, е-портфолио би могао да садржи разне радове из овог подручја, који репрезентују студентова интересовања за овај предмет, као и његове способности. Могу се, на примјер, узети примјери задатака које је студент ријешио на оригиналан начин и тиме се он најбоље представља на свом е-портфолиу када су у питању његове вјештине решавања математичких проблема.

Е-портфолио наставника омогућава увид у лични таленат наставника. Национални одбор за стандарде професионалне наставе захтијева да искуснији предавачи имају свој е-портфолио који треба да буде национално сертификован. Неки директори, такође, захтијевају е-портфолио од наставног особља. Помоћу процеса израде е-портфолиа, наставници добијају важно искуство у избору материјала који сакупљају, као и начин да сачувају информације. Е-портфолио наставника је концизна колекција прибељешки о раду наставника и његовом усавршавању унутар и изван учионице. Наставнички е-портфолио је колекција стваралачког рада наставника. Е-портфолио је дизајниран да увелича и демонстрира таленат наставника, као и његово знање и способности везане за наставу. Путем е-портфолиа наставници могу да објављују предавања и идеје и на тај начин шире знање. Поред основног, а везано за способности везане за наставу математике, наставнички е-портфолио може садржати и следеће:

- кратак опис студената којима је наставник предавао,
- опис стила наставе и зашто се бави наставом,
- опис врсте разреда у којима је скорије предавао,
- кратак есеј о наставничкој филозофији на тему како предаје и због чега,
- копије скоријих припрема за час које су коришћене, укључујући фотографије са часа,
- студентски рад који је оцијенио наставник (власник е-портфолиа) који садржи коментаре и сл.

Е-портфолио који представља уједињење два претходно описана е-портфолиа је е-портфолио установе. Помоћу е-портфолиа студената и наставника, врши се одабир материјала који ће презентовати установу и њен рад и напредовање. На тај начин се наставници и студенти додатно мотивишу [2].

3. Проширење система електронског портфолиа за потребе учења и наставе математике

Према Блумовој теорији „Mastery learning”, успјешно учење зависи од узрочне везе између когнитивних и афективних студентових способности, квалитета процеса подучавања и резултата учења, гдје когнитивне карактеристике доприносе око 50%, афективне карактеристике утичу 25% и квалитет процеса учења учествује 25% у постигнућу. Когнитивне карактеристике обухватају интелектуалне способности, способности учења, навике и претходне резултате учења. Афективне карактеристике описују ученикoв лични став о сопственој личности и способностима [3].

Карактеристике ученика (нпр. когнитивне, афективне и сл.) које описују његов преферирани стил учења, афинитете према одређеној области, мотивацију за учење, ниво аспирације, емотивно стање и сл. могу се процјењивати тестирањем. Све ове карактеристике се временом мијењају, па би на електронском портфолиу требало да стоје информације које описују корисника у датом временском периоду, али и резултати свих претходних тестирања, како би личне карактеристике корисника биле процијењене на најбољи могући начин. Када би системи за електронски портфолио имали могућност да студент (или корисник) у сарадњи са стручним лицем добије резултате процјене ових личних особина, онда би на брз и ефикасан начин било омогућено да наставник изврши процјену студентовог (корисниковог) психолошког (или неког другог) стања везаног за предмет, па би се и наставник и студент тим резултатима даље управљали у смислу одабира и учења предмета, нивоа до ког жели и може да га изучава и сл.

Имајући ово у виду, идеја рада је увођење модула који ће директно, на е-портфолиу власника, on-line, а на основу процјене стручног лица, такође уз помоћ његовог е-портфолиа, складиштити персоналне карактеристике власника везане за његове индивидуалне могућности по питању учења математике, али и друге могућности употребљиве у његовом будућем раду. На сличан начин се могу испитати наставникове способности у процесу наставе математике.

Модул којим смо проширили могућности система електронског портфолиа назвали смо EPAM (Electronic Portfolio Adaptation Module).

Захтјеви које би модул требало да задовољи су дати у наставку.

1. креирати:
   - корисника који ће бити аутор тестова,
   - корисника или групу корисника којем (којима) ће се одговарајући тест персоналних карактеристика дати на увид и рјешавање,
   - компоненту у којој ће се креирати и презентовати тестови за процјену персоналних карактеристика,
   - табелу (у бази података) о тестовима (назив и врста теста, списак питања, списак могућих одговора, списак тачних одговора, списак одабраних одговора),
2. омогућити рјешавање тестова групи посјетилаца е-портфолиа којој су намијењени,
3. на одговарајући начин, обрадити резултате теста,
4. направити скуп резултата тестирања и
5. омогућити да се ти резултати публикују на одговарајући начин.

С обзиром да у већини система за израду електронског портфолиа већ постоји могућност креирања групе то ће нам посао бити олакшан. Међутим, како у самом систему не постоји могућност постављања тестова, то је потребно да се нови модул повеже са осталим компонентама е-портфолио система, како би модул постао универзалан тј. био доступан било којој категорији корисника. Корисници модула EPAM су администратор система, власник е-портфолиа и посјетилац власниковог е-портфолиа, свако са својим правима приступа. Ако за примјер узмемо да је власник е-портфолиа наставник, а посјетилац његовог е-портфолиа студент, закључујемо да је циљ да наставник на свом е-порфолиу врши креирање тестова, а студент, након израде теста, на свом е-портфолиу складишти резултате и даје их на увид. Све ово не би било могуће без администратора система који предузима иницијалне кораке при коришћењу система за израду е-портфолиа.

Процеси унутар модула представљени су следећим, хронолошки поређаним, корацима, заједно са учесницима процеса (у даљем тексту ријеч власник, заправо, означава власника е-портфолиа, а посјетилац, посјетиоца власниковог е-портфолиа). Неки анализирани процеси излазе из оквира модула, али су неопходни да би процеси унутар модула били могући.

1. администратор:
   - креира кориснике система,
   - корисницима додјељује корисничко име и шифру са правом њене измјене приликом првог приступа свом е-портфолиу (систем сам обавјештава корисника о томе, будући да се при креирању корисника тражи унос његове e-mail адресе, на коју се обавјештење аутоматски шаље);

2. власник:
   - се пријављује на систем,
   - креира своје е-портфолио странице,
   - креира групу будућих посјетилаца свог е-портфолиа који намјеравају да приступе тестирању,
   - бира начин пријема чланова групе (сви могу постати чланови, чланство на лични захтјев, чланство само уз позивницу), и, у зависности од врсте, додјељује право

чланства или шаље позив за исто (позив се, поред поруке на самом е-портфолиу, аутоматски шаље и на e-mail адресу онога коме је упућен, тако да је он о томе, свакако, обавијештен),

- креира одговарајући тест којим намјерава да изврши процјену персоналних карактеристика будућег посјетиоца његовог е-портфолиа и члана групе тј:
  - уноси текст питања,
  - уноси могуће одговоре на иста питања,
  - обележава тачан одговор тј. онај одговор који највише доприноси бољем резултату теста,
- врши евентуалне корекције питања, могућих и тачних одговора унутар теста,
- врши брисање тестова, питања, могућих и тачних одговора унутар теста,
- и сам има право израде теста у циљу вршења корекција,
- добија на увид резултате теста посјетом одговарајуће е-портфолио странице посјетиоца који је приступио изради одговарајућег теста, ако му он то дозволи, будући да се резултати не морају објелоданити;

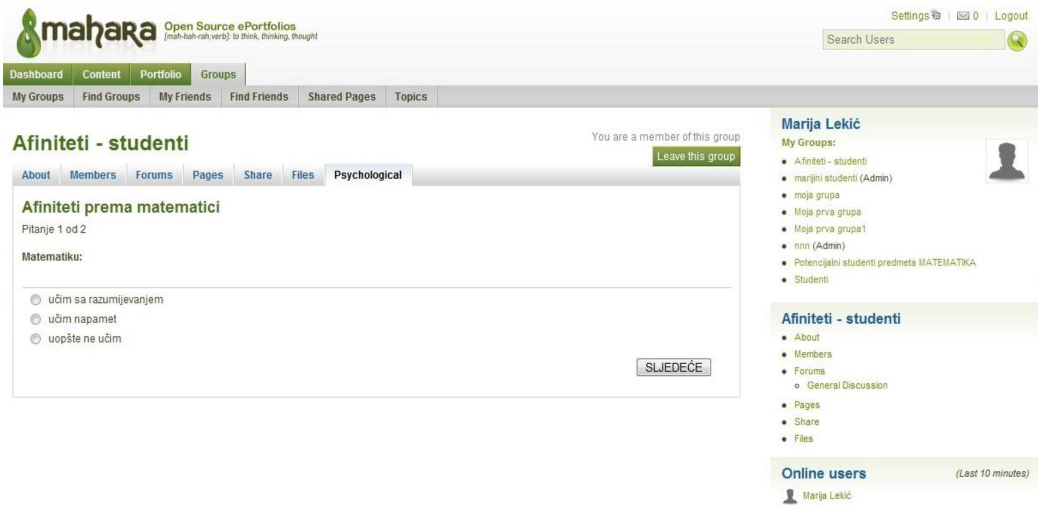
3. посјетилац:
   - се пријављује на систем,
   - посјећује е-портфолио страницу оног власника од чије стране жели да буде процјењиван (тестиран) – у ту сврху може користити опцију за претрагу корисника система,
   - тражи одговарајућу групу којој сматра да треба да припадне,
   - евентуално, од власника тражи право чланства групи (опет у зависности од врсте чланства коју је власник одабрао приликом креирања групе),
   - бира одговарајући тест,
   - приступа изради теста,
   - добија резултате теста,
   - бира начин публиковања својих резултата на својој е-портфолио страници (јавно или приватно),
   - ако жели, напушта групу чији члан је био,
   - прегледује свој персонални профил који се састоји од резултата тестова рађених у одређено вријеме, које се такође биљежи у оквиру персоналног профила.

4. Предлог за коришћење и предности добијеног е-портфолио система у учењу и настави математике

Новодобијени систем може се користити на више начина. Слиједе примјери могућих коришћења у процесу учења и наставе математике и њихове предности.

Сврха коришћења: наставник тестом жели студентима да пружи могућност да утврде своје афинитете према математици или неком математичком предмету, како би знали да ли да се опредијеле за слушање истог или не, као и до ког нивоа могу да га изучавају. Такође, на основу резултата теста, наставник даје савјете и сугестије студентима у погледу њиховог смисла за његов предмет.

Да би се сценарио реализовао потребно је да администратор креира кориснике: наставник и студент. Администратор им додјељује корисничко име и шифру за приступ систему. Наставник се пријављује на систем, креира своје странице, креира групу (или више њих), назовимо је „Потенцијални студенти предмета математика”, одређене врсте посјетилаца своје е-портфолио странице, додјељује врсту чланства групи (јер само чланови групе имају могућност израде теста). Чланови групе су видљиви на наставниковој е-портфолио страници, у одјељку „Групе”. Тако наставник зна ко је уопште заинтересован за ову врсту тестирања. Унутар групе постоји могућност да се виде остали чланови, да се дискутује унутар форума и сл. Након тога, наставник креира специфичан тест дајући му прикладан назив (назив би требало да асоцира на врсту теста, нпр. Афинитети према математици, Тест когнитивних способности, Тест памћења, Стил учења и сл.) и оставља га на свом е-портфолиу тако да буде видљив за његове студенте који се пријаве у групу под већ креираним називом (Потенцијални студенти предмета математика). Тест се креира тако што се уносе питања и одговори (могући и тачни) на свако од њих. Резултати теста се приказују у процентима, а само „тачан” тј. специфичан одговор који је наставник означио као онај прави увећава проценат који представља студентове резултате.

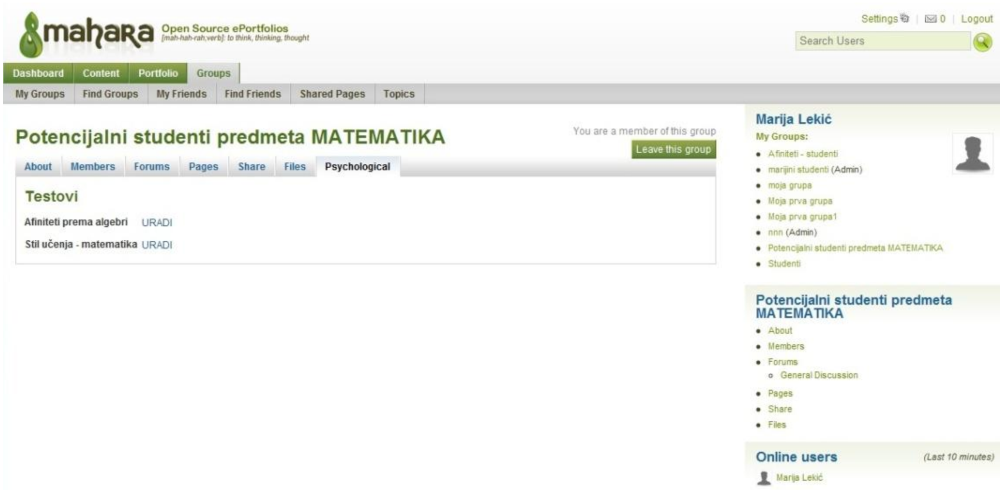


Слика 1. Тестирање афинитета према математици

Потенцијални студент:

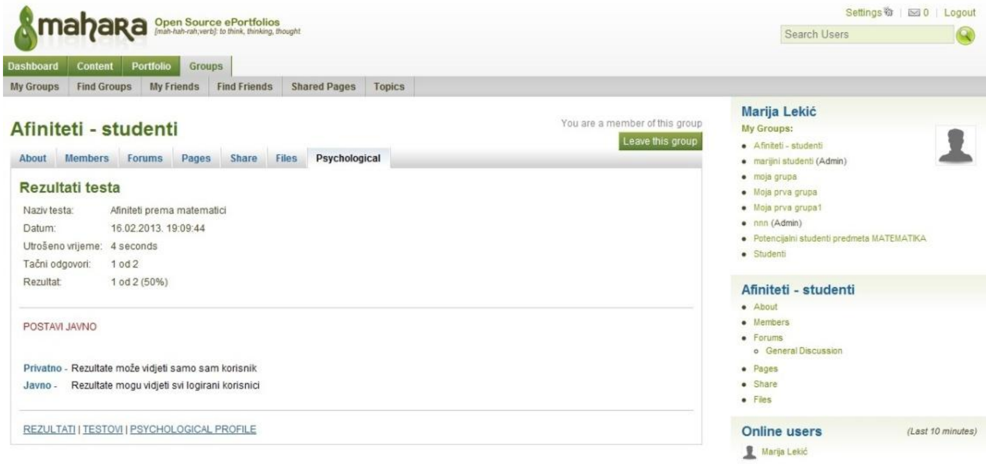
- се пријављује на систем,
- креира своје е-портфолио странице,
- посјећује е-портфолио страницу одговарајућег наставника,
- бира припадност групи коју је наставник креирао (једној или више, у овом случају групи „Потенцијални студенти предмета математика”).

Након тога, потенцијални студент проналази тест (нпр. Афинитети према математици, Стил учења - математика) и приступа његовом рјешавању (претпоставља се да су одговори на питања дати искрено).



Слика 2. Тестови за студенте/ученике

По завршетку тестирања потенцијалном студенту се приказују резултати у процентима са датумом израде теста.



Слика 3. Резултати тестирања

Потенцијани студент резултате задржава за себе или их објављује јавним на својој е-портфолио страници. Тако студент, на специјално дизајнираном дијелу своје е-портфолио странице, складишти своје персоналне карактеристике везане за одређени предмет. Наставник, у том случају, може да види резултате теста одређеног потенцијалног студента, па на основу њих стиче бољи увид у могућности својих потенцијалних студената и обрнуто, потенцијални студенти виде да ли је тај предмет заиста за њих или треба, у сарадњи са наставником, нешто да коригују везано за своја интересовања и афинитете према датом предмету или покушају са неким другим предметом. Штавише, наставник на овај начин може да прати и напредак својих садашњих студената и тако их упућује на даље активности.

Наравно, свако (па и сам студент) може да креира тест на било који начин – нађе готова питања, одговоре, уноси па ради, или се ослони на неки постојећи сајт и сл. Међутим, предност која се постиже овим начином коришћења је у томе што се специфичан потенцијални студент одређеног предмета „повезује” са одговарајућим наставником, који је такође специфичан по својим особинама личности и методологији рада, па сам најбоље зна шта би то требало да „имају” студенти који желе да похађају његова предавања из одређеног предмета и полажу испит. На овај начин постигли смо да потенцијални студент директно од наставника, који предаје тај предмет у датом моменту, добија одређени тест који треба да уради. Предност је, такође, што потенцијални студент и наставник не морају бити истовремено on-line да би се ово реализовало. Штавише, наставник креира тестове када њему одговара и држи их на свом е-портфолиу, а потенцијални студент их ради када то њему одговара, дакле није везан за одређени временски термин када се врши тестирање (како је то замишљено код нпр. традиционалног тестирања). Могућност спајања корисника са групом којој наставник даје тестове већ постоји у већини е-портфолио система, штавише може да се тражи од наставника да дозволи припадност групи, што ће рећи да је у том дијелу постигнута приватност тестова, као и то да тестови нису за свакога већ само за оне који су то од наставника захтјевом тражили. Компонента је креирана као свеопшта, постоји на свачијем портфолиу, не мора се правити рестрикција на основу тога да ли је неко наставник или студент, и може да се користи, јер можда сјутра наставнику затреба да тестира своје способности за нешто друго, на е-портфолиу неке друге особе, а потенцијални студент можда нпр. постане наставник па он буде креирао тестове и давао их некоме на рјешавање. Будући да је е-портфолио дио концепта цјеложивотног учења, ово ће се свакако десити.

Сличан сценарио може се употријебити приликом одређивања наставникових способности за процес наставе при аплицирању за посао наставника математике (или неког другог предмета).

5. Анализа мишљења корисника о унапријеђеном е-портфолио систему кроз анкету

Имајући у виду да се е-портфолио још увијек не користи у окружењу (осим Хрватске), посебно је обраћена пажња на мишљење студената и наставног особља које се упознало са овим системом. У анкети, која је спроведена за потребе евалуације у овом раду, учествовали су студенти и наставници Факултета за саобраћај, комуникације и логистику у Беранама, Црна Гора (укупно 56 испитаника).

Сви испитаници су навели како су, током рада на часу, увидјели предности коришћења е-портфолиа. Ставке које су се нашле на њиховим е-портфолио страницама су следеће: лични подаци, биографија, нивои образовања, хоби, интересовања, вјештине, награде, способности, претходна запослења (радна искуства), радови који их репрезентују у образовном смислу, подаци о осталим постигнућима и сл. Као предности коришћења електронског, у поређењу са папирним портфолиом, испитаници су навели бржи и лакши преглед фајлова, уштеду времена, новца, напредност, лакшу изводљивост, једноставност, практичност, веће могућности да се прошири знање, доступност информација, презентовање себе on-line – без одласка код особе којој желимо де презентујемо себе, лакшу комуникацију, рад од куће, могућност откривања/скривања података, смањена могућност губитка информација, комуникација и са људима у иностранству и сл.

На питање да ли би вољели да у е-портфолио систему постоји компонента помоћу које би имали могућност израде тестова у сврхе одабира жељеног предмета, сви испитаници су одговорили са ДА, јер би, како кажу, тако боље упознали и предмет и професора који га предаје, као и то да би на тај начин могли да одаберу да слушају оне предмете које желе (из списка понуђених). Корисност коришћења ЕРАМ компоненте увидјело је 96,43% испитаника, а 75% њих је изјавило да им је коришћење ове компоненте помогло да се опредијеле за нпр. слушање жељеног предмета. Утисци о новој компоненти су позитивни, с нагласком на то да је то компонента која помаже нпр. при опредељивању за предмет, омогућава on-line интеракцију између студената и професора, корисна је јер би им омогућила да не путују у циљу разговора о предмету са професорима, да је то одлично смишљена идеја, да би било заиста корисно имати је у е-портфолио систему, да се њеним коришћењем добија на времену, корисна је и за будуће школовање, корисна за проширивање знања, занимљива компонента, практична, погодна, у почетку компликована, али касније једноставна, корисна за учење и сл.

6. Закључак

Учење и усавршавање код сваког човјека треба да траје цио живот. Један од начина да се демонстрирају стечене вјештине, процијени знање и добијене информације искористе је употреба портфолиа, односно његова електронска форма. Употреба е-портфолиа узела је маха на великом броју колеџа и универзитета у САД-у како би се на другачији и, релативно, бољи начин извршила процјена знања студената и све то остало забиљежено на једном мјесту, које се касније може поново употребљавати. На основу материјала презентованог у овом раду може се закључити да се ова врста процјењивања може искористити за побољшање процеса наставе и учења математике.

Библиографија

[1] **М. Лекић**. Адаптација система електронског портфолиа према персоналним карактеристикама корисника, *магистарски рад, Факултет за информационе технологије, Универзитет „Медитеран", Подгорица, 2013.*

[2] **G. Lorenzo, J. Ittelson**. An overview of E-Portfolios, *Educase learning initiative, ELI Paper 1, 2005.*

[3] **Д. Милошевић.** Онтолошко инжењерство у интелигентним туторским системима, *Монографија, Технички факултет, Чачак,* 2008.

Софтвер „Лењир и шестар“ и његово коришћење у настави математике

Дарко Максимовић
PSTech / Cisco Systems, Београд
e-mail: darko.maksimovic@gmail.com

Владимир Филиповић
Математички факултет, Београд, Студентски трг 16
e-mail: vladaf@matf.bg.ac.rs

Апстракт.Анализа текућег стања и потреба школског система у Србији доводи до закључка да је том систему могуће пружити додатну подршку у виду информатичких средстава. За пример је узета област планиметрије за узраст од V до VIII разреда основне школе, где су најпре проучени наставни циљеви, а затим је осмишљен, дизајниран и имплементиран софтверскипроизвод„Лењир и шестар“ за подршку додатној и допунској настави.

„Лењир и шестар“ је сачињен од две компоненте: дизајнера и прегледача. Дизајнер је намењен наставнику, који у њему може описати одређени геометријски поступак (конструкција), сачувати га и те понудити ученицима. Ученицима су на располагању и прегледач и дизајнер: помоћу прегледача они могу учитати поступак на свом рачунару, прегледати га и преслушати (по потреби више пута). Ученици потом могу тај поступак и учитати у дизајнер, модификовати га у циљу увиђања међусобних односа објеката при конструкцији или цели процес урадити самостално од почетка.

Описан је развој комплетног софтверског пакета, почев од анализе захтева, преко планирања, осмишљавања архитектуре и дизајна софтвера, до његове крајње имплементације.Описани су инеки од сценарија коришћења развијеног софтвера у настави.

Кључне речи:настава геометрије;лењир; шестар; софтвер; планиметрија.

1. Увод

У раду је описан развој софтверског производа који може представљати додатак школској настави планиметрије од петог до осмог разреда основне школе.Аутори су се ослонили на то да је пожељно да се прошири самостални ваннаставни рад ученика код куће ида рачунарске науке могу помоћи наставницима да лакше подстакну ученике на самостални рад.Захтеви који су постављени пред софтвер процењени су након пажљивог проучавања плана и програма наставе математике за поменути узраст, као и основног упознавања са тренутним стањем система образовања у Републици Србији по питању могућности дигитализације наставних средстава и по питању подршке која се у овм тренутку пружа самосталном ваннаставном раду.

Софтверски производ о коме је реч добио је назив „Лењир и шестар“, јер сеу овом узрастута два алата највише користе у области планиметрије.Надаље, кориснички интерфејс је конципиран на такав начин да у највећој мери подсећа на коришћење ових алата.Наиме, педагошка вредност овог софтвера треба да лежи управо у допуни класичне наставе.

Софтвер „Лењир и шестар“ се састоји од две компоненте: дизајнера и прегледача. Дизајнер је намењен наставнику, који у њему може описати одређени геометријски поступак и сачувати га на преносиви медијум или на дељено место на Интернету, те понудити својим ученицима.Ученику су на располагању и прегледач и дизајнер:

- помоћу прегледача он може учитати поступак на свом рачунару, прегледати га и преслушати (софтвер садржи аудио компонентукако би наставник могао да сними гласовни коментар који прати поступак-конструкцију);
- поступак добијен од наставника семоже учитати у дизајнер и модификовати у циљу увиђања међусобних односа објеката или покушати да (у циљу увежбавања) цеопроцес самостално уради од почетка.

Делокруг развијеног софтвера је свесно ограничен на уско подручје:

1. Обухваћено је наставно градиво само из области планиметрије.
2. Обухваћен је само узраст од петог до осмог разреда основне школе.
3. Сâм кориснички интерфејс има ограничен скуп алата (мада се он, у случају потребе, може проширити).

Пројекат развоја софтвера „Лењир и шестар“ треба да послужи првенствено као смерница и илустрација како може да тече свеукупни развој софтверског система – како проучити потребе, начине њихових задовољења, затим одабрати методологију рада и реализовати производ. У овом раду имплементација је потом описана до крајњег стадијума реализације.

2. Анализа текућег стања

У делу Стратегије развоја образовања у Србији до 2020.који се односи на тренутно стање кључних обележја система образовања у Србији, као један од главних изазова наводи се да постоји „изузетно мала заступљеност модерних облика рада у школи; наставници нису обучени за примену модерних концепата учења/наставе и нове улоге која следи из њих“ [1]. Иако с правом можемо претпоставити да се у овом контексту под модерним концептима учења/наставе на првом месту подразумевају повезивање теорије и праксе, експеримент, активно учење и друга достигнућа модерне педагогије, данас се у модерне концепте учења/наставе незаобилазно сврстава и примена рачунара и рачунарских технологија у процесу унапређења школске наставе.

Доминантно уследматеријалних разлога, у Србији овај вид наставног средства још није узео пуног маха.Наиме, многе школе, посебно у неразвијеним крајевима, још увек немају ни рачунаре, ни везу са Интернетом, а то исто важи и за ученике код куће [1].Ипак, посматрајући извештаје Републичког завода за статистику за 2010.годину, долазимо до охрабрујућег податка да је тренд снабдевања школа и домаћинстава рачунарским средствима у Србији узлазан, па је тако 2010. године 50,4% домаћинстава поседовало рачунар, што је за 3,6% више у односу на 2009. годину. Такође, у истом извештају сазнајемо да је 39% домаћинстава поседовало интернет-прикључак, што је за 2,3% више у односу на 2009. годину. Надаље, владине и невладине организације позитивно утичу на овај тренд.Тако је, на пример, у току школске 2008/2009. године Министарство за телекомуникације и информатичко друштво организовало акцију поклањања рачунара школама и повезивања тих рачунара на Интернет. Ови подаци наводе нас на закључак да ће у будућности број домаћинстава и школа у Србији који поседују рачунарска средства бити све већи, те да је држава постала довољно зрела да отпочне озбиљније напоре у унапређењу школства користећи се информационим технологијама и да развије или подржи развој неопходних софтверских пројеката који би то омогућили.

Наставни план и програм предвиђа да ученици **петог разреда** основне школе стичу знања неопходна за разумевање квантитативних и просторних односа и законитости у разним појавама у природи, друштву и свакодневном животу[2].Задатак наставе математике у овом разреду, по питању планиметрије и геометрије уопште, јесте да се ученици упознају са најважнијим равним геометријским фигурама и њиховим узајамним односима.Напослетку, ученици овог разреда треба да буду оспособљени за прецизност у мерењу, цртање и геометријске конструкције.

У оквиру скупа оперативних задатака наставе математике у **шестом разреду** основне школе [3], нагласак је стављен на усвајање скупова целих и рационалних бројева, као и на стицање потребних знања и вештина потребних за решавање једначина и неједначина. Међутим, и у овом разреду се изучавају основе геометрије равни, па тако план и програм за овај разред садржи следеће:

- Класификација троуглова и четвороуглова и њихова основна својства
- Релација подударности и њена основна својства
- Једнакост површи геометријских фигура и правила о израчунавању површина троуглова, паралелограма и других четвороуглова

У **седмом разреду**[4] ученици се упознају с концептом степена броја, те основама полиномског рачуна, што ће интензивно користити у средњој школи и у наставку школовања.У истом разреду упознаје се једна од најважнијих теорема геометрије, Питагорина теорема, која ће у каснијим разредимазаједноса поменутим степенима и полиномима створити основу за упознавање са тригонометријом. Следи потпун списак оперативних задатака везаних за планиметрију у седмом разреду:

- Питагорина теорема и њена примена код свих изучаваних геометријских фигура у којима се може уочити правоугли троугао
- Најважнија својства многоугла и круга
- Приближна конструкција ма ког правилног многоугла и геометријска конструкција појединих правилних многоуглова (са 3, 4, 6, 8 и 12 страница)
- Најважнији обрасци у вези са многоуглом и кругом који се могу применити у одговарајућим задацима
- Појам размере дужи и својства пропорције
- Појам сличности троуглова и њена примена у једноставнијим случајевима

Геометрија у**осмом разреду**обухвата тродимензионални простор и тродимензионалне фигуре (тачка, права и раван у простору, затим призма, пирамида, ваљак, купа, лопта), те представља посебан изазов за израду софтвера.Важно је напоменути, међутим, да се у свакодневној школској настави и ова област покрива коришћењем дводимензионалних наставних средстава, попут свеске и табле, при чему се ослања на ефекте перспективе и пројекције коју ђаци прилично лако препознају.На тај начин, иако пројекат који ће се развити не покрива тродимензионалне просторе и фигуре, у њему ће свакако бити могуће симулирати их одговарајућим дводимензионалним фигурама.

3. Захтеви који се постављају пред софтвер

Допунска и додатна настава у класичном смислу уобичајено се спроводе „лицем у лице“, било тако што наставник у склопу наставног програма добровољно реализује ту наставу за оне којима је потребна, било тако што за допунску наставу родитељи/старатељи ученика плаћају за приватне часове стручним лицима. И у једном и у другом случају отежавајуће околности су простор и време.Тај проблем се може превазићи уз помоћ рачунарског софтвера.Прво, наставник може користити одређени софтвер да осмисли и опише одређени математички поступак, сачува га и потом препусти ученицима на коришћење. Друго, ученици овакав производ (како софтвер, тако и поступак који је у њему приказао наставник) могу користити у произвољном тренутку, онда када су расположени,а такође и бесплатно, или у најмању руку (ако рачунамо трошкове рачунара) по знатно нижој цени од оне која се плаћа за приватне часове.

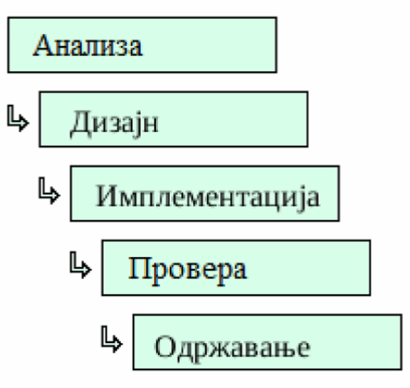
У контексту планиметрије и Плана и програма за основну школу, софтвер који би се користио мора задовољити следеће захтеве:

1. Лако и прецизно цртање основних равних геометријских фигура: тачка, дуж, троугао, правоугаоник, произвољан многоугао, затим круг, угао и, за потребе обележавања и коментара, текст.
2. Промена већ нацртаних објеката: промена параметара (трансформација), померање (транслација) и окретање (ротација).
3. Памћење појединачних корака одређеног поступка, у оном редоследу којим се постиже решење одређеног задатка, да би се исти доцније могли репродуковати.
4. Део пројекта у којем наставник описује жељени поступак мора бити једноставан, не само зато што је потребно да се наставник у њему лако снађе, већ и зато што би било добро да наставник може препустити ученику да сам дефинише одређени поступак, било за вежбу, било за домаћи рад, чиме ученик излази из искључиво пасивне улоге посматрача и преузима иницијативу за креирање сопственог решења.
5. За ученике се мора направити и транспарентни део пројекта, прегледач (енг. player), у ком ће они моћи да посматрају резултат рада наставника и да тако усвоје потребно знање. Ово је потребно да би се ученици у одговарајућим тренуцима могли усредсредити само на дотични задатак, не улазећи у појединости самог програма за цртање и његовог окружења.
6. Како су одређени геометријски поступци или појединачни кораци поступка такве природе да захтевају усмено објашњење наставника, пројекту је и поред свих наведених ставки потребна компонента снимања гласа, као незаменљив фактор преношења знања. Наставник треба бити у стању да дефинише тачан тренутак у којем ће се његов гласовни коментар репродуковати у току презентације.

Остваривање софтвера који поседује поменуте особине омогућило би циљним ученичким групама да у тренутку кад им највише одговара, ван наставе или током ње, надокнаде пропуштене лекције или стекну допунска знања, са скоро свим елементима које добијају у настави уживо: цртеж је јасан и прецизан, поступак се спроводи у правом редоследу и у кључним тренуцима чуће се гласовно објашњење наставника. Надаље, ученик ће имати и једну могућност коју нема ни у једном облику директне комуникације са наставником: да се позиционира на произвољан тренутак у току поступка, врати се неколико секунди или минута уназад ако му нешто није било јасно или жели да утврди знање, или да прескочи део поступка с којим је већ упознат, у циљу уштеде времена.

4. Дизајн и имплементација софтвера

При изради софтверског пројекта неопходно је одабрати одговарајућуметодологију развоја.С обзиром да су потребе корисника унапред познате, изабрана је „традиционалниа“ методологија рада, која дозвољава правилан дизајн и која не захтева вођење бриге о сталним променама захтева клијента - „водопад“ (енг.waterfall)[7].



Слика 1.Методологија „водопад“

Модел водопада представља секвенцијални дизајн у којем се напредак пројекта,док пролази кроз различите фазе развоја, приказује у строго силазној путањи, каоводопад.Према [6], ове фазе су:

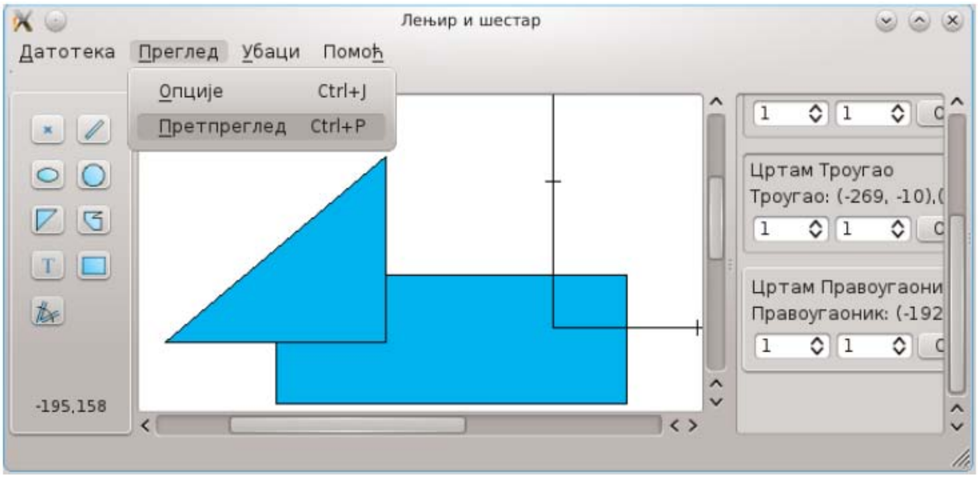
1. Анализа – целокупан опис функционалности које пројекат треба да омогући.
2. Дизајн – на основу потреба наведених у претходној фази долази се до општегдизајна пројекта у смислу архитектуре софтверских компонената и корисничкогинтерфејса.
3. Имплементација – потребно је уложити конкретан труд на изради појединачнихкомпонената дизајна.
4. Провера – по завршетку развоја, проверава се функционална исправност засебнихкомпонената система и пројекта у целини.
5. Одржавање – потребно је пратити функционалност система у пракси и излазитиу сусрет корисницима, у смислу решавања проблема на које корисници наиђу и додатних захтева који се од њих могу појавити.

4.1. Анализа

У фази анализетреба разрадити одговоре на захтеве 1-6 који су дефинисани у претходном поглављу.Посебну пажњу треба обратити на изглед корисничког окружења дизајнера и прегледача.

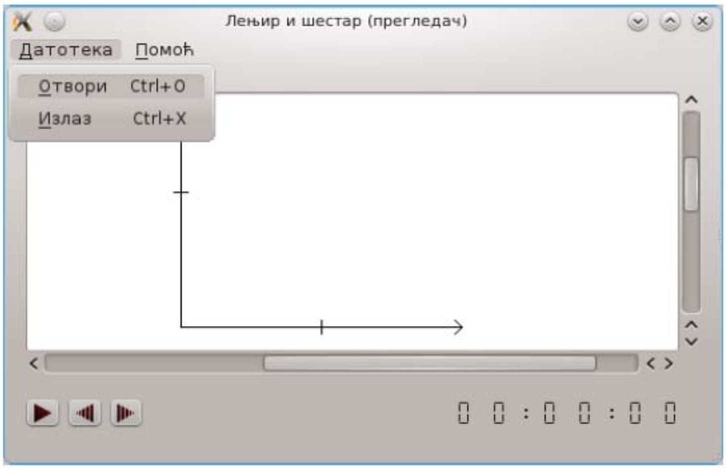
Највећи део главног прозора **апликације за цртање** заузима простор за цртање, односно главни простор.Он се растеже и скупља у складу са величином корисничког прозора тако да увек заузима највећи његов део, по водоравном и по усправном правцу.Лево од простора за цртање је уска секција са по једним дугметомза цртање сваког типа објекта.Десно од простора за цртање је потпрозор„историја анимација“.Примеризгледа радног простора може се видети на слици 2.

Изнад простора за цртање је уска трака коју различити видови формирања анимације користе као контекстуалну палету параметара: док се будецртао објекат, ту ће бити представљене графичке контроле за нумерички и текстуалниунос параметара тог објекта.



Слика 2.Главни прозор: главни мени у врху, лево алатке за цртање, потом у средини главни простор и десно историја извршених акција поступка

У прозору **прегледача**неће постојати палета за цртање, историја извршених акција поступка иконтекстуална палета, као нивећи део команди главног менија - биће задржане само команде за отварање документа и излаз из апликације, као и команда за приступ прозору са основниминформацијама о програму/прегледачу.На дну апликације прегледача биће дугмад запуштање снимка, паузирање, померање за неколико секунди унапред и уназад,те приказ протеклог времена од почетка снимка (слика 3).



Слика 3.Прегледач, главни прозор са менијем и командама за руковање снимком

У дизајнеру постоји укупно осам врста **објеката за цртање**: тачка, дуж, троугао, правоугаоник,елипса, многоугао и текст. Сваки од њих има себи својствене улазне параметре ипомоћна средства, али све врсте објеката имају и одређена заједничка својства. Оваједничка својства су:

1. Сваки објекат има своје име (текстуални параметар) и боју.

2. При цртању, за сваки објекат ће бити доступна пречица уз помоћ тастера „контрол“; акосе држи притиснутим током дефинисања било које тачке објекта, дефинисанатачка ће „скакати“ до најближе тачке најближег суседног објекта, ако је та тачкана удаљености мањој

од Л пиксела од текуће позиције курсора миша. Улитератури на енглеском језику ова могућност се уобичајено зове „пуцкањепрстима“ (енг. snap, snapping).

Параметри за различите врсте објеката, поред имена и боје који сузаједнички за све врсте објеката, биће следећи:

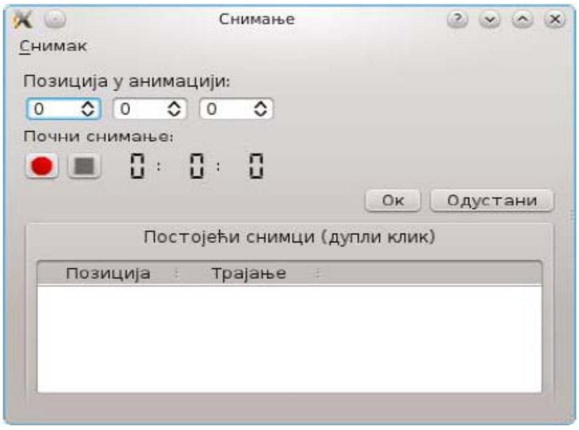
- Тачка: тачка
- Дуж: две тачке (почетак и крај)
- Троугао: три тачке (темена)
- Правоугаоник: тачка и два реална броја, (горње лево теме, дужина и висина)
- Кружница: тачка и реалан број (центар и полупречник)
- Елипса: тачка и два реална броја (центар и два полупречника)
- Многоугао: тачке (темена)
- Текст: ниска(садржај), тачка (горњи леви угао), ниска (име фонта), један од бројева из скупа {8, 10, 12, 14, 16, 18, 22, 26, 32} (величина фонта) и једна од вредности из скупа {подебљано, искошено, подвучено} (стил фонта).

Анимације се користе да би сеприказао одређени геометријски поступак.Све анимације имају време трајања усекундама, које ће диктирати брзину исцртавања при репродукцији.

- Исцртавање; Основна врста анимације представља само исцртавање објекта. Кроз дефинисање новог објекта на сцени, корисник имплицитно додаје и нову анимацију у процесу описивања дотичног математичког поступка.
- Промена параметара објекта; Потребно је обезбедити постепени приказ промене параметара или параметра из старевредности у нову, у оном временском року који корисник одреди за трајање те анимације.
- Ротација; Анимација омогућава да број степени буде преко 360°, да би се објекат евентуално ротирао и више пута око центра ротације. Надаље, иницијални центар ротације је центар објекта, који је дефинисан онако како захтева врста тог објекта, али могуће га је померити (мишем) и затим извршити ротацију око те тачке.
- Померање; Потребно је обезбедити да се објекат континуално помери из почетног у крајњи положај.

Одабиром неке од команди за додавање анимације (цртање новог објекта илитрансформација постојећег), корисник улази у режим дефинисања анимације. То значида су му изнад простора за цртање доступне графичке контроле за прецизнодефинисање анимације и да се кликом на десни тастер миша добија контекстни меникоји се односи на анимацију која је у току.

Програм ће бити снадбевен могућношћу снимања **звука**.Звук ће бити могућесамо снимити, тј.неће бити подржан увоз произвољне постојеће аудио датотеке,из разлога што подршка за звук постоји у циљу снимања гласовног коментаранаставника, а не из естетских разлога.Звук се може снимити и поставити између две анимације, пре прве анимацијеили након последње (слика 4).



Слика 4.Дијалог за снимање звука. Позиција у анимацији означава тренутак када звук који се сними отпочиње с репродукцијом

Десно од простора за цртање налазиће се**историја анимација**, одељак где јеприказана листа досадашњих анимација.То обухвата и креирање објеката и трансформације извршене над њима.Последња ставка у листи (која је на врху) имаће у контекстуалномменију ставку "Измени", која ће дозволити да се та последња анимација врати у режимдефинисања.На преостале ставке моћи ће се кликнути левим тастером миша, чиме ћесе узроковати да се уклоне анимације које су направљене после ње, односно да се сценаврати у стање када је изабрана анимацијабила последња која је додата.

Програм омогућава кориснику да **сачува**текући документ и отвори некипостојећи.Датотеке ће имати екстензију HWD (скраћеница за енг.HomeWork Document, изабрали аутори).Подаци ће се чувати у формату XML [8].Овај формат омогућава запис произвољногпакета података у проширивом формату, безбедно за мрежни пренос и омогућава коднираспоред Unicode.Звучни запис, у циљу безбедног преноса у оквиру XML документа,биће кодиран помоћу алгоритма Base64, чиме ће цео пакет имати текстуалниформати моћи ће се отворити уз помоћ једноставног едитора текста.Пошто је XMLинтуитиван, корисник ће моћи одабрати и да ручно уређује документ или да едитором генеришепроцес.

4.2. Дизајн

У фази дизајна се доносе одлуке које дају печат на укупан успех предузетог софтверског пројекта.

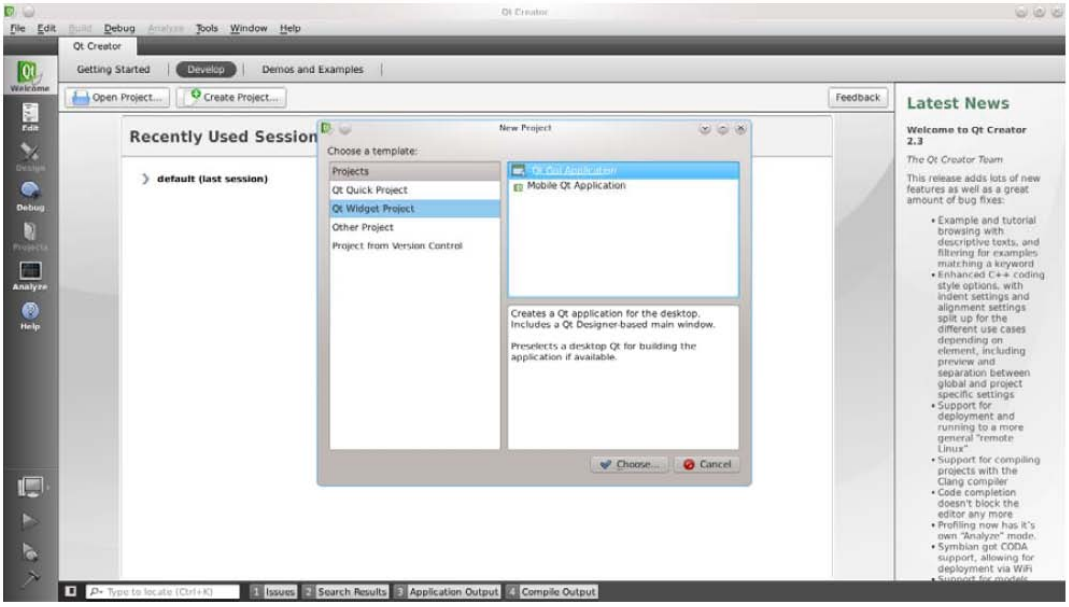
За развој овог софтверског пакета одабран је програмски језик C++.У развоју је коришћена једна од најпознатијих мултиплатформских библиотека за развој Qt (чита се „кјут“, „кјути“, или једноставно: „ку-те“), слободна за коришћење (лиценца ЛПГЛ [9]), доступна за C++ и таква да подржава лак развој графичкогкорисничког интерфејса.

Библиотеку Qt је развила норвешка компанија „Trolltech“, а власништво надњом и даљи развој 2008.годинеје преузела компанија „Nokia“, куповином компаније„Trolltech“. Читав низ високо-комерцијалних програма развијен јекористећи ову библиотеку, попут: „Autodesk Maya“, „Adobe Photoshop Elements“„Skype“, „VLC media player“ и „Mathematica“. Програм писан коришћењем овогсофтверског пакета може се компајлирати и извршити на различитим оперативнимсистемима: постоји подршка за Windows, Linux, Mac OS, као и за различите мобилне платформе [10].

Програмирање у библиотеци Qt је вођено догађајима.То значи да програмеркористи језичка проширења библиотеке да дефинише догађаје које објекти могуодашиљати (сигнале) ифункције које ће реаговати на те догађаје (слотове).

У основи Qt-а и постоји низ уграђених графичкихалата који помажу развоју:

- Qt Designer; програм који омогућава „цртање“ графичких контрола и прозора
- Qt Linguist; програм који омогућава локализацију графичког интерфејса
- Qt Creator; интегрише претходне алатке, уз текстуални едитор и интегрисано компајлирање и организовање пројекта



Слика 5. Qt Creator; приказан је дијалог за прављење новог пројекта

4.3. Имплементација

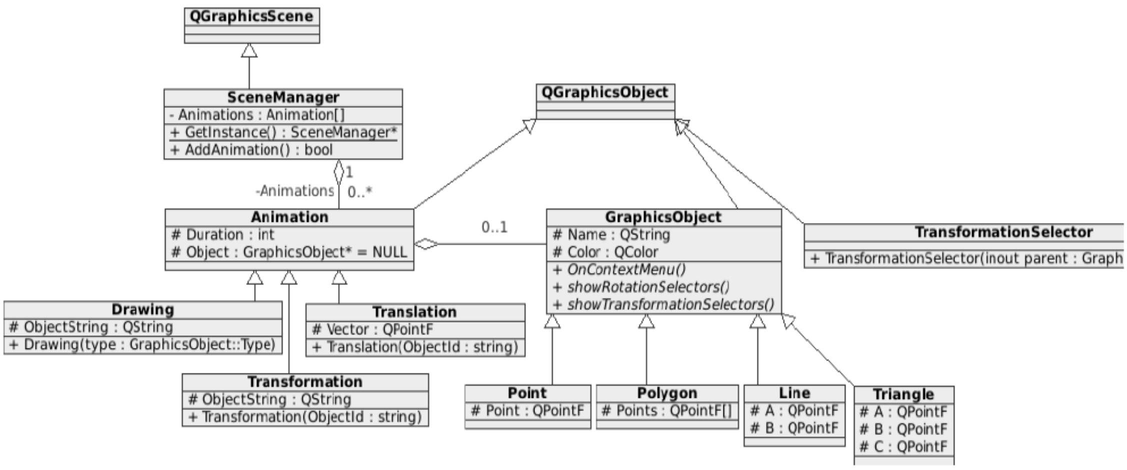
Укупна величина изворног кода пројекта је 588 килобајта, од чега око 350килобајта отпада на дизајнер,а око 240 килобајта на прегледач, при чему је релативно великидео кода заједнички за оба програма. Мерено у страницама А4 формата, ово износи око355 страница текста; због тога се у овом раду не приказује изворни кôд.

Кључне компоненте развијеног системасу:

- Менаџер сцене, класа изведена из класе QGraphicsScene; рукује сценом којуобухвата и свим припадајућим објектима. Он врши валидацију додатихобјеката, претрагу, образовање XML документа на основу текућег стања сцене иерепродукује стање сцене на основу датог XML документа.
- Класе за графичке објекте, које обухватају: угао, круг, елипсу, дуж, тачку, многоугао, правоугаоник, текст и троугао. Оне су изведене из базне класе „графичкиобјекат“, која јесама изведена из класе QGraphicsObject.

- Руковаоци трансформације објеката (при процесу ротације, трансформације итранслације) такође су графички објекти. Графички објекти на које се односе ови руковаоци прате њихово кретање и реагујуодговарајућом трансформацијом.
- Анимације су такође имплементиране као графички објекти. Наиме, свакаанимација садржи, поред саме референце на објекат који се мења, и другепратеће декорације, почев од споменутих руковалаца. Анимација за цртање јевласник датог графичког објекта, а друге анимације садрже референцу на тај графички објекат у циљу упућивања инструкција за трансформацију.
- Главни прозор је централни ентитет апликације, који спаја све наведене иненаведене елементе дизајна: у његовом средишту је графички преглед у чијојпозадини ради менаџер сцене; клик мишем на алатку за цртање узрокује да сена сцену дода анимација цртања оног објекта на које се односи дотично дугме;историја анимација посматра стање сцене и одражава га графички; главнипрозор води рачуна о звуцима убаченим у текући документ и захтева одменаџера сцене да обави интеракцију са садржајем датотеке коју корисник изабереу циљу чувања, отварања или репродукције.
- Постоје два додатна прозора са сопственом логиком: прозор за снимање звука,који користи модул за рад са улазним и излазним аудио уређајима, те прозор за подешавање корисничких опција, који чувају задата подешавања у иницијализационудатотеку, регистар или трећи ентитет зависан од конвенције оперативног система.

На слици 6.је приказан UML дијаграм основних класа [11] које су коришћене у програму.



Слика 6.UML дијаграм основних компоненти система

4.4. Провера

У пројекту креирања софтверског производа провера заузима скоро исти временскипериод и уложени труд као и сам развој.У случају овог софтвера, спроведена је детаљна провера задовољења првобитно постављених циљева, уклоњене су бројне грешке(багови) које су се појавиле у току имплементације, тако да су преостале неке суптилнегрешке чије ће исправљање бити размотрено у каснијим фазама.За потребе овог рада илустроваће се корисност пројекта на једном реалном примеру.

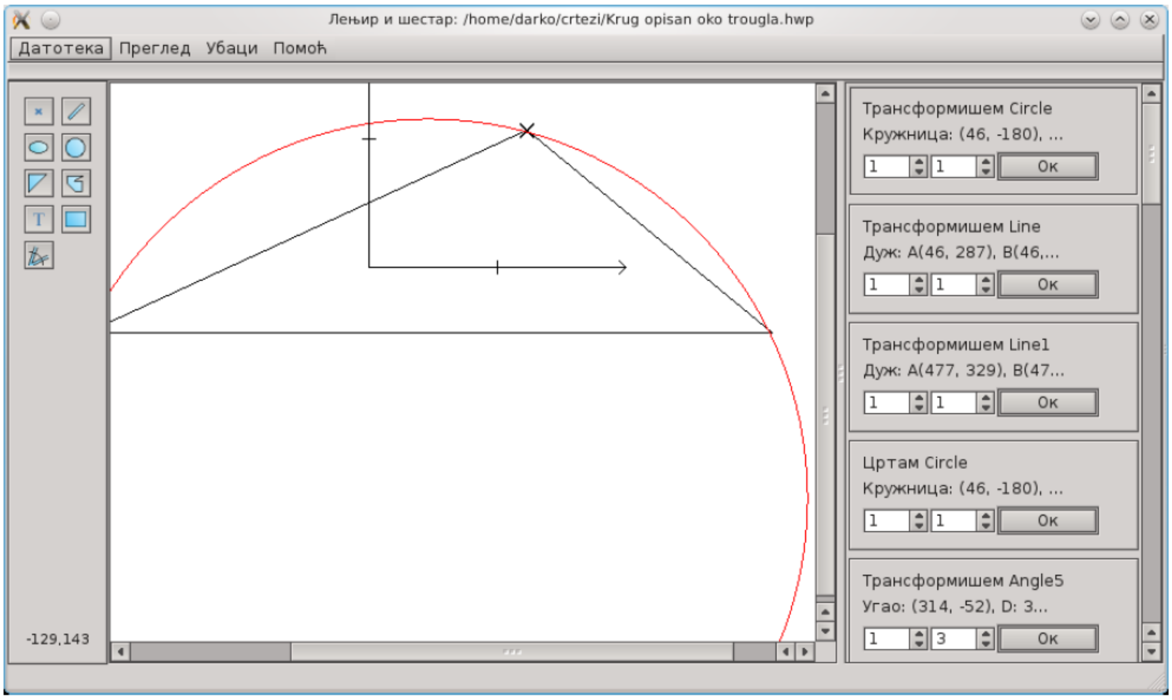
Пример. Описати конструкцију кружнице описане око троугла.

Решење: Процес ћемо описати корак по корак:

1. Отварамо главни прозор дизајнера и бирамо алат „троугао"
2. Кликнемо по једном на три различита положаја на екрану да бисмо добилитроугао ABC
3. Кликнемо „готово" да бисмо означили да смо задовољни датим троуглом
4. Бирамо алат „лук" и цртамо по два лука истог пречника са центрима у A и B, такода се пресецају (након цртања сваког лука, кликнемо на дугме „готово")
5. Бирамо алат „дуж" и цртамо дуж MN која спаја пресеке лукова из корака 5.
6. Понављамо корак 4 за тачке B и C и корак 5 да бисмо добили дуж OP
7. Бирамо алат „круг"
8. Цртамо кружницу са центром на пресеку дужи MN и OP, која пролази кроз темена троугла
9. Снимамо датотеку

Добијену датотеку можемо пустити како помоћу дизајнера, тако и уз помоћ прегледача.

Резултат конструкције у дизајнеру приказан је на слици7.



Слика 7.Кружница описана око троугла, конструисана и приказана у дизајнеру

5. Закључак

У раду се предлажу мере за информатичкуподршкушколству, у контексту наставе математике (геометрије у основној школи).Прво су проучени наставни циљеви, а затим је описано осмишљавање, дизајнирање и имплементација софтверског производа „Лењир и шестар" за подршку додатној и допунској настави. У покушају да се илуструје развој овог пројекта, уједно су приказани неки од основних корака које треба предузети да би се организовао и остварио ма који софтверски пројекат, почев од анализе захтева, преко избора технологија и развоја архитектуре, до конкретних корака имплементације у развојном окружењу и изворном коду.

Описанису развој и карактеристике комплетног програма, који може представљати основу за даљи развој, у циљу унапређења наставе математике кроз самостални ваннаставни рад ученика.Даљи развој би могао бити усмерен на бољу подршку за звук (нпр. увоз готових датотека), олакшан кориснички интерфејс, више пречица на тастатури, памћење параметара последње нацртаног објекта да би се употребили у наредном, поновно извршење последњег корака итд.

У овом пројекту је изабрана основно-школска планиметрија у којој је већи део градива усмерен на учење различитих поступака конструкције или начина израчунавања одређених вредности, те су подобни за приказ у форми анимације.Друге области математике захтевале би засебан софтвер, а свакако да посебан изазов представља развој пројеката за подршку другим школским предметима.

Носиоци развоја пројеката везаних за школско градиво у идеалном случају били би сами наставници, који су детаљно упућени у План и програм, имају искуство у раду са децом и евидентно су опредељени за наставни рад, што треба да значи да су обогаћени ентузијазмом за сопствени развој и развој наставе. Истовремено, рад наставника у овом домену није предвиђен Планом и програмом и било би неопходно користити слободно време за развој, а финансијски статус наставника у Србији данас није задовољавајући. Зато је неопходно да се значај тих пројеката препозна, како у Министарству просвете Републике Србије, тако и у ширим круговима нашег друштва, те да се пружи одговарајући подстрек њиховом развоју.

Библиографија

[1] **Министарство просвете и науке Републике Србије.**Стратегија развоја образовања у Србији до 2020. године, 2012.

[2] **Министарство просвете и науке Републике Србије.**Наставни програми за пети разред основног образовања и васпитања, Завод за унапређење образовања и васпитања Републике Србије, 2012.http://www.zuov.gov.rs/novisajt2012/naslovna_nastavni_planovi_programi.html

[3] **Министарство просвете и науке Републике Србије.**Наставни програми за шести разред основног образовања и васпитања, Завод за унапређење образовања и васпитања Републике Србије, 2012. http://www.zuov.gov.rs/novisajt2012/naslovna_nastavni_planovi_programi.html

[4] **Министарство просвете и науке Републике Србије.**Наставни програми заседми разред основног образовања и васпитања, Завод за унапређење образовања и васпитања Републике Србије, 2012. http://www.zuov.gov.rs/novisajt2012/naslovna_nastavni_planovi_programi.html

[5] **Министарство просвете и науке Републике Србије.**Наставни програми заосми разред основног образовања и васпитања, Завод за унапређење образовања и васпитања Републике Србије, 2012. http://www.zuov.gov.rs/novisajt2012/naslovna_nastavni_planovi_programi.html

[6] **W.W. Royce.** Managing the Development of Large Software Systems, *Proceedings of IEEE WESCON*, pp. 1-9, 1970.

[7] **I. Sommerville.** Software Engineering, 9th edition, *Addison-Wesley Boston,MA, USA*, 2011.

[8]**M. MacDonald.** Beginning ASP.NET 2.0 in C# 2005, *Apress,New York, NY, USA*, 2006.

[9] **Nokia.** Комплетни подаци о лиценци за Qt, 2013. http://qt.nokia.com/products/licensing

[10] **Nokia.** Списак подржаних платформи за Qt, 2013. http://doc.qt.nokia.com/4.7-snapshot/supportedplatforms.html

[11] **R. Miles, K. Hamilton.** Learning UML 2.0, *O'Reilly,Cambridge, MA, USA*, 2006.

Симпозијум МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ, Математички факултет, Универзитет у Београду, 2013 ,Vol. IV(1)

Комбинаторика квазиторусних многострукости

Ђорђе Баралић

Математички институт САНУ
e-mail: djbaralic@mi.sanu.ac.rs

Апстракт. Квазиторусне многострукости представљају тополошку генерализацију једног од централних објеката алгебарске геометрије - торусних варијетета. Ове многострукости поседују особину да им је простор орбита дејства торуса прост политоп. Важан део информација о тополошким инваријантама ових многострукости, као што су кохомолошки прстен и карактеристичне класе, добијамо из комбинаторике политопа, што их чини интересантним за проучавање.

Кључне речи: квазиторусне многострукости; торус; прости политопи; комбинаторика; кохомологија.

1. Увод

Квазиторусне многострукости или *квазиторусни варијетети* представљају тополошку генерализацију торусних варијетета. Генерално говорећи то су многострукости на којима дејствује торус. Њихов појам је први уведен у раду Davis-a и Januszkiewicz-a [2]. Веза између торусних варијетета у алгебарској геометрији и квазиторусних многострукости је веома блиска. У монографији Бухштабера и Панова [1] дата је лепа експозиција о овим многострукостима. Пратећи њихов приступ изложићемо њихове основне особине и резултате о квазиторусним многострукостима.

Основна веза између квазиторусних многострукости и комбинаторике лежи у комбинаторним особинама простих политопа. Прегледан увод у теорију политопа се може наћи у монографији [4].

Нека је P прост n димензионални политоп и $F_1, \ldots, F_m$ његове пљосни. Нека је k фиксирани комутативни прстен са јединицом. Нека је $k[v_1, \ldots, v_m]$ полиномијална алгебра над k са m генератора са градуацијом $\deg(v_i) = 2$.

Дефиниција 1. Stanley-Reisner-ов прстен простог политопа P је количнички прстен

$$k(P) = k[v_1, \ldots, v_m]/\mathcal{I}_P,$$

где је $\mathcal{I}_P$ идеал генерисан безквадратним мономима $v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_s}$ таквим да је $F_{i_1}\cap F_{i_2}\cap\cdots\cap F_{i_s} = \emptyset$ у P, $i_1 < \cdots < i_s$.

Пример 1. *Нека је P^2 m-тоугао, $m \geqslant 4$. Тада је*

$$k(P^2) = k[v_1, \ldots, v_m]/(v_iv_j \,|\, |i-j| \not\equiv 0, 1 \; mod\, m).$$

Пример 2. *Нека је $P = I^n$ куб. Тада је*

$$k(I^n) = k[v_1, \ldots, v_{2n}]/(v_iv_{i+n} \,|\, i = 1, \ldots, n).$$

Примери квазиторусних многострукости су комплексни пројективни простори $\mathbb{C}P^n$, као и производи комплексних пројективних простора. $S^2 \times S^2$ је такође квазиторусна многострукост.

Ове многострукости су интересантне, јер су у блиској вези са многим конструкцијама у комбинаторици и еквиваријатној топологији, као што су K-степени.

Ово истраживање је подржано од Пројекта 174020 Министарства науке, образовања и технолошког развоја Републике Србије.

2. Квазиторусне многострукости и карактеристично пресликавање

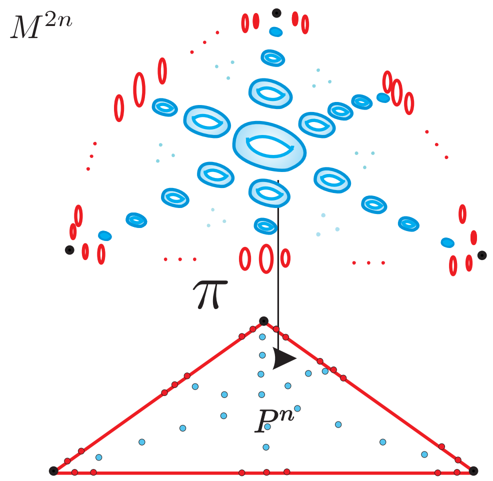
Нека је M^{2n} $2n$-димензионална многострукост на којој дејствује торус T^n - T^n-*многострукост.*

Дефиниција 2. Стандардна карта на M^{2n} је уређена тројка (U, f, ψ) где је U T^n-стабилан отворени подскуп од M^{2n}, ψ неки аутоморфизам торуса T^n, и f је ψ-еквиваријантни хомеоморфизам $f : U \to W$ у неки (T^n-стабилан) отворени подскуп $W \subset \mathbb{C}^n$ тј. $f(t \cdot y) = \psi(t)f(y)$ за свако $t \in T^n$ и $y \in U$. Кажемо да је дејство T^n на M^{2n} локално стандардно ако M^{2n} поседује стандардни атлас, тј. свака така од M^{2n} леи у стандардној карти.

Простор орбита локално стандардног дејства T^n на M^{2n} је n-димензионална многострукост са угловима и квазиторусне многострукости одговарају случају када је простор орбита дифеоморфан, као многострукост са ћошковима, простом политопу P^n.

Дефиниција 3. Нека је дат прост политоп P^n. T^n-многострукост M^{2n} се назива квазиторусна многострукост над P^n уколико су задовољени следећи услови:

1. дејство T^n је локално стандардно;
2. постоји пројекција $\pi : M^{2n} \to P^n$ која је константна на T^n-орбитама која пресликава сваку k-димензионалну орбиту у тачку у унутрашњости стране кодимензије k политопа P^n за свако $k = 0, \ldots, n$.



Слика 1. Орбитно пресликавање π квазиторусне многострукости M^{2n}

Дејство T^n на квазиторусној многострукости M^{2n} је слободно над унутрашњости количничког политопа P^n, а темена политопа P^n одговарају T^n-фиксним тачкама од M^{2n}. Нека су $F_1, \ldots, F_m$ пљосни од P^n. За сваку пљосан F_i, скуп $\pi^{-1}(\mathrm{int}F_i)$ се састоји од орбита кодимензије 1 са истом 1-димензионалном подгрупом изотропије, коју обележавамо са $T(F_i)$, (видети Слику 1). $\pi^{-1}(\mathrm{int}F_i)$ је $2(n-1)$-димензионална квазиторусна подмногострукост над F_i, у односу на дејство $T^n/T(F_i)$ и означаваћемо је са $M_i^{2(n-1)}$ и називати *подмногострукост пљосни* која одговара F_i. Њена подгрупа изотропије $T(F_i)$ се може написати као

$$T(F_i) = \left\{ \left(z^{\lambda_{1i}}, \ldots, z^{\lambda_{1n}}\right) \in T^n \mid |z| = 1 \right\}.$$

Вектор $\lambda_{\mathbf{i}} = (\lambda_{1i}, \ldots, \lambda_{ni})^t \in \mathbb{Z}^n$ је одређен само до на знак и назива се *вектор пљосни* који одговара F_i. Кореспонденција

$$l : F_i \mapsto T(F_i) \tag{1}$$

се назива *карактеристино пресликавање* од M^{2n}.

Нека је G^{n-k} страна кодимензије k добијена као пресек k пљосни $G^{n-k} = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k}$. Тада се подмногострукости $M_{i_1}, \ldots, M_{i_k}$ секу трансверзално у подмногострукости $M(G)^{2(n-k)}$, коју називамо *подмногострукост стране* која одговара страни G. Пресликавање $T(F_{i_1}) \times \cdots \times T(F_{i_k}) \to T^n$ је ин јективно пошто је $T(F_{i_1}) \times \cdots \times T(F_{i_k})$ k-димензионална подгрупа изотропије од $M(G)^{2(n-k)}$. Дакле, вектори $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}$ формирају део базе решетке $\mathbb{Z}^n$.

Нека је Λ целобројна $n \times m$ матрица чију i-ту колону формирају координате вектора пљосни λ_i, $i = 1, \ldots, m$. Свако теме $v \in P$ политопа P добија се као пресек n пљосни $v = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n}$, а како вектори $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n}$ представљају базу целобројне решетке, то подматрица $\Lambda_{(v)} := \Lambda_{(i_1,\ldots,i_n)}$ од Λ коју формирају колоне $i_1, \ldots, i_n$ има особину

$$\left|\det \Lambda_{(v)}\right| = 1. \tag{2}$$

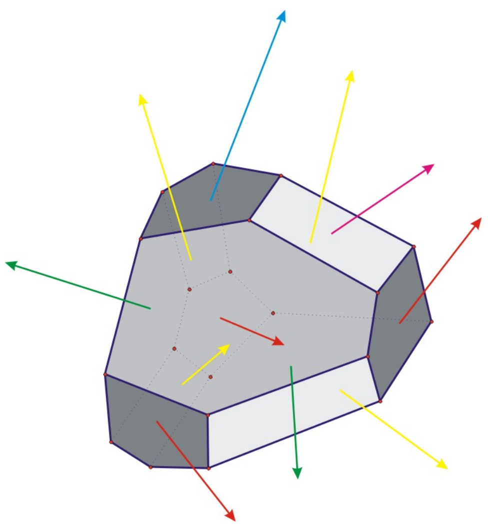
Матрицу Λ називамо *карактеристичном матрицом* квазиторусне многострукости. Stanley-Reisner-ов прстен и карактеристична матрица Λ носе доста информација о топологији квазиторусне многострукости.

Кореспонденција

$$G^{n-k} \mapsto \text{подгрупа изотропије од}\, M(G)^{2(n-k)}$$

продужује карактеристично пресликавање (1) до пресликавања из посета страна од P^n у посет подторуса од T^n.

Комбинаторна слика квазиторусне многострукости Слика 2, се може шватати као прост политоп чијој је свакој пљосни придружен вектор одговарајућцелобројне решетке. Правци вектора описују одговарајуће дејство торуса и геометрију ових многострукости. Као што ћемо видети из ове слике се добијају све значајне инваријанте квазиторусне многострукости. У слуају када је P рациналан политоп $\lambda_i \perp F_i$, за свако $i = 1, \ldots, m$ многострукост M је

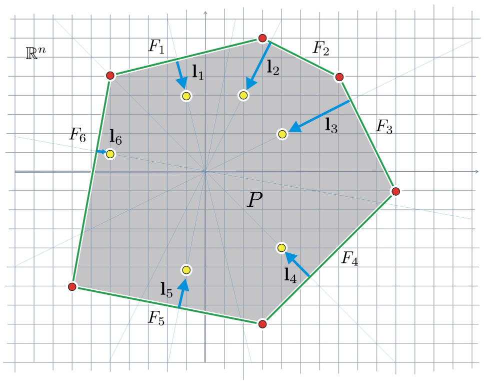


Слика 2. Квазиторусна многострукост над политопом

торусни варијетет (види Слику 3).

Дефиниција 4. Нека је P^n комбинаторни прост политоп и l пресликавање пљосни од P^n у 1-димензионалне подгрупе од T^n. Тада уређени пар (P^n, l) називамо карактеристичним паром ако је $l(F_{i_1}) \times \cdots \times l(F_{i_k}) \to T^n$ инјективно кадгод је $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} \neq \emptyset$.

Пресликавање l се директно продужава до пресликавања из посета страна P^n у посет подторуса од T^n, тако да имамо подгрупу $l(G) \subset T^n$ за сваку страну G политопа P^n. У



Слика 3. Торусни варијетет

случају стандардног дејства T^n на $\mathbb{C}^n$, тада постоји пројекција $T^n \times P^n \to M^{2n}$ чије су фибре над $x \in M^{2n}$ подгрупе изотропија над x. Овај аргумент се користи за реконструисање квазиторусне многострукости из датог карактеристичног пара (P^n, l).

За дату тачку $q \in P^n$, означимо са $G(q)$ минималну страну која садржи q у својој релативној унутрашњости. Дефинишимо релацију $\sim$ на $T^n \times P^n$ на следећи начин $(t_1, p) \sim (t_2, q)$ ако и само ако је $p = q$ и $t_1 t_2^{-1} \in l(G(q))$. Дефинишимо

$$M^{2n}(l) := (T^n \times P^n)/\sim .$$

Слободно дејство торуса T^n на $T^n \times P^n$ се очигледно спушта до дејства $(T^n \times P^n)/\sim$, са количником P^n. Ово дејство је слободно над унутрашњошћу политопа P^n и његове фиксне тачке су темена од P^n, (видети Слику 1). Као што је P^n покривен отвореним скуповима U_v, смештеним у теменима и дифеоморфним са $\mathbb{R}^n_+$, тако је и простор $(T^n \times P^n)/\sim$ прекривен отвореним скуповима $(T^n \times U_v)/\sim$ хомеоморфним са $(T^n \times \mathbb{R}^n_+)/\sim$, тј. са $\mathbb{C}^n$. Одваде следи да је дејство T^n на $(T^n \times P^n)/\sim$ локално стандардно, и према томе $(T^n \times P^n)/\sim$ је квазиторусна многострукост.

Описана конструкција квазиторусне многострукости се може исказати и у терминима дефиниције колимеса простора. Уочимо посет страна политопа P и за сваку k-страну политопа $G = F_{i_1} \cap \cdots F_{i_k}$ уочимо простор $T^k \times G$ при чему T^k шватамо као $T^n/(l(F_{i_1}) \times \cdots \times l(F_{i_{n-k+1}}))$. За стране $G \subset E$ дефинисаћемо пресликавање $d_{EG} : T^l \times E \to T^k \times G$ на следећи начин $d_{EG}(t, x) = (l(t), x)$ где је $l(t) \in T^l/T^{l-k}$, тј. l је пресликавање између посета подторуса T^n које настаје из карактеристичног пресликавања (1). Тада је

$$M^{2n} = \mathrm{colim}_P T^k \times G.$$

Производ две квазиторусне многострукости $M_1^{2n_1}$ и $M_2^{2n_2}$ над политопима $P_1^{n_1}$ и $P_2^{n_2}$ је квазиторусна многострукост над политопом $P_1^{n_1} \times P_2^{n_2}$

3. Кохомологија квазиторусних многострукости

Кохомологију квазиторусних многострукости описали су Davis и Januszkiewicz у [2]. Они су конструисали CW структуру са ћелијама искључиво парне димензије на квазиторусној многострукости.

Нека су $F_1, \ldots, F_m$ пљосни простог политопа P^n и нека је $\mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]$ полиномијална алгебра над $\mathbb{Z}$ са m генератора $v_1, \ldots, v_m$ по једним за сваку пљосан. Stanley-Reisner-ов прстен простог политопа P^n је према дефиницији 1 је количнички прстен $\mathbb{Z}(P^n) = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/\mathcal{I}_P$ где је $\mathcal{I}_P$ идеал генерисан свим бесквадратним мономима $v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_s}$ таквим да је $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_s} = \emptyset$ у P, $i_1 < \cdots < i_s$.

Нека је квазиторусна многострукост M^{2n} задата карактеристичним пресликавањем $l : F_i \mapsto T(F_i)$ и векторима пљосни $\lambda_{\mathbf{i}} = (\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{ni})^t \in \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \dots, m$. Дефинишимо линеарне форме

$$\theta_i := \lambda_{i1} v_1 + \dots + \lambda_{im} v_m \in \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m], \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{3}$$

Слике ових линеарних форми у Stanley-Reisner-овом прстену $\mathbb{Z}(P^n)$ означаваћемо на исти начин. Нека је $\mathcal{I}_l$ идеал у $\mathbb{Z}(P^n)$ генерисан са $\theta_1, \dots, \theta_n$.

Теорема 1 (Davis-Januszkiewicz). *Кохомолошки прстен од M^{2n} је описан са*

$$H^*(M^{2n}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/(\mathcal{I}_P + \mathcal{I}_l) = \mathbb{Z}(P^n)/\mathcal{I}_l,$$

где су v_i 2-димензионалне кохомолошке класе дуалне подмногострукостима пљосни $M_i^{2(n-1)}$, $i = 1, \dots, m$.

4. Карактеристичне класе квазиторусних многострукости

Davis и Januszkiewicz су у раду у [2] израчунали и карактеристичне класе квазиторусних многострукости. У њиховом раду добијена је формула [2, Теорема 4.14, Последица 6.8] из које се добијају многе тополошке инваријанте многострукости, између осталог и карактеристичне класе.

Нека је P прост политоп димензије n са m пљосни и M квазиторусна многострукост димензије $2n$ над P. Нека је v_j ($\deg v_j = 2, j = 1, \dots, m$) Поенкареов дуал инваријантне подмногострукости M_j кодимензије 2 у M^{2n}, као и у претходном поглављу. Еквиваријантни кохомолошки прстен $H^*_{T^n}(M; \mathbb{Z}) = H^*(ET \times_{T^n} M)$ од M има следећу структуру прстена:

$$H^*_{T^n}(M; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/\mathcal{I},$$

где је $\mathcal{I}$ Stanley-Reisner-ов идеал (идеал страна) политопа P у полиномијалном прстену $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$.

Нека је $\pi : ET \times_T M \to BT$ природна пројекција. Индуковани хомоморфизам

$$\pi^* : H^*(BT) = \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \to H^*(ET \times_{T^n} M) = H^*_{T^n}(M; \mathbb{Z})$$

се описује $n \times m$ матрицом $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, где $\lambda_j \in \mathbb{Z}^n$ ($j = 1, \dots, m$) одговарају генераторима Лиеве алгебре изотропске подгрупе карактеристичне подмногострукости M_j. Другим речима, Λ је карактеристична матрица од M. Нека је $\lambda_j = (\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{nj})^t \in \mathbb{Z}^n$. Тада имамо

$$\pi^*(t_i) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} v_j$$

који генеришу идеал $\mathcal{J}$ у $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$ са $\pi^*(t_i)$ за све $i = 1, \dots, n$. Овде описани начин задавања карактеристичне матрице је еквивалентан са описом који смо представили у Секцији 2. Према Теореми 1 је:

$$H^*(M) \simeq \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/(\mathcal{I} + \mathcal{J}).$$

Следећа теорема чији се доказ може наћи у [2] описује Stiefel-Whitney-еве класе квазиторусне многострукости M.

Теорема 2 (Davis-Januszkiewicz формула). *Stiefel-Whitney-еве карактеристичне класе су описане формулом:*

$$\omega(M) = \imath^* \prod_{i=1}^{m} (1 + v_i),$$

где је $\imath$ инклузија $\imath : M \to ET \times_T M$ и $\imath^*$ је индуковани хомоморфизам у кохомологији са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима.

Теорема 3 (Davis-Januszkiewicz формула). *Chern-ове карактеристичне класе су описане формулом:*

$$\omega(M) = \imath^* \prod_{i=1}^{m} (1 + v_i),$$

где је $\imath$ инклузија $\imath : M \to ET \times_T M$ и $\imath^*$ је индуковани хомоморфизам у кохомологији са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима.

5. Закључак

У овом саопштењу је приказано како се комбинаторним методама могу проучавати квазиторусне многострукости. Како се ради о централном објекту проучавања торусне топологије, алгебарске геометрије, али и динамичких система, њихово разумевање је од велике важности. Дали смо и преглед најзначајнијих теорема из којих се могу израчунати важне тополошке инваријанте.

Библиографија

[1] **V. Buchstaber, T. Panov**, Torus Actions and their applications in topology and combinatorics, *AMS University Lecture Series, volume 24*, 2002.

[2] **M. Davis, T. Januszkiewicz**. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions. *Duke Math. J.* 62 (1991), no. 2, 417451.

[3] **W. Fulton**, Introduction to Toric Varieties, *Ann. of Math. Studies 131, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.*, 1993.

[4] **Günter M. Ziegler**, Lectures on Polytopes, *Springer* 1995.

О конвергенцији метахеуристичке методе оптимизације колонијом пчела

Татјана Јакшић Кругер

Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду, Математички институт САНУ, Кнеза Михаила 36, Београд
e-mail: tatjana@mi.sanu.ac.rs

Апстракт. Многи проблеми у свакодневном животу се могу представити као проблеми оптимизације од којих велики број припада класи NP-тешких проблема, где метахеуристичке методе представљају природан избор претраге њиховог простора решења. Метахеуристичке методе су моћан алат за конструисање алгоритама који се у имплементацији прилагођавају сваком конкретном проблему. Њихова основна карактеристика је да релативно брзо дају решења доброг квалитета. Међутим, оптималност коначног резултата добијеног након достизања задатог критеријума заустављања се не може гарантовати. Да би се утврдила успешност метахеуристичких метода тежи се њиховој теоријској верификацији испитивањем асимптотске конвергенције низа најбољих решења ка оптималном, у случају да дозвољено време или број итерација тежи бесконачности. Предмет овог рада је испитивање асимптотске конвергенције једне релативно нове метахеуристичке методе инспирисане понашањем пчела током потраге за нектаром, односно, методе оптимизације колонијом пчела (енг. Bee Colony Optimization). BCO метода је до сада успешно примењена на велики број оптимизационих проблема, модификована и унапређивана током бројних имплементација. Међутим, у овом раду се по први пут излаже њена теоријска анализа и испитују услови њене конвергенције.

Кључне речи: комбинаторна оптимизација, квалитет решења, апроксимативне методе, интелигенција роја, услови конвергенције.

1. Увод

Оптимизација је математичка дисциплина која се бави проучавањем проблема налажења екстремних вредности функције дефинисане на неком скупу [35]. Многи проблеми у свакодневном животу се могу представити као проблеми оптимизације, као на пример одређивање најповољнијег пута за пошиљке или израда распореда школских вежби. У рачунарској теорији дефинисана је класа која обухвата такозване NP тешке проблеме [29]. У теорији оптимизације од посебног интереса су они NP тешки проблеми за које желимо да нађемо најбоље решење, а метахеуристичке методе представљају природан избор такве претраге.

Метахеуристичке методе се могу дефинисати као уопштени (независан од конкретног проблема) скуп правила за конструисање алгоритама оптимизације [9]. Приликом имплементације, та правила се примењују на конкретан проблем, а додатно се могу уградити и нека хеуристичка знања о датом проблему. Конкретније, ова правила подразумевају уопштени алгоритам који може бити инспирисан природним процесима (нпр. еволуцијом врста, понашањем инсеката у природи или физичким процесима), или заснован на математичким принципима. Метахеуристике се најчешће имплементирају као стохастички алгоритми (изузетак су, на пример, неке варијанте детерминистичког табу претраживања [16]), због чега су тренутно заступљени радови који се баве углавном емпиријском верификацијом метахеуристичких метода, док њихова теоријска анализа и даље остаје непотпуна [15].

Без обзира на употребљивост и практичност, метахеуристике карактерише недостатак информације о правом квалитету понуђеног решења: чак и када је решење оптимално, не постоји доказ да је заиста тако. Такође, није могуће утврдити колико је добијено субоптимално решење далеко од оптимума. Из ових разлога се у новијој литератури све више напора улаже у теоријске анализе метахеуристичких метода [15, 47, 48]. Наш главни циљ је да допринесемо математичкој верификацији релативно нове метахеуристичке методе коју називамо *оптимизација колонијом пчела* (енг. *Bee Colony Optimization, BCO*) чије основне концепте су први пут изложили Лучић и Теодоровић у раду [20]. Ову методу су наставили да усавршавају и успешно примењују разни аутори [10, 11, 39], међутим, осим емпиријске евалуације [24] и калибрације параметара [27], нико се до сада није бавио теоријском анализом саме методе. Главни резултат овог рада се састоји од анализе потребних и довољних услова за асимптотску конвергенцију BCO методе, као и у самом доказу те конвергенције.

Рад је подељен на 4 одељака. У првом одељку је представљена дефиниција проблема оптимизације, класификација метода за решавање оптимизационих проблема и опис рада метахеуристичких метода са прегледом релевантних радова. У другом одељку је описана метода оптимизације колонијом пчела и приказан њен псеудо код у циљу што бољег разумевања њене теоријске анализе. У трећем одељку је изложен доказ асимптотске конвергенције за две варијанте алгоритама BCO методе. У четвртом одељку су дате закључне напомене и потенцијални правци за будућа истраживања.

1.1. Проблем оптимизације

Израз *оптимално* потиче од латинске речи optimus, што значи *најбоље*. У свакодневном животу оптимизациони проблеми се могу лако пронаћи. Пример једног таквог проблема је утврђивање најкраћег пута од посла до куће имајући у виду услове у саобраћају или успутне задатке које желимо да обавимо. Међутим, чим се појаве додатни ограничавајући услови, на пример компликованији систем превоза или временска ограничења, често нисмо у могућности да одредимо бољу (оптималну) путању.

Уопштено говорећи, проблеми оптимизације су проблеми проналажења најбољег (оптималног) решења, или довољно доброг решења задатог проблема, који садрже нека ограничења. Уколико проблем можемо формулисати математичким моделом, односно приказати га функцијом $f(x)$, а ограничавајуће факторе системом неједначина, тада можемо рећи да се проблем оптимизације своди на проналажење минималне (максималне) вредности функције $f(x)$, где $x \in D$. Скуп D називамо *допустивим скупом* или простором решења, а састоји се од оних вредности променљивих x које припадају области дефинисаности функције f и које задовољавају задате неједначине. У теорији оптимизације разликујемо проблеме код којих је скуп D дискретан (проблеми комбинаторне оптимизације) и проблеме где су вредности скупа D реални бројеви (проблеми континуалне оптимизације) [5, 38].

Методе решавања задатака оптимизације могу се поделити у три главне групе ([9]):

- егзактне методе,
- хеуристичке методе и
- метахеурстичке методе.

Егзактне методе се базирају на претраживању целог простора решења. Међутим, са порастом димензије проблема јавља се и потреба за интелигентнијим приступом претраживању које ће се усмеравати у одређеном правцу и тиме елиминисати бескорисна испитивања. Пример таквих метода су: методе гранања и ограничавања (branch-and-bound, B& B) и метода гранања и одсецања (branch-and-cut, B& C) [35].

Хеуристичке методе се развијају када димензија проблема толико порасте да их не можемо решити егзактним методама. Оне представљају технике решавања које узимају у обзир а приори знање о разматраном проблему. Под појмом *хеуристика* се у неком општем значењу подразумева *пронаћи* или *открити* путем покушаја и грешака. Користе се за конструкцију (генерисање) решења и самим тим доносе одлуке на основу непотпуних информација. Због тога не треба очекивати да се помоћу хеуристичких метода добије оптимално решење. Њихова основна карактеристика је да обезбеђују решења релативно доброг квалитета у кратком времену извршавања. Стога се у савременој литератури много чешће, него као самосталне методе, користе у комбинацији са другим оптимизационим техникама (егзактним методама и метахеуристикама).

За разлику од хеуристика, које су дизајниране за решавање специфичних проблема, метахеуристике представљају опште (универзалне) методе које не зависе од проблема. Као такве, метахеуристике могу да позивају хеуристичке методе како би их усмеравале током процеса претраживања простора решења.

1.2. Метахеуристичке методе

Метахеуристичке методе представљају моћан алат за конструисање алгоритама помоћу којих решавамо оптимизационе проблеме [5, 38]. Могу се дефинисати као уопштени (независан од проблема) скуп правила која се приликом имплементације прилагођавају сваком конкретном проблему. У пракси се показало да различите метахеуристичке методе, за релативно кратко време, успевају да пронађу допустива субоптимална решења за сложеније проблеме или проблеме већих димензија, што је утицало на њихову широку примену последњих деценија. Међутим, у поређењу са егзактним методама или другим алгоритмима оптимизације, метахеуристике (као и остале хеуристике) не могу да гарантују оптималност добијеног решења, нити колико је добијено решење удаљено од жељеног оптимума (уколико добијена решења сама нису оптимална). И поред ових недостатака, метахеуристике су данас остале опште прихваћене.

Метахеуристике су оригинално развијене за решавање комбинаторних проблема оптимизације. Комбинаторна оптимизација је математичка дисциплина која проучава проблеме налажења екстремних вредности функције дефинисане на коначном или пребројиво бесконачном скупу [35]. Одређивање најповољнијег пута за пошиљке, израда распореда школских вежби и многи други задаци се могу представити као проблеми комбинаторне оптимизације. Такође, предмет истраживања комбинаторне оптимизације су проблеми који су већином централни за дисциплине рачунарских наука и инжењерства.

Две главне компоненте било којег метахеуристичког алгоритма су: претраживање и експлоатација (енг. exploration and exploitation). Претраживање подразумева испитивање различитих субоптималних решења у циљу приступања што већем делу простора решења, док експлоатација подразумева фокусирање на локални део простора коришћењем стеченог знања. Још једна битна компонента код метахеуристичких метода су случајни процеси. Употреба случајности у имплементацијама метахеуристика омогућује алгоритму да искочи из локалног оптимума у циљу проналажења глобалног екстрема. Случајни процеси се могу користити и приликом локалног претраживања. Проналажење правог односа између наведених компоненти је изузетно важан моменат за побољшавање перформанси било којег метахеуристичког алгоритма [6, 47].

Да би се утврдила успешност метахеуристика тежи се њиховој теоријској верификацији [15, 47, 48]. Она се спроводи испитивањем асимптотске конвергенције низа најбољих решења ка оптималном решењу, у случају да дозвољено време или број итерација тежи бесконачности. Међутим, и поред све убрзанијег развоја метахеуристичких метода у великом броју случајева недостаје њихова теоријска анализа. Ово нас не спречава да поредимо перформансе различитих метахеуристичких метода, или да их имплементирамо у циљу проналажења допустивих решења NP тешких проблема, али ограничава предвиђање ефикасности и конвергенције имплементираних метода ка оптималном решењу.

Данас постоји мноштво различитих метахеуристичких метода. Захваљујући оваквој разноврсности оне се могу класификовати на више начина: према начину заснивања, броју решења којима се располаже унутар једне итерације или према концепту рада, односно да ли се решења граде или поправљају [8, 38]. У зависности од начина заснивања разликујемо метахеуристичке методе инспирисане природним процесима (нпр. еволуцијом врста, процесом каљења, понашањем колоније инсеката, ројем честица, јатом птица, имунолошким системом итд.) [32] и метахеуристичке методе засноване на математичким принципима (нпр. табу претраживање (енг. tabu search, TS) [32, ch2] и метода промењљивих околина (енг. Variable neighbourhood search, VNS) [32, ch3]). У раду [38] је представљена класификација у односу на број решења којима се располаже унутар једне итерације, тиме дефинишући методе са једним решењем (енг. single based) и методе засноване на популацији (енг. population based). У метахеуристикама, које располажу једним решењем у итерацији, примењује се стратегија која подразумева да се кроз низ итерација формира секвенца решења, са тежњом да свако наредно буде боље од претходног. Примери таквих метода су методе симулираног каљења (енг. simulated annealing, SA) [32, 38], VNS и TS. Методе засноване на популацији се фокусирају на поправљање више потенцијалних решења углавном користећи предности присуства популације агената ради усмеравања тока претраживања. Примери таквих метода су: генетски алгорими (енг. genetic algorithm, GA) [32, ch5], оптимизација ројем честица (енг. particle swarm optimization, PSO) [38, ch3], оптимизација мрављим колонијама (енг. ant colony optimization, ACO) [32, ch8], BCO, као и многе друге које припадају новијем датуму [47]. Према концепту рада метахеуристике се деле на конструктивне (уколико се током извршавања граде нова и боља решења) и методе засноване на принципу побољшања (уколико се током извршавања решења трансформишу ради добијања бољих резултата). Примери контруктивних метахеуристика су похлепно случајно адаптивно претраживање (енг. greedy randomized adaptive search procedure, GRASP) [31], ACO и оптимизација колонијом пчела BCO [20, 39]. Примери метода које се заснивају на принципима побољшања постојећих решења су GA, SA, VNS, као и новије варијанте BCO алгоритма [10, 28, 41].

И поред тога што употреба метахеуристика омогућује да се значајно смањи временска сложеност процеса претраге, она и даље остаје висока за све већи број проблема у областима науке и индустрије. Вешта комбинација (хибридизација) метахеуристика са другим техникама оптимизације (било егзактним, било хеуристичким или неким другим метахеуристичким методама) може да побољша ефикасност приликом решавања проблема великих димензија. Оваква хибридизација се може постићи, на пример, колаборацијом између различитих техника оптимизације тако што ће се наизменично извршавати и размењивати информације. Други начин је интеграција компоненти једне технике оптимизације у другој у циљу коришћења добрих страна сваке од њих [6, 35].

Специјална пажња је у наставку посвећена релативно новој метахеуристичкој методи, односно оптимизацији колонијом пчела. Популарност алгоритама инспирисаних понашањем пчела у природи се темељи на њиховој способности као биолошких система да се прилагоде разноврсним променама у свом окружењу. Овакви алгоритми припадају посебној категорији алгоритама у области вештачке интелигенције заснованих на интелигенција роја (енг. swarm intelligence, [19]). Интелигеницација роја је једна од многих карактеристика разних колонија социјалних инсеката (пчела, оса, мрава, термита), а одликује се аутономијом, распоредом дужности и само-организацијом.

2. Оптимизација колонијом пчела

Оптимизација колонијом пчела је метахеуристичка метода која припада групи техника базираних на интелигенцији роја. Ове методе су засноване на биолошкој потреби јединки да се удружују ради остварења заједничких циљева [39]. Основне концепте BCO методе развили су Душан Теородовић и његов докторант Панта Лучић [20–22].

Алгоритми оптимизације колонијом пчела су се појавили у литератури као парадигма заснована на понашању пчела у природи из једне заједнице (колоније) током потраге за нектаром. Различити аутори су предложили различите имплементације концепта оптимизације колонијом пчела и проверили их решавањем многобројних проблема комбинаторне оптимизације [12, 42].

Основна идеја BCO методе је конструисање система од више агената (колоније вештачких пчела) који ће тражити добра решења за различите проблеме оптимизације. Колонија вештачких пчела се углавном састоји од мањег броја индивидуа, што не нарушава основне концепте моделирања заснованог на понашању пчела у природи. Улога вештачких пчела је да претражују простор решења у циљу проналажења допустивих решења. Да би пронашле најбоље решење, вештачке пчеле размењују информације које су сакупиле током претраге. Користећи колективно знање и размену информација, вештачке пчеле се концентришу на области које садрже квалитетнија решења, полако напуштајући она која су слабијег квалитета. Кроз низ итеративних корака, вештачке пчеле колективно генеришу и/или поправљају своја решења, док се не задовољи критеријум заустављања.

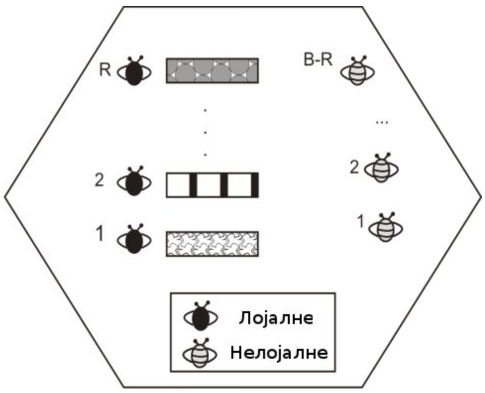
BCO метода је подвргнута неким модификацијама кроз бројне примене, због чега тренутно разликујемо два основна приступа приликом развоја алгоритама. Први се базира на конструктивним корацима током којих свака пчела гради своје решење [11]. Други приступ се заснива на поправци постојећих комплетних решења у циљу изналажења најбољег коначног решења [10]. У наставку дајемо општи опис BCO алгоритма у који се уклапају оба наведена приступа. Постоје и радови на тему хибридизације BCO алгоритма са техникама одлучивања у присуству неизвесности (фази логиком) [23, 40] и техникама за вишекритеријумску оптимизацију [34].

2.1. Опис BCO алгоритма

Популација вештачких пчела се састоји од B агената који удружено траже оптимално решење. Свака вештачка пчела генерише по једно решење за дати проблем [11]. Рад BCO алгоритма одвија се кроз итерације, а свака итерација се састоји од NC корака. Корак BCO алгоритма дели се на две фазе: лет унапред (енг. forward pass) и лет уназад (енг. backward pass). Дакле, у оквиру једне итерације ове две фазе се међусобно смењују NC пута, тј. док се не изгенеришу комплетна решења, у конструктивној верзији, или док се не изврши NC модификација почетних решења, у верзији са поправком. Током лета унапред све вештачке пчеле су укључене у истраживање простора решења.

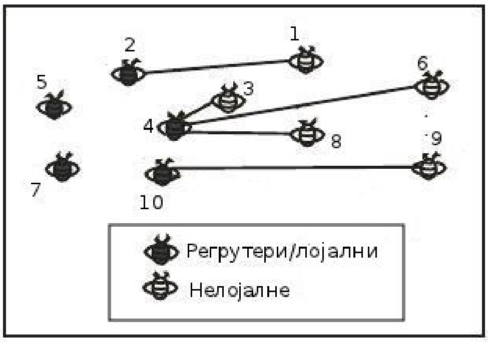
По аналогији са природним процесима, (парцијално) решење се може поистоветити са количином сакупљеног нектара и/или са удаљеношћу кошнице од извора хране, а процес сакупљања нектара у природи одговара фази лета унапред у BCO алгоритму.

Након генерисања својих (парцијалних) решења вештачке пчеле започињу другу фазу, лет уназад. У фази лета уназад вештачке пчеле размењују информације о квалитету својих пронађених решења. У природи, пчеле би се вратиле у кошницу, извеле ритуални плес током којег би информисале остале пчеле о количини и квалитету нектара којег су откриле, као и о приближном растојању места извора хране од кошнице. У алгоритму претраживања пчеле рекламирају квалитет својих решења одређивањем вредности функције циља. Када се сва решења процене (евалуирају), свака пчела треба да одреди вероватноћу да ће остати *лојална* свом (парцијалном) решењу. Пчеле са бољим решењем имају више шанси да га задрже и рекламирају осталима. За разлику од пчела у природи, вештачке пчеле које остану лојалне свом (парцијалном) решењу у исто време постају и *регрутери*, односно, њихова решења ће остале пчеле размотрити. Пчела која напусти своје (парцијално) решење постаје *нелојална* и мора да преузме неко од решења које нуде регрутери. У том моменту издвајају се две врсте пчела (слика 1): R регрутера и преосталих $B-R$ нелојалних пчела [10]. Одлуку које од рекламираних решења ће преузети неопредељена пчела доноси са вероватноћом која је пропорционална квалитету одговарајућег рекламираног решења.



Слика 1. Илустрација процеса утврђивања лојалности.

Процес регрутације за одређени број пчела ($B = 10$) је приказан на слици 2. Претпоставимо да након поређења свих генерисаних (парцијалних) решења пчела B_1 одлучи да напусти своје (парцијално) решење и да се придружи пчели B_2. У природи би обе пчеле до извора хране летеле путањом коју је користила пчела B_2. У BCO алгоритму, пчела B_1 имитира процес придруживања копирањем парцијалног решења пчеле B_2. Након тога, обе пчеле доносе самосталну одлуку о томе на који начин ће извести наредни део конструкције/модификације.



Слика 2. Илустрација процеса регрутације.

На слици 2 илустрована је ситуација где пчеле B_3, B_6 и B_8 копирају (парцијално) решење пчеле B_4. Ово највероватније значи да је квалитет решења пчеле B_4 био знатно бољи од квалитета решења која су понудили остали регрутери.

Као што је већ поменуто, две фазе алгоритма претраживања (фаза лета унапред и уназад) смењују се NC пута, односно, све док свака пчела не заврши са генерисањем свог решења или изврши NC трансформација. У првим верзијама (конструктивне) варијанте BCO алгоритма, параметар NC се користио да током сваког лета унапред броји компоненте које ће се додати парцијалном решењу. Број летова унапред/уназад у том случају се рачунао као функција параметра NC. Као последица развоја нове верзије BCO алгоритма, оригинално значење NC параметра се променило, те се сада број компоненти рачуна као функција од NC. У оба случаја можемо рећи да се NC користи за дефинисање учестаности размене информација међу пчелама. По завршетку NC корака, одређује се најбоље од свих B понуђених решења. Оно се потом користи за ажурирање најбољег глобалног решења, чиме је једна итерација BCO алгоритма завршена. У овом тренутку добијена решења за сваку пчелу могу се избрисати како би у следећој итерацији пчеле градиле/модификовале нова решења. BCO алгоритам се извршава итерацију по итерацију све док се не задовољи дефинисани критеријум заустављања. Критеријум заустављања може бити: максималан укупан број итерација, максималан број итерација без побољшања вредности функције циља, максимално допуштено време рада процесора, итд. По задовољењу критеријума заустављања, исписује се најбоље пронађено решење (тзв. тренутно најбоље глобално решење).

2.2. Псеудо код BCO алгоритма

Једна од главних предности BCO алгоритма је веома мали број параметара, а то су: број пчела у кошници (B), и број летова унапред/уназад у једној итерацији (NC).

На слици 3 је приказан псеудо код BCO алгоритма. Кораци 1) и 2) унутар лета унапред и *ii*) унутар лета уназад су зависни од поставке проблема и потребно је прилагодити их приликом сваке имплементације BCO алгоритма. Преостали кораци псеудокода описују избор који свака пчела мора да изврши и њихова имплементација не зависи од конкретног проблема који се решава. Постоје формуле на основу којих свака пчела доноси одговарајуће одлуке и оне су описане у наставку овог одељка.

Лет уназад започиње оценом свих (парцијалних) решења која су генерисана у претходном лету унапред. Уколико квалитет решења означимо са C_b $(b = 1, 2, ..., B)$ онда је O_b нормализована вредност од C_b, која се у случају минимизације функције циља рачуна по формули:

$$O_b = \begin{cases} \frac{C_{max}-C_b}{C_{max}-C_{min}} & \text{if } C_{max} \neq C_{min} \\ 1 & \text{if } C_{max} = C_{min} \end{cases}, \quad b = 1, 2, ..., B \tag{1}$$

где C_{min} и C_{max} представљају најмању и највећу вредност међу тренутним C_b вредностима.

Иницијализација: Читање улазних података, постављање вредности параметара BCO-а и критеријума заустављања.
Do
(1) Додели (празно) решење свакој пчели.
(2) *For* $(i = 0; i < \text{NC}; i++)$
//лет унапред
i) *For* $(b = 0; b < B; b++)$
For $(s = 0; s < f(\text{NC}); s++)$ // броји кораке
1) Процени све могуће потезе;
2) Изабери потез помоћу рулета;
//лет уназад
ii) *For* $(b = 0; b < B; b++)$
Процени (парцијална/комплетна) решења пчеле b;
iii) *For* $(b = 0; b < B; b++)$
Одлучи о лојалности помоћу рулета за пчелу b;
iv) *For* $(b = 0; b < B; b++)$
If (b је нелојална), изабери регрутера помоћу рулета.
(3) Оцени сва решења и пронађи најбоље. Ажурирај x_{best} и $f(x_{best})$.
while критеријум заустављања није задовољен.
return $(x_{best}, f(x_{best}))$

Слика 3. Псеудо код за BCO алгоритам

Вероватноћа да ће b-та пчела остати лојална свом претходно пронађеном парцијалном решењу се рачуна на следећи начин:

$$p_b^{u+1} = e^{-\frac{O_{max}-O_b}{u}}, b = 1, 2, ..., B \tag{2}$$

где је u тренутна вредност бројача фаза лета унапред/уназад. У раду [24] су предложене и анализиране и неке друге формуле за одређивање вероватноће лојалности.

У последњем делу лета уназад, за сваку нелојалну пчелу се избор регрутера врши на основу вероватноће

$$p_b = \frac{O_b}{\sum_{k=1}^{R} O_k}, b = 1, 2, ..., R \tag{3}$$

где O_k представља нормализовану вредност функције циља k-тог рекламираног (парцијалног) решења, а R број регрутера, односно број рекламираних решења.

Помоћу формуле (3) и генератора случајних бројева свака нелојална пчела ће се придружити једном од регрутера. У том моменту (парцијално) решење регрутера се копира у одговарајуће структуре података, што значи да ће регрутер и његови следбеници наставити да граде нова парцијална решења из исте почетне тачке.

2.3. Остали алгоритми инспирисани понашањем пчела

Последње две деценије истраживачи су проучавали понашање социјалних инсеката како би искористили концепт интелигенције роја за креирање разних вештачких система. Међутим, алгоритми оптимизације инспирисани понашањем пчела се појављују тек последњих десет година, као на пример: Bee System [20, 23], Bee Colony Optimization (BCO) [40], Marriage in Honey-Bees Optimization (MBO) [1], BeeHive [44], Honey Bees [26], Artificial Bee Colony (ABC) [18], Bee System Optimization (BSO) [13], Bees Algorithm [30], Honey Bee Marriage Optimization (HBMO) [2], Fast Marriage in Honey Bees Optimization (MHBO) [45], Virtual Bee Algorithm (VBA) [46]. Алгоритми инспирисани понашањем пчела се разликују према томе да ли су базирани на опонашању потраге пчела за храном, процесу размножавања, или избору партнера и избору места на којем ће се сместити кошница [4]. У свим овим варијантама, главни концепт рада вештачких пчела је кооперативност. Кооперација омогућује пчелама да постигну боље резултате од оних које би иначе добиле индивидуалним радом.

У литератури постоји одређени број радова који се баве анализом ефикасности пчелињих алгоритама. Међутим, анализе су вршене искључиво емпиријски (експериментално), односно ни за један алгоритам инспирисан пчелама у природи не постоји теоријски доказ њене асимпототске конвергенције, што увећава допринос овог рада.

3. Конвергенција ВСО алгоритма

Број метахеуристичких метода, њихових имплементација и примена на многобројне реалне проблеме је временом знатно порастао. Из тог разлога се улаже велики напор у анализу перформанси метахеуристичких метода, међутим највећим делом искључиво експерименталним путем или теоријском анализом хеуристичких имплементација. Неки аспекти су на овај начин добро објашњени, док друга питања остају неразјашњена. Основна карактеристика метахеуристика је да релативно брзо дају решења доброг квалита. Међутим, чак и када је решење оптимално, не постоји доказ да је заиста тако. Такође, није могуће утврдити колико је добијено субоптимално решење далеко од оптимума. Успешност метахеуристика се може утврдити њиховом теоријском верификацијом, односно испитивањем асимптотске конвергенције низа најбољих решења, које алгоритам генерише, ка оптималном решењу у случају да дозвољено време или број итерација тежи бесконачности.

Теоријска верификација метахеуристика је тема многих радова који се баве доказом конвергенције метахеуристичких метода: SA [14], метода уопштеног успона/спуста GHC (енг. generalized hill-climbing) [37], PSO [43], метода унакрсне ентропије (енг. cross-entropy, CE) [25], GA [33], ACO [36] и VNS [7]. Сваки од ових радова даје различит приступ испитивању конвергенције. Разлика се састоји у томе што је полазна тачка специфичан алгоритам који се не може повезати са алгоритмом неке друге метахеуристичке методе. У раду [15] је представљен генерички алгоритам који успешно описује све данашње метахеуристике. Захваљујући таквом приступу, могуће је испититати конвергенцију пратећи нека општа упуства.

3.1. Дефиниција конвергенције

Дефиниција конвергенције метахеуристичких метода мора да обезбеди одговор на питање да ли низ најбољих решења, које нуди одговарајућа метахеуристика, конвергира ка оптималном решењу и, у том случају, којом брзином. Математичка дефиниција конвергенције неког низа бројева на простору D би гласила: нека је $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, где $x \in D$, низ разматраних елемената и претпоставимо да је између елемената датог низа дефинисано неко растојање d; низ (x_n) тада конвергира ка граничној вредности x^* уколико за свако $\varepsilon > 0$ постоји цео број n_0, такво да за свако $n \geqslant n_0$ важи да је $d(x_n, x^*) < \varepsilon$. Уколико је простор D коначан, једноставнија верзија ове дефиније би гласила: низ x_n конвергира ка граничној вредности x^* ако и само ако постоји такво n_o за које је $x_n = x^*$, када је $n \geqslant n_0$.

Већина метахеуристичких алгоритама је стохастичке природе, те њихова теоријска анализа разматра понашање серије случајних промењљивих за које претпостављамо да имају исту расподелу. Итерације, код већине метахеуристичких метода, су међусобно зависне док независност постоји само код метода случајног хода (енг. random walk).

Основне идеје доказа конвергенције за разне метахеуристичке методе приказане су у раду аутора Волтера Гутјара [15], одакле су усвојене нотација и дефиниције репродуковане у наставку и коришћене за опис конвергенције ВСО алгоритма.

Две стандардне дефиниције конвергенције низа случајних промењљивих X_t, где је са $P_r(.)$ означена вероватноћа одговарајућег догађаја, су:

Дефиниција 1. Низ случајних промењљивих $(X_1, X_2, ...)$ конверигра са *вероватноћом један* ка случајној промењљивој X^* уколико је $P_r(\lim_{t\to\infty} X_t = X^*) = 1$ тј. уколико са вероватноћом један реализација $(x_1, x_2, ...)$ низа (X_t) конвергира реализацији x^* од X^*.

Дефиниција 2. Низ случајних промењљивих $(X_1, X_2, ...)$ конверигра *у вероватноћи* ка случајној промењљивој X^* уколико за свако $\varepsilon > 0$ важи да је $\lim_{t\to\infty} P_r(d(X_t, X^*) \geqslant \varepsilon) = 0$, где је d функција растојања на простору D из којег случајне промењљиве X_t узимају своје вредности.

Приликом решавања конкретних проблема ове дефиниције се углавном своде на облик у којем је гранична вредност X^* неки константни, детерминистички елемент x^*. Уколико је D коначан скуп тада Дефиниција 1 гласи: X_t конвергира ка x^* са вероватноћом један, уколико је

$$P_r(\exists u \geqslant 1 : X_t = x^*, \forall t \geqslant u) = 1,$$

док Дефиниција 2 гласи: X_t конвергира ка x^* у вероватноћи уколико је $\lim_{t\to\infty} P_r(X_t = x^*) = 1$.

Код метахеуристичких метода посматрани низ $(x_1, x_2, ..., x_t, ...)$ где $x_i \in D$, представља низ тренутно најбољих решења (x_t^{bsf}) које разматрана метахеуристичка метода генерише током итерација. У том случају функција растојања има облик $d(x_i, x_j) = |f(x_i) - f(x_j)|$, тј. представља апсолутну разлику одговарајућих вредности функција циља. Такође, за већину метахеуристичких метода ће важити да чим се генерише оптимално решење оно се даље пропагира кроз наредне итерације. Као последица, полазни низ постаје $(x_1, x_2, ..., x_t, ..., x^*, x^*, ...)$.

У свом раду Гутјар разликује два типа конвергенције: конвергенцију тренутно најбољег решења (енг. "best-so-far") и конвергенцију по моделу (енг. model convergence). Конвергенција тренутно најбољег решења разматра да ли тренутно најбоље решење x_t^{bsf} конвергира ка неком оптималном решењу x^*, када $t \to \infty$, односно под којим условима може да се гарантује да ће $f(x_t^{bsf})$ тежити ка $f^* = \min\{f(x) : x \in D\}$. Овај тип конвергенције такође подразумева да се конвергенција са вероватноћом један и конвергенција у вероватноћи поклапају. Конвергенција по моделу посматра компромис између претраживања и експлоатације намештањем параметара алгоритма који, да би конвергенција успела, морају обезбедити одговарајући однос између ова два фактора. Ван оваквог модела могуће је да прекомерна експлоатација допринесе превременој конвергенцији ка субоптималном решењу, док прекомерно претраживање изазива ефекте случајног претраживања и онемогућује конвергенцију по моделу (у том случају није искључена конвергенција тренутно најбољег решења). Овај тип конвергенције захтева сложенији математички апарат, те га у овом раду нећемо разматрати.

Утврђивање услова, под којим ће низ најбољих решења BCO алгоритма конвергирати ка оптималном, се може испитати разматрањем конвергенције према првом типу по Гутјару. У овом раду разматра се конвергенција две варијанте BCO алгоритма: независни BCO и BCO са глобалним знањем где се стечено знање пропагира кроз итерације, тј. на глобалном нивоу.

3.2. Конвергенција најбољег BCO решења ка оптималном решењу

BCO метода се приликом имплементације прилагођава сваком конкретном проблему оптимизације. Ово укључује репрезентацију решења, правила за конструисање/модификацију тренутних решења, њихову оцену и поређење. Програм се извршава над истом инстанцом итерацију по итерацију, док се не задовољи дефинисани критеријум заустављања. Коначно решење извршавања BCO програма се узима као најбоље решење пронађено пре задовољења критеријума заустављања. Уколико није познато оптимално решење за дати проблем, није могуће одредити квалитет коначног BCO решења. Могуће је једино повећати максимални број итерација и на тај начин покушати да се обезбеди боље коначно решење.

Да би се омогућило да BCO алгоритам генерише оптимално решење потребно је обезбедити претраживање комплетног простора решења, тј. да је најмање једна пчела способна да генерише било које допустиво решење са строго позитивном вероватноћом $(p > 0)$. Самим тим и вероватноћа генерисања оптималног решења (p^*) биће строго већа од нуле. Уколико су итерације BCO алгоритма независне, тада се вероватноћа p^* током извршавања алгоритма не мења. У том случају, BCO (са независним итерацијама) представља рестартовање исте случајне процедуре из различитих почетних тачака. Када се у процес закључивања укључи тренутно најбоље решење (x^{bsf}), или било која друга информација од глобалног значаја, добијамо BCO алгоритам са глобалним знањем. У том случају, вероватноћа да ће алгоритам генерисати оптимално решење није константа већ се мења из итерације у итерацију, односно важиће $p^* = p^*(t)$.

У наставку су представљене две теореме: прва теорема даје потребан и довољан услов асимптотске конвергенције независног BCO-а, док друга теорема даје довољан услов за асимптотску конвергенцију BCO алгоритма са глобалним знањем.

Теорема 1. *Нека је $P^*(t)$ вероватноћа да ће* BCO *алгоритам генерисати неко оптимално решење x^* барем једном у првих t итерација. Нека је p^* вероватноћа да ће било која пчела генерисати оптимално решење. Тада, за произвољно $\varepsilon > 0$ и довољно велико t, је $p^* > 0$ ако и само ако је $P^*(t) \geqslant 1 - \varepsilon$, односно*

$$p^* > 0 \iff \lim_{t\to\infty} P^*(t) = 1.$$

Доказ. ($\Rightarrow$) Претпоставимо да се оптимално решење не генерише у првих t итерација приликом BCO извршавања. Када су итерације независне, вероватноћа одговарајућег догађаја биће једнака $(1 - p^*)^t$. Израз $1 - p^*$ означава вероватноћу да било која пчела у било којем тренутку (итерацији) неће генерисати оптимално решење. Као последица овога, израз $(1-p^*)^t$ означава вероватноћу да се у првих t итерација није генерисало оптимално решење. Тада из услова $p^* > 0$ добијамо да је $1-p^* < 1$. Ово значи да ће $(1-p^*)^t$ опадати како t расте. Коначно, можемо да закључимо да ће $P^*(t)$, што је једнако $1 - (1 - p^*)^t$, бити произвољно близу један за довољно велико t, јер је $(1 - p^*)^t < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Претпоставимо да за $\varepsilon > 0$ важи услов $P^*(t) \geqslant 1 - \varepsilon$, односно да ће алгоритам генерисати оптимално решење у некој од t итерација, за $t \to \infty$. Како важи $1-(1-p^*)^t \geqslant 1-\varepsilon$, то је $p^* > 0$, јер у супротном добијамо контрадикцију (за $p^* = 0$ добијамо $\varepsilon \geqslant 1$). □

У случају да итерације BCO алгоритма нису независне, вероватноћа да ће било која пчела генерисати оптимално решење није више константна већ зависи од броја итерације, тј. $p^* = p^*(t)$. У овом случају, довољан услов конвергенције BCO алгоритма је да низ $p^*(t)$ има строго позитивну доњу границу, тј. $p_{min} > 0$. Ово описује следећа теорема.

Теорема 2. *Нека је $P^*(t)$ вероватноћа да ће* BCO *алгоритам генерисати неко оптимално решење x^* барем једном у првих t итерација. Нека је $p^*(t)$ вероватноћа да ће у t-тој итерацији било која пчела генерисати оптимално решење. Тада за произвољно $\varepsilon > 0$ и довољно велико t, из $p^*(t) \geqslant p_{min} > 0$ следи да је $P^*(t) \geqslant 1 - \varepsilon$, односно*

$$\lim_{t\to\infty} P^*(t) = 1.$$

Доказ. Из услова $p^*(t) \geqslant p_{min} > 0$ имамо да је $1 - p^*(t) \leqslant 1 - p_{min}$, за свако t. Претпоставимо да се оптимално решење не генерише у првих t итерација приликом BCO извршавања. Вероватноћа одговарајућег догађаја једнака је $\prod_{i=1}^{t}(1-p^*(i))$ (видети у [17], лема 1). Према услову теореме имамо да је $\prod_{i=1}^{t}(1 - p^*(i)) \leqslant (1 - p_{min})^t$, одакле добијамо

$$P^*(t) = 1 - \prod_{i=1}^{t}(1 - p^*(i)) \geqslant 1 - (1 - p_{min})^t.$$

Како $(1 - p_{min})^t \to 0$, за $t \to \infty$, на основу претходне теореме (Теорема 1) можемо закључити да ће $P^*(t)$ бити произвољно близу један за довољно велико t, односно да $\lim_{t\to\infty} P^*(t) = 1$. □

Из Теореме 1 и Теореме 2 следи да је услов да имплементација BCO алгоритма конвергира ка оптималном решењу погодан избор репрезентације решења и правила конструкције/модификације који омогућавају генерисање оптималног решења са вероватноћом већом од 0. Теорема 1 даје потребан и довољан услов за BCO алгоритам са независним итерацијама, док Теорема 2 даје довољан услов конвергенције BCO алгоритма са глобалним знањем. Погодан избор репрезентације решења се може представити на примеру TSP проблема (проблем трговачког путника [3]): уколико је решење представљено као пермутација градова, тада је вероватноћа генерисања оптималног пута (оптималне пермутације), најмање једанака $1/n!$, што је строго веће од нуле.

4. Закључак

Оптимизација колонијом пчела (BCO) је метахеуристичка метода која припада групи техника базираних на интелигенцији роја, инспирисана понашањем пчела у природи. BCO метода се показала погодном за решавање оптимизационих проблема и до сада је примењена на великом броју проблема: рутирања, лоцирања, распоређивања, медицине, пројектовања мрежа, непрекидне и комбиноване оптимизације [42]. Иако је до сада примењена на великом броју оптимизационих проблема, анализа перформанси ове методе вршена је искључиво емпиријски над конкретним имплементацијама.

У овом раду је по први пут изложена теоријска анализа асимптотске конвергенције две верзије BCO алгоритма: BCO алгоритам са независним итерацијама и BCO алгоритам са глобалним знањем. Утврдили смо довољан (и потребан) услов, који обе верзије морају да задовоље да би најбоље пронађено решење конвергирало ка оптималном. Закључак је да ће BCO алгоритам конвергирати ка оптималном решењу уколико смо извршили погодан избор репрезентације решења и правила конструкције/модификације, који омогућава генерисање било којег допустивог решења, па самим тим и оптималног. То у ствари значи да је вероватноћа да било која пчела генерише било које оптимално решење у сваком тренутку строго позитивна.

Даљи корак у истаживању је испитивање другог типа конвергенције по Гутјару (конвергенције по моделу) испитивањем израза за параметре BCO алгоритма који ће гарантовати ефикаснију (бржу) конвергенцију ка оптималном решењу.

Библиографија

[1] **H. A. Abbass.** MBO: Marriage in honey bees optimization-A haplometrosis polygynous swarming approach. *In: Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation*, 2001, pp. 207–214.

[2] **A. Afshar, O. Bozorg Haddad, M. A. Mariño, and B.J. Adams.** Honey-bee mating optimization (HBMO) algorithm for optimal reservoir operation. *Journal of the Franklin Institute*, 2007, 344(5), 452–462.

[3] **D. L. Applegate.** *The traveling salesman problem: a computational study*. Princeton University Press, 2006.

[4] **S. Bitam, M. Batouche, and E.-G. Talbi.** A survey on bee colony algorithms. *In: Workshops and Phd Forum (IPDPSW), 2010 IEEE International Symposium on Parallel & Distributed Processing*, 2010, pp. 1–8.

[5] **C. Blum and A. Roli.** Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 2003, 35(3), 268–308.

[6] **C. Blum and A. Roli.** Hybrid metaheuristics: an introduction. *In: Hybrid Metaheuristics, Springer*, 2008, pp. 1–30.

[7] **J. Brimberg, P. Hansen, and N. Mladenović.** *Convergence of variable neighborhood search*. Groupe d'études et de recherche en analyse des décisions, HEC Montréal, 2004.

[8] **T. Crainic, T. Davidović, and D. Ramljak.** Designing Parallel Meta-heuristic Methods. *In: M. Despotović-Zrakić, V. Milutinović, A. Belić, (eds.), High Performance and Cloud Computing in Science and Education, IGI-Global,*, 2012, pp. 260-280.

[9] **T. Davidović.** *Rasporedivanje zadataka na višeprocesorske sisteme primenom metaheuristika*. PhD thesis, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2006.

[10] **T. Davidović, D. Ramljak, M. Šelmić, and D. Teodorović.** Bee colony optimization for the p-center problem. *Computers & Operations Research*, 2011, 38(10), 1367–1376.

[11] **T. Davidović, M. Šelmić, D. Teodorović, and D. Ramljak.** Bee colony optimization for scheduling independent tasks to identical processors. *Journal of Heuristics*, 2012, 18(4), 549–569.

[12] **T. Davidović, D. Teodorović, and M. Šelmić.** Bee Colony Optimization Part I: The Algorithm Overview. *Yugoslav Journal of Operational Research*, 2014 (accepted).

[13] **H. Drias, S. Sadeg, and S. Yahi.** Cooperative bees swarm for solving the maximum weighted satisfiability problem. *In: Computational Intelligence and Bioinspired Systems, Springer*, 2005, pp. 318–325.

[14] **V. Granville, M. Krivánek, and J.-P. Rasson.** Simulated annealing: A proof of convergence. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1994, 16(6), 652–656.

[15] **W. J. Gutjahr.** Convergence analysis of metaheuristics. *In: Matheuristics, Springer*, 2010, pp. 159–187.

[16] **W. J. Gutjahr.** Stochastic search in metaheuristics. *In: Handbook of Metaheuristics, Springer*, 2010, pp. 573–597.

[17] **S. H. Jacobson and E. Yücesan.** Global optimization performance measures for generalized hill climbing algorithms. *Journal of Global Optimization*, 2004, 29(2), 173–190.

[18] **D. Karaboga.** An idea based on honey bee swarm for numerical optimization. *Techn. Rep. TR06, Erciyes Univ. Press, Erciyes*, 2005.

[19] **C. P. Lim, L. C. Jain, and S. Dehuri.** *Innovations in Swarm Intelligence, Springer*, 2009.

[20] **P. Lučić and D. Teodorović.** Bee system: modeling combinatorial optimization transportation engineering problems by swarm intelligence. *In: Preprints of the TRISTAN IV triennial symposium on transportation analysis*, 2001, pp. 441–445.
[21] **P. Lučić and D. Teodorović.** Transportation modeling: an artificial life approach. *In: Proceedings of the 14th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence, Washington, DC*, 2002, pp. 216–223.
[22] **P. Lučić and D. Teodorović.** Computing with bees: attacking complex transportation engineering problems. *International Journal on Artificial Intelligence Tools*, 2003, 12(03), 375–394.
[23] **P. Lučić and D. Teodorović.** Vehicle routing problem with uncertain demand at nodes: the bee system and fuzzy logic approach. *In: J. L. Verdegay (eds.), Fuzzy Sets based Heuristics for Optimization, Physica Verlag: Berlin Heidelberg*, 2003, pp. 67–82.
[24] **P. Maksimović and T. Davidović.** Parameter Calibration in the Bee Colony Optimization Algorithm. *In: Proc. 11th Balkan Conf. on Operational Research*, 2013, pp. 263–272.
[25] **L. Margolin.** On the convergence of the cross-entropy method. *Annals of Operations Research*, 2005, 134(1), 201–214.
[26] **S. Nakrani and C. Tovey.** On honey bees and dynamic allocation in an internet server colony. *In: Proceedings of 2nd International Workshop on the Mathematics and Algorithms of Social Insects, Citeseer*, 2003.
[27] **M. Nikolić and D. Teodorović.** Empirical study of the Bee Colony Optimization (BCO) algorithm. *Expert Systems with Applications*, 2013, 40, pp. 4609–4620.
[28] **M. Nikolić and D. Teodorović.** Transit network design by Bee Colony Optimization. *Expert Systems With Applications*, 2013, 40(15), pp. 5945–5955.
[29] **Z. Ognjanović and N. Krdžavac.** *Uvod u teorijsko računarstvo, Beograd-Kragujevac*, 2004.
[30] **D.T. Pham, A. Ghanbarzadeh, E. Koc, S. Otri, S. Rahim, and M. Zaidi.** The bees algorithm–a novel tool for complex optimisation problems. *In: Proceedings of the 2nd Virtual International Conference on Intelligent Production Machines and Systems (IPROMS 2006)*, 2006, pp. 454–459.
[31] **M. G.C. Resende and C. C. Ribeiro.** Greedy randomized adaptive search procedures: Advances, hybridizations, and applications. *In: Handbook of Metaheuristics, Springer*, 2010, pp. 283–319.
[32] **G. Rozenberg, T. H. W. Bäck, and J. N. Kok.** *Handbook of natural computing, Springer*, 2011.
[33] **G. Rudolph.** Convergence analysis of canonical genetic algorithms. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1994, 5(1), 96–101.
[34] **M. Šelmić, D. Teodorović, and K. Vukadinović.** Locating inspection facilities in traffic networks: an artificial intelligence approach. *Transportation Planning and Technology*, 2010, 33(6), 481–493.
[35] **Z. Stanimirović.** *Genetski algoritmi za rešavanje nekih NP-teških hab lokacijskih problema*. PhD thesis, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2007.
[36] **T. Stützle and M. Dorigo.** A short convergence proof for a class of ant colony optimization algorithms. *IEEE Trans. Evolutionary Computation*, 2002, 6(4), 358–365.
[37] **K. A. Sullivan and S. H. Jacobson.** A convergence analysis of generalized hill climbing algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(8), 1288–1293.
[38] **E.-G. Talbi.** *Metaheuristics: from design to implementation, John Wiley & Sons*, 2009.
[39] **D. Teodorović.** Bee colony optimization (BCO). In *Innovations in swarm intelligence, Springer*, 2009, pp. 39–60.
[40] **D. Teodorović and M. Dell'Orco.** Bee colony optimization–a cooperative learning approach to complex transportation problems. *In: Advanced OR and AI Methods in Transportation: Proceedings of 16th Mini–EURO Conference and 10th Meeting of EWGT (13-16 September 2005).–Poznan: Publishing House of the Polish Operational and System Research*, 2005, pp. 51–60.
[41] **D. Teodorović, M. Šelmić, and L. Mijatović-Teodorović.** Combining case-based reasoning with Bee Colony Optimization for dose planning in well differentiated thyroid cancer treatment. *Expert Systems with Applications*, 2013, 40(6), 2147–2155.
[42] **D. Teodorović, M. Šelmić, and T. Davidović.** Bee Colony Optimization Part II: The Application Survey. *Yugoslav Journal of Operational Research*, 2014 (accepted).
[43] **I. C. Trelea.** The particle swarm optimization algorithm: convergence analysis and parameter selection. *Information processing letters*, 2003, 85(6), 317–325.
[44] **H. F. Wedde, M. Farooq, and Y. Zhang.** BeeHive: An efficient fault-tolerant routing algorithm inspired by honey bee behavior. *In: Ant colony optimization and swarm intelligence, Springer*, 2004, pp. 83–94.
[45] **C. Yang, J. Chen, and X. Tu.** Algorithm of fast marriage in honey bees optimization and convergence analysis. *In: IEEE International Conference on Automation and Logistics*, 2007, pp. 1794–1799.
[46] **X.-S. Yang.** Engineering optimizations via nature-inspired virtual bee algorithms. *In: Artificial Intelligence and Knowledge Engineering Applications: A Bioinspired Approach*, 2005, pp. 317–323.
[47] **X.-S. Yang.** Metaheuristic optimization: algorithm analysis and open problems. *In: Experimental Algorithms, Springer*, 2011, pp. 21–32.
[48] **M. Zlochin, M. Birattari, N. Meuleau, and M. Dorigo.** Model-based search for combinatorial optimization: A critical survey. *Annals of Operations Research*, 2004, 131, 373–395.

Realizacija Java apleta za rešavanje problema obojivosti grafa

Branko Malešević

vanredni profesor na Katedri za Primenjenu matematiku

Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu,

Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija,

e-mail: malesevic@etf.rs

Ivana Jovović

asistent na Katedri za Primenjenu matematiku

Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu,

Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija,

e-mail: ivana@etf.rs

Miloš Dukić, Filip Đorđević, Aleksandar Tomić

studenti master studija Računarske tehnike i informatike

Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu,

Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija

e-mail: moneywithin@gmail.com, filip88etf@gmail.com, aleksatomic88@gmail.com

Đorđe Mitrović

e-mail: md070441d@student.etf.rs

Apstrakt. U ovom radu predstavljen je jedan aplet rađen u programskom jeziku *Java* za određivanje da li je neki graf *k*-obojiv ili ne. Problem *k*-obojivosti grafa podrazumeva bojenje čvorova grafa u *k* različitih boja pod uslovom da su čvorovi spojeni granom obojeni u različite boje. Problem *k*-obojivosti grafa se svodi na rešavanje polinomskih jednačina stepena najviše *k*, što ćemo raditi primenom *Gröbner*ovih baza.

Ključne reči: *k*-obojivost grafa; *Gröbner*ove baze; sistemi polinomskih jednačina

1. Uvod

U ovom radu razmatramo graf ***G*** sa *n* čvorova, gde su svaka dva čvora spojena sa najviše jednom granom. Naš cilj je da predstavimo *Java* aplet za rešavanje problema obojivosti grafa ***G***. Graf ***G*** je **obojiv** ako se čvorovi grafa mogu obojiti tako da su svaka dva susedna čvora obojena različitim bojama. Od interesa je naći i najmanji broj boja koji je potreban da bi se graf obojio. Ako se graf ***G*** može obojiti sa najmanje *k* boja, nazivamo ga ***k*-obojivim**.

Bojenje grafa (eng. *Graph Coloring*) [8] je dobro poznat problem u matematici i informatici. Postoje i razne praktične primene bojenja grafova kao što su: kontrola letenja [2], pravljenje rasporeda [9], alokacija registara [4], dodela radio frekvencija [10], sudoku, kao i mnoge druge. Takođe, brojni su i metodi za rešavanje problema bojenja grafa [3]. U ovom radu opredelili smo se za primenu teorije *Gröbner*ovih baza [1], [5], [6], [7]. Teorija *Gröbner*ovih baza može se koristiti za dobijanje odgovora na pitanje da li je za konkretno *k* dati graf ***G*** *k*-obojiv, takođe korišćenjem teorije *Gröbner*ovih baza možemo odrediti kako da obojimo čvorove.

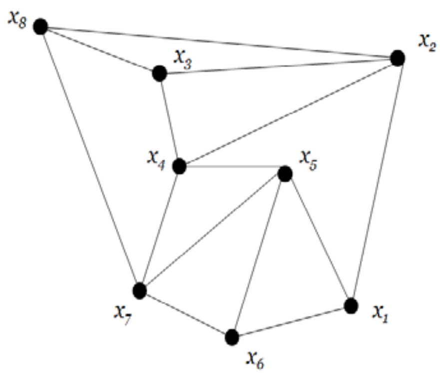
2. Matematička reprezentacija problema 3-obojivosti grafa

U ovom odeljku daćemo detaljnu reprezentaciju problema 3-obojivosti grafa. Označimo sa $\xi \neq 1$ kompleksan broj za koji važi $\xi^3 = 1$. Trećim korenima iz jedinice $1, \xi, \xi^2$ možemo reprezentovati tri različite boje (npr. crvenu, plavu i zelenu) u koje bojimo čvorove grafa. Za broj ξ važi $1 + \xi + \xi^2 = 0$. Neka je $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ skup čvorova grafa ***G***. Svakom čvoru grafa ***G*** dodeljujemo jedan od brojeva $1, \xi, \xi^2$, pri čemu čvorovima spojenim granom dodeljujemo različite od ovih brojeva. Takođe, svakom čvoru od ***G*** dodeljujemo i polinom $x_i^3 - 1 = 0$, $1 \leq i \leq n$. Iz jednakosti $x_i^3 = x_j^3 = 1$ dobijamo izraz $x_i^3 - x_j^3 = 0$, koji lako faktorišemo $(x_i - x_j)(x_i^2 + x_i x_j + x_j^2) = 0$. Prema tome, zaključujemo da čvorovi x_i i x_j imaju različite boje ako i samo ako važi $x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 = 0$.

Neka je ***I*** ideal prstena polinoma po *n* promenljivih nad poljem kompleksnih brojeva $X[x_1, x_2, \dots, x_n]$ generisan polinomima koji odgovaraju jednačinam za graf ***G***

$$\begin{gathered} x_i^3 - 1 = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \\ x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 = 0 \text{ za susedne čvorove } x_i \text{ i } x_j. \end{gathered} \tag{1}$$

Neka je $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ i neka je u prstenu $X[x_1, x_2, \dots, x_n]$ zadat leksikografski poredak. Baza ***B*** ideala ***I*** je *Gröbner*ova baza ideala ***I*** ako i samo ako je ostatak pri deljenju S-polinoma bilo koja dva različita polinoma iz ***B*** sa ***B*** jednak nuli. Kao posledicu slabe *Hilbert's Nullstellensatz* teoreme zaključujemo da sistem jednačina (1) nema rešenje ako i samo ako konstanta pripada *Gröbner*ovoj bazi ideala ***I***. Naša glavna ideja je da napravimo softver koji će da proverava ovaj uslov. Pre nego što pređemo na opis realizacije *Java* apleta za ispitivanje 3-obojivosti grafa, ilustrujmo prethodno razmatranje na jednom konkretnom primeru. Neka je dat graf ***G*** sa 8 čvorova na slici 1.



Slika 1. Graf ***G***

Sistem jednačina koji odgovara datom grafu je

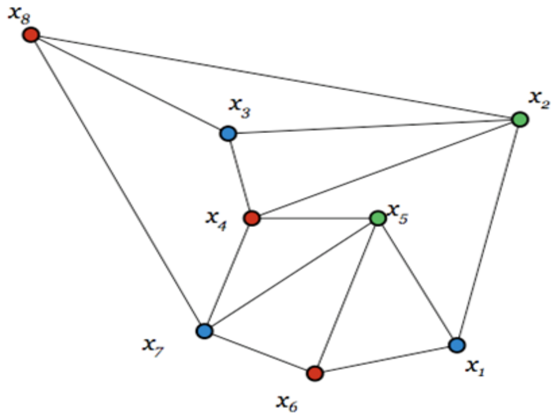
$$\begin{gathered} x_i^3 - 1 = 0, \text{ za } 1 \leq i \leq 8, \\ x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 = 0 \text{ za} \\ (i,j) \in \{(1,2), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,8), \\ (3,4), (3,8), (4,5), (4,7), (5,6)(5,7), (6,7), (7,8)\}. \end{gathered}$$

*Gröbner*ova baza ideala ***I*** koji je generisan polinomima koji odgovaraju jednačinama grafa ***G*** je

$$\begin{gathered} \boldsymbol{B} = \{x_1 - x_7,\ x_2 + x_7 + x_8,\ x_3 - x_7,\ x_4 - x_8, \\ x_5 + x_7 + x_8,\ x_6 - x_8,\ x_7^2 + x_7 x_8 + x_8^2,\ x_8^3 - 1\}. \end{gathered}$$

Kako nijedna konstanta ne pripada *Gröbner*ovoj bazi ***B*** ideala ***I*** graf ***G*** je 3-obojiv. Pošto je polinom $x_8^3 - 1$ element *Gröbner*ove baze ***B*** ideala ***I*** za čvor x_8 možemo da izaberemo proizvoljnu boju. Neka je on npr. crvene boje. Polinomi *Gröbner*ove baze ***B***, $x_4 - x_8$, $x_6 - x_8$ nam daju da su i čvorovi x_4 i x_6 crvene boje. Dalje, kako je $x_7^2 + x_7 x_8 + x_8^2$ element *Gröbner*ove baze ***B*** imamo da je čvor x_7 boje koja se razlikuje od crvene, npr. plave je boje. A zatim zbog polinoma $x_1 - x_7, x_3 - x_7$ dobijamo da su i čvorovi x_1 i x_3 plavi. Na kraju polinomi $x_2 + x_7 + x_8$, $x_5 + x_7 + x_8$ impliciraju da su čvorovi x_2 i x_5 iste boje koja je različita od boja čvorova x_7 i x_8. Prema tome, date čvorove bojimo u zeleno.

Na narednoj slici predstavljen je obojen graf ***G*** prema upravo izvedenim pravilima.



Slika 2. Obojen graf ***G***

Jasno je da se prethodno razmatranje može lako uopštiti za proizvoljno *k*. U tom slučaju umesto sistema (1) razmatramo sistem

$$x_i^k - 1 = 0,\ \ 1 \leq i \leq n,$$
$$\sum_{s=0}^{k-1} {x_i}^s {x_j}^{k-1-s} = 0 \text{ za susedne čvorove } x_i \text{ i } x_j. \qquad (2)$$

3. Parser

Grafički korisnički interfejs je rađen u paketu *JUNG* - *JavaUniversalNetwork/GraphFramework*. Pomoću sistemskih funkcija koje obezbeđuje ovaj paket, informacije o čvorovima i granama smo dohvatali u vidu *String*a. Npr. Za čvorove 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i grane koje su incidentne sa čvorovima 1 i 2, 1 i 5, 1 i 6, 2 i 3, 2 i 4, 2 i 8, 3 i 4, 3 i 8, 4 i 5, 4 i 7, 5 i 6, 5 i 7, 6 i 7, 7 i 8, taj *String* je izgledao ovako

"Vertices: 1,2,3,4,5,6,7,8
Edges: [1,2][1,5][1,6][2,3][2,4][2,8][3,4][3,8][4,5][4,7][5,6][5,7][6,7][7,8]".

Podaci ovakvog tipa nama u daljem radu nisu bili odgovarajući, pa ih je bilo potrebno prebaciti u novi format. U daljem tekstu će biti opisani podaci koje smo dobili koristeći podatke koje nam je obezbedio paket *JUNG* uz dodatno pojašnjenje ilustrovano na gore navedenom primeru prosleđenih podataka.

Najpre je trebalo odrediti broj čvorova i tu informaciju smo čuvali u polju *NumberOfNodes*. U ovom primeru broj čvorova je 8. Takođe je bilo potrebno odrediti i broj grana u grafu i ovu informaciju smo čuvali u polju *NumberOfLinks*. U ovom primeru broj grana je 14. Oba ova polja su tipa *Integer*. Informacije o čvorovima smo čuvali u jednodimenzionalnom nizu *Nodes* koji je tipa *Integer* i u zadatom primeru on izgleda ovako: *1 2 3 4 5 6 7 8*, a informacije o granama smo čuvali u dvodimenzionalnom nizu *Links* čiji su članovi takođe tipa *Integer* i za dati primer izgleda ovako:

1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6	7
2	5	6	3	4	8	4	8	5	7	6	7	7	8

Bilo je potrebno formirati i matricu susedstva grafa da bi se u kasnijem radu moglo lako utvrditi koji su čvorovi susedni, a koji nisu. Elementi ove matrice su tipa *Integer* i mogu imati vrednost 0 – ako čvorovi nisu spojeni ili 1 – ako su čvorovi spojeni granom. Pošto je graf neorijetnisan, matrica je simetrična i za uzeti primer izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poslednja stvar koju je ovaj *Parser* pravio je niz *String*ova koji predstavljaju polinome, gde je za svaki čvor i za svaku granu odredjen po tačno jedan polinom. Za ovaj primer taj niz *String*ova izgleda ovako:

$$x_1^3 - 1 = 0, x_2^3 - 1 = 0, x_3^3 - 1 = 0, x_4^3 - 1 = 0, x_5^3 - 1 = 0, x_6^3 - 1 = 0, x_7^3 - 1 = 0, x_8^3 - 1 = 0,$$
$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0, x_1^2 + x_1x_5 + x_5^2 = 0, x_1^2 + x_1x_6 + x_6^2 = 0, x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 = 0,$$
$$x_2^2 + x_2x_4 + x_4^2 = 0, x_2^2 + x_2x_8 + x_8^2 = 0, x_3^2 + x_3x_4 + x_4^2 = 0, x_3^2 + x_3x_8 + x_8^2 = 0,$$
$$x_4^2 + x_4x_5 + x_5^2 = 0, x_4^2 + x_4x_7 + x_7^2 = 0, x_5^2 + x_5x_6 + x_6^2 = 0,$$
$$x_5^2 + x_5x_7 + x_7^2 = 0, x_6^2 + x_6x_7 + x_7^2 = 0, x_7^2 + x_7x_8 + x_8^2 = 0.$$

Kasnije smo ove *String*ove pretvarali u objekte tipa *Polynomial* i algoritmu redukcije prosleđivali takve podatke da bi dobili odgovor da li je dati graf obojiv ili ne.

4. Okruženje i razvojni alati

Za izradu ove aplikacije korišćeno je *NetBeans* razvojno okruženje (*IDE - Integrated development environment*) verzija 7.3, koje se može naći na adresi https://netbeans.org/downloads/. Od razvojnih alata koršćeni su *Java* razvojni alati (*JDK - Java Development Kit*) verzije 1.7.0_17, koji se mogu skinuti sa sledeće adrese http://www.oracle.com/technetwork/java/javase/downloads/index.html. Glavne komponente grafičkog korisničkog interfejsa (*GUI - Graphical user interface*) potiču iz SWING *Java* paketa (skup alatki za rad i pravljenje grafičkog korisničkog interfejsa).

Pri izradi aplikacije korišćen je tzv. skup biblioteka ili radni okvir (*framework*) *JUNG*, koji se može skinuti sa adrese http://sourceforge.net/projects/jung/files/jung/jung-2.0.1/. *JUNG* skup biblioteka se koristi za modelovanje, analizu i predstavljanje grafova. Pomoću ovog radnog okvira moguće je predstaviti orijentisane i neorijentisane grafove, multi-modalne grafove, grafove sa paralelnim granama kao i hipergrafove. *JUNG* pruža i mogućnost obeležavanja svih elemenata grafa (čvorova, grana, itd...). Pojedini karakteristični algoritmi za rad sa grafovima su takođe deo ovog skupa biblioteka. *JUNG* paket omogućava i vizuelizaciju grafova, tj. lakši način rada sa grafovima kao i interakciju korisnika i aplikacije koja koristi *JUNG* paket. *JUNG* je skup biblioteka sa otkrivenim kodom (*open-source*). Verzija koja je korišćena pri izradi aplikacije je ujedno i najnovija 2.0.1. Uslov za korišćenje ovog radnog okvira je postojanje *JDK* verzije 1.5 ili veće, na računaru.

4.1. O grafovima radnog okvira *JUNG*

U *JUNG* paketu graf je definisan pomoći interfejsa *Graph<V, E>* iz *edu.uci.ics.jung.graph*. Ovaj interfejs obezbeđuje osnovne operacije nad grafovima, kao što su:

- dodavanje i uklanjanje čvorova i grana grafa;
- dohvatanje čvorova i grana;
- dohvatanje informacija o čvorovima i granama;
- pravljenje usmerenih i neusmerenih grafova.

U interfejsu *Graph<V,E>*, *V* predstavlja tip čvorova, u aplikaciji je korišćen tip celih brojeva (*Integer*), *E* predstavlja tip grana, u aplikaciji je korišćen tip niska karaktera (*String*). Interfesj *Graph<V,E>* poseduje metodu *toString();* kojom se vrši ispis grafa u tekstualnom obliku:

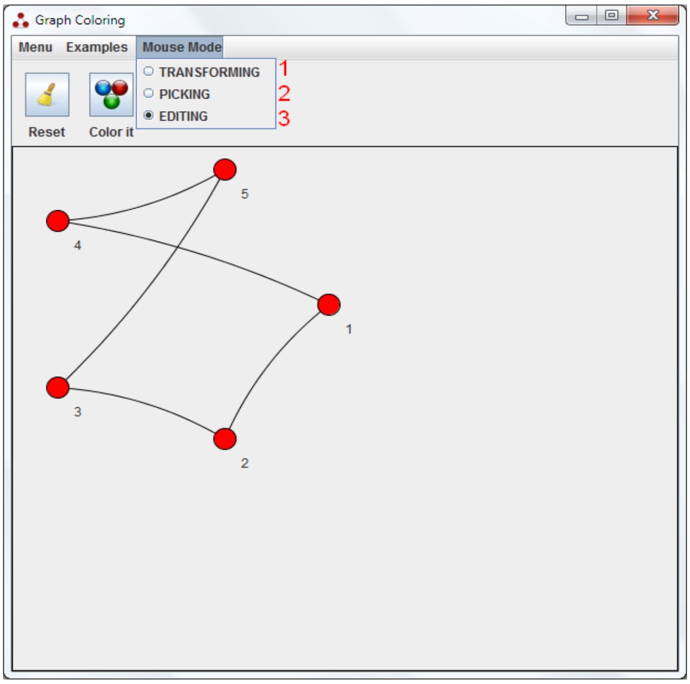
The graph g = Vertices: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
Edges: Edge-A[1, 2] Edge-B[1, 5] Edge-C[1, 6]

Predstavljanje grafa u grafičkom korisničkom interfesju (*GUI*) se vrši „kaskadno“. Glavna komponenta grafičke predstave grafa je *VisualizationViewer<V,E>* koja se inicijalizuje komponentom *Layout<V,E>* koja se inicijalizuje grafom. Ovde *V* i *E* predstavljaju tipove čvorova i grana. Interakcija mišem se obezbeduje preko komponente *EditingModalGraphMouse* koja se inicijalizuje komponentama *RenderContext*, *VertexFactory*, *EdgeFactory*. *EditingModalGraphMouse* se „registruje“ kod komponente *VisualizationViewer*.

Pogodnost korišćenja *JUNG* paketa, je ta što se *VisualizationViewer* može „upakovati“ u bilo koju *SWING* kontejner komponentu, u aplikaciji je to bio *jPanel*.

4.2. *NetBeans, SWING i JUNG*

Prilikom rada u *NetBeans* okruženju, može se desiti da „ubacivanje“ *VisualizationViewer*a u *SWING* komponentu bude sa poteškoćama. Naime, *NetBeans* postavlja podrazumevani raspored komponenti (*Layout*) u kontejneru na *Flow Layout*. Ubacivanje u ovakav raspored je malo više zahtevno, ako se ubacivanje vrši iz koda, kao što je bio slučaj sa ovom aplikacijom. Da bi se ovaj problem rešio potrebno je postaviti raspored (*Layout*) *SWING* kontejnera na bilo koji sem *Flow Layout*, u aplikaciji je korišćen *Grid Layout*.

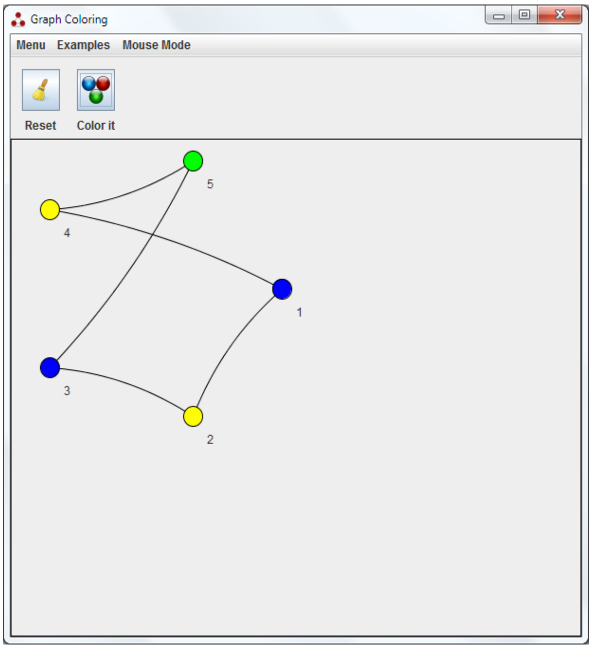


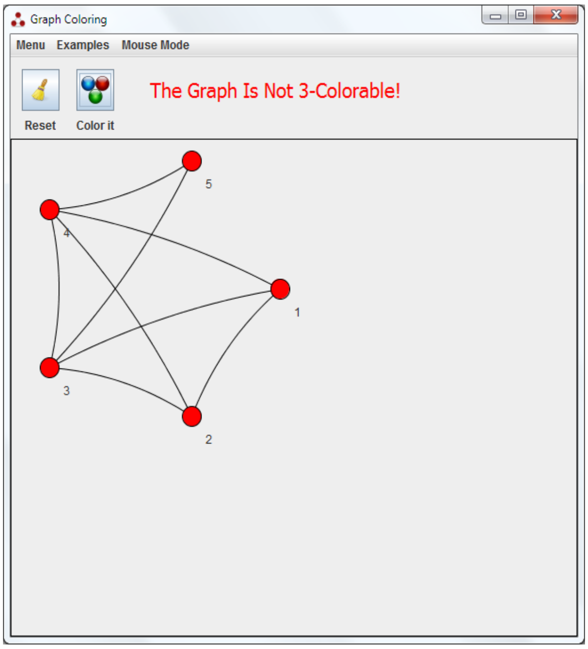
Slika 3. Primer grafa sa 5 čvorova

Prilikom generisanja primera grafa, odnosno kreiranja grafa iz koda, neophodno je koristiti *Spars Multigraph* to je posebna vrsta grafa koja ima kružni *Layout* i ona se nalazi u *JUNG* paketu. U suprotnom ukoliko se ne koristi ova vrsta grafa svi čvorovi i grane koje se generišu iz koda biće raspoređeni u jednoj tački. Da bi se kreirali čvorovi i grane grafa potrebno je poštovati *JUNG*ovu strukturu i kreirati čvorove i grane grafa preko *Factory* da bi se kreirali jedinstveni čvorovi i jedinstvene grane, odnosno da bi se kreirao jedinstveni *Integer* i jedinstven *String*.

Na Slici 3 prikazan je i izgled odabira moda rada. Implementirano je tri moda rada. Prvi mod na slici označen sa 1 je *Transforming mod*. U *Transforming mod*u moguće je pomerati graf unutar radne površine, zumirati i menjati pogled na graf u 3D i 2D varijanti. U ovom modu nije moguće dodavati nove grane i čvorove i nije moguće njihovo brisanje. Sledeći mod koji je implementiran je na slici označen sa brojem 2 to je *Picking mod*. U *Picking mod*u je omogućeno samo biranje pojedinačnih čvorova i njihovo izmeštanje. Treći i poslednji mod na slici označen sa brojem 3 je *Editing mod*. U *Editing mod*u je omogućeno brisanje i dodavanje novih čvorova i grana. Klikom na levi taster miša na radnu površinu kreira se čvor. Grana se generiše tako što se miš prevlači sa pritisnutim levim klikom sa jednog čvora na drugi.

Na Slici 3 prikazan je i izgled aplikacije. Aplikacija se sastoji iz radne površine za crtanje, padajućeg menija, dva taster, za resetovanje radne površine i za bojenje grafa. Klikom na *Reset* sve što se nalazi na radnoj površini biće obrisano. Brisanje radne površine moguće je uraditi i iz padajućeg menija. Klikom na *Menu* otvaraju se opcije za bojenje grafa i za čišćenje (resetovanje) radne površine. Klikom na taster *Color it* graf se boji ukoliko je obojiv (kao na Slici 4) u suprotnom ispisaće se labela da graf nije obojiv (kao na Slici 5). Za sve kontrole i za sve opcije postoje implementirane skraćenice sa tastature tako da je moguće kontorlisati celu aplikaciju sa tastature. Bojenje grafa može da potraje i duže od sat vremena jer se koristi algoritam redukcije nad *Gröbner*ovom bazom što je matematički veoma kompleksan i vremenski veoma zahtevan problem.





Slika 4. Primer obojenog graf u 3 boje

Slika 5. Primer grafa koji se ne može obojiti u tri boje

5. Zaključak

U drugoj sekciji rada smo na konkretnom primeru pokazali kako se problem tri obojivosti grafa rešava primenom teorije *Gröbner*ovih baza. Pomoću datog primera smo ilustrovali sve korake formiranja Java aplikacije. Standardan algoritam za određivanje *Gröbner*ove baze korišćen je u pozadini. Zbog složenosti matematičkih računanja, pri većem broju čvorava, rezultat se može dobiti nakon višeminutnog čekanja. U poslednjoj glavi je dat kratak opis svih alata koji su korišćeni i detaljno je opisan izgled aplikacije.

Zahvalnica. *B. Malešević i I. Jovović su podržani od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja, projekat Analiza i algebra sa primenama, evidencioni broj projekta* 174032.

Bibliografija

[1] **W.W. Adams, P. Loustaunau.** An Introduction to Gröbner Bases. *Amer. Math. Soc. 1994.*
[2] **N. Barnier, P. Brisset.** Graph coloring for air traffic flow management. *Ann. Oper. Res., 2004, 130,* pp. 163-178.
[3] **D. Brelaz.** New methods to color the vertices of a graph. *Communications of the ACM, 1979, 22 (4),* pp. 251–256.
[4] **G.J. Chaitin, M.A. Auslander, A.K. Chandra, J. Cocke, M.E. Hopkins, P.W. Markstein.** Register allocation via coloring. *Computer Languages, 1981, 6 (1),* pp. 47-57.
[5] **D. Cox, J. Little, D. O'Shea.** Ideals, Varieties and Algorithms, *Third Edition. Springer, 2007.*
[6] **K. Forsman.** Hitchhiker guide to Gröbner bases. *Research Institute for Symbolic Computation, Linz, Tehnical Report 0374, 1992.*
[7] **A. Heck.** Bird's-eye view of Gröbner Bases. *Nucl. Instrum. Meth. A, 1997, 389 (1-2),* pp. 16-21.
[8] **A. Kosowski, M. Manuszewski.** Classical Coloring of Graphs. *In: Graph Colorings. AMS Contemporary Math., vol. 352, Providence, 2004,* pp. 1–20.
[9] **N. K. Mehta.** The application of a graph coloring method to an examination scheduling problem. *Interfaces 1981, 11 (5),* pp. 57-65.
[10] **R. Nedeljković, D. Drenovac.** Dodela radio frekvencija: primena tehnike bojenja grafova. *XXV Simpozijum o novim tehnologijama u poštanskom i telekomunikacionom saobraćaju , PosTel 2007, Beograd,* pp. 273-280.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ЗБИРКА АПСТРАКАТА
ЧЕТВРТОГ СИМПОЗИЈУМА „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”
НАЦИОНАЛНОГ СКУПА СА МЕЂУНАРОДНИМ УЧЕШЋЕМ
Београд 24 – 25. мај 2013.

ОТВАРАЊЕ СКУПА

Академик Никола Хајдин, председник САНУ
проф. др Миодраг Матељевић, декан Математичког факултета
проф. др Иванка Поповић, проректор за науку Универзитета у Београду
мр Александра Дрецун, директор Центра за промоцију науке

ПЛЕНАРНА ПРЕДАВАЊА

Миодраг Матељевић, Универзитет у Београду, Математички факултет
„Једначине кретања, изометрије и визуализација“

АПСТРАКТ: Разматрамо примене математике на елементарна кретања. Један од циљева овог предавања је популаризација науке. Планирамо да предавање обухвати следеће теме: осцилације, ротационо кретање, Лоренцове трасформације, Ојлерову теорему о ротацији и примену сферених изометрије на оцену капацитета, изопериmeријску неједнакост. Покушаћемо да скицирамо везе између механике, физике и математике.

Предавање је припремљено у сарадњи са М. Светлик, С. Радовић и М. Кнежевић. Користимо ГеоГебра аплете, које су развили чланови ГеоГебра центра, Београд.
Кључне речи: примене математике, елементарна кретања, физика, механика, ГеоГебра

Fivos Papadimitriou, Evaluator of National-and-European Research and Training Programs, Athens, Greece
„Dynamical Systems and Stochastic Differential Equations in Geo-Ecological-Modelling: Avenues for Future Research and Education“

ABSTRACT: Dynamical systems approaches are used to model spatial changes of ecosystems and their interactions. Such systems have shown how chaos may emerge from even simple systems of differential equations. Aside of deterministic equations, stochastic differential models have also been used to model spatial ecological processes. What is the state of knowledge about them? What education should be made to advance our understanding of ecosystems and geosystems?

This paper aims to present an evaluation of the main achievements and the main drawbacks of the use of such deterministic and stochastic spatial (geographic) models of ecosystems and to outline future avenues for research and education.

The methods here are a) to outline the most relevant such models and b) to evaluate their usefulness in modelling real data.

The results consist in: a) the identification of the areas of ecology and geosciences where particular mathematical difficulties arise in explanations of real physical geo-eco-systems, b) an exploration of the prospects for future research and education in this field.

Concluding, there are ample margins for mathematical research and education in the field of complex geo-eco-systems modelling, particularly with respect to issues emerging from the study of chaotic behaviors, attractors, discrete/continuous space-time models etc.
Keywords: Geo-Ecological Modelling, Dynamical Systems, Future research, Education

Предраг Јаничић, Универзитет у Београду, Математички факултет
„SAT и свођење на SAT“

*АПСТРАКТ:*Проблем SAT је проблем задовољивости у исказној логици. То је први проблем за који је доказано да је NP комплетан и он је још увек централни NP комплетан проблем. Поред теоријског значаја, проблем SAT има и изузетан практични значај. Током претходних година, на пољу развоја SAT решавача постинут је изванредан прогрес што је омогућило њихове примене у бројним областима као, на пример, у верификацији хардвера и софтвера, планирању, распоређивању, криптоанализи, итд. Обично се проблеми своде на SAT техникама и алатима специјалне намене. У излагању ће бити представљен систем URSA који, за разлику од система посебних намена, свођење на SAT врши на униформан начин. Систем се може сматрати и општим системом за програмирање ограничења, тј. системом за моделовање погодним за спецификовање и решавање широке класе проблема (нпр. CSP проблема и NP комплетних проблема). Додатно, систем URSA уводу нову, императивно-декларативну програмску парадигму. У излагању ће бити укратко приказане и неке конкретне примене система URSA.

I СЕКЦИЈА: МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ ДАНАС

Павле Младеновић, Универзитет у Београду, Математички факултет
„Extreme values and regularly varying functions"

ABSTRACT: Regularly varying functions play the key role in probabilistic extreme value theory, particularly in determining the domains of attraction of extreme value distributions. The class of random variables with regularly varying tails belongs to the class of sub-exponential distributions, and the later one is of great importance in insurance mathematics. Random variables with regularly varying tails are often used in stochastic modeling in many other applications. Tail index estimation and high quantiles estimation are the problems that appear naturally in such situations. The problem of extreme values in incomplete samples from stationary sequences also attracts attention in the last few decades. A review of results on the topics mention above will be presented.
Keywords: Extreme value distributions, Domains of attraction, Regularly varying functions, Missing observations, Tail index estimation

Владимир Драговић, Катарина Кукић, Математички иснтитут САНУ
„Дискриминантно сепарабилни полиноми и примене"

АПСТРАКТ: Разматрамо дискриминантно сепарабилне полиноме од три променљиве степена два по свакој променљивој. Њихово дефиниционо својство је разложивост дискриминанти као производа два полинома од по једне променљиве. Конструишемо дискретне и непрекидне динамичке системе чија се интеграција заснива на наведеном својству дискриминнанте сепарабилности. Као примену наводимо случајеве Кирховљевог задатака из теорије еластика и Сколовљев случај динамике крутог тела у идеалном флуиду. Мотивациони пример је славни задатак Ковађевске о ротацији крутог тела око непокретне тачке.
Кључне речи: дискриминантно сепарабилни полиноми, интеграбилност, динамика крутог тела, квад-рафови

Миленко Пикула, Висока пословно-техничка школа Ужице
Оливера Марковић, Универзитет у Крагујевцу, Учитељски факултет Ужице
Љубица Диковић, Висока пословно-техничка школа Ужице
„Методе решавања обрнутих спектралних задатака за граничне задатке типа Штурм-Лиувила"

АПСТРАКТ: У раду се приказују три методе: метода спектралне функције, метода карактеристичних функција и метода Фуријеове анализе на коначном сегменту. Разматрају се случајеви без отклоњеног аргумента и с отклоњеним аргументом.
Кључне речи: спектралне функције, карактеристичне функције, Фуријеова анализа, отклоњен аргумент

Јелена Јоцковић, Универзитет у Београду, Фармацеутски факултет
Павле Младеновић, Универзитет у Београду, Математички факултет
„Теорија екстремних вредности и проблеми чекања"

АПСТРАКТ: Комбинаторни проблеми чекања присутни су у литератури из области теорије вероватноће већ неколико деценија. У њиховом решавању постоји више приступа, који укључују коришћење разноврсних математичких техника. У овом раду биће приказани резултати добијени применом теорије екстремних вредности код једног типа ових проблема (проблем скупљања купона).
Кључне речи: проблем скупљања купона, граничне теореме, расподеле екстремних вредности, генералисане Паретове расподеле

Драгана Недић, Универзитет у Источном Сарајеву, Саобраћајни факултет Добој
Миленко Пикула, Универзитет у Источном Сарајеву, Филозофски факултет Пале
Душан Јокановић, Универзитет у Источном Сарајеву, Факултет за производњу и менаџмент Требиње
„Метода F - редова у инверзним задацима за операторе типа Штурм-Лиувила"

АПСТРАКТ: За оператор генерисан диференцијалним изразом
$$-y''(x)+q(x)y(\alpha x),\quad q\in L_2[0,\pi],\quad \alpha\in(0,1],$$
са раздијељеним граничним условима
$$y'(0)-hy(0)=0$$
$$y'(\pi)+Hy(\pi)=0,\quad h,H\in\Re,$$
даје се рјешење инверзног спектралног задатка методом Фуријеових редова.
Кључне ријечи: инверзни задаци, Фуријеови редови

Ненад П. Цакић, Универзитет у Београду, Електротехнички факултет
Градимир В. Миловановић, Српска академија наука и уметности

„Лежандрови полиноми и Лежандр-Стирлингови бројеви"

АПСТРАКТ: У раду се разматрају нека пручавања у функционалној анализи која су довела у везу ортогоналне полиноме Лежандровог типа и комбинаторне бројеве Стирлинговог типа. Бројеви који се појављују веома су слични Стирлинговим бројевима па је за њих уведен назив Лежандр-Стирлингови бројеви. Наведене су рекурентне релације, функције генератрисе, дато је комбинаторно тумачење, а доказана је и нова експлицитна формула.
Исто тако, у раду се даје и једна од могућих генерализација која као специјалан случај садржи бројеве придружене Јакобијевим полиномима - Јакоби-Стирлингове бројеве.
Keywords: Legendre-Stirling numbers, Stirling numbers of the second kind, Legendre polynomials, left-definite theory, self-adjoint operator

Катица Р. (Стевановић) Хедрих, Математички институт САНУ, Машински факултет Универзитета у Нишу

„Метода аналитичке функције комплексне променљиве у Теорији еластичности и Механици флуида“

АПСТРАКТ: Предавањем се приказују могућности методе аналитичке функције комплексне променљиве и конформног пресликавања за решавање задатака теорије еластичности и механике флуида. Када се при постављању модела стања напона и стања деформације при раванским напрезањима деформабилних тела занемари утицај малих запреминских сила у односу на спољашња активна површинска оптерећења компоненте стања напона и стања деформација се могу изразити пеко бихармонијских функција. При конструкцији тих бихармонијских функција за случајеве напрегнутих плоча са контурама, које ограничавају вишеструко повезане области ефикасно се користе аналитичке функције кмплексне променљиве, као што су то први пут показали Колосови Мисхелисхвили. Основна идеја ове методе је да се напонска функције изрази помоћу аналитичких функција комплексне промељиве, при чему мора да су задовољени одређени гранични услови на контурама плоче, којима се обухвата утицај површинских сила. Приказани су резултати примене методе функције комплексне променљиве и конформаног пресликавања у решавању задатака напрезања елиптично престенасте и кружно кружнопрстенате плоче из магистарских радова (1989) Д. Јовановића и С. Митић, као резултати добијени у примени за одређивање стања напона и стања деформација у напрегнутим пиезокеремичким материјалима из магистарског (2004) и докторског рада (2005) Љ. Перића, а који су урађени под менторством предавача.

Кључне речи: бихармонијска функција, аналитичка функција комплексне променљиве, конформно пресликавање, мапони, деформације, контурни услови, Теорија еластичности, пиезокерамика, Механика флуида

Daniel A. Romano, Faculty of Mechanical Engineering, Banja Luka University, Faculty of Education East Sarajevo University

„Two new classes of relations and their finite extensions“

ABSTRACT: In this paper the concepts of two new classes of relations on sets are introduced. Characterizations of this relations are obtained. In addition, particulary we show when the anti-order relation is a member of these new classes. Further on, the concept of finitely extension of these two new classes of relations are introduced and analyzed.

Keywords: Relations, type of relation

Стојан Обрадовић, Висока школа за васпитаче струковних студија, Алексинац
Слободан Нинковић, Астрономска опсерваторија, Београд

„Основне форме примене математике у физици“

АПСТРАКТ: У раду је разматрана улога математике у добијању новог знања у физици. Проучене су основне форме реализације хеуристичке функције математике на теоријском и емпиријском нивоу сазнања: дедуктивно извођење последица из система аксиома теорије, метод математичке хипотезе, „чисти“ докази постојања објеката и процеса, математичко моделирање, изградња математике на унутарматематичким принципима и математичка теорија експеримента.

Кључне речи: аксиом, теорија, математичка хипотеза, модел, експеримент

Lenka Živadinović, University of Belgrade, Faculty of Mathematics
Pavle Mladenović, University of Belgrade, Faculty of Mathematics
„Extreme values on partial samples in uniform AR(1) processes"

ABSTRACT: Let $(X_n)_{n\geq 1}$ be the uniform $AR(1)$ process with parameter $r \geq 2$, and $(c_n)_{n\geq 1}$ a $0-1$ sequence such that the limit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k = p$ exists. Let $\widetilde{M_n}$ be the maximum of those X_k's for which $k \leq n$ and $c_k = 1$, and $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. We prove that the limit distribution of the random vector $(\widetilde{M_n}, M_n)$ as $n \to \infty$ is not uniquely determined by the limit value p. A simulation study and analysis of a simulated data set are presented.
The cases when the partial maximum $\widetilde{M_n}$ is determined by certain point processes are included in the simulation study.
Keywords: Extreme values; Uniform $AR(1)$ processes; Partial samples

Вељко Вујичић, истраживач пројекта Математичког института САНУ
„Вектор у Еуклид-Хилбертовој аксиоматици"

АПСТРАКТ: Насловна аксиоматика заснована је на појмовима дужине, угла, троугла. Под тим се скрива векторска структура простора до таквог степена да је више векова појам вектора остао непознат.

Вектори у векторском и тензорском рачуну нису једнаки. Десетак цитата, општа дефиниција вектора, инваријантност у односу на координатне системе, укључујући и криволинијске системе. Примери.
Кључне речи: појам вектора, векторски и тензорски рачун, Еуклид-Хилбертова аксиоматика

II СЕКЦИЈА: МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА У ОБРАЗОВАЊУ

Ђурђица Такачи, Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет
Мирослав Марић, Универзитет у Београду, Математички факултет
Гордана Станков, Висока техничка школа струковних студија, Суботица
Александар Ђенић, Универзитет у Београду, Математички факултет
„Кооперативно учење (у групама) – графици функција"

АПСТРАКТ: У раду се приказује процес кооперативног учења (у групама од по четири студента) наставних садржаја везаних за испитивање тока функције уз помоћ рачунара. Формирали смо хетерогене групе према алгоритму познатог аутора, Кагана, узимајући у обзир способности и односе између студената. За добијање оптималног распореда по групама представили смо математички модел. Због комплексности модела као и великог броја студената хемије, физике и информатике за проналажење распореда користили смо методу промењљивих околина.
Кључне речи: кооперативно учење, графици функција, математички модел

Бобан Весин, Александра Клашња Милићевић, Висока пословна школа струковних студија, Нови Сад
Мирјана Ивановић, Зоран Будимац, Универзитет у Новом Саду**,** Природно-математички факултет
„Персонализовано учење у туторским системима"

АПСТРАКТ: Један од најважнијих сегмената у данашњем развоју и употреби Интернета је персонализација садржаја и изградња корисничког профила заснованог на понашању сваког појединачног корисника. Формирани профил треба да помогне кориснику у избору нових садржаја и информација које му се у датом тренутку представљају. У циљу персонализације процеса учења и прилагођавања садржаја сваком појединачном ученику, системи за електронско учење морају користити стратегије којима ће задовољити потребе ученика. Такође, ти системи морају користити различите технологије ради промене окружења и адаптације наставног материјала на основу потреба ученика. Процес адаптације може бити у форми адаптације садржаја, процеса учења, повратних информација или навигације. У раду су приказани карактеристични примери туторских система који садрже различите облике персонализације наставног материјала и процеса учења. Приликом овог истраживања, пажња је усмерена на само неколико специфичних типова туторских система. Приказани су туторски системи који прилагођавају наставни материјал специфичним стиловима учења, као и системи који користе различите технике за генерисање препорука са циљем да препоруче ученику одговарајуће онлајн активности на основу њихових потреба, жеља, знања и путања кретања кроз наставни материјал других ученика са сличним карактеристикама.
Кључне речи: електронско учење, персонализација, туторски системи

Војислав Андрић, Висока пословна школа струковних студија, Ваљево
Владимир Мићић, Универзитет у Београду, Грађевински факултет
„О потреби организованог бављења проблемима наставе математике у Србији“

АПСТРАКТ: Студије математике (и информатике), као наставне и научне дисциплине, кроз које се припрема кадар за остваривање наставе, у Србији се реализују на математичким, природно-математичким, педагошким(?) и учитељским факултетима. Највећи део, преко три четвртине, дипломираних студената оваквог профила, своју професионалну активност реализују као наставници математике (у основним и средњим школама, на факултетима и високим школама). Њихов основни посао је настава математике – несумњиво један од најважнијих сегмената сваког образовног система. Пратећи свестрано и са дужном пажњом разне аспекте образовне стварности у области математике уверили смо се да у Србији није обезбеђен њихов системски и организован развој. Ово тврђење заснива се на следећим чињеницама:

- У Србији не постоји системски приступ селектирању и образовању будућих наставника математике;
- У Србији не постоји организован и научно утемељен рад на праћењу и критичком иновирању наставних програма математике;
- У Србији не постоје организована истраживања наставне праксе у области математике;
- У Србији не постоји неопходан контролни механизам кроз који ће се остварити стручни увид и надзор над наставом математике на свим нивоима;
- У Србији не постоји организован рад на издавачкој делатности у вези са разним питањима наставе математике;
- Документа која се односе на стратегије образовања (основног, средњег, високог), као и документа којима се регулише функционисање образовног система и, у његовим оквирима, наставе математике (наставни планови и програми, уџбеници, стручно усавршавање,...) предмет су честих спорова унутар математичких кругова, као и у широј јавности. Исто важи и за новија документа из овог домена (стандарди постигнућа, програми наставе математике у стручним школама,...). Ово сведочи о потреби њиховог стручног праћења, оцењивања и преиспитивања.

Циљ овог саопштења је да усмери пажњу учесника Симпозијума на поменуте и неке од непоменутих проблема, подстакне их на размишљање, креативну размену мишљења и организовану активност на планском и системском тражењу путева ка превазилажењу таквих проблема.
Кључне речи: математика, настава, програми, истраживање, лектира, увид и надзор

Милољуб Албијанић, Универзитет Сингидунум - ФЕФА
Данијела Миленковић, Универзитет Сингидунум - ФЕФА
Добрило Тошић, Универзитет у Београду, Електротехнички факултет
„Хардијев приступ израчунавању површине“

АПСТРАКТ: Њутнов и Лајбницов пробој до неограничене *mathesis universalis* било је схватање да нарочито манипулисање погодном једначином може да доведе до тачне вредности нагиба криве линије која је представљена том једначином. Овај метод манипулације је суштина диференцирања. Други поступак који се изводи са једначином (поступак од тада назван интеграција) води математичара до површине испод криве која је представљена том једначином. За ова два поступка, диференцирање и интеграцију, заједнички термин је калкулус, или инфинитезимални рачун, а они представљају моћно оружје у рукама математичара и научника. Рад показује Хардијев приступ у израчунавању површине ограничене непрекидном функцијом и повезаност са Њутн-Лајбницовом формулом.
Кључне речи: Харди, површина, Њутн-Лајбницова формула

Славиша Радовић, студент докторских студија Математичког факултета Универзитета у Београду
Мирослав Марић, Универзитет у Београду, Математички факултет
„Улога домаћих задатака у образовању “

АПСТРАКТ: Са развојем технологија које су применљиве у образовању, наставници имају на располагању велики избор програма којима могу подстаћи учење и мотивацију ученика. Приказаћемо историјски преглед задавања домаћих задатака, програмске пакете који се могу користити у изради електронских домаћих задатака и представићемо апликацију „Домаћи задатак“ http://domacizadatak.matf.bg.ac.rs/, коју развијају студенти докторских студија Математичког факултета у Београду, а која представља електронску збирку домаћих задатака из математике за старије разреде основне школе.
Кључне речи: домаћи задатак, ГеоГебра, интерактивност, електронски материјали

Нивес Јозић, Филозофски факултет, Сплит
„Формулирање математичких дефиниција и исказа теорема у сврху критичког промишљања и закључивања“

АПСТРАКТ: У настави математике често чујемо коментар ученика „Што ће мени ово у животу?“ који упућује на став да је бесмислено учити оне садржаје који се не могу директно примијенити у реалном животу и раду. Но, пренаглашавањем и сталним тражењем примјене математике у реалним ситуацијама губе се из вида темељна начела математике која су итекако потребна за сврховито и учинковито функционирање појединца у професионалном и особном животу и раду.

Једна од темељних задаћа (савремене) наставе математике је развијање логичког мишљења и закључивања што је неопходно у оспособљавању ученика за критичко промишљање и самостално дјеловање у друштву информацијске кризе и брзог глобалног развоја. Ту задаћу могуће је остварити правилним увођењем математичких појмова и теорема, а посебно процесом доказивања теорема јер су управо појмови, теореми и њихови докази резултат основних облика мишљења: поимања, просуђивања и закључивања.

На примјерима из наставе математике, уз краће теоријске поставке, овим радом жели се указати на тешкоће и пропусте у процесу увођења појмова у настави математике (формулирање математичке дефиниције), у постављању исказа теорема, његовог обрата,
негације и контрапозиције теорема што доводи до неразумијевања и немогућности стјецања трајних и оперативних знања.

Поступак испитивања и доказивања истинитости разних тврђења важан је и неизоставан чимбеник у животу сваког човјека. Доказивање истинитости тврђења о неком математичком објекту увелике доприноси развоју (апстрактног) мишљења и неизоставни је дио процеса закључивања. Због тога сваки ученик треба учити доказивати барем основне поучке (теореме) који се обрађују у настави математике основне и средње школе те разликовати карактеристике директног и индиректног доказивања.
Кључне ријечи: математичка дефиниција, критичко промишљање, исказ теорема, доказ у настави математике

Наталија Будински, Основна и средња школа са домом ученика „Петро Кузмјак“, Руски Крстур
„Новац у функцији“- математички модели финансијске математике у средњој школи

АПСТРАКТ: У излагању ће бити представљено на који начин се тематика новца може обрадити у оквиру средњошколске математике. Камата, курс или кредит су појмови које ученици свакодневно чују у медијима или у свом окружењу. Дати су примери као се за податке из реалних ситуација праве математички модели који илуструју везу између математичке теорије и, на пример, курса или штедње. За визуелизацију података и математичко моделирање основа финасијске математике се користи Геогебра, а посебан акценат је стављен на обраду функција и решавање задатака из реалног контекста.
Кључне речи: математички модели, Геогебра, новац

Александра Росић, ОШ „Мирослав Антић“, Београд
„Топ полиноми у додатној настави у основној и средњој школи“

АПСТРАКТ: Проблеми у вези пермутација са забрањеним позицијама су врло чести у свакодневном животу (проблем прављења распореда, избора кандидата при запошљавању, пребројавању избора такмичара када постоје забрањени парови и уопште било ком пребројавању када неки од елемената има забрањену позицију). Овакви проблеми имају дугу историју која досеже до 18. века када је француски математичар Пјер де Монтморт посматрао проблем брачних парова које треба сместити око округлог стола на тај начин да распоред буде мушко-женско и да нико не седи поред свог брачног друга.

На нивоу основне и средње школе овакви и слични проблеми могу се ефикасно решавати помоћу топ полинома - реалан проблем своди се на проблем смештања ненападајућих топова на шаховској табли, а затим се коришћењем формуле укључења- искључења и формирањем топ полинома лако долази до решења проблема. Овај рад има за циљ да укаже да се елементи енумеративне комбинаторике могу пажљивим методичким поступцима приближити заинтересованим ученицима од 7. разреда основне школе, али и средњошколцима који се припремају за такмичења.
Кључне речи: додатна настава, пермутације са забрањеним позицијама, топ полиноми

Александра Стевановић, Славиша Радовић, Марија Радојичић, Александра Арсић,
студенти докторских студија Математичког факултета Универзитета у Београду
„Наставна јединица из области природних бројева која одступа од класичних метода наставе“

АПСТРАКТ: Лоши резултати наших ученика на OECD/PISA тестирању указују на потребу за променом парадигме наставе. Од ученика се очекују функционална знања односно примена математичког знања у решавању реалних проблема. У складу са очекивањима биће приказана наставна јединица која одступа од класичних метода наставе и подразумева решавање проблема у реалном контексту као и корелацију математичког градива са другим предметима. За израду интерактивних наставних материјала коришћен је програмски пакет ГеоГебра.
Кључне речи: решавање проблема у реалном контексту, природни бројеви, ГеоГебра

Ivan Budimir, Sveučilište u Zagrebu, Grafički fakultet
Igor Jelaska
„New methodical approach to the teaching of Mathematics at the Faculties of Technology“

ABSTRACT: The economic situation in the Republic of Croatia and its accession to technologically more developed countries of the European Union necessarily call for some important changes in the higher education system. This is above all related to the increasing need to train students in a more efficient application of the knowledge acquired during studying. Therefore the mathematical educational at the faculties of technology needs to be directed towards the application of mathematical knowledge in practice. In accordance with the above-stated, this paper provides guidelines needed to improve the quality of the teaching of mathematics at the faculties of technology. This approach is in line with the latest trends in higher education in the European Union and the United States of America where the mathematical knowledge represents the basis for the rapid development of new technologies.
Keywords: mathematics, technology, methodology of teaching mathematics, Bologna process

Војислав Андрић, Висока пословна школа струковних студија, Ваљево
„Ваљевска методичка радионица"

АПСТРАКТ: Подружница математичара Ваљево од почетка ове године реализује редовне месечне састанке наставника математике у основним и средњим шпколама који имају радни наслов Ваљевска методичка радионица.

Методичка радионица је предвиђена као облик необавезног и добровољног, интерактивног рада наставника на плану преношења конкретних методичких искустава из праксе за праксу, као и размене наставних планова, материјала, информација, решења ... између учесника радионице.

Циљ овог саопштења је да учеснике Симпозијума детаљније информише о методологији реализације методичке радионице, њеним садржајима, првим резултатима рада радионице и прикаже интернет портал методичке радионице.
Кључне речи: методика, радионица, методологија, садржаји, портал

Зорица Маринковић, Земунска гимназија
„Концептуалне мапе у настави математике"

АПСТРАКТ: Већина професора, чак и они са дугогодишњим искуством, често се суочавају са проблемом како да изложе наставни садржај тако да га ученици разумеју, прихвате и науче са разумевањем. То је понекад тежак процес и дешава се да се решење тражи у смањењу количине градива. Промене су дефинитивно неопходне, али не обавезно у садржају већ у проналажењу начина да се садржај представи. Концептуалне мапе су графички прикази којима се у оквиру неке теме или наставне јединице могу истаћи везе између основних појмова. Појмови су најчешће записани у облачићима и међусобно су повезани линијама на којима су понекад записане речи које описују везу између њих. Мапирање је креативан процес организовања садржаја и може се користити у планирању часа, процесу учења, утврђивања и систематизације, индивидуалном и групном раду, развија математичку писменост подстиче математички начин размишљања и кад се једном прихвати лако се примењују и у другим наставним предметима али и у свакодневном животу. Експеримент креирања концептуалних мапа у ком су учествовале две групе ученика, и који је описан у раду, потврђује њихову изузетну примењивост.
Кључне речи: концептуалне мапе, настава, знање

Драгана Миличић, Имре Кризманић, Гордана Субаков Симић, Славиша Станковић, Универзитет у Београду, Биолошки факултет
Марина Дрндарски, ОШ „Дринка Павловић“, Београд
Албина Холод, ОШ „Раде Драинац“, Београд
Зорица Лазић, ОШ „Филип Кљајић Фића“, Београд
„Спирале и зечеви – Фибоначи и златни пресек у интердисциплинарној настави“

АПСТРАКТ: Златни пресек и Фибоначијеви бројеви се појављују у природи са великом учесталошћу. У математици је познато да било коју потенцију златног броја фи можемо добити тако да саберемо две претходне потенције. У биологији, то значи раст организма, као и додавање одређене количине јединки у популацији већ постојећима. Секвенце бројева познате као Фибоначијева серија могу се препознати и у различитим творевинама у природи, па често код живих бића постоје обрасци са три, пет или чак осам спирала. Презентација приказује различите примере примене Фибоначијевих законитости у биологији. Дати приступ пружа могућност интердисциплинарности у настави, утиче на подизање интересовања ученика и студената, а примењив је и у инклузији. Примена Фибоначијевих низова у биологији и свакодневном животу је добар начин за подизање интересовања за градиво из математике и биологије, као и за популаризацију науке уопште.
Кључне речи: Фибоначи, златни пресек, интердисциплинарност

Мићо Милетић, Висока школа за васпитаче струковних студија Алексинац
„Проблем постојања математике“

АПСТРАКТ: Пре 35 година, 17.6.1978., одржан је Пети заједнички састанак Семинара за конструктивну математику и теорију модела Загреб - Београд. Реферати и прилози, као и дискусија су штампани у књизи „Проблем постојања у математици“, (Математички институт, Београд, 1979.) Овај рад је осврт на актуелне теме које не застаревају.
Кључне речи: постојање математике, реформа школства, криза основа

Маја Николова, Педагошки музеј, Београд

„Настава математике као вежба у математичком мишљењу и као потреба у практичном животу“

АПСТРАКТ: Улога математике, као наставно-научног предмета, увиђа се тек кад се и историјски сагледа њена улога и место у процесу образовања. Од најранијих дана она је била присутна у наставним плановима свих основних, средњих и високих школа као опште-образовни или стручни предмет, чија је важност зависила од тренутних друштвених потреба. Поред читања и писања, као предмет повезан са практичним животом, рачун се учио у основним школама, а у средњим математика се предавала под разним називима: численица, рачуница, математика, алгебра или артиметика, а касније је била проширена и са садржајима из геометријског цртања.

Имајући двојак задатак да развија математичко мишљење и да пружи солидну припрему за свакодневни живот, математика је, као средњошколски опште-образовни или стручни предмет, имала свој историјски развитак који је неминовно зависио од друштвено-политичких и економских услова. И без обзира да ли је представљала окосницу образовања или само њен саставни део она је, у спрези са осталим дисциплинама а касније и наукама, неминовно утицала на процес модернизације државе и европеизације Србије.

Овај рад има за циља да укаже на главне карактеристике у развоју матаматичке наставе у гимназијама и средњим школама Србије од средине 19. века па до 1918. године. Кроз законске измене и промене наставних планова које су биле праћене употребом нових и савремених уџбеника као и наставних средства биће приказано узајамно деловање математике као наставне дисциплине и развоја школства у Србији.

Кључне речи: рачун, математика, историја наставе, математичко мишљење

Наталија Јеленковић, Дванаеста београдска гимназија

„Математика кроз алгоритамско решавање задатака у настави рачунарства и информатике“

АПСТРАКТ: Алгоритамско размишљање доводи до решавања многих математичких задатака који су, између осталог, везани за особине бројева, одређивање вредности функција. Овим излагањем ће се приказати значај, предности и недостаци оваквог размишљања у настави рачунарства и информатике коришћењем математичког апарата за рад са бројевима и функцијама.

Кључне речи: алгоритамско размишљање, особине бројева, вредности функција, математички апарат

Дарко Дракулић, Филозофски факултет Универзитета у Источном Сарајеву
Блаж Змазек, Игор Песек
„Е-уџбеници нове генерације - и-уџбеници“

АПСТРАКТ: Популарност е-учења резултирала је појавом великог броја ресурса и различитих окружења за е-учење. Нејасне дефиниције и различита тумачења ових појмова доводе до неразумијевања е-уџбеника са методичко-дидактичког и техничког аспекта. Већина комерцијалних и некомерцијалних е-уџбеника представљају дигитализоване верзије класичних уџбеника са веома малом стопом интерактивности и као такви не представљају велики иновативни искорак у односу на класичне уџбенике. У овом раду биће приказана нова генерација уџбеника, и-уџбеници (интерактивни уџбеници), који садрже мноштво интерактивних елемената, а који су настали на идеји мобилног учења - идеји да се уџбеници могу користити у било које вријеме, са било ког мјеста и на било ком уређају. Поред методичко-дидактичких изазова њихове употребе у наставном процесу, и-уџбеници представљају и велики технолошки изазов - од припреме садржаја, преко алата за израду интерактивних материјала до организовања и дистрибуције и-уџбеника. У овом раду су приказана рјешења која су развијена при развоју и-уџбеника за математику и предмете природне групе предмета за основу и средњу школу..
Кључне речи: е-учење, е-уџбеници, и-уџбеници

Ђурђица Такачи, Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет
Ивана Поповић, Основна школа „Војвода Путник“-Рипањ, Београд
„Увођење рачунара у основну школу“

АПСТРАКТ: У овом раду циљ је био да се увежбају математички садржаји везани за правоугли координатни систем, као и садржаји информатике и рачунарства кроз повезивање програма Graph, Paint и Word.
Кључне речи: растојање између две тачке, обим и површина троугла и четвороугла, повезивање програма Graph, Paint и Word

Марија Радојичић, Славиша Радовић, Слађана Јовчић, студенти докторских студија Математичког факултета Универзитета у Београду
Мирослав Марић, Универзитет у Београду, Математички факулет
„Праћење напретка ученика применом електронских тестова за завршни испит“

АПСТРАКТ: Након основношколског образовања ученици се сусрећу са полагањем завршног испита који има функцију сведочанства о усвојеним темељним знањима и компетенцијама током образовања. Разматрани су разни начини за примпрему ученика за полагање завршног испита са посебним освртом на коришћење информационих технологија. Посебна пажња биће посвећена интернет апликацији “Завршни испит”, креираној на Математичком факултету. Осим електронских тестова, овом апликацијом је наставницима и ученицима омогућено праћење напретка ученика током процеса учења као и креирање сопствених тестова у циљу увежбавања одређених типова задатака.
Кључне речи: завршни испит, информационе технологије, електронски тестови

Наташа Трбојевић, ОШ „Коста Абрашевић“, Београд - Раковица
„Exe апликација - креирање наставних материјала у математици“

АПСТРАКТ: Електронско учење у Србији постаје све присутније, и то не само кроз наставна средства у учионици, већ и кроз хибридно учење где се део наставе одвија на класичан начин, а део онлјан. Чини се да је близу и тренутак када ће се настава све више одвијати и кроз различиите програме који се у потпуности реализују у електронском окружењу.

Хибридна настава у основном образовању тренутно представља могућност да се истовремено искористе добре стране класичне наставе, али и предности различитих система за управљање учењем, као и предности електронских наставних материјала.

Развојем Интернета настали су многобројни системи за управљање учењем (енг. learning management system – LMS) који су омогућили да се знањем, као важним људским ресурсом, управља на један нов начин. Један од најзаступљенијих код нас свакако је LMS MOODLE. Он је, захваљујући својим разноврсним ресурсима и алатима, као и једноставном коришћењу и администрирању све присутнији. Важна карактеристика система за управрање учењем јесте да наставни садржаји које користе морају бити у дигиталном облику. У ту сврху развили су се разноврсни алати за креирање наставних садржаја, међу којима се по својим особинама издваја eXe алат, који овим радом желим да представим.

Рад Круг (http://www.digitalnaskola.rs/konkurs/dc2/zbornik/brojPrijavaPoPredmetuIRazredu/razred_7/Matematika/931.html), са примерима часова креираних помоћу eXe апликације, освојио је прву награду на конкурсу "Дигитална школа 2" у категорији Математика, рачунарство, информатика и техничко образовање.
Кључне речи: математика, exe, електронски наставни материјали, круг

Дарко Максимовић, програмер, Циско
Владимир Филиповић, Математички факултет, Универзитет у Београду
„Софтвер „Лењир и шестар“ и његово коришћење у настави математике“

АПСТРАКТ: Анализом текућег стања и потреба школског система у Србији, долази се до закључка да је том систему могуће пружити неопходну подршку у виду информатичких средстава. За примјер је узета област планиметрије за узраст од V до VIII разреда ОШ, гдје су најприје проучени наставни циљеви, а затим понуђено једно софтверско рјешење за подршку додатној и допунској настави. Приказано је како се развија комплетан софтверски пакет, почев од првобитних потреба и како их задовољити, преко плана и дизајна софтвера, до његове крајње имплементације у произвољном програмском окружењу, тако да га је могуће користити у самој настави.
Кључне ријечи: настава геометрије, информатика, лењир, шестар, софтвер, планиметрија

Марина Нешовић, Трећа београдска гимназија
Иван Лазаревић, Земунска гимназија
Ђорђе Стакић, Математички факултет Универзитета у Београду
„Иновације у настави информатике у школама кроз рад ученика на Википедији"

АПСТРАКТ: Школске 2012/13 године у Трећој београдској и у Земунској гимназији у склопу наставе информатике реализован је пројекат Вики гимназијалац. Кроз предавања и практичне радионице ученици су упознали основе функционисања Википедије, највеће слободне енциклопедије. Упознали су синтаксу Медијавики софтвера, а затим су кроз семинарске радове учествовали у писању чланака за Википедију на српском језику. Један део чланака се односио на слободне теме, а други део је био везан за стандардно градиво информатике у гимназијама.

Медијавики софтвер са једноставном синтаксом за обележавање текста је погодан да се кроз њега ученици гимназије упознају у склопу редовне наставе информатике. Запажања о успешности пројекта, утисцима ученика, перспективама и могућностима увођења Википедије у наставу информатике у школама говориће учесници.
Кључне речи: настава информатике, Википедија, практичне радионице, унапређење наставе

Tatjana Stanković, School of electrical engineering "Nikola Tesla", Pančevo
Nils Dalarsson, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden
Olga Jakšić, Institute of Chemistry, Technology and Metallurgy**,** University of Belgrade
„Hands in mathematics: appropriate use of software in teaching and research "

ABSTRACT: This paper focuses on the use of mathematical software in teaching and research in the context of enhancing the student comprehension of the subject or solving a specific problem in research. Based on experience, it has been shown in the pro et contra form, that the success in achieving predetermined objectives might be missed unless the software is used as a supplementary aid and not as the only tool. It has also been shown that sometimes one software package may not suffice. Examples are given for the use of computer-generated results in classroom and research, along with tips and tricks for making the most of it. One example is the use of Geogebra for the analysis of a given function in a classroom with the reflection on the amount of acquired conceptual and procedural knowledge of students. Another example is the use of Wolfram Mathematica and MathWorks MATLAB in research concerning limiting performances of adsorption based plasmonic sensors with reflection on numerical error propagation and the benefits from analytical solutions together with numerical simulations to the analysis of physical phenomena in general.
Keywords: analytical thinking, conceptual knowledge, educational technology, numerical errors, teaching strategies

Оливера Марковић, Учитељски факултет, Ужице
Миленко Пикула
„Критички осврт на идеју примењивог знања у настави математике"

АПСТРАКТ: У раду су разматрани проблеми везани за актуелне трендове у настави математике који у први план стављају примењивост математике у свакодневном животу. Дат је критички осврт на ПИСА тестирање које је осмишљено с циљем да мери колико су ученици после завршетка основне школе савладали управо ту врсту примењиве математике.
Кључне речи: примењивост знања, математичка писменост, ПИСА тест

Валентина Костић, Гимназија Пирот
„Извод функције и његове примене – задатак у слици“

АПСТРАКТ: У раду је приказан нови методски приступ систематизације градива примене извода функције. Ученици на основу приказаних графика функција и особина функција дискутују о особинама изводних функција и обрнуто на основу графика изводних функција одређују особине функције. Овако постављени задаци развијају геометријску интуицију и графичку писменост ученика. Исто тако помажу дубљем разумевању кључних појмова и ставова математичке анализе и примени тих знања. Предавање је припремљено по узору на руске уџбенике: Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа, 10-11 класц, Москва 2009. и Колмогоров А. Н., Абрамов А. М., Дудницын Ю. П. и др. Алгебра и начала математического анализа, 10-11 класс, Москва 2008, који се користе у Средњој школи 644 Приморског округа Санкт-Петербурга у Русији.
Кључне речи: график функције, извод функције, геометријска интерпретација, монотоност, екстремне вредности

Марија Лекић, Факултет за саобраћај, комуникације и логистику, Беране, Црна Гора
Вучић Дашић, Природно-математички факултет, Подгорица
„Електронски портфолио у настави математике“

АПСТРАКТ: У процесу реформе школства коришћење алтернативних облика процјене знања је постало јако популарно, а један начин за то је коришћење електронског портфолиа. Суштина е-портфолиа јесте да обезбиједи “богатију слику” способности ученика.

Једна од предности образовања заснованог на web-у је могућност прилагођавања наставе потребама и могућностима ученика. Увођењем информационих технологија темпо, редослед, садржај и метод подучавања могу да се прилагоде на начин који најбоље одговара студентовом стилу учења, интересовањима и циљевима.

У литератури се могу наћи бројни примјери који указују на то да се спознајом психолошких карактеристика индивидуе која учи, а које се с годинама мијењају и различите су за различите области или наставне предмете, тој особи може лакше „прићи“ у циљу преношења знања. Слично, особа која учи може на једноставнији начин да презентује своје карактеристике, па се мање времена троши и на њихову спознају.

У овом раду ће бити приказана употреба овог алтернативног начина процјењивања у образовном систему, са посебним освртом на наставу математике. У раду је дата идеја како се електронски портфолио може надоградити у сврхе учења и наставе математике на било ком образовном нивоу.
Кључне ријечи: е-портфолио, образовање, персоналне карактеристике, настава математике

Драган Крстић, Александра Филиповић, Гимназија Крушевац
„Аритметички и геометријски низ у настави математике и програмирања“

АПСТРАКТ: За разлику од прва два разреда гимназије, циљеви, задаци и садржаји предмета математика и рачунарство и информатика у трећем разреду гимназије природно-математичког смера су веома повезани. То даје простора наставницима да организују часове интердисциплинарне наставе и омогућава корелацију у настави ових предмета. Интердисциплинарни приступ настави подразумева повезивање садржаја различитих дисциплина (предмета) у логичке целине организоване око једног проблема или теме. Може се дефинисати и као јединствен поглед на заједничко у знању, које је основа за изналажење нових односа, стварање нових модела, система и структура или као примењена методологија и језик више дисциплина с циљем преиспитивања централне теме, проблема или искуства. Централна тема одржаног часа је била аритметички и геометријски низ. Ученици су исте задатке решавали на два различита начина, математички и писањем алгоритма (и програма у Pascal-у), где су и примењивали већ стечена знања о наредбама циклуса. За почетак су изабрани једноставни примери аритметичког низа и геометријског низа, а за крај часа пример који је различите тежине у зависности да ли се решава математички или програмерски. Ученици су исту тему сагледали из различитих углова, уочили разлику у приступима, као и њихова ограничења.
Кључне речи: интердисциплинарна настава, аритметички и геометријски низ, наредбе циклуса

III СЕКЦИЈА: НАУЧНОИСТРАЖИВАЧКИ И СТРУЧНИ РАД СТУДЕНАТА

Марко Шошић, Владимир Стојановић, студенти мастер студија, Математички факултет
Мирослав Марић, Математички факултет, Универзитет у Београду
„Упоредни приказ и експериментална евалуација TCP алгоритама"

АПСТРАКТ: TCP (Transmission Control Protocol) је протокол који гарантује поуздан пренос података преко непоузданих канала. Поуздан пренос значи да ће сви подаци стићи на одредиште, без дупликата, и тачно оним редом којим су послати. Непоуздан канал је веза у којој могу настати грешке које нису под нашом контролом (нпр. јавна мрежа, Интернет). Данас се већина апликација које преносе податке путем Интернета ослања на овај протокол. Многе од њих захтевају брз пренос података преко брзих веза између јако удаљених рачунара. Међутим, стандардни TCP ту успева да искористи само део капацитета који му се пружа. Овде дискутујемо о недостацима протокола - зашто долази до тих проблема, и презентујемо низ решења.
Кључне речи: TCP, контрола загушења, алгоритми, пренос података

Бранко Малешевић, ванредни професор, Електротехнички факултет Универзитета у Београду
Бојан Бањац, студент докторских студија, Електротехнички факултет
Марија Ненезић, мастер примењене математике, Електротехнички факултет
Марко Давидовић, мастер електротехнике и рачунарства, Електротехнички факултет
Дејана Спасић, Владимир Ћирковић, Бранко Ђурашевић, студенти мастер студија, Електротехнички факултет
Бојана Белојевић, студент основних студија, Електротехнички факултет
„Реализација неких алгоритама теорије Groebner-ових база у програмском језику Java и програмском пакету Matlab"

АПСТРАКТ: У овом раду представљени су неки алгоритми теорије Gröbner-ових база рађени у програмском језику Java и програмском пакету Matlab. Алгоритми су реализовани над
прстеном полином по n променљивих. Разматрани алгоритми налазе примену на пример у решавању проблема обојивости графова. Такође, у овом раду описани су начини формирања Matlab GUI (graphical user interface) за разне алгоритме теорије Gröbner-ових база. Реализација је изведена независно од Simbolic tool box-а.
Кључне речи: Gröbner-ова база, редукована Gröbner-ова база, Buchberger-ов алгоритам, систем полиномских једначина, JAVA, Matlab GUI

Божидар Радивојевић, студент 2. године основних студија
Миљан Кнежевић, Универзитет у Београду, Математички факултет
„Одређивање цена америчких и европских опција коришћењем биномног модела - практична примена"

АПСТРАКТ: Одређивање цене опција за дати финансијски инструмент је нетривијалан проблем, узимајући у обзир промењивост и непредвидивост фактора који утичу на стање тржишта. Аналитичко решавање система диференцијалних једначина, по *Black Scholes* моделу, који је у широкој употреби за одређивање цена опција, изводиво је само у специјалним случајевима који фиксирају велики број улазних параметара. Док је цену европских опција могуће одредити било аналитички, било нумерички, уз фиксирање неких параметара тржишта, ефикасна валуација опција америчког типа се врши углавном нумеричким апроксимацијама, које се често ослањају на биномни модел израчунавања.

У оквиру овог пројекта, написан је у C\#/WPF језику прост калкулатор за одређивање цена *put/call* опција америчког и европског типа по биномној варијанти нумеричког решавања *Black Scholes* модела, уз додатну опцију за приказ могућег профита при раној реализацији америчке *put* опције.
Кључне речи: опције, биномни модел, цена, калкулатор

Татјана Јакшић, Математички институт САНУ
„О конвергенцији мета-хеуристичке методе "Оптимизација колонијом пчела""

АПСТРАКТ: Многи проблеми у свакодневном животу се могу представити као проблеми комбинаторне оптимизације. У већини случајева они спадају у класу НП-тешких проблема и стога су мета-хеуристике једини избор за њихово решавање. Мета-хеуристичке методе су уопштени скуп правила која се у имплементацији прилагођавају сваком конкретном проблему. Међу најпознатије мета-хеуристике убрајамо генетске алгоритме, оптимизацију мрављим колонијама, табу претраживање и симуларано каљење. Основна карактеристика мета-хеуристичких метода је да релативно брзо дају решења доброг квалитета. На жалост, оптималност коначног резултата, добијеног након достизања задатог критеријума заустављања, не може се гарантовати. За овакве методе могуће је једино утврдити да теоретски (асимптотски) конвергирају ка оптималном решењу. Предмет овог рада је испитивање конвергенције оптимизације колонијом пчела. Ово је релативно нова метода инспирисана понашањем пчела у природи. Иако постоје бројне примене ове методе, до сада није доказана њена конвергенција. У овом раду анализира се потребан услов за теоретску конвергенцију оптимизације колонијом пчела.
Кључне речи: комбинаторна оптимизација, мета-хеуристичке методе, интелегенција роја, конвергенција

Ђорђе Баралић, Бранко Грбић, Ђорђе Жикелић, Математичка гимназија, Београд
„Софтвер Cinderella, четвороуглови и конике"

АПСТРАКТ: У овом раду проучавамо четвороуглове уписане и описане око коника. Наше истраживање вођено је експериментима у математичком софтверу „Cinderella". Такође, проширујемо већ познате резултате пројективне геометрије коника и показујемо како математички софтвер може да донесе нове идеје у теоријској и примењеној математици.

Рад смо већ окачили на arXiv и чекамо одговор часописа у који смо га послали, тако да сам рад можете видети овде http://arxiv.org/abs/1303.5497.
Кључне речи: алгебарска геометрија, пројективна геометрија, конике, Cinderella, праменови правих, колинеарност, Паскалова теорема

Весна Главоњић, мастер инжењер електротехнике
„Примена Гребнерове базе и симболичке математике у Matlab програму“

АПСТРАКТ: У математици, а посебно у компјутерској алгебри, Гребнерова база има велики значај. Гребнерова база представља скуп нелинерних полинома са више промењивих, са особинама које омогућавају једноставна алгоритамска решења за многе фундаменталне проблеме у математици. У раду се даје приказ примене Гребнерове базе као и уопштене симболичке математике у програмском окружењу Matlab.
Кључне речи: Гребнерова база, симболичка математика, Matlab

Ђорђе Баралић, Математички институт САНУ, Београд
„Комбинаторика квазиторусних многострукости“

АПСТРАКТ: Квазиторусне многострукости представљају тополошку генерализацију торусних варијетета једних од најзначајних објеката алгебарске геометрије. Ова важна класа многострукости је предмет проучавања торусне топологије и интензивно је проучавана у радовима В. Бухштабера, Т. Панова, М. Масуда, Н. Реј-а и др. Изложићемо њихова комбинаторна својства која долази из структуре одговарајућег простог политопа који представља простор орбита дејства торуса. Разумевање ових особина је веома важно за изучавање тополошких инваријанти ових многострукости: кохомолошког прстена, карактеристичних класа, родова и др.
Кључне речи: квазиторусне многострукости, политопи, карактеристичне класе

Boris Petković, Department of Mathematics and Informatics, University of Banja Luka
Republic of Srpska, Bosnia and Herzegovina
„Combinatorial Interpretations of Some Integer Sequences“

ABSTRACT: We define a function $\begin{pmatrix} m,n \\ k,Q \end{pmatrix}$ that is related to the binomial coefficients. An explicit formula for this function is proved. In some particular cases, simpler explicit formulae are derived. Further, we show that our function satisfies several recurrence relations.

The relationship of our counting function with different classes of integers is then examined. These classes include: different kind of figurate numbers, the number of points on the surface of a square pyramid, the magic constants, the Catalan numbers, the Dellanoy numbers, the Sulanke numbers, the numbers of the coordination sequences, and the number of the crystal ball sequences of a cubic lattice.

In the last part of the paper, we prove that several configurations are counted by our function. Some of these are: the number of spanning subgraphs of the complete bipartite graph, the number of square containing in a square, the number of colorings of points on a line, the number of all parts in the compositions of an integer.

We conclude by counting the number of possible moves of the rook, bishop, and queen on a chessboard. The most statements in the paper are provided by bijective proofs in terms of insets, which are defined in the paper. With this we want to show that different configurations may be counted by the same method.

Mathematics Subject Classification (2010) 05A05, 05A10
Keywords: binomial coefficient, figurate number, magic constant, Catalan number, Dellanoy number, Sulanke number, coordination sequence, complete bipartite graph

Весна Милетић, Филозофски факултет Универзитета у Источном Сарајеву
„Интегрални аналогони неких познатих неједнакости"

АПСТРАКТ: У овом раду су дати интегрални аналогони познатих неједнакости: Коши-Буњаковски-Шварца, Јенсена, Чебишева, Хелдера и Минковског. Дати су докази ових неједнакости као и њихова примјена кроз примјере.
Кључне ријечи: интегралне неједнакости, неједнакости Коши-Буњаковски-Шварц, Јенсена, Чебишева, Хелдера и Минковског.

Александра Арсић, **Славиша Радовић, Александра Стевановић,** студенти докторских студија Математичког факултета Универзитета у Београду
„Иновативни приступ настави математике коришћењем програмског пакета Геогебра"

АПСТРАКТ: и осталим сверама живота, тако и у образовању можемо искористити могућности које нам пружају информационалне технологије и учинити значајне промена ка побољшању наставаног процеса. Велики број људи широм света користи ГеоГебру у настави математике у основним и средњим школима, као и на факултетима. ГеоГебра се нагло развија у последњих пар година у Србији. Поред наставника и професора, значајан допринос развоју ГеоГебре у Србији има и *ГеоГебра Центар у Београду*. У овом раду биће представљена интернет презентација *Интерактивни курс Више математике*. Презентација садржи области Линеарне алгебре, које су представљене као динамички едукативни материјали. Имплеметација математичког садржаја на овакав начин може допринети развоју наставних метода, а учење прилагодити сваком студент - његовом темпу учења, његовим могућностима савладавања математичког садржаја, интелектуалним способностима и индивидуалним особеностима.
Кључне речи: инфорационе технологије, електронско учење

Бранко Малешевић, ванредни професор, Електротехнички факултет Универзитета у Београду
Ивана Јововић, асистент, Електротехнички факултет
Милош Дукић, Филип Ђорђевић, Александар Томић, студенти мастер студија, Електротехнички факултет
Ђорђе Митровић, студент основних студија, Електротехнички факултет
„Реализација Java аплета за решавање проблема обојивости графа"

АПСТРАКТ: У овом раду представљен је један аплет рађен у програмском језику Java за одређивање да ли је неки граф k-обојив или не. Проблем k-обојивости графа подразумева бојење чворова графа у k различитих боја под условом да су чворови спојени граном обојени у различите боје. Проблем k-бојења графа се своди на решавање полиномских једначина степена највише k, што ћемо радити применом Gröbner-ових база.
Кључне речи: 3-обојивост графа, Gröbner-ове база, Buchberger-ов алгоритам, систем полиномских једначина

Данило Пришуњак, наставник ОШ „Илија Гарашанин“
Славиша Радовић, наставник математике
Биљана Крстић, наставник ОШ „Бановић Страхиња“
„Математичко моделовање применом програмског пакета Геогебра“

АПСТРАКТ: Математичко моделовање представља приказивање физичких процеса преко математичких симбола и формула. Пошто већина тих проблема зависи од многобројних најразличитијих чинилаца и у већини случајева не можемо све да их обухватимо, у процесу стварања математичког модела ми се бавимо раздвајањем битних и незаобилазних чинилаца од оних чији утицај је мање битан. Проблем кроз који желимо да илуструјемо стварање и примену математичког моделовања је скок падобранца и приказ његовог лета. Односно желимо да изразимо пређено растојање и брзину падобранца у зависности од протеклог времена. Након стварања модела, проблем ћемо визуеализовати у програмском пакету ГеоГебра и детаљније га анализирати у зависности од промене почетних параметара.
Кључне речи: математичко моделовање, ГеоГебра

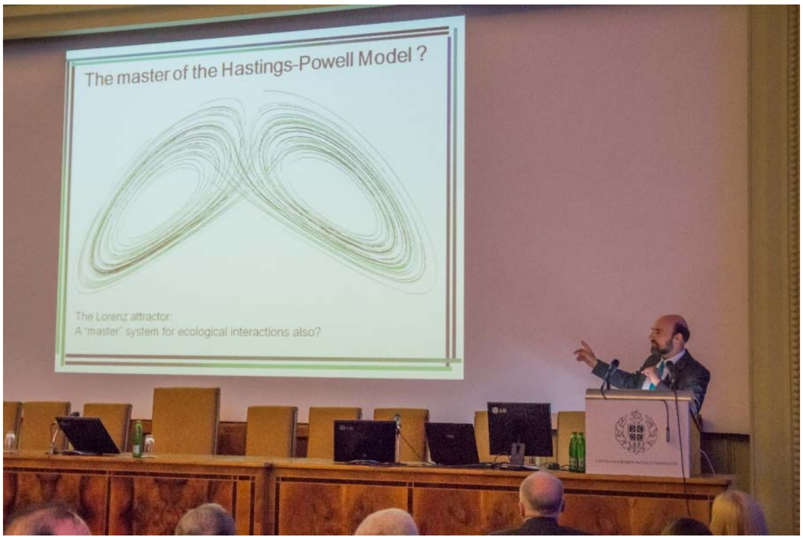
Милица Томашевић, студент основних студија Математичког факултета
„ЕМ алгоритам“

АПСТРАКТ: Метода максималне веродостојноти је један од начина за добијање оцена непознатих параметара у статистичким моделима. Оцене добијене овом методом под одређеним условима имају неке пожељне особине када се ради са узорцима већег обима, као што су непристрасност, асимптотски нормална расподела, постојаност и веома су прецизне. Једине мане ове методе су што није много прецизна на мањим узорцима и у неким ситуацијама веома је тешко експлицитно израчунати аналитички израз за овако добијене оцене. Стога је неопходно рачунати их неком нумеричком методом. ЕМ алгоритам је једна од њих и посебно је погодна за некомплетне узорке. Видећемо главну идеју иза овог алгоритма, као и његову примену.
Кључне речи: метод максималне веродостојности, функција веродостојности, ЕМ алгоритам, некомплетни узорци

Свечано отварање скупа

Поздравна реч Академика Николе Хајдина

Поздравна реч проф. др Миодрага Матељевића



Детаљ са излагања др Фивоса Пападимитриуа

Учесници секције „Математика и информатика у образовању"

Детаљ са излагања проф. др Ђурђице Такачи

Детаљ са излагања проф. др Павла Младеновића

Предах и дружење уз кафу

Детаљ са секције „Научно – истраживачки и стручни рад студената“