

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

КЊИГА АПСТРАКТА

THE BOOK OF ABSTRACTS
XII SYMPOSIUM "MATHEMATICS AND APPLICATIONS"
2nd December and 3rd December, 2022.

XII СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”
2. децембар и 3. децембар 2022.



КЊИГА АПСТРАКАТА – XII СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”
2. децембар и 3. децембар 2022.

Издавач:
Универзитет у Београду
Математички факултет

За издавача:
проф. др Зоран Ракић, декан

Главни и одговорни уредник:
доц. др Миљан Кнежевић

Уредник:
доц. др Александра Делић

Припрема за штампу:
доц. др Миљан Кнежевић
доц. др Александра Делић
доц. др Марек Светлик
др Ђорђе Стакић

Корице:
доц. др Миљан Кнежевић

Штампа:
Донат Граф

Тираж:
80 примерака

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51-7(048)
371.3::51(048)

СИМПОЗИЈУМ ”Математика и примене” (12 ; 2022 ; Београд)

Књига апстраката [Електронски извор] / XII симпозијум ”Математика и примене”, 2. децембар и 3. децембар 2022.= The book of abstracts / XII Symposium ”Mathematics and Applications”, 2nd December and 3rd December 2022.; [главни и одговорни уредник Миљан Кнежевић]. - Београд : Универзитет, Математички факултет, 2022 (Београд : Донат Граф). - 10стр.: 30 cm

Текст на срп. и енгл. језику. - Тираж 80. - Библиографија уз већину апстраката.

ISBN 978-86-7589-173-4

а) Математика – Апстракти б) Математика – Настава – Апстракти

COBISS.SR-ID 81280265

Програмски одбор XII Симпозијума „Математика и примене”

- **проф. др Градимир Миловановић**,
академик САНУ,
- **проф. др Миодраг Матељевић**,
академик САНУ, председник одбора,
- **проф. др Бранислав Боричић**,
проректор Универзитета у Београду, редовни професор Економског факултета,
- **проф. др Зоран Ракић**,
редовни професор и декан Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **проф. др Небојша Икодиновић**,
ванредни професор Математичког факултета Универзитета у Београду.

Организациони одбор XII Симпозијума „Математика и примене”

- **доц. др Миљан Кнежевић**,
доцент Математичког факултета Универзитета у Београду, председник одбора,
- **проф. др Зорица Станимировић**,
редовни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **проф. др Бојана Милошевић**,
ванредни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **проф. др Драгана Илић**,
ванредни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **доц. др Александра Делић**,
доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **доц. др Марек Светлик**,
доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **др Ђорђе Стакић**,
асистент Економског факултета Универзитета у Београду.

САДРЖАЈ

Miloš Arsenović Unrestricted non-tangential limits for separately (α, β) -harmonic functions	9
Margaret Bayer, Mark Denker, Marija Jelić Milutinović, Rowan Rowlands, Sheila Sundaram, Lei Xue Cut Complexes of Graphs	10
Владана Бакаревић Аутоматизована метода селекције параметара ТоМАТо алгоритма	11
Радослав Бакић Геометрија полинома и теорема Грејса	12
Владимир Балтић Проблеми екстремних вредности у основној и средњој школи	12
Nives Baranović Otkrivanje matematičke poruke prikazane geometrijskom figurom	13
Vlad Stefan Barbu, Thomas Gkelsinis, Alex Karagrigoriou Goodness-of-fit and Homogeneity Tests Based on Weighted Divergence Measures	14
Радослав Божић Образовни софтвер Геогейбра и провера остварености исхода учења	15
Daniijela Branković Analitičko rešenje n -dimenzionalnog Lotka–Volterinog dinamičkog sistema	15
Лазар Васовић Ублажавање пристрасности неуронских мрежа обртањем градијента	16
Зоран Видовић Егзистенција и јединственост ММВ оцена параметара фамилије тропараметарских расподела на основу рекорда	16
Ђорђе Вујадиновић Carleson embedding theorem for the harmonic Fock spaces	17
Dragan Vukotić On some coefficient problems in geometric function theory	18
Dejan Vurdelja Matematičke zagonetke	18
Jelena Gajić, Miodrag Mateljević, Miloš Arsenović Integral representation of separately (α, β) -harmonic functions	19
Anton Gjokaj Lipschitz continuity of quasiconformal mappings with L^p Laplacian, $p > n$, between the unit ball B^n and a spatial domain with $C^{1,\alpha}$ boundary	20

Zora Golubović On calculating sums of slowly convergent series	21
Luigi D’Onofrio Atomic decompositions, two stars theorems, and distances for the Bourgain–Brezis–Mironescu space	21
Vladimir Dragović Bridging Statistics with Geometry and Mechanics	22
Vladimir Dragović, Borislav Gajić, Božidar Jovanović Gyroscopic Chaplygin Systems	22
Иван Дреџун, Милан Банковић, Филип Марић Дедуктивни систем за верификацију (не)изоморфности графова	23
Goran Đanković On special values of zeta functions associated to orders in quadratic number fields	24
Маша Ђорић, Јелена Катић Полиномијална ентропија пресликавања индукованих хомеоморфизмима круга и интервала	24
Miloš Đorić, Mirjana Đorić Yamabe solitons on hypersurfaces of nearly Kähler manifolds	25
Владимир Ђошовић Примена нумеричких интегратора у астрономији	26
Виктор Ејсмонт, Бојана Милошевић, Марко Обрадовић Тестови нормалности на основу нове карактеризације	27
Oleg Ivrii, Mariusz Urbański Orbit counting for inner functions	28
Aleksandar Jović Jedan zanimljiv pristup za dobijanje uslova ekstremuma u matematičkom programiranju uz dodatne pretpostavke regularnosti	28
Danko R. Jocić, Stefan U. Milošević Inequalities for generalized derivations of operator monotone functions in norm ideals of compact operators	29
Danko R. Jocić Noncommutative Schwarz lemma and Pick-Julia theorems in Schatten-von Neumann ideals	30
David Kalaj, Petar Melentijević Gaussian curvature conjecture for minimal graphs	31
David Kalaj, Petar Melentijević, Jian-Feng Zhu L^p - Theory for Cauchy-transform on the unit disk	32
Nina Konjikušić, Ivana Jovović Uvod u BCI/BCK-algebre sa primerima	33

Enes Kačapor O bifurkaciji optimalno oblikovanog štapa sa smicanjem	33
Adel Khalfallah A Khavinson Type Conjecture for Hyperbolic Harmonic Functions on the Unit Ball	34
Žikica Lukić, Bojana Milošević On equality of matrix distributions in the space of positive semi-definite random matrices	34
Milena Marić, Miroslav Marić Finansijska pismenost u nastavi matematike	35
Aleksandra Marinković, Klaus Niederkrüger Symplectic circle actions on manifolds with a contact type boundary	36
Marijan Marković On Harmonic Functions on Convex Polyhedron Domains	37
Dušan Marčeta A method for generating synthetic orbits of interstellar objects in the Solar system	38
Miodrag Mateljević Boundary behaviour of partial derivatives for solutions to certain Laplacian-gradient inequalities and spatial QC maps	38
Miodrag Mateljević, Nikola Mutavdžić On Lipschitz continuity and smoothness up to the boundary of solutions of hyperbolic Poisson's equation	39
Miodrag Mateljević, Marek Svetlik Površina i zapremina - neki interesantni fenomeni	40
Бојана Матић Хелијева теорема у додатној настави средње школе	40
Fedor Mesinger The "dynamical core" and skill of the Eta model for weather and climate	41
Miloš Mićović, Željana Torlak, Ivana Jovović, Nataša Ćirović Algoritmi za deljenje polinoma i njihove primene	42
Nevena Mijajlović, Milojica Jaćimović Methods for solving quasivariational inequality	43
Тамара Милић, Ленка Главаш Динамички процес системског ризика са тренуцима обнављања	44
Gradimir V. Milovanović Orthogonality on the unit semicircle in the complex plane	45
Зорица Миловановић Јекнић, Александра Делић, Сандра Живановић Апроксимација неких елиптичких трансмисионих проблема	46
Војана Milošević On the role of empirical probability generating function in the goodness-of-fit and independence testing	47

Tatjana Mirković, Nataša Ćirović Primena Laplasove transformacije na funkciju prenosa na Time Scale	47
Manuela Muzika Dizdarević, Almasa Odžak, Aleksandar Lipkovski Kako učenici razumiju osnovne algebarske pojmove po završetku srednje škole?	48
Nikola Perić Razmatranje primene mašinskog učenja u upravljanju portfoliom projekata	49
Ognjen Petrov, Uroš Colović Computing bigraded Betti numbers as a method of distinguishing neighbourly polytopes	50
Miloš Z. Petrović Uopšteni Rimanovi prostori u Ajzenhartovom smislu, dimenzije $n \in \{2, 3\}$ i odgovarajući varijacioni problemi	51
Zoran Pucanović, Marko Pešović A note on some Chebyshev related integer sequences	52
Desanka Radunović, Božidar Radunović Softver otvorenog koda za vežbanje matematike u osnovnim školama	53
Aleksandar Savić Problem rimske dominacije	54
Ivana Savković Bergman projections on weighted mixed norm spaces	55
Andrea Seppi CMC foliations of quasi-Fuchsian manifolds	55
Evgeny Sevost'yanov Mappings with the inverse Poletsky inequality are discrete on the boundary	56
Војислав Симоновић, Татјана Станковић Занимљиви примери примене математике у машинству	57
Dino Spasovski Dempster-Šaferove funkcije verovanja na primerima političkih istraživanja javnog mnjenja.....	57
Ђорђе Стакић Решавање векторског проблема паковања применом метахеуристичких метода.....	58
Dragan Stevanović Enumerating lazy walks in threshold graphs	59
Јованка Свркота Како заинтересовати ученике за наставу математике	59
Jelena Tasić, Zorica Dražić, Zorica Stanimirović Metaheuristički pristup za rešavanje problema p-next centra	60
Маринко Тимотијевић Ауто-дуалне триангулације многострукости	61

Željana Torlak, Miloš Mićović, Nataša Ćirović, Ivana Jovović Primena dve numeričke metode za određivanje nula polinoma	62
Igor Uljarević Contact non-squeezing via selective symplectic homology	62
Јасмина Фијуљанин, Милица Саватовић, Јуриј Архимед Курепа Неки резултати из теорије непокретне тачке на метричким просторима	63
Стеван Цветићанин, Душан Зорица Фракциона и тополошка уопштења једначине телеграфичара као модели електричног вода	64
Марија Цупарић, Бојана Милошевић Тестови независности за случајно цензурисане податке	65
Elvir Čajić, Damir Bajrić, Irma Ibrišimović, Melika Kovačević-Vujanović Primena softverskih alata u nastavnom procesu sa specifičnim osvrtom na nastavu matematike i informatike	66
Elvir Čajić, Valentina Banović-Klisara O jednoj verziji zbira i proizvoda	67
Dragomir Šarić Finite-area holomorphic quadratic differentials on infinite surfaces	67
Nenad Šuvak Beyond Markovianity of heavy-tailed Pearson diffusions – fractional case	68

Unrestricted non-tangential limits for separately (α, β) - harmonic functions

Miloš Arsenović

*Department of Mathematics,
Belgrade University
e-mail: arsenovic@matf.bg.ac.rs*

Abstract. We prove that separately (α, β) - harmonic extension $u = P_{\alpha, \beta}[f]$ of f in the Zygmund class $L \log^{n-1} L(\mathbb{T}^n)$ has unrestricted non-tangential limits $u^*(\zeta)$ almost everywhere on the distinguished boundary \mathbb{T}^n of the unit polydisc \mathbb{D}^n and that $u^*(\zeta) = f(\zeta)$ a.e. In particular, this holds for $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ if $p > 1$, the corresponding statement is false for $p = 1$. Proof relies on weak $(1 - 1)$ - type estimates for suitable maximal functions.

Keywords: separately (α, β) - harmonic functions, distinguished boundary, non-tangential limits, maximal functions.

References

- [1] **Jessen, B., Marcinkiewicz, J., and Zygmund, A.:** Note on the Differentiability of Multiple Integrals. *Fundamenta Mathematicae*, 25 (1935), pp. 217 - 234.
- [2] **Klintborg, M., Olofsson, A.,** A series expansion for generalized harmonic functions, *Analysis and Mathematical Physics*, (2021) <https://doi.org/10.1007/s13324-021-00561-w>
- [3] **Zygmund, A.** Trigonometric Series: Vol. II, *Cambridge University Press* (1959)

Cut Complexes of Graphs

Margaret Bayer

*University of Kansas, Lawrence, Kansas, USA
e-mail: bayer@ku.edu*

Mark Denker

*University of Kansas, Lawrence, Kansas, USA
e-mail: mark.denker@ku.edu*

Marija Jelić Milutinović

*University of Belgrade, Serbia
e-mail: marijaj@matf.bg.ac.rs*

Rowan Rowlands

*University of Washington, Seattle, Washington, USA
e-mail: rowanr@uw.edu*

Sheila Sundaram

*Pierrepont School, Westport, Connecticut, USA
e-mail: shsund@comcast.net*

Lei Xue

*University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, USA
e-mail: leixue@umich.edu*

Abstract. We define two new classes of simplicial complexes constructed from graphs, called *cut complexes* and *total cut complexes*. For a graph $G = (V, E)$, k -*cut complex* $\Delta_k(G)$ is the simplicial complex whose vertex set is a subset of V , and whose each face satisfies the property that its complement contains k vertices inducing a disconnected subgraph of G . We generalize simplicial complex $\Delta_2(G)$ used by J. Eagon and V. Reiner in their extension of a famous theorem of R. Fröberg, which shows an interesting path leading from graph theory, through squarefree monomial ideals, and then (by using Stanley-Reisner theory) to the combinatorial structure of simplicial complexes.

Theorem 1 (Fröberg [2], Eagon and Reiner [1]). $\Delta_2(G)$ is shellable if and only if G is chordal.

We present various results about combinatorics and topology of complexes $\Delta_k(G)$. For example, we give some sufficient conditions on graphs such that their k -cut complexes are shellable, and show the effects of graph operations on the shellability of cut complexes. Also, we present the homotopy types for cut complexes of the most important classes of graphs. At the end of the talk, we will briefly mention various results for total cut complexes $\Delta_k^t(G)$.

Keywords: graph complex; shellability; homotopy type.

References

- [1] **John A. Eagon and Victor Reiner.** Resolutions of Stanley-Reisner rings and Alexander duality. *J. Pure Appl. Algebra*, 130(3):265–275, 1998.
- [2] **Ralf Fröberg.** On Stanley-Reisner rings. In *Topics in algebra, Part 2* (Warsaw, 1988), volume 26 of *Banach Center Publ.*, pages 57–70. PWN, Warsaw, 1990.

Аутоматизована метода селекције параметара ТоМАТо алгоритма

Владана Бакаревић

e-mail: vildanamg@gmail.com

Апстракт. Важна карактеристика савремене науке и машинског учења је да се подаци различитих врста прикупљају и доступни су у абнормалним количинама. На пример, сада је често случај да добијемо податке у облику врло дугих вектора, где се све координате, осим неколико, испостављају ирелевантним за питања која нас занимају, а не морамо нужно знати које су то координате оне нама занимљиве. То озбиљно ограничава и начине визуализације тих података. Добијени подаци, такође, имају много више шума него раније и садрже више недостајућих података. Наша способност да анализирамо ове податке, како у погледу количине, тако и у погледу природе података, очигледно не иде у корак са подацима које добијамо.

Циљ овог рада је да пре свега читаоцу да идеју и мотивацију за примену перзистентне хомологије. Математичка област која је развијена за инкорпорирање геометријских и тополошких техника бави се облацима тачака (енг. point clouds), тј. коначним скуповима тачака на којима је дефинисана одређена метрика.

У раду ћемо се упознати са ТоМАТо (Topological Mode Analysis Tool) алгоритмом кластеровања. Алгоритам комбинује две фазе: тражење мода и спајање кластера. Новост овог приступа је у употреби тополошке перзистенције за одређивање значајности мода и конструкцију њихове хијерархије. Такође, алгоритам пружа додатне визуализације резултата. Једна од најпознатих је перзистентни дијаграм.

Најбитнији закључак овог рада је предложена нова метода за аутоматизовану селекцију параметара ТоМАТо алгоритма. На крају, посветићемо се и примени наведених идеја и резултата на рањим скуповима података.

Библиографија

- [1] **A. Milani, M. Grötschel, A. M. Nobili.** Integration error over very long time spans. *Celestial Mechanics*, 1988, 43, 1 - 34.
- [2] **J. E. Chambers.** A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies *MNRAS*, 1999, 304, 793 - 799.
- [3] **H. Rein, S. -F. Lui.** REBOUND: an open-source multi-purpose N-body code for collisional dynamics *Astronomy and Astrophysics*, 2012, 537, A128.

Геометрија полинома и теорема Грејса

Радош Бакић

Факултет за образовање учитеља и васпитача
Универзитет у Београду
e-mail: bakicr@gmail.com

Апстракт. У излагању ће бити приказани најважнији моменти у развоју геометрије полинома. Посебно ће бити дат осврт на теорему Грејса и биће изложено једно њено уопштење.

Кључне речи: геометрија полинома; теорема Грејса; аполарни полиноми.

Проблеми екстремних вредности у основној и средњој школи

Владимир Балтић

Математичка гимназија, ВИШЕР
e-mail: balticvladimir@gmail.com

Апстракт. У овом изузетно кратком излагању покушаћемо да представимо све значајније аспекте ове изузетно битне теме. Прво ћемо тади теоријски преглед свих техника, а затим ћемо их илустровати на мноштву такмичарских задатака, паковање на потпуне квадрате, примену тврђења која су директна последица неједнакости аритметичке и геометријске средине:

• Ако је збир позитивних реалних бројева $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S$ има сталну вредност S , онда производ $x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots \cdot x_n^{m_n}$ има највећу вредност ако је $\frac{x_1}{m_1} = \frac{x_2}{m_2} = \dots = \frac{x_n}{m_n}$, где су $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}$.

• Ако је производ $x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots \cdot x_n^{m_n} = P$, сталан, онда збир $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ има најмању вредност ако је $\frac{x_1}{m_1} = \frac{x_2}{m_2} = \dots = \frac{x_n}{m_n}$, где су $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}$.

Затим ћемо се осврнути на теме параболе $T(x_T, y_T)$ (где је $x_T = \frac{-b}{2a}$ и $y_T = f(x_T) = \frac{-D}{4a}$).

За $a > 0$ је минимум квадратне функције, тј. $f(x) \geq \frac{-D}{4a}$ за свако $x \in \mathbb{R}$ (=се достиже за $x = \frac{-b}{2a}$).

За $a < 0$ је максимум квадратне функције, тј. $f(x) \leq \frac{-D}{4a}$ за свако $x \in \mathbb{R}$, (= се достиже за $x = \frac{-b}{2a}$).

На крају ћемо се бавити применом извода за одређивање екстремних вредности.

Кључне речи: Екстремне вредности; неједнакост аритметичке и геометријске средине; теме параболе; примена извода.

Otkrivanje matematičke poruke prikazane geometrijskom figurom

Nives Baranović

*Filozofski fakultet, Split, Poljička 35
e-mail: njozic@ffst.hr*

Apstrakt. Iskustva nastavnika matematike kao i rezultati istraživanja u matematičkom obrazovanju ukazuju na mnoge teškoće s kojima se učenici suočavaju pri učenju geometrije na svim razinama obrazovanja. Jedan od uzroka mnogih teškoća jest dualnost prirode geometrijskih pojmova: apstraktnost entiteta i konkretnost vizualnih prikaza, kojima se predstavljaju (realnim ili artefaktima). Najviša razina mišljenja postiže se pri uspostavljanju interakcije i harmonije između oba aspekta korištenjem triju sustava znakova: vizualnog, jezičnog i simboličkog. Nastava geometrije trebala bi osigurati stvaranje balansa između apstraktne zahtjevnosti geometrijskih pojmova i konkretnosti oblika kojima su predstavljeni. Cilj ovog izlaganja je ukazati na specifičnosti u radu s geometrijskim figurama koje predstavljaju apstraktne ideje te na važnost poznavanja procesa vizualizacije u svrhu prijelaza sa perceptivnog čitanja „kako figura izgleda” na matematičko tumačenje „što figura predstavlja”. Također, želi se ukazati na korisnost vizualno-analitička metoda usmjerenog opažanja u svrhu razvijanja „geometrijskog oka” te otkrivanja matematičke poruke prikazane geometrijskom figurom.

Ključne reči: Geometrijski koncept, geometrijsko mišljenje, procesi vizualizacije, troslojno učenje i poučavanje.

Bibliografija

- [1] **B. Antunović-Piton, N. Baranović.** Factors Affecting Success in Solving a Stand-Alone Geometrical Problem by Students aged 14 to 15. *CEPS - Center for Educational Policy Studies, Journal*, Vol 12, 4-25, 2022.
- [2] **R. Duval.** Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142-157). Berlin: Springer, 1995.
- [3] **M. Grubić, N. Baranović.** Dudeneyjev Haberdasherov problem. *Acta mathematica Spalatensia. Series didactica*, 4, 73-87, 2021.

Goodness-of-fit and Homogeneity Tests Based on Weighted Divergence Measures

Vlad Stefan Barbu

*University of Rouen - Normandy, LMRS, France
e-mail: barbu@univ-rouen.fr*

Thomas Gkelsinis

*University of Rouen - Normandy, LMRS, France
e-mail: thomas.gkelsinis@univ-rouen.fr*

Alex Karagrigoriou

*University of the Aegean, Greece
e-mail: alex.karagrigoriou@aegean.gr*

Abstract. In this presentation we are concerned with a class of hypotheses tests for goodness of fit and homogeneity between two samples. This type of tests is constructed based on a particular type of discrepancy measures called weighted divergences. These measures allow us to focus on specific subsets of the support without, at the same time, losing the information of the others. With this method we achieve a significantly more sensitive test than the classical ones, with comparable error rates. The appropriate asymptotic theory is presented according with Monte Carlo simulations for assessing the performance of the proposed test statistics. We also give some elements for the computation of the corresponding powers. Some extensions to a Markov chain framework are also discussed.

Our presentation is mainly based on [1].

Keywords: Goodness-of-fit test; Homogeneity test; Information measures; Divergence; Weighted divergence.

References

- [1] **T. Gkelsinis, A. Karagrigoriou, V. S. Barbu.** Statistical inference based on weighted divergence measures with simulations and applications. *Statistical Papers*, 2022, 63, 1511 - 1536.
- [2] **M.L. Menéndez, J. A. Pardo, L. Pardo.** Csiszar's ϕ -divergences for testing the order in a Markov chain. *Statistical Papers*, 2001, 42, 313 - 328.

Образовни софтвер Геогобра и провера остварености исхода учења

Радослав Божић

*Учитељски факултет, Универзитет Едуконс, Сремска Каменица
Гимназија Светозар Марковић, Нови Сад
e-mail: radoslav.bozic@gmail.com*

Апстракт. Бројна истраживања су показала да образовни софтвер Геогобра доприноси бољим постигнућима ученика, у различитим областима математике. Посебно је наглашен значај вишеструких репрезентација у раду са функцијама и векторима, као и у изучавању других садржаја. Такође, употреба тродимензионалног приказа је допринела побољшању квалитета визуелизације у изучавању геометријских тела и њихових особина. Динамичка својства, која поседује овај софтвер, омогућавају анализу утицаја променљивих параметара на особине посматраних објеката. Током протеклих неколико година, образовни софтвер Геогобра је усавршаван, не само унапређивањем постојећих и креирањем нових алатки, него и прилагођавањем радног окружења потребама тестирања ученика. Последња верзија образовног софтвера Геогобра подржава рад у окружењу за тестирање, на начин да ученик свој рачунар, односно мобилни уређај, током израде задатка у Геогобра окружењу, не може користити у друге сврхе. Такође, у оквиру Геогобра платформе, развијена је могућност креирања лекција и тестова, те дељења истих путем Геогобра учионице. Овако креирани садржаји се могу делити, не само са ученицима, него и са другим наставницима, а омогућено је и праћење рада ученика, као и анализа резултата. Ове особине омогућавају успешну примену образовног софтвера Геогобра код праћења постигнућа ученика, односно провере остварености исхода учења.

Кључне речи: Геогобра; Провера знања; Исходи.

Библиографија

- [1] **R. Bozic, D. Takaci, G. Stankov.** Influence of dynamic software environment on students' achievement of learning functions with parameters. *Interactive Learning Environments*, 2021, 29(4), 655 - 669.
- [2] **F. Alessio, L. Demeio, I. Agnese.** A Formative Path in Tertiary Education through GeoGebra Supporting the Students' Learning Assessment and Awareness. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 2019, 26(4), 191 - 203.

Аналитичко решење n -димензионалног Lotka–Volterinog динамичког система

Danijela Branković

*Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73, 11120 Beograd
e-mail: danijela@etf.bg.ac.rs*

Апстракт. У овом раду је посматран тродимензионални Lotka–Volterin динамички систем и одређено је његово аналитичко решење. Користећи добијени резултат, одређено је и аналитичко решење одговарајућег n -димензионалног динамичког система.

Кључне речи: Lotka–Volterine једначине; нелинеарне диференцијалне једначине; динамички системи.

Ублажавање пристрасности неуронских мрежа обртањем градијента

Лазар Васовић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, Београд
e-mail: pd212006@alas.matf.bg.ac.rs

Апстракт. Робусност модела машинског учења огледа се у приближно једнаком успеху над разним подацима. Уколико то није случај, модел је пристрастан. Посебан проблем са пристрасношћу имају неуронске мреже, будући да су врло флексибилне и (пре)прилагодљиве подацима над којима су обучене. Као решење овог проблема, примењују се бројне опште технике регуларизације, попут случајног изостављања неурона. С друге стране, постоје специфични приступи, који могу отклонити неке конкретне изворе пристрасности. У раду је представљено обртање градијента, као пример таквог приступа. Ова техника одликује се гранањем неуронске мреже, при чему постоји заједнички део, који се затим дели на две гране – главну и супарничку. Главна грана решава конкретан проблем (нпр. класификација), док супарничка открива евентуални извор пристрасности (углавном домен инстанце, нпр. пол у случају људи). Приликом ажурирања параметара модела, заснованог на градијентној минимизацији грешке, градијент се обрће (негира) на заједничком делу супарничке гране. Овиме се ефективно отклања извор пристрасности, па је резултујући модел (представљен главном граном) робуснији. Као практични допринос рада, обртање градијента је примењено на познати скуп рецензија са сајта Амазон, у циљу предвиђања да ли је оцена производа позитивна или негативна. Добијени резултати у свим експериментима који укључују супарничку грану бољи су од оних који је не укључују.

Кључне речи: пристрасност; неуронске мреже; обртање градијента; супарничко учење.

Егзистенција и јединственост ММВ оцена параметара фамилије тропараметарских расподела на основу рекорда

Зоран Видовић

Учитељски факултет Универзитета у Београду
e-mail: zoran.vidovic@uf.bg.ac.rs

Апстракт.

Потврђена је особина јединствености ММВ оцена параметара фамилије тропараметарских екстензија Вејбулове расподеле на основу k -тих рекорда.

Кључне речи: рекорди; ММВ; јединственост.

Библиографија

- [1] **Z. Vidović.** On MLEs of the parameters of a modified Weibull distribution based on record values. *Journal of Applied Statistics*, 2019, 4(46), 715-724.
- [2] **Z. Vidović.** On maximum likelihood estimates of a proportional hazard rate model parameters based on record values. *Thermal Science*, 2022, <https://doi.org/10.2298/TSCI220823170V>.

Carleson embedding theorem for the harmonic Fock spaces

Dordije Vujadinović

University of Montenegro, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Cetinjski put b.b. 81000 Podgorica, Montenegro

e-mail: djordjijevuj@ucg.ac.me

Abstract. We first establish the pointwise estimate for the arbitrary harmonic function which belongs to the space $L^p(\mathbb{R}^n, d\mu_\alpha)$, $p > 0$, where $d\mu_\alpha(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{\alpha}}}{(\pi\alpha)^{\frac{n}{2}}} dx$, $\alpha > 0$, is the Gaussian probability measure on \mathbb{R}^n , $n > 2$. Upon on the previous result we derive certain properties of the harmonic Fock spaces \mathcal{H}_α^p and we give the sufficient and the necessary condition on a positive Borel measure μ defined on \mathbb{R}^n , $n > 2$ in order to be the Carleson type measure for the harmonic Fock space \mathcal{H}_α^p . In the context of the obtained results we conjecture the problem of characterization for the positive Toeplitz operators in Schatten class S_p , $p > 0$.

References

- [1] **M. Abramovitz, I. Stegun.** Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. *Applied Mathematics Series*. 55 (1983)
- [2] **Dj.Vujadinović.** Carleson Measures for Harmonic Fock Spaces in the Plane. *Complex Anal. Oper. Theory* 15, Article number: 72 (2021).
- [3] **Dj.Vujadinović.** Spectral asymptotic of the Newtonian potential in $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_\alpha)$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 518, Issue 1, 1 February 2023, 126657.
- [4] **K. Zhu.** Analysis on Fock Spaces. *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 263, Springer, New York 2012.
- [5] **K. Zhu.** Fock-Sobolev spaces and their Carleson measures. *Journal of Functional Analysis*, 263, 2012 2483-2506.
- [6] **G.N. Watson,** A Treatise of the Theory of Bessel Functions, 2nd edn. Cambridge University Press, Cambridge (1962)

On some coefficient problems in geometric function theory

Dragan Vukotić

Universidad Autónoma de Madrid
e-mail: dragan.vukotic@uam.es

Abstract. In this talk we survey a few open problems in geometric function theory. A typical problem of this kind consists in maximizing a certain coefficient functional (linear or non-linear) over a class of analytic functions in the unit disc. We will review certain results from the last few decades, as well as several more recent theorems. Some elementary arguments will be presented in order to make the talk more self-contained.

Keywords: Univalent functions; extremal problems; Bloch space.

References

- [1] **J.E. Brown, A. Tsao.** On the Zalcman conjecture for starlike and typically real functions. *Math. Z.*, 1986, 191, 464 - 474.
 - [2] **I.R. Kayumov, K.-J. Wirths.** Coefficients problems for Bloch functions. *Anal. Math. Physics*, 2019, 9, 1069 - 1085.
 - [3] **M.J. Martín, E.T. Sawyer, I. Uriarte-Tuero, D. Vukotić.** The Krzyż conjecture revisited. *Adv. Math.*, 2015, 273, 716 - 745.
-

Matematičke zagonetke

Dejan Vurdelja

ETŠ „Zemun”, Nade Dimić 4
e-mail: dvurdelja@sbb.rs

Apstrakt. U ovom izlaganju razmatramo sledeća četiri zadatka.

1. Rešiti po x :

$$x + \frac{x}{1+2} + \frac{x}{1+2+3} + \cdots + \frac{x}{1+2+3+\cdots+4043} = 4043.$$

2. Odrediti najmanje $y \in \mathbb{N}$ za koje postoji $x \in \mathbb{N}$ takvo da zadovoljava jednačinu $2^{13} + 2^{10} + 2^x = y^2$.

3. Odrediti sve $x, y \in \mathbb{N}$ takve da je $x, y \leq 100$, y neparan broj i $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{12}$.

4. Odrediti sve $x, y \in \mathbb{N}$ takve da je $5\frac{3}{x} \cdot y\frac{1}{2} = 19$.

Ključne reči: Diofantovske jednačine

Integral representation of separately (α, β) – harmonic functions

Jelena Gajić

*Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Banja Luka, Republic of Srpska
e-mail: jelena.gajic.mm@gmail.com*

Miodrag Mateljević

*Department of Mathematics, University of Belgrade, Serbia
e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs*

Miloš Arsenović

*Department of Mathematics, University of Belgrade, Serbia
e-mail: arsenovic@matf.bg.ac.rs*

Abstract. We define separately (α, β) – harmonic functions in the unit polydisc which satisfy a system of PDEs. Also, we obtain existence and uniqueness result for the Dirichlet problem with continuous boundary data. We develop H^p theory of separately (α, β) – harmonic functions: integral representations by measures and L^p function on distinguished boundary \mathbb{T}^n , norm and weak* convergence at \mathbb{T}^n . It is shown that slice functions, where k variables are fixed, belong to the appropriate space of separately (α, β) –harmonic functions of k variables. Our results extend earlier results for (α, β) - harmonic functions in the disc and for n - harmonic functions in \mathbb{D}^n . This is work in progress. Many additional results are obtained on the maximal functions and Fatou type theorems.

Keywords: separately (α, β) - harmonic functions; H^p spaces; polydisc.

References

- [1] **P. Ahern, J. Bruna, C. Cascante.** H^p -theory for generalized M-harmonic functions in the unit ball. *Indiana Univ. Math. J.*, 1996, 45, 103 - 135.
- [2] **A. P. Calderón, A. Zygmund.** Note on the boundary values of functions of several complex variables. *Contributions to Fourier Analysis (AM-25)*, Princeton University Press, Princeton, 1950, 145–165.
- [3] **D. Geller.** Some results in H_p theory for the Heisenberg group. *Duke Math. J.*, 1980, 47, 365 - 390.
- [4] **M. Klintborg, A. Olofsson.** A series expansion for generalized harmonic functions. *Analysis and Mathematical Physics*, 2021.
- [5] **J. Marcinkiewicz, A. Zygmund.** On the summability of double Fourier series. *Fundamenta Mathematicae* 1939, 32, 112 –132.
- [6] **W. Rudin.** Function Theory in Polydiscs. *W.A. Benjamin New-York*, 1969.
- [7] **K. R. Shrestha.** Hardy Spaces on the Polydisk. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2016, 9, 292 - 304.

Lipschitz continuity of quasiconformal mappings with L^p Laplacian, $p > n$, between the unit ball B^n and a spatial domain with $C^{1,\alpha}$ boundary

Anton Gjakaj

University of Montenegro, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Cetinjski put b.b. 81000 Podgorica,
Montenegro

e-mail: antondj@ucg.ac.me

Abstract. We prove the following. If f is a quasiconformal mapping between the unit ball B^n and a spatial domain in \mathbb{R}^n with $C^{1,\alpha}$ boundary, then f is Lipschitz continuous in B^n , provided that $\Delta f \in L^p(B^n)$, for some $p > n$. This relaxes the condition of harmonicity of the quasiconformal map in [1], while still establishing the Lipschitz continuity.

We use an iteration procedure based on two versions of Hardy-Littlewood theorem in \mathbb{R}^n . With the first one we raise the exponent of Hölder continuity obtained from Mori's theorem for quasiconformal mappings, and with the second one we deduce the boundness of f' .

This generalizes some known results for $n = 2$ obtained by Pavlović, Kalaj, Mateljević and others for quasiconformal harmonic mappings and improves some others in higher dimensional case.

Keywords: Harmonic mappings, Poisson equation, Quasiconformal mappings, Lipschitz continuity

References

- [1] **A. Gjakaj, D. Kalaj.** Quasiconformal harmonic mappings between the unit ball and a spatial domain with $C^{1,\alpha}$ boundary. *Potential Analysis*, 2022, 57, pp. 367-377.
- [2] **D. Kalaj, E. Saksman.** Quasiconformal mappings with controlled Laplacean. *Journal d'Analyse Mathématique*, 2019, 137, No. 1, pp. 251-268.
- [3] **M. Pavlović.** Lipschitz conditions on the modulus of a harmonic function. *Revista Matemática Iberoamericana*, 2007, 23, pp. 831-845.

On calculating sums of slowly convergent series

Zora Golubović

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
e-mail: z.golubovic@yahoo.com

Abstract. Calculation of the sum of slowly convergent series is done by using the method of Laplace transform and other simple methods from classical and complex analysis. In this way, summation of series is reduced to problem of integration. Explicit integral formulae for numerical and Fourier series and detailed solutions of appropriate examples were given and, together with this results, summation formulae of Euler-Maclaurin, Abel-Plana and Poisson were considered.

Keywords: Laplace transform, series, summation

References

- [1] **G. V. Milovanovic** On summation/integration methods for slowly convergent series. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, (2016, 61, 359 - 375.
 - [2] **G. V. Milovanovic** Methods for the computation of slowly convergent series and finite sums based on Gauss-Christoffel quadratures. *Jaen J. Approx.*, (2014, 6, 37 - 68.
 - [3] **Harold T. Davis** The summation of series, *Dover Books on Mathematics*, 2015.
-

Atomic decompositions, two stars theorems, and distances for the Bourgain–Brezis–Mironescu space

Luigi D’Onofrio

Parthenope University
e-mail: luigi.donofrio@uniparthenope.it

Abstract. Given a Banach space E with a supremum-type norm induced by a collection of operators, we prove that E is a dual space and provide an atomic decomposition of its predual. We apply this result to the function space \mathcal{B} introduced recently by Bourgain, Brezis, and Mironescu. This yields an atomic decomposition of its predual. This is a joint work with Luigi Greco, Karl–Mikael Perfekt, Carlo Sbordone and Roberta Schiattarella.

Keywords: Functional Analysis; Banach Function spaces ; Atomic decomposition.

References

- [1] **Luigi D’Onofrio, Luigi Greco, Karl–Mikael Perfekt, Carlo Sbordone and Roberta Schiattarella**, Atomic decompositions, two stars theorems, and distances for the Bourgain–Brezis–Mironescu space and other big spaces. *Ann. Inst. H. Poinc. Anal. Non Lin.*, 2020, 37, no. 3, pp. 653–661

Bridging Statistics with Geometry and Mechanics

Vladimir Dragović

The University of Texas at Dallas/MISANU
e-mail: vladad@turing.mi.sanu.ac.rs

Abstract. We emphasize the importance of bridges between statistics, mechanics, and geometry. In particular, we developed and employed links between pencils of quadrics, moments of inertia, and linear and orthogonal regressions. For a given system of points in R^k representing a sample of a full rank, we recently constructed a pencil of confocal quadrics which provided a useful geometric tool to study the data. This is based on a joint work with Borislav Gajić.

References

- [1] **Dragović, V. and Gajić, B.** Orthogonal and Linear Regressions and Pencils of Confocal Quadrics, *preprint*, arXiv: 2209.01679, 2022.
-

Gyroscopic Chaplygin Systems

Vladimir Dragović

The University of Texas at Dallas/MISANU
e-mail: vladad@turing.mi.sanu.ac.rs

Borislav Gajić

Mathematical Institute SANU, Serbia
e-mail: gajab@turing.mi.sanu.ac.rs

Božidar Jovanović

Mathematical Institute SANU, Serbia
e-mail: bozaj@turing.mi.sanu.ac.rs

Abstract. We introduce and study the Chaplygin systems with gyroscopic forces. This natural class of nonholonomic systems has not been treated before. The existence of an invariant measure and the problem of Hamiltonization are studied, both within the Lagrangian and the almost-Hamiltonian framework. In addition, we introduce problems of rolling of a ball with the gyroscope without slipping and twisting over a plane and over a sphere in R^n as examples of gyroscopic $SO(n)$ -Chaplygin systems. In particular, we introduce the generalized Demchenko case in R^n , where the inertia operator of the system is proportional to the identity operator. The reduced systems are automatically Hamiltonian and represent the magnetic geodesic flows on the spheres S^{n-1} endowed with the round-sphere metric, under the influence of a homogeneous magnetic field.

Дедуктивни систем за верификацију (не)изоморфности графова

Иван Дрецун

Математички факултет у Београду
e-mail: ivan_drecun@matf.bg.ac.rs

Милан Банковић

Математички факултет у Београду
e-mail: milan@matf.bg.ac.rs

Филип Марић

Математички факултет у Београду
e-mail: filip@matf.bg.ac.rs

Апстракт. Проблем испитивања изоморфности графова је један од најчешће разматраних проблема у рачунарству, пре свега због великог броја различитих примена. Током претходних деценија развијен је велики број алгоритама за решавање овог проблема. Једна од најзначајнијих класа ових алгоритама су алгоритми засновани на канонском означавању чворова графа, при чему су два графа изоморфна ако и само ако имају исто канонско означавање. У последње време, постоји све већа потреба да се ови алгоритми користе у оквиру интерактивних доказивача теорема. Како би то било могуће, потребно је или да се формално докаже исправност конкретне имплементације датог алгорита у оквиру интерактивног доказивача теорема (што је обично јако тешко), или да се сам алгоритам прошири тако да генерише *сертификате* – доказе који потврђују исправност добијеног резултата, а који се могу независно верификовати помоћу посебног алата чија је имплементација знатно једноставнија и лакше јој се може веровати. У овом излагању разматрамо овај други приступ, примењен на алгоритам Мекеја и Пиперна [1]. Биће приказан дедуктивни систем у оквиру кога се може доказати коректност канонске форме датог графа, као и на који начин се алгоритам Мекеја и Пиперна може проширити тако да генерише доказ за дати граф. На крају ће бити описан и алгоритам провере исправности добијених доказа.

Кључне речи: изоморфизам графова; канонско означавање; сертификати; интерактивно доказивање теорема

Библиографија

- [1] **Brendan D. McKay and Adolfo Piperno.** Practical graph isomorphism, II. *Journal of Symbolic Computation*, 60:94–112, 2014.

On special values of zeta functions associated to orders in quadratic number fields

Goran Đanković

University of Belgrade, Department of Mathematics
e-mail: djankovic@matf.bg.ac.rs

Abstract. The Kronecker limit formulas have been studied intensively in the context of class group characters and ideal classes of rings of integers in quadratic number fields. In this talk we discuss and outline some generalizations in the context of orders in quadratic fields. In particular, we are interested in special values of associated L -functions.

Keywords: Kronecker's limit formula; Eisenstein series; quadratic orders; ideal classes.

Полиномијална ентропија пресликавања индукованих хомеоморфизмима круга и интервала

Маша Ђорић

Математички институт САНУ, Кнез Михаилова 36

e-mail: masha@mi.sanu.ac.rs

Јелена Катић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16

e-mail: jelenak@matf.bg.ac.rs

Апстракт. Нека је X компактан метрички простор и $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање. Можемо дефинисати хиперпростор 2^X , као простор свих непразних затворених подскупова од X . Ако је X још и повезан, онда са $C(X)$ означавамо простор свих затворених повезаних подскупова од X . Уз ова два хиперпростора, посматрамо још и X^{*k} , који представља простор свих подскупова са највише k елемената. На сваком од ова три простора природно је дефинисано (непрекидно) индуковано пресликавање које произвољан скуп A из домена пресликава у $\{f(x) \mid x \in A\}$. Питање које се природно јавља је какве везе постоје између индивидуалне динамике на (X, f) и колективне динамике на хиперпростору.

Ми разматрамо случај када је X интервал или круг, а пресликавање f хомеоморфизам са коначним нелутајућим скупом. Показано је да је тополошка ентропија индукованог пресликавања на овим хиперпросторима једнака нули, па у том случају има смисла рачунати полиномијалну ентропију. Израчунали смо да је под наведеним претпоставкама $h_{pol}(C(f)) = 2$, $h_{pol}(f^{*k}) = k$ и $h_{pol}(2^f) = \infty$.

Кључне речи: полиномијална ентропија; хиперпростор; индуковано пресликавање.

Библиографија

- [1] M. Đorić, J. Katić Polynomial entropy of induced maps of circle and interval homeomorphisms *arXiv:2210.09751*, 2022.
- [2] L. Hauseux and F. Le Roux Entropie polynomiale des homéomorphismes de Brouwer *Annales Henri Lebesgue*, 2019, 2, 39 - 57.
- [3] A. Arbieto, J. Bohorquez Shadowing, topological entropy and recurrence of induced Morse-Smale diffeomorphisms *arXiv:2203.13356*, 2022.

Yamabe solitons on hypersurfaces of nearly Kähler manifolds

Miloš Đorić

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
e-mail: milosdj@matf.bg.ac.rs

Mirjana Đorić

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
e-mail: mdjoric@matf.bg.ac.rs

Abstract. The objective of the different geometric evolution equations is to improve a given initial metric by considering a flow associated to the geometric object under consideration. The Ricci, Yamabe, and mean curvature flows are examples extensively studied in the literature (see [1],[2]). Under suitable conditions, the Ricci flow evolves an initial metric to an Einstein metric while the Yamabe flow evolves an initial metric to a new one with constant scalar curvature within the same conformal class. There are however certain metrics which, instead of evolving by the flow, remain invariant up to scaling and diffeomorphisms - they are called self-similar solutions of the flow.

R. Hamilton introduced the notions of Ricci and Yamabe flows (see [3]), in which the metric on a Riemannian manifold is deformed by evolving according to flow equations

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2\text{Ric}(t), \quad \frac{\partial}{\partial t}g(t) = -\rho(t)g(t),$$

where $\text{Ric}(t)$ is the Ricci tensor and $\rho(t)$ is the scalar curvature of the metric $g(t)$. In dimension $n = 2$, the Yamabe flow is equivalent to the Ricci flow. However, in dimension $n > 2$ the Yamabe and Ricci flows do not agree, since the former one preserves the conformal class of the metric, while the latter one does not in general. Ricci and Yamabe solitons correspond to self-similar solutions of the Ricci and Yamabe flow.

A Ricci soliton is a Riemannian manifold (M, g) which admits a smooth vector field V (which is called a soliton vector field) on M such that

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_Vg + \text{Ric} = \lambda g,$$

where \mathcal{L}_V denotes the Lie derivative in the direction of V , Ric is the Ricci tensor and λ is a real number. Ricci solitons are a natural generalization of Einstein manifolds.

A Yamabe soliton is a Riemannian manifold (M, g) which admits a smooth vector field V such that

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_Vg = (\rho - \lambda)g,$$

where ρ is the scalar curvature of the metric g and λ is a real number.

In the joint work with Mirjana Đorić, we give the necessary and sufficient conditions for a hypersurface of arbitrary nearly Kähler manifold, with unit normal vector field ξ , to admit Yamabe soliton with Reeb vector field $U = -J\xi$ as a soliton vector field V . Furthermore, we obtain the complete classification of such solitons when the ambient manifold is a non-flat complex space form, sphere \mathbb{S}^6 or a product of two spheres $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$.

Keywords: Yamabe soliton; nearly Kähler manifold; complex space form, Reeb vector field.

References

- [1] **B.-Y. Chen, S. Deshmukh.** Yamabe and quasi-Yamabe solitons on Euclidean submanifolds. *Mediterr. J. Math.*, 15 (5), 194, 2018.
- [2] **J. T. Cho, M. Kimura.** Ricci solitons and real hypersurfaces in a complex space form. *Tohoku Math. J.* 61 (2) 2009, 205 - 212.

- [3] **R. S. Hamilton.** The Ricci flow on surfaces. *Math. Gen. Relativ. Santa Cruz, CA, Contemp. Math.*, 71, 1986, 237 - 262.
-

Примена нумеричких интегратора у астрономији

Владимир Ђошовић

Математички факултет, Универзитет у Београду
e-mail: vladimir_djosovic@matf.bg.ac.rs

Апстракт. Услед ограничености временом, често нисмо у могућности да самим посматрањима дођемо до закључака везаних за динамику небеских тела. Из тог разлога је неминовно коришћење рачунарских ресурса у сврху предвиђања будућег или реконструкцију претходног кретања небеских објеката.

Током овог излагања биће представљени неки од најчешће коришћених нумеричких интегратора за динамику тела, како у Сунчевом тако и у другим планетарним системима. Како је листа слободних параметара за поједине објекте и/или планетарне системе, постао јако велики, да би се испитао што шири опсег параметара потребно је извршити велики број сличних симулација. Због ограничености броја језгара на ЦПУ у последње време су почели да се развијају и интегратори који раде на ГПУ, и који су испоставило се веома успешни у решавању оваквих проблема без гупитка на прецизности.

Кључне речи: небеска механика, нумеричке интеграције, планетарни системи

Библиографија

- [1] **A. Milani, M. Grötschel, A. M. Nobili.** Integration error over very long time spans. *Celestial Mechanics*, 1988, 43, 1 - 34.
- [2] **J. E. Chambers.** A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies *MNRAS*, 1999, 304, 793 - 799.
- [3] **H. Rein, S. -F. Liu.** REBOUND: an open-source multi-purpose N-body code for collisional dynamics *Astronomy and Astrophysics*, 2012, 537, A128.

Тестови нормалности на основу нове карактеризације

Виктор Ејсмонт

*Универзитет у Вроцлаву, одсек за телекомуникације и телеинформатику
e-mail: wiktorejsmont@gmail.com*

Бојана Милошевић

*Математички факултет, Београд
e-mail: bojana@matf.bg.ac.rs*

Марко Обрадовић

*Математички факултет, Београд
e-mail: marcone@matf.bg.ac.rs*

Апстракт. На основу нове карактеризације вишедимензионе нормалне расподеле конструисани су неки тестови нормалности. Посебан акценат је на нултој хипотези вишедимензионе нормалне расподеле с дијагоналном коваријационом матрицом. Испитана су асимптоцка својства тестова, а такође је показано да су тестови конкурентни у поређењу с другим тестовима путем емпиријских моћи.

Кључне речи: карактеристична функција; нормална расподела; карактеризација

Библиографија

- [1] **W. Ejsmont, B. Milošević, and M. Obradović.** A test for normality and independence based on characteristic function. *Statistical Papers*, pages 1-29, 2022. doi:10.1007/s00362-022-01365-1. in press.

Orbit counting for inner functions

Oleg Ivrii

Tel Aviv University, Ramat Aviv, Israel
e-mail: ivrii@tauex.tau.ac.il

Mariusz Urbański

University of North Texas, Denton, TX, USA
e-mail: Mariusz.Urbanski@unt.edu

Abstract. Loosely speaking, an inner function F is a holomorphic self-map of the unit disk \mathbb{D} which extends to a measure-theoretic dynamical system on the unit circle. Let F be an inner function with derivative in the Nevanlinna class and an attracting fixed point at the origin. For a point $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, let

$$\mathcal{N}(z, R) = \#\{w \in B(0, R) : F^{\circ n}(w) = z \text{ for some } n \geq 0\}$$

denote the number of repeated pre-images of z inside a ball of hyperbolic radius R . In this talk, I will show an averaged form of the asymptotic formula

$$\mathcal{N}(z, R) \sim \frac{1}{2} \log \frac{1}{|z|} \cdot \frac{e^R}{\int_{\partial\mathbb{D}} \log |F'| dm}, \quad \text{as } R \rightarrow \infty.$$

The proof follows an argument of McMullen from 2008 which involves geodesics flows on Riemann surface laminations. (According to Sullivan's dictionary, these are analogous to unit tangent bundles of Riemann surfaces.) Our key insight is that backward iteration with respect to an inner function is essentially linear along almost every inverse orbit.

Keywords: inner function; orbit counting; Riemann surface lamination; geodesic flow.

Jedan zanimljiv pristup za dobijanje uslova ekstremuma u matematičkom programiranju uz dodatne pretpostavke regularnosti

Aleksandar Jović

Matematički fakultet
e-mail: ajovic@matf.bg.ac.rs

Apstrakt. U ovom radu su date neke teoreme alternative, kao i njihove primene za izvodjenje uslova ekstremuma u matematičkom programiranju. Ovde je dat jedan geometrijski pristup za izvodjenje uslova ekstremuma Fric-Džonovog i Karuš-Kun-Takerovog tipa, korišćenjem Gordanove teoreme alternative. Ovaj pristup je ujedno bio motivacija za rešavanje nekih glatkih problema optimizacije sa neprekidnim vremenom u funkcionalnim prostorima.

Inequalities for generalized derivations of operator monotone functions in norm ideals of compact operators

Danko R. Jocić

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics
e-mail: jocić@matf.bg.ac.rs*

Stefan U. Milošević

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics
e-mail: stefanm@matf.bg.ac.rs*

Abstract. For $A, B, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ and for certain functions φ defined on a region containing both spectra of A and B , problem of comparing generalized function derivations $\varphi(A)X - X\varphi(B)$ in terms of $AX - XB$ in various unitarily invariant norms represents one of main objectives in many areas of operator theory. Specially, in this talk, we will present that for A, B normal and strictly accretive, with X being such that $AX - XB \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ then for every pick function φ holds

$$\|\varphi(A)X - X\varphi(B)\|_\Phi \leq \left\| \sqrt{\varphi' \left(\frac{A^* + A}{2} \right)} (AX - XB) \sqrt{\varphi' \left(\frac{A^* + A}{2} \right)} \right\|_\Phi.$$

Also, generalizations where at least one of A and B is norm will be presented in certain norms.

Keywords: Derivation inequalities; Operator monotone functions; Q and Q^* norms;

References

- [1] **Danko R. Jocić, Milan Lazarević, Stefan Milošević.** Inequalities for generalized derivations of operator monotone functions in norm ideals of compact operators, *Linear Algebra and its Applications*, 2020, 586, 43-63.

Noncommutative Schwarz lemma and Pick-Julia theorems in Schatten-von Neumann ideals

Danko R. Jocić

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Studentski trg 16, P.O. box 550, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: jocić@matf.bg.ac.rs*

Abstract. If A and B are strict contractions on a Hilbert space \mathcal{H} and the derivation $AX - XB$ is a trace class ($\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$) operator for some bounded operator $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ acting on a Hilbert space \mathcal{H} , then for all holomorphic function f , which maps the open unit disc $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ into itself, then $f(A)X - Xf(B) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ and

$$\|\sqrt{I - A^*A}(f(A)X - Xf(B))\sqrt{I - BB^*}\|_1 \leq \|\sqrt{I - f(A)^*f(A)}(AX - XB)\sqrt{I - f(B)f(B)^*}\|_1.$$

If $AX - XB$ is in a Hilbert-Schmidt class $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$, then $f(A)X - Xf(B) \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ as well, and it satisfies

$$\|f(A)X - Xf(B) - A(f(A)X - Xf(B))B^*\|_2 \leq \|AX - XB - f(A)(AX - XB)f(B)^*\|_2.$$

Other variants of some new Pick-Julia type norm and operator inequalities are also obtained, they both complement known Pick-Julia theorems for operators, obtained by Ky Fan and Ando, and they also extend those theorems to the setting of norms ideals of compact operators.

Keywords: Schatten-von Neumann ideals; inner product type transformers

References

- [1] **T. Ando, K. Fan**, Pick-Julia theorems for operators, *Math. Z.* **168** (1979) 23–34.
- [2] **D. R. Jocić**, Cauchy-Schwarz norm inequalities for weak*-integrals of operator valued functions, *J. Funct. Anal.* **218** (2005), 318–346.
- [3] **D. R. Jocić**, Noncommutative Schwarz lemma and Pick-Julia Theorems for Generalized Derivations in Norm Ideals of Compact Operators, *Complex Analysis and Operator Theory (2022)* **16:111**, <https://doi.org/10.1007/s11785-022-01287-8>
- [4] **K. Fan**, Analytic functions of a proper contraction, *Math. Z.* **100** (1978) 275–290.
- [5] **K. Fan**, Julia's lemma for operators, *Math. Ann.* **239** (1979) 241–245.
- [6] **K. Fan**, Sharpened form of inequality of von Neumann, *Math. Z.* **124** (1987) 3–17.
- [7] **K. Fan**, Proper contractions and dissipative operators, *Linear Alg. Appl.* **168** (1979) 23–34.

Gaussian curvature conjecture for minimal graphs

David Kalaj

e-mail: davidkalaj@gmail.com

Petar Melentijević

University of Belgrade, Department of Mathematics

e-mail: petarmel@matf.bg.ac.rs

Abstract. In this paper we solve the longstanding Gaussian curvature conjecture of a minimal graph S over the unit disk. This conjecture states the following. For any minimal graph lying above the entire unit disk, the Gauss curvature at the point above the origin satisfies the sharp inequality $|\mathcal{K}| < \pi^2/2$. The conjecture is first reduced to the estimation of the Gaussian curvature of certain Scherk type minimal surfaces over some bicentric quadrilaterals inscribed in the unit disk containing the origin. Then we make a sharp estimate of the Gaussian curvature of those minimal surfaces over those bicentric quadrilaterals at the point above the zero.

Keywords: Conformal minimal surface, minimal graph, curvature.

L^p -theory for Cauchy-transform on the unit disk

David Kalaj

e-mail: davidkalaj@gmail.com

Petar Melentijević

University of Belgrade, Department of Mathematics

e-mail: petarmel@matf.bg.ac.rs

Jian-Feng Zhu

Huaqiao University, Quanzhou 362021, People's Republic of China

e-mail: flandy@hqu.edu.cn

Abstract. Let \mathbb{D} be the unit disk and $\varphi \in L^p(\mathbb{D}; dA)$, where $1 \leq p \leq \infty$. For $z \in \mathbb{D}$, the Cauchy-transform on \mathbb{D} , denote by \mathcal{P} , is defined as follows:

$$\mathcal{P}[\varphi](z) = - \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{\varphi(w)}{w-z} + \frac{\overline{z\varphi(w)}}{1-\bar{w}z} \right) dA(w).$$

In this paper, by using Hardy's type inequalities and Bessel functions, we show that $\|\mathcal{P}\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \alpha \approx 1.086$, where α is a solution to the equation $2J_0(2/\alpha) - \alpha J_1(2/\alpha) = 0$, and J_0, J_1 are Bessel functions. Moreover, for $p > 2$, we also prove that $\|\mathcal{P}\|_{L^p \rightarrow L^\infty} = 2(\Gamma(2-q)/\Gamma^2(2-\frac{q}{2}))^{1/q}$ where $q = p/(p-1)$ is the conjugate exponent of p , and Γ is the Gamma function.

Keywords: Cauchy transformation; Beurling transformation; Bergman projection; Hilbert norm; Bessel function.

References

- [1] **J. Anderson, A. Hinkkanen.** The Cauchy transform on bounded domains. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1989, 107, 179 - 185.
- [2] **A. Baranov, H. Hedenmalm.** Boundary properties of Green functions in the plane. *Duke Math. J.*, 2008, 145, 1 - 24.
- [3] **D. Kalaj.** Cauchy transform and Poisson's equation. *Adv. Math.*, 2012, 231, 213 - 242.
- [4] **D. Kalaj, P. Melentijević, J-F. Zhu** L^p - theory for Cauchy transform on the unit disk, *Journal of Functional Analysis*, 2022.

Uvod u BCI/BCK-algebre sa primerima

Nina Konjikušić

*Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73, 11 000 Beograd
e-mail: kn213469m@student.etf.bg.ac.rs*

Ivana Jovović

*Elektrotehnički fakultet Univerzitet u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73, 11 000 Beograd
e-mail: ivana@etf.rs*

Apstrakt. U ovom radu biće dat kratak uvod u teoriju BCI/BCK-algebri. Biće date definicije i osnovne teoreme BCI/BCK-algebri koje su od pomoći za formiranje Python programa za izračunavanje broja neizomornih BCI/BCK-algebri malog reda.

Ključne reči: BCI-algebra; BCK-algebra; Python.

O bifurkaciji optimalno oblikovanog štapa sa smicanjem

Enes Kačapor

*Državni univerzitet u Novom Pazaru, Vuka Karadžića 9, Novi Pazar, Srbija
e-mail: ekacapor@np.ac.rs*

Apstrakt. Razmatramo problem određivanja optimalnog oblika štapa, pri čemu u razmatranje uvodimo smicanje. Koristimo Pontrjaginov princip maksimuma, odakle dobijamo prve integrale, koje zatim koristimo za numeričku integraciju odgovarajućeg sistema jednačina. Pokazujemo da optimalno oblikovan štap ima superkritičnu vilastu bifurkaciju pri propisanom opterećenju.

Ključne reči: Pontrjaginov princip; bifurkacija; optimalni oblik.

Bibliografija

- [1] **J. B. Keller.** The shape of the strongest column. *Arch. Ratio. Mech. Anal.*, 1960, 5, 275 - 285.
- [2] **T. M. Atanackovic.** Stability Theory of Elastic Rods. *World Scientific, Singapore*, 1997.
- [3] **H. Kielhofer.** Bifurcation Theory. An Introduction with Applications to PDEs. *Springer-Verlag, New York*, 2004.

A Khavinson Type Conjecture for Hyperbolic Harmonic Functions on the Unit Ball

Adel Khalfallah

*King Fahd University of Petroleum and Minerals, Department of Mathematics and Statistics, Dhahran, Kingdom of Saudi Arabia
e-mail: adel.khalfallah@gmail.com*

Abstract. In this talk, we prove a Khavinson type conjecture for hyperbolic harmonic functions on the unit ball. The Khavinson conjecture for harmonic functions states that, for bounded harmonic functions on the unit ball of R^n , the sharp constants in the estimates for their radial derivatives and for their gradients coincide.

On equality of matrix distributions in the space of positive semi-definite random matrices

Žikica Lukić

*PhD student at Faculty of Mathematics University of Belgrade
Studentski trg 16
11000 Belgrade, Serbia
e-mail: zikicamaster@gmail.com*

Bojana Milošević

*Faculty of Mathematics University of Belgrade
Studentski trg 16
11000 Belgrade, Serbia
e-mail: bojana@matf.bg.ac.rs*

Abstract. Matrix distributions have grown in popularity over the years due to multiple novel applications, mainly in radiology, computer vision and the analysis of geospatial data [1]. Matrix distributions capture the attention of the wide scientific community, but the results in the field of model specification testing are still sparse. The central focus of this talk will be a novel two-sample test of equality of two matrix distributions in the space of positive semi-definite random matrices. The test is derived as an integral difference of the empirical Hankel transforms with respect to a Wishart measure [2]. The empirical properties of the novel test are derived using Monte Carlo simulations.

Keywords: 3-5 keywords; matrix distributions; covariance matrices; Hankel transform; two-sample tests.

References

- [1] **Thompson, G. Z, Maitra, R, Meeker, W. Q, Bastawros, A. F.** Classification With the Matrix-Variate-t Distribution. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 2020, 29:3, 668-674.
- [2] **Hadjicosta E, Richards D.** Integral transform methods in goodness-of-fit testing, II: the Wishart distributions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 2020, 72(6):1317-70.

Finansijska pismenost u nastavi matematike

Milena Marić

*Deveta gimnazija "Mihailo Petrović Alas", Novi Beograd
e-mail: milena.maric@deveta.edu.rs*

Miroslav Marić

*Matematički fakultet, Beograd
e-mail: maricm@matf.bg.ac.rs*

Apstrakt. Finansijska pismenost je skup znanja i veština potrebnih za efikasno upravljanje finansijskim resursima. Istraživanja pokazuju da će mladi sve ranije upravljati svojim finansijskim resursima u budućnosti kao i da postoji veza između finansijske pismenosti i pripadanja određenoj socio - ekonomskoj grupi: oni koji imaju povoljnije uslove za život, obrazovanije roditelje, više podrške pri obrazovanju, imaju i viši nivo finansijske pismenosti. Imajući ovo u vidu, potrebno je pružiti istu mogućnost sticanja znanja svim učenicima iz ove oblasti. Činjenica da postoji skup zadataka iz finansijske pismenosti u okviru PISA testiranja dodatno govori i velikom značaju ove kompetencije i ukazuje na to da je potrebno razvijati je kod naših učenika.

U okviru ovog rada biće identifikovani delovi plana nastave i učenja matematike u gimnazijama u okviru kojih je moguće, kroz odgovarajuće zadatke, razviti i unaprediti finansijsku pismenost kod učenika.

Ključne reči: finansijska pismenost; PISA testiranje; nastava matematike.

Bibliografija

- [1] **OECD** PISA 2018 Released Field Trial and Main Survey New Reading Items *Operation Research*, 2018
- [2] **OECD** PISA financial literacy questions and answers, 2017.
- [3] **A. Lusardi** Financial literacy and the need for financial education: evidence and implications, 2019, Swiss Journal of Economics and Statistics

Symplectic circle actions on manifolds with a contact type boundary

Aleksandra Marinković

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade
e-mail: aleks@matf.bg.ac.rs*

Klaus Niederkrüger

*Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1
e-mail: niederkruger@math.univ-lyon1.fr*

Abstract. In this article, we consider group actions on symplectic manifolds that have a (convex) contact type boundary. The most natural examples from classical mechanics are cotangent bundles with their natural actions induced by an action on the base manifold. We show that many of the key ideas of Morse-Bott theory, used for closed symplectic manifolds ([1], [2]), could also be applied. Our first main result is that any symplectic group action on a symplectic manifold with a contact type boundary is always Hamiltonian. We further show several results about the topology of the symplectic manifold. In particular, we show that the contact type boundary is connected if the dimension of the symplectic manifold is 4 or, if the dimension of the group acting is at least 2. The question of disconnected contact type boundary is highly non-trivial, as addressed in [3]. We also show that after attaching cylindrical ends, a level set of the Hamiltonian of a circle action is either empty or connected. This generalizes the well known result of Atiyah [1] on connectedness of the level sets in the closed case. We concentrate mostly on circle actions, but we believe that with our methods many of the classical results can be generalized from closed symplectic manifolds to symplectic manifolds with a contact type boundary.

Keywords: symplectic manifold; contact type boundary; Hamiltonian action.

References

- [1] **M. F. Atiyah.** Convexity and commuting Hamiltonians. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 1982, 14, 1 - 15.
- [2] **V. Guillemin, S. Sternberg.** Convexity properties of the moment mapping. *Inventiones mathematicae*, 1982, 67, 491 - 513.
- [3] **D. McDuff.** Symplectic manifolds with contact type boundaries. *Inventiones mathematicae*, 1991, 103, 651 - 671.

On Harmonic Functions on Convex Polyhedron Domains

Marijan Marković

University of Montenegro, Džordža Vašingtona bb, 81000 Podgorica
e-mail: marijanmmarkovic@gmail.com

Abstract. Our result concerns harmonic real-valued functions on a convex polyhedron domain $\Pi \subseteq \mathbb{R}^n$. The set of points on edges of Π is denoted by E . Let the outward normal of $\partial\Pi$ be denoted by \mathbf{n} (which is defined for every $\zeta \in \partial\Pi \setminus E$).

The result we state below is mainly motivated by the Pavlović paper [3] and the Dyakonov results [1] (see also [2] for different proofs).

We prove the following: Let U be a real-valued harmonic function in Π and continuous on $\bar{\Pi}$. There exists a number $\alpha(\Pi) \in (0, 1)$ such that for $\alpha \in (0, \alpha(\Pi))$ the next three conditions are equivalent:

a) there exists a constant C_1 such that

$$|U(x) - U(y)| \leq C_1|x - y|^\alpha, \quad x, y \in \bar{\Pi},$$

i.e., U belongs to the Lipschitz space $\Lambda_\alpha(\bar{\Pi})$;

b) there exists a constant C_2 such that

$$||U(\zeta) - U(\eta)|| \leq C_2|\zeta - \eta|^\alpha, \quad \zeta, \eta \in \partial\Pi,$$

i.e., $|U|$ belongs to $\Lambda_\alpha(\partial\Pi)$;

c) there exists a constant C_3 such that

$$||U(\zeta) - U(\zeta - r\mathbf{n})|| \leq C_3r^\alpha, \quad \zeta \in \partial\Pi, r > 0$$

(here $r = r(\zeta) > 0$ is sufficiently small such that $\zeta - r\mathbf{n} \in \Pi$).

Keywords: harmonic functions; modulus of continuity; polyhedron domains; Lipschitz-type spaces.

References

- [1] **K.M. Dyakonov.** Equivalent norms on Lipschitz-type spaces of holomorphic functions. *Acta Mathematica*, 1997, 178, 143 - 167.
- [2] **M. Pavlović.** On Dyakonov's paper "Equivalent norms on Lipschitz-type spaces of holomorphic functions". *Acta Mathematica*, 1999, 183, 141 - 143.
- [3] **M. Pavlović.** Lipschitz conditions on the modulus of a harmonic function. *Revista Mat. Iberoamericana*, 2007, 23, 831 - 845.

A method for generating synthetic orbits of interstellar objects in the Solar system

Dušan Marčeta

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Studentski trg 16, 11158 Belgrade
e-mail: dmarceta@matf.bg.ac.rs*

Abstract. The discovery of the first two macroscopic interstellar objects (ISOs) passing through the Solar System has opened entirely new perspectives in planetary science. The exploration of these objects offers qualitatively new insight into the processes related to the origin, structure and evolution of planetary systems throughout the Galaxy. However, despite their scientific importance, there is still no comprehensive orbital model of ISOs in the Solar System and computationally efficient algorithm for generating their synthetic representations. The currently available method for generating synthetic populations of ISOs cannot fully take into account important phenomena, such as gravitational focusing and the shielding effect of the Sun. On the other hand, it is also computationally far too demanding to be used for systematic exploration of this population. A new method for determining probability distributions of the orbital elements of ISOs is presented, as well as a computationally efficient algorithm for sampling their synthetic orbits from these distributions. The developed method, based on multivariate inverse transform sampling, is several orders of magnitudes more efficient than the available method.

Keywords: Interstellar objects; Synthetic orbits; Multivariate inverse transform sampling.

Boundary behaviour of partial derivatives for solutions to certain Laplacian-gradient inequalities and spatial QC maps

Miodrag Mateljević

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics
Serbian Academy of Sciences and Arts
e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs*

Abstract. The subject of our study are quasiconformal mappings in the plane and space between smooth domains which satisfy a inequality which we call the Laplacian-gradient inequality (in the literature it was also called Poisson's differential inequality). As an application, we get some results which we can considered as spatial versions of Kellogg's theorem. We also outline some results of this type for harmonic maps and maps which satisfy PDE of second order.

On Lipschitz continuity and smoothness up to the boundary of solutions of hyperbolic Poisson's equation

Miodrag Mateljević

Serbian Academy of Science and Arts, Kneza Mihaila 35, Belgrade, Serbia
e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs

Nikola Mutavdžić

Mathematical institute SANU, Kneza Mihaila 36, Belgrade, Serbia
e-mail: nikola.math@gmail.com

Abstract. We solve the Dirichlet problem $u|_{\mathbb{B}^n} = \varphi$, for hyperbolic Poisson's equation $\Delta_h u = \mu$ where $\varphi \in L_1(\partial\mathbb{B}^n)$ and μ is a measure that satisfies a growth condition.

Next we present a short proof for Lipschitz continuity of solutions of certain hyperbolic Poisson's equations, previously established at [2].

In addition, we investigate some alternative assumptions on hyperbolic Laplacian, which are connected with Riesz's potential. Also, local Hölder continuity is proved for solution of certain hyperbolic Poisson's equations.

We show that, if u is hyperbolic harmonic in the upper half-space, then $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y) \rightarrow 0, y \rightarrow 0^+$, when boundary function f of the functions u is differentiable at the boundary point x_0 . As a corollary, we show $C^1(\overline{\mathbb{H}^n})$ smoothness of a hyperbolic harmonic function, which is reproduced from the $C_c^1(\mathbb{R}^{n-1})$ boundary values.

Keywords: Lipschitz continuity; Hyperbolic harmonic function; Boundary behavior.

References

- [1] M. Mateljević. Boundary Behaviour of Partial Derivatives for Solutions to Certain Laplacian-Gradient Inequalities and Spatial QC Maps. *Operator Theory and Harmonic Analysis, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 357, 393–418 (2021).
- [2] J. Chen, M. Huang, A. Rasila, X. Wang On Lipschitz continuity of solutions of hyperbolic Poisson's equation. *Calc. Var.*, 57:13 (2018), <https://doi.org/10.1007/s00526-017-1290-x>.
- [3] M. Mateljević, N. Mutavdžić. The Boundary Schwarz Lemma for Harmonic and Pluriharmonic Mappings and Some Generalizations. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 45, 3177–3195 (2022). <https://doi.org/10.1007/s40840-022-01371-4>.

Površina i zapremina - neki interesantni fenomeni

Miodrag Mateljević

*Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet
Srpska akademija nauka i umetnosti
e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs*

Marek Svetlik

*Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet
e-mail: svetlik@matf.bg.ac.rs*

Апстракт. У овом излагању разматраћемо појмове површина фигура у равни и површи у простору, као и запремина тела у простору. Посебно ћемо обрадити површину mnogougla и круга, као и површину и запремину валјка, купе, лопте и torusa. Видећемо које се од формула за површине и запремине могу извести елементарно, а за које то није могуће учинити. Указаћемо и на неке интересантне феномене који се могу уочити приликом извођења одговарајућих формула. Формулисаћемо изопериметријску неједнакост. Коначно, показаћемо и да постоји „тело” које има коначну запремину и бесконачну површину.

Кључне речи: Површина; запремина; одређени интеграл; изопериметријска неједнакост

Хелијева теорема у додатној настави средње школе

Бојана Матић

*Математичка гимназија, Краљице Наталије 37, 11000 Београд, Србија
e-mail: bojanamate@gmail.com*

Апстракт. На овом предавању формулисаћемо и доказаћемо Хелијеву теорему и показаћемо њене примене у решавању неких занимљивих задатака.

Хелијева теорема гласи: Ако су $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, ($n \geq 4$) конвексне фигуре неке равни такве да сваке три имају бар једну заједничку тачку онда је $\Phi_1 \cap \Phi_2 \cap \dots \cap \Phi_n \neq \emptyset$.

На пример, применом Хелијеве теореме може се урадити следећи задатак: Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, ($n \geq 4$) полуравни које прекривају неку раван α . Доказати да постоје три од тих n полуравни које прекривају раван α .

Кључне речи: Хелијева теорема; конвексне фигуре; прекривање равни.

The "dynamical core" and skill of the Eta model for weather and climate

Fedor Mesinger

*Serbian Academy of Sciences and Arts
e-mail: fedor.mesinger@gmail.com*

Abstract. Incentive for writing a limited area weather prediction model stemmed from the author's several years stay at the University of California in Los Angeles, UCLA, at the end of the sixties. Using what he refers to as the Akio Arakawa approach, Mesinger wrote in 1973 the code that was a forerunner of what today is referred as the Eta model. The model was for more than a decade the primary regional prediction model of the U.S. Weather Service and is today used for a variety of purposes. Hallmarks of the model are Mesinger's eta vertical coordinate, Zaviša Janjić's transformation of the Arakawa horizontal advection scheme to the model's semi-staggered grid, and perhaps also Mesinger and Dušan Jović's scheme for a finite-volume vertical advection. Lately, the Eta is extensively used also as a regional climate model (RCM), mostly over the South American domain, and in near-real time as a tool for the North American Regional Reanalysis (NARR), run by the U.S. National Centers for Environmental Prediction. As an illustration of its skill ensemble forecasts of the position of the upper-tropospheric jet stream are shown compared to those of its driver highly acclaimed European Centre for Medium Range Forecasts (ECMWF) model.

Keywords: Eta model; cut-cell schemes; finite-volume schemes; topography representation.

Алгоритми за делjenje полинома и њихове примене

Miloš Mićović

*Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: mm215020p@student.etf.bg.ac.rs*

Željana Torlak

*Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: tz225003p@student.etf.bg.ac.rs*

Ivana Jovović

*Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: ivana@etf.bg.ac.rs*

Nataša Ćirović

*Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: natasa@etf.bg.ac.rs*

Апстракт. У овом раду биће date две Jupyter сveske. Прва сvesка описује неке алгоритме делjenja реалних и комплексних полинома, са специјалним освртом на визуелни приказ алгоритама. Друга сvesка се бави Hornerovom методом, као и њеним применама на рачунање вредности свих извода полинома у некој тачки a , где је a реалан или комплексан број. Последично полином можемо представити као полином по новој променљивој $x - a$ и одредити одговарајући Tejlorov полином. Data је илустрација ових алгоритама на већем броју примера. Implementirane су функције за сваки од алгоритама. Улазни параметри функција су коефицијенти полинома, а код Hornerove методе и изабрана тачка a и жељени број узастопних примена Hornerove методе. Као излаз ових функција исписују се таблице са детаљним приказом поступка (свих корака) алгоритама делjenja, односно Hornerove методе.

Кључне речи: Алгоритам за делjenje полинома; Hornerova метода; вредност полинома у тачки; Jupyter сveske.

Methods for solving quasivariational inequality

Nevena Mijajlović

*University of Montenegro, Podgorica, Montenegro
e-mail: nevena.mijajlovic@ucg.ac.me*

Milojica Jaćimović

*Montenegrin Academy of Sciences and Arts, Podgorica, Montenegro
e-mail: milojica@jacimovic.m*

Abstract. In our talk we will consider quasivariational inequality in Hilbert space H : for given operator $F : H \rightarrow H$ find $x_* \in C(x_*)$ such that

$$\langle F(x_*), y - x_* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C(x_*),$$

where $C : H \rightarrow 2^H$ is multifunction with nonempty closed convex set $C(x) \subseteq H, \forall x \in H$. If $F(x) = f'(x)$ is a potential operator then then quasivariational inequality can be interpreted as a necessary condition of optimality in the problem of minimizing the function f with coupled constraints: find $x_* \in C(x_*)$ such that

$$f(x_*) \leq f(x), \quad \forall x \in C(x_*).$$

Some (but not all) methods for minimization problems can be adapted to solve quasivariational inequalities. In our talk, we will present variants of the gradient-type projection methods, extragradient method and extraproximal method for solving quasivariational inequalities. We also establish sufficient conditions for the convergence of the proposed methods and estimate the rates of the convergence.

Keywords: quasivariational inequalities; gradient-type projection method; extragradient method.

References

- [1] **N. Mijajlović, M. Jaćimović.** Strong Convergence Theorems by an Extragradient-like Approximation Methods for Quasi-variational Inequalities. *Opt lett*, 2022, <https://doi.org/10.1007/s11590-022-01871-z>.
- [2] **N. Mijajlović, M. Jaćimović, M. A. Noor.** Gradient-type projection methods for quasi-variational inequalities, *Optimization letters*, 2019, 13, 8.
- [3] **A. S. Antipin, M. Jaćimović, N. Mijajlović.** Extragradient Method for Solving Quasivariational Inequalities, *Optimization*, 2018, 67, 1.

Динамички процес системског ризика са тренуцима обнављања

Тамара Милић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, 11000 Београд, Србија
e-mail: tamara_milic@matf.bg.ac.rs

Ленка Главаш

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, 11000 Београд, Србија
e-mail: lenka@matf.bg.ac.rs

Апстракт. Познато је да тачкасти процеси имају широку примјену у моделовању како природних тако и друштвених појава. Динамички процеси системског ризика су бројачки процеси који су на неки начин генерализација Хоуксових процеса и Коксовог процеса са интензитетом у виду процеса са шумом случајних удара. Осим у контексту примјена, ови процеси су интересантни и у теоријском смислу, као бројачки процеси облика $N(t) = \sum_{i \geq 1} \{T_i \leq t\}$ који се због своје специфичне структуре могу дефинисати и преко кластера. У досадашњој литератури, имигранти, односно спољашњи утицаји моделирају се Коксовим процесом чији је интензитет у облику процеса $\sum_{i \geq 1} X_i e^{-\delta(t-T_{i,1})} I\{T_{i,1} \leq t\}$, при чему $(T_{i,1})$ прате хомоген Пуасонов процес. Предлаже се модификација у којој међувремена не морају имати експоненцијалну расподелу, односно $(T_{i,1})$ прате неки општи процес обнављања. Бавимо се проблемом одређивања момената бројачког процеса N са предложеном модификацијом. Приказаћемо резултате добијене симулацијама за различите индикаторе ризика који се примјењују у финансијама и осигурању а укључују збирни процес, који за бројачки има динамички процес системског ризика са различитим примјерима процеса обнављања.

Кључне речи: тачкасти процеси; Хоуксов процес; моменти; индикатори ризика

Библиографија

- [1] L. Cui, A. Hawkes, H. Yi An elementary derivation of moments of Hawkes processes *Advances in Applied Probability*, 2020, 52, 102 - 137.
- [2] J. Jang, A. Dassios, H. Zhao Moments of renewal shot-noise processes and their applications *Scandinavian Actuarial Journal*, 2018, 727-752.
- [3] J, Jang, R. Oh A review on Poisson, Cox, Hawkes, shot-noise Poisson and dynamic contagion process and their compound processes *Annals of Actuarial Science*, 2021, 15, 623-644.

Orthogonality on the unit semicircle in the complex plane

Gradimir V. Milovanović

*Serbian Academy of Sciences and Arts
Kneza Mihaila 35, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: gvm@mi.sanu.ac.rs*

Abstract. One nonstandard type of orthogonality, the so-called *ортгоналиты он тхе семициркле* was introduced and studied by Gautschi and Milovanović [1], and later generalized in [2], including applications in numerical integration and numerical differentiation. Beside this background, starting from recent results given in [3], in this lecture we present new results on orthogonal Laurent polynomials on the semicircle, their properties, as well as some new applications.

Keywords: Complex orthogonal systems, Recurrence relation, Quadrature formula.

References

- [1] **W. Gautschi, G.V. Milovanović.** Polynomials orthogonal on the semicircle. *J. Approx. Theory* 1986, 46, 230–250.
- [2] **W. Gautschi, H.J. Landau, G.V. Milovanović.** Polynomials orthogonal on the semicircle. II, *Constr. Approx.* 1987, 3, 389–404.
- [3] **G.V. Milovanović.** Special cases of orthogonal polynomials on the semicircle and applications in numerical analysis. *Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math.* 2019, 44, 1–28.

Апроксимација неких елиптичких трансмисионих проблема

Зорица Миловановић Јекнић

Факултет за грађитељски менаџмент, Универзитет Унион-Никола Тесла, Цара Душана 62-64, 11000 Београд
e-mail: zmilovanovic@unionnikolatesla.edu.rs

Александра Делић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, 11000 Београд
e-mail: adelic@matf.bg.ac.rs

Сандра Живановић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, 11000 Београд
e-mail: sandra@matf.bg.ac.rs

Апстракт. У применама, посебно у пољима физике и технике, често се срећу композитне или слојевите структуре, при чему се особине појединих слојева могу значајно разликовати од особина материјала који их окружује. Математичким моделовањем преноса енергије и масе у областима са слојевима добијамо трансмисионе проблеме. Трансмисиони проблеми се описују парцијалним диференцијалним једначинама са одређеним граничним условима, при чему се ефекат деловања између слојева описује нелокалним условима сагласности. У раду се разматра класа трансмисије за једначине елиптичког типа. Први моделни пример представља област која се састоји од два раздвојена интервала. Други моделни пример је област која се састоји од два раздвојена правоугаоника. Трећи модел описује пренос топлоте у зиду у којем постоји шупљина. За сва три моделна проблема доказана је егзистенција и јединственост решења у одговарајућим просторима Собољева. Такође су конструисане диференцијске схеме за њихово решавање и изведене оцене брзине конвергенције. Нумеричким примерима су показани добијени теоријски резултати.

Кључне речи: трансмисиони проблеми, нелокални услови сагласности, простори Собољева, диференцијска схема, конвергенција.

Библиографија

- [1] **A. A. Amosov.** CGlobal solvability of a nonlinear nonstationary problem with a nonlocal boundary condition of radiation heat transfer type. *Differential Equations* 41, 2005, 1, 96–109.
- [2] **B. S. Jovanović, M. N. Koleva, L. G. Vulkov.** Convergence of a FEM and two-grid algorithms for elliptic problems on disjoint domains. *J. Comput. Appl. Math.*, 2011, 236, 364–374.
- [3] **B. S. Jovanović, Z. Milovanović.** Numerical approximation of 2D Parabolic Transmission Problem in Disjoint Domain. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 228, 508–519.

On the role of empirical probability generating function in the goodness-of-fit and independence testing

Bojana Milošević

University of Belgrade, Faculty of Mathematics
e-mail: bojana@matf.bg.ac.rs

Abstract. A convenient way to characterize discrete distributions taking values in the set of non-negative integers is by their probability-generating functions. Therefore its empirical counterpart, so-called *empirical probability generating function*, is of huge importance for testing statistical hypotheses within such discrete data. After a brief review of the most essential properties of empirical probability generating functions, we present an overview of some general approaches for the construction of goodness-of-fit (GOF) tests as well as the limiting properties of such tests. The methodology is illustrated with several recent examples of GOF tests for geometric and Poisson distributions. A part of the talk is dedicated to the construction of independence tests and their properties.

Keywords: geometric distribution; L^2 -distance; association measures.

References

- [1] B. Milošević, M.D. Jiménez-Gamero, M.V. Alba-Fernández Quantifying the ratio-plot for the geometric distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 91(11), 2153-2177, 2021.
-

Primena Laplasove transformacije na funkciju prenosa na Time Scale

Tatjana Mirković

Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Srbija
e-mail: tmirkovic75@gmail.com

Nataša Ćirović

Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beograd, Srbija
e-mail: natasa@etf.bg.ac.rs

Apstrakt. U radu su autori koristili definiciju Laplasove transformacije na Time Scale-u, koju su uveli Bohner i Peterson. U slučaju da se za Time Scale uzima skup realnih brojeva, dobija se klasična Laplasova transformacija, a ukoliko se uzme da je on skup celih brojeva, svodi se na modifikovanu klasičnu \mathcal{Z} -transformaciju. Takođe su autori koristili konvoluciju preslikavanja, kao i teoremu konvolucije, za dobijanje rešenja nekih klasa dinamičkih jednačina sa konstantnim koeficijentima. Isti postupak je urađen i za određivanje funkcije prenosa u teoriji signala. U posebnoj glavi su dati primeri, kao primene izvedene teorije, za konkretne Time Scaleove. Dati su primeri diferencijalnih jednačina, kao i funkcija prenosa za analogni signal. Zatim je dat primer konvencijalne diferencne jednačine izražene na Time Scale, kao i funkcija prenosa za digitalni signal. I kao treći primer Time Scalea, data je q -diferencna jednačina.

Ključne reči: Laplasova transformacija; Dinamičke jednačine; Funkcija prenosa;

Kako učenici razumiju osnovne algebarske pojmove po završetku srednje škole?

Manuela Muzika Dizdarević

*Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu
e-mail: manuela@dizdarevic.org*

Almasa Odžak

*Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu
e-mail: almasa.odzak@pmf.unsa.ba*

Aleksandar Lipkovski

*Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu
e-mail: acal@matf.bg.ac.rs*

Apstrakt. Algebra se, kao oblast matematike, počinje izučavati u starijim razredima osnovne škole a posebno tokom srednje škole. Osnovni algebarski pojmovi kao što su *operacija i relacija, jednačina i polinom* smatraju se temeljnim matematičkim pojmovima koje djeca izgrađuju kroz nastavu. Pošto su u nastavi matematike, a posebno algebre, dominantni zadaci koji potenciraju razvoj proceduralnog znanja (rješavanje jednačina, operacije sa polinomima i algebarskim izrazima) postavlja se pitanje u kojoj mjeri i sa koliko uspjeha se uz odgovarajuća proceduralna znanja razvijaju i znanja o osnovnim algebarskim konceptima.

U ovom izlaganju ćemo predstaviti inicijalne rezultate istraživanja o konceptualnom znanju studenata na početku studija matematike koje je sprovedeno na Odsjeku za matematičke i kompjuterske nauke PMF-a Univerziteta u Sarajevu i Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Cilj istraživanja je procjena stepena izgradnje koncepta *jednačine, polinoma, parametra i operacija i relacija* kao temeljnih matematičkih pojmova kojima je posvećen veliki prostor u nastavi matematike.

Ključne reči: Nastava algebre; konceptualno znanje; proceduralno znanje.

Bibliografija

- [1] **A. Arcavi, P. Drijvers, K. Stacey.** The Learning nad Teaching of Algebra *Routledge*, 2017
- [2] **B. Rittle-Johnson, R. Siegler, M.W. Alibali.** Developing Conceptual Understanding and Procedural Skill in Mathematics: An Iterative Process, *Journal of Educational Psychology*, vol. 93, No.2, 2001, 346-362.
- [3] **L. Haapasalo, Dj. Kadijevic.** Two Types of Mathematical Knowledge and Their Relation *Journal für Mathematik-Didaktik* 21, 2, 2000, 139-157.

Razmatranje primene mašinskog učenja u upravljanju portfoliom projekata

Nikola Perić

Mozzart, Beograd

e-mail: nikola.m.peric@gmail.com

Apstrakt. Tokom brzih promena, nestabilnih prilika i nepredvidivih okolnosti, više nego ikada je potrebno vešto prepoznati i umanjiti sve negativne uticaje na realizaciju projekata, naročito onih koji su striktno uslovljeni kratkim rokovima realizacije, ograničenim resursima uz minimalne troškove i očekivani maksimalni kvalitet projektnih isporuka. Adekvatno praćenje, kontrolisanje i upravljanje portfoliom projekata, pri čemu su brojniji tzv. urgentni projekti, pravi je izazov za svakog iskusnog poznavaoца postojećih tehnika i alata projektnog menadžmenta. Iz tog razloga, u pokušajima prevazilaženja takvih i sličnih izazova, razmatrana je primena mašinskog učenja u projektnom menadžmentu. Cilj je smanjiti uticaj sagledanih i nepredviđenih rizika ili njihovo potpuno neutralisanje. Trenutna posledica svega opisanog je veliki procenat neuspešnih projekata (po istraživanjima Gartner-a blizu 80%), odnosno projekata čija je realizacija trajno prekinuta ili su za rezultat imali velika neprihvatljiva odstupanja od svega planiranog (budžeta, vremena, kvaliteta, opsega, resursa, ...). Pokušaj je da se sintezom mašinskog učenja i projektnog menadžmenta predvide skoro svi potencijalni rizici na nivou pojedinačnih projekata i portfolia projekata, a na osnovu ličnih iskustava projektnih i portfolio menadžera. Od izuzetnog značaja je da se sa analizom rizika i davanjem sugestija projektnim menadžerima počne što je pre moguće, sa što je moguće ranije pruženim potrebnim informacijama. Ovaj problem privlači veliku pažnju u različitim industrijama, jer se mora rešiti u relanim scenarijima, pri čemu je potrebno uzeti u obzir ljudski faktor, premda projektni menadžeri vremenom uče i teže da ne ponavljaju iste greške beskonačno.

Ključne reči: mašinsko učenje; projektni menadžment; upravljanje projektima i portfoliom projekata; rizici projekta.

Bibliografija

- [1] **I. Sutskever, J. Martens, G. E. Dahl, G. E. Hinton.** On the importance of initialization and momentum in deep learning. *Jmlr W&CP*, 28(2010):1139–1147.
- [2] **M. A. Tahir, A. Bouridane, F. Kurugollu.** Simultaneous feature selection and feature weighting using hybrid tabu search/k-nearest neighbor classifier. *Pattern Recognition Letters*, 2007.
- [3] **M. Pedroso.** Application of Machine Learning Techniques in Project Management Tools. *Thesis, Instituto Superior Tecnico - Universidade de Lisboa*, 2017.
- [4] **J. M. Wilson.** Gantt charts: A centenary appreciation. *European Journal of Operational Research*, 2003, 430 - 437.
- [5] Why projects fail? *Report, Gartner Research*, 2016.

Computing bigraded Betti numbers as a method of distinguishing neighbourly polytopes

Ognjen Petrov

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics
e-mail: ognjenpetrov@yahoo.com*

Uroš Colović

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics
e-mail: mm21033@matf.bg.ac.rs*

Abstract. Bigraded Betti numbers are a powerful invariant in toric topology. We calculate them using Hochster's formula in order to distinguish moment-angle manifolds of a particular class of polytopes, namely 4 and 5-neighbourly polytopes.

It is conjectured that the cohomology ring is a complete invariant in this class of moment-angle manifolds. We proved that out of approximately 130 5-neighbourly polytopes with nine facets, only two pairs have the same bigraded Betti numbers. A further attempt to differentiate these pairs is examining whether their Tor algebras are isomorphic. The negative answer would imply that the cohomology ring is a complete invariant, resolving the conjecture.

Our computations will mainly be executed in Macaulay2 and SageMath.

Keywords: bigraded Betti numbers; moment-angle manifold; neighbourly polytope.

References

- [1] **Đ. Baralić, L. Milenković** Small Covers and Quasitoric Manifolds over Neighborly Polytopes. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2022, 22, 87.
- [2] **V. M. Buchstaber, T. E Pano.** Toric topology. *American Mathematical Soc.*, 2015.
- [3] **Đ. Baralić** Topology and combinatorics of quasitoric manifolds and polyhedral product functors. *Doctoral thesis, University of Belgrade, Faculty of Mathematics* , 2013.

Uopšteni Rimanovi prostori u Ajzenhartovom smislu, dimenzije $n \in \{2, 3\}$ i odgovarajući varijacioni problemi

Miloš Z. Petrović

Univerzitet u Nišu, Poljoprivredni fakultet u Kruševcu,
Kosančićeva 4, 37000 Kruševac, Srbija
e-mail: petrovic.milos@ni.ac.rs

Apstrakt. U prvom delu izlaganja biće prikazane osnovne jednačine opšte teorije uopštenih Rimanovih prostora u Ajzenhartovom smislu i odgovarajućih relacija između krivinskih tenzora u obliku koji ne zavisi od izbora koordinatnog sistema na mnogostrukosti. Drugi deo izlaganja se detaljnije bavi posebnim slučajevima, kada je dimenzija prostora $n \in \{2, 3\}$. Prikazaćemo formule za lokalne komponente uopštenog metričkog tenzora i uopštenih Kristofelovih simbola u Ajzenhartovom smislu u standardnoj bazi $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\frac{\partial}{\partial x^j}$ i $\frac{\partial}{\partial x^k}$ tangetnog prostora. Kada je $n = 2$ postoji ukupno $n^3 = 2^3 = 8$ komponenti uopštenih Kristofelovih simbola Γ_{hij} , $h, i, j \in \{1, 2\}$, dok za $n = 3$ imamo ukupno $n^3 = 3^3 = 27$ komponenti uopštenih Kristofelovih simbola Γ_{hij} , $h, i, j \in \{1, 2, 3\}$. Kada je $n = 2$ prikazane su formule za komponente tenzora torzije $T_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h - \Gamma_{ji}^h$, $h, i, j \in \{1, 2\}$. Za $n = 3$ komponente odgovarajućih tenzora torzije $T_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h - \Gamma_{ji}^h$, $h, i, j \in \{1, 2, 3\}$ su predstavljene pomoću odgovarajućih matrica. U finalnom delu izlaganja biće prikazana potencijalna uloga asimetričnog metričnog tenzora u Ajzenhartovom smislu u klasifikaciji dvodimenzionalnih konformno invarijantnih varijacionih problema.

Ključne reči: uopšteni Rimanov prostor, asimetrična metrika, krivinski tenzor, varijacioni problem.

Bibliografija

- [1] Svetislav Minčić. Some characteristics of curvature tensors of nonsymmetric affine connexion. *Novi Sad J. Math.*, 1999, 29, No. 3, 169–186.
- [2] Mileva Prvanović. Four curvature tensors of non-symmetric affine connexion (in Russian) In: *Proc. Conf. "150 years of Lobachevski geometry," Kazan 1976, Moscow 1977* pp. 199–205.
- [3] Jürgen Jost. Two-dimensional geometric variational problems. *John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England*, 1991.

A note on some Chebyshev related integer sequences

Zoran Pucanović

*Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade
e-mail: pucanovic@grf.bg.ac.rs*

Marko Pešović

*Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade
e-mail: mpesovic@grf.bg.ac.rs*

Abstract. We will present some results on r -circulant matrices whose entries are the Chebyshev polynomials of the first and second kind as well as close connections between the Chebyshev polynomials of the first and second kind and some well-known integer sequences. Using these connections we will apply the obtained results to r -circulant matrices involving various integer sequences. It will turn out that our results on the spectral norm bounds on such matrices are notably better than the previous ones.

Keywords: Chebyshev polynomials, circulant matrices, integer sequences.

References

- [1] **T. S. Chihara.** An Introduction to Orthogonal Polynomials. *Gordon and Breach, New York*, 1978.
- [2] **P. J. Davis.** Circulant Matrices. *Wiley, New York*, 1979.
- [3] **J. C. Mason, D. C. Handscomb.** Chebyshev Polynomials. *Chapman and Hall, New York*, 2003.
- [4] **Z. Pucanović, M. Pešović.** Chebyshev polynomials and r -circulant matrices. *Appl. Math. Comp.*, 2022, 437.

Softver otvorenog koda za vežbanje matematike u osnovnim školama

Desanka Radunović

*profesor Beogradskog univerziteta
e-mail: dradun@matf.bg.ac.rs*

Božidar Radunović

*Senior Principal Researcher, Microsoft Research Cambridge
e-mail: bozidar.radunovic@gmail.com*

Apstrakt. Besplatan obrazovni softver je veoma popularan i rasprostranjen na Internetu. Međutim, on često nije prilagodjen jezicima i potrebama manjih zemalja. To je naročito bitno za uzrast osnovne škole, gde je neophodno potpuno prilagoditi program i jezik izlaganja očekivanjima mladih učenika, da se ne bi izazvala odbojnost. Takodje, a što je naročito bitno pri vežbanju matematike, obrazovni softver mora da omogući raznovrsnost zadataka, fleksibilnu strukturu pitanja i unosa odgovora, kao i da pokuša da vežbanje matematike deci dočara kao igru.

U ovoj prezentaciji ćemo opisati softver otvorenog koda za vežbanje matematike u osnovnim školama [1] koji smo razvili sa gore navedenim ciljevima. Softver koji smo razvili je fleksibilan. Omogućava lako dodavanje novih, dinamičkih zadataka bez menjanja softvera, i prevodjenje zadataka na druge jezike. Zadatke može lako pisati i dodavati osoba sa minimalnim znanjem programiranja.

Naše softversko rešenje omogućava učenicima da zadatke rešavaju na Internetu i da u realnom vremenu provere svoja rešenja i saznaju da li su tačna. Takodje, zbog fleksibilnog načina unosa zadataka, naš softver može da prikaže razne tipove zadataka, od jednostavnog računanja do komplikovanih geometrijskih zadataka.

U prezentaciji ćemo takodje opisati naše iskustvo u održavanju ovoga sajta koji trenutno ima oko 1,000 mesečno aktivnih korisnika u regionu.

Ključne reči: obrazovni softver; osnovne škole; softver otvorenog koda.

Bibliografija

- [1] Shkola, a web framework for exercising math for primary school kids, <https://github.com/bradunov/shkola>.

Problem rimske dominacije

Aleksandar Savić

Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, Studentski trg 16, Beograd
e-mail: asavic@matf.bg.ac.rs

Apstrakt. Problem rimske dominacije na grafovima uveden je člankom Jan Stjuarta u [1] kao problem vojne istorije formalno definisan kao matematički problem kombinatorne optimizacije. Rimski car Konstantin I organizovao je vojsku kako bi implementirao odbranu u dubinu. Organizovao je armiju u stacionarne jedinice i mobilne trupe. Bilo je neophodno odlučiti o rasporedu trupa. Glavni problem je smanjiti broj trupa radi minimizacije broja vojnika kao i troškova. Konstantin je razlikovao tri vrste oblasti: one sa mobilnim i stacionarnim trupama, one sa samo stacionarnim trupama i one bez trupa. Uslov je bio da oblasti bez trupa moraju biti susedne sa onima u kojima su bile mobilne trupe, tako da u slučaju napada mogu biti branjene.

Ovakva raspodela trupa se može jednostavno formulisati kao optimizacioni problem. Teritorija Carstva je predstavljena grafom $G = (V, E)$ u kome oblastima odgovaraju čvorovi, a grane povezuju susedne oblasti. Formalno, to je nalaženje funkcije $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ tako da vrednost $\sum_{v \in V} f(v)$ bude minimalna, pri čemu svaki čvor sa $f(v) = 0$ mora biti susedan nekom čvoru sa $f(v) = 2$. Ova funkcija se naziva *funkcija rimske dominacije* (FRD) i uvedena je u [2]. Ako definišemo $w(f) = \sum_{v \in V} f(v)$ kao težinu funkcije f , tada se problem svodi na nalaženje broja rimske dominacije $\gamma_R(G) = \min\{w(f) \mid f \text{ je FRD na } G\}$.

Ključne reči: optimizacija; graf; rimska dominacija.

Bibliografija

- [1] I. Stewart. Defend the Roman Empire!. *Scientific American*, 1999, 281(6), 136 - 138.
- [2] E. J. Cockayne, P. A. Dreyer Jr, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi. Roman domination in graphs. *Discrete Mathematics*, 2004, 278(1-3), 11 - 22.

Bergman projections on weighted mixed norm spaces

Ivana Savković

*Faculty of Mechanical Engineering, University of Banja Luka, Bulevar vojvode Stepe Stepanovića 71
e-mail: ivana.savkovic@mf.unibl.org*

Abstract. We study the boundedness of weighted Bergman projections acting on weighted mixed norm spaces of functions defined on smoothly bounded domains in \mathbb{R}^n . Corresponding result in the case of a particular weighted mixed norm space $L_\alpha^{p,q}(\Omega)$, for $1 \leq p, q < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$, under a particular condition on the weight of the Bergman projection, is obtained in [1]. It is done by using an equivalence of certain norms obtained in [2]. We also prove the boundedness of the weighted Bergman projection acting on a different weighted mixed norm space $\tilde{L}_\alpha^{p,q}(\Omega)$, for $1 \leq p \leq \infty$ and $1 \leq q < \infty$. In both cases, the Bergman projection maps these spaces onto weighted harmonic mixed norm spaces $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$. The talk is based on joint work with Miloš Arsenović.

Keywords: Bergman projections; harmonic functions; mixed norm spaces.

References

- [1] M. Arsenović, I. Savković. Bergman projections on weighted mixed norm spaces and duality. *Annals of Functional Analysis* 13 (70), 2022. <https://doi.org/10.1007/s43034-022-00217-1>
- [2] I. Savković. Carleson Measures for Weighted Harmonic Mixed Norm Spaces on Bounded Domains in \mathbb{R}^n . *Czechoslovak Mathematical Journal* 2022. <https://doi.org/10.21136/CMJ.2022.0018-22>

CMC foliations of quasi-Fuchsian manifolds

Andrea Seppi

*Université Grenoble Alpes, Institut Fourier, France
e-mail: andrea.seppi@univ-grenoble-alpes.fr*

Abstract. Quasi-Fuchsian are an important class of hyperbolic three-manifolds. In this talk I will present several results, obtained in a joint work with Diptai Choudhury and Filippo Mazzoli, on their foliations by constant mean curvature (CMC) surfaces. A conjecture due to Thurston asserts that every almost-Fuchsian manifold has a global CMC foliation: in the first part of the talk I will present a partial result in this direction, namely that every quasi-Fuchsian manifold in a neighbourhood of the Fuchsian locus is foliated by CMC surfaces. In the second part of the talk I will then explain how these CMC foliations induce Hamiltonian flows on the cotangent bundle of the Teichmüller space.

Mappings with the inverse Poletsky inequality are discrete on the boundary

Evgeny Sevost'yanov

Zhytomyr Ivan Franko State University; Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, Slavyansk
e-mail: esevostyanov2009@gmail.com

Abstract. In what follows, $M(\Gamma)$ denotes the *modulus* of a family Γ . Let $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$ and $A = A(y_0, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{R}^n : r_1 < |y - y_0| < r_2\}$. Given $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and $r > 0$, we put $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$. Given sets $E, F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ and a domain $D \subset \mathbb{R}^n$ we denote by $\Gamma(E, F, D)$ a family of all paths $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ such that $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ and $\gamma(t) \in D$ for $t \in [a, b]$. Given a mapping $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, a point $y_0 \in \overline{f(D)} \setminus \{\infty\}$, and $0 < r_1 < r_2 < r_0 = \sup_{y \in f(D)} |y - y_0|$, we denote by $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ a family of all paths γ in D such that $f(\gamma) \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$.

Let $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ be a Lebesgue measurable function and let $p \geq 1$. We say that f satisfies the *inverse Poletsky inequality* at a point $y_0 \in \overline{f(D)} \setminus \{\infty\}$ if the relation

$$M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leq \int_{A(y_0, r_1, r_2) \cap f(D)} Q(y) \cdot \eta^n(|y - y_0|) dm(y) \quad (1)$$

holds for any Lebesgue measurable function $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ such that

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1. \quad (2)$$

Set $q_{y_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S(y_0, r)} Q(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y)$, where ω_{n-1} denotes the area of the unit sphere \mathbb{S}^{n-1} in \mathbb{R}^n . We say that a function $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ has a *finite mean oscillation* at a point $x_0 \in D$, write $\varphi \in FMO(x_0)$, if $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \bar{\varphi}_\varepsilon| dm(x) < \infty$, where $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varepsilon\}$, $\bar{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) dm(x)$ and Ω_n is the volume of the unit ball \mathbb{B}^n in \mathbb{R}^n .

Theorem. Let $n \geq 2$, let D be a domain with a weakly flat boundary and let D' be a domain which is locally connected on its boundary. Let f be open discrete and closed mapping of D onto D' for which there is a Lebesgue measurable function $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$, equal to zero outside D' , such that the relations (1)–(2) hold at any point $y_0 \in \partial D'$. Assume that, one of the following conditions hold:

- 1) $Q \in FMO(\partial D')$;
- 2) for any $y_0 \in \partial D'$ there is $\delta(y_0) > 0$ such that

$$\int_0^{\delta(y_0)} \frac{dt}{t q_{y_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty.$$

Then f has a continuous extension $\bar{f} : \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$ such that $N(f, D) = N(f, \bar{D}) < \infty$ and $\bar{f}(\bar{D}) = \bar{D}'$. In particular, \bar{f} is discrete in \bar{D} .

Keywords: Quasiconformal mappings, boundary extension, discrete mappings

Занимљиви примери примене математике у машинству

Војислав Симоновић

Машински факултет, Београд
e-mail: vsimonovic@mas.bg.ac.rs

Татјана Станковић

Београдска академија пословних и уметничких струковних студија, Београд
e-mail: t.stankovic12@gmail.com

Апстракт. Савремена настава математике и активно учествовање ученика у наставном процесу поставља наставнику веће изазове од традиционалне наставе. Један од изазова са којим се сусреће наставник је и да додатно мотивише ученика пружајући му одговор на питање због чега нешто учи, где и како се примењује одређена област која се обрађује и слично. У овом раду биће приказани занимљиви примери примене математике у машинству које наставници могу користити у настави као илустрацију примене математике у складу са наставним планом и програмом.

Кључне речи: настава математике; мотивација ученика; примена у машинству.

Dempster-Šaferove funkcije verovanja na primerima političkih istraživanja javnog mnjenja

Dino Spasovski

Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, Studentski trg 16
e-mail: dinospabg@gmail.com

Апстракт. Крајем 60их и почетком 70их година прошлог века у оквиру статистичке теорије долази до појаве новог приступа за који су најzaslužнији Artur Dempster и Glen Šafer. Концепт који је предложио Dempster у свом раду неколико година касније је у својој knjizi Теорија чињеница потпуно разradio Glen Šafer и поставио темељ нечему што данас познајемо под називом Теорија Dempster-Šafera. Циљ овога рада је да на неким једноставним примерима политичких истраживања јавног мнjenja прикаже неке од најосновнијих концепата теорије Dempster-Šafera попут Dempsterovог правила комбинација, простих функција подршке, оквира расуђивања, функција учесталости али пре свега функције веровања у теорији Dempster-Šafera и то на који начин се ти појмови могу користити при израчунавању неких вероватноћа догађаја у данашњем времену када су традиционалне методе показале као непouzдане за предвиђање резултата на основу политичких истраживања јавног мнjenja која у себи садрже факторе несигурности односно непредвидивости.

Кључне речи: Теорија Dempster-Šafera; функција веровања; Dempsterovo правило комбинација; непредвидивост; политичко истраживање; јавно мнjenje;

Bibliografija

- [1] **G. Shafer** A Mathematical Theory of Evidence *Princeton University Press, Princeton, 1976.*
- [2] **R. Yager, L.Liu** Classic Works of the Dempster-Shafer Theory of Belief Functions *Springer 2008*
- [3] **A. P. Dempster** Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping *The Annals of Mathematical Statistics* 1967. 38 (2) 325 - 339

Решавање векторског проблема паковања применом метакхеуристичких метода

Ђорђе Стакић

Универзитета у Београду, Економски факултет, Каменичка 6, Београд
e-mail: djordje.stakic@ekof.bg.ac.rs

Апстракт. Проблем паковања бинова (енгл. Bin packing) је познати НП тежак проблем који је највише разматран за хомогени случај, када су бинови једнаки, користећи једну меру - дужину. Проблем се преласком на више димензија може уопштити на два начина: геометријско и векторско паковање. Овде се разматра хетерогено векторско паковање са два типа ограничења. Као пример узето је паковање пакета у контејнерском транспорту. Пакети су описани својом масом и запремином. Укупна маса и укупна запремина пакета у контејнеру треба да буде мања или једнака од задатих граница масе и запремине тог типа контејнера. Разматрају се три стандардна типа контејнера, као и цене превоза контејнера на релацији Шангај-Београд. Функција циља се односи на одређивање минималне цене превоза скупа пакета. Генерисана је сопствена библиотека инстанци. Проблем је решаван методама VNS и GRASP, као и помоћу решавача CPLEX. Методе су примењене и на хомогени случај векторског паковања и примењене на познате две библиотеке инстанци. Библиотека већих инстанци није у потпуности решена, ту је добијено више нових оптималних решења и померене су границе оптималног решења за неколико инстанци.

Кључне речи: векторско паковање; метакхеуристичке методе; контејнерски транспорт.

Библиографија

- [1] **Ђорђе Стакић, Миодраг Џивковић, Ана Анкић.** A Reduced Variable Neighborhood Search Approach to the Heterogeneous Vector Bin Packing Problem. *Information Technology and Control*, 2021, 50(4), 808-826. <https://doi.org/10.5755/j01.itc.50.4.29009>
- [2] **Ђорђе Стакић, Ана Анкић, Рака Јовановић.** Comparison of different GRASP algorithms for the heterogeneous vector bin packing problem. In: *2019 China-Qatar International Workshop on Artificial Intelligence and Applications to Intelligent Manufacturing (AIAIM)*, IEEE, 2019, pp. 63 - 70. <https://doi.org/10.1109/AIAIM.2019.8632779>
- [3] **Ђорђе С. Стакић** Математички модели и различити начини вишекритеријумске оптимизације у интермодалном транспорту. *докторска дисертација, Универзитет у Београду, Математички факултет*, 2022.

Enumerating lazy walks in threshold graphs

Dragan Stevanović

*Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, Kneza Mihaila 36, Belgrade, Serbia
e-mail: dragan_stevanovic@mi.sanu.ac.rs*

Abstract. Characterization of connected graphs with fixed numbers of vertices and edges having the maximum spectral radius of the adjacency matrix is a long-standing open problem in spectral graph theory. While it is well known that the extremal graphs must belong to the class of threshold graphs, not that much is known about the spectral radii of threshold graphs themselves. The spectral radius of a graph is, however, closely related to the numbers of various types of walks in the graph. In this lecture we will showcase how one can enumerate lazy walks in a threshold graph, and derive both lower and upper bounds on its spectral radius, thus making the first step towards the resolution of this problem.

Keywords: Lazy walks; Spectral radius; Threshold graphs.

Како заинтересовати ученике за наставу математике

Јованка Свркота

*Основна школа "Јован Поповић", Раваничка 2, Нови Сад
e-mail: jovanka.svrkota@gmail.com*

Апстракт. Интересовање ученика основне школе за наставу математике значајно опада у периоду од петог до осмог разреда. Како би основне математичке концепте, знања и вештине ученици усвојили са разумевањем, неопходно их је мотивисати да за време наставе учествују у раду.

Peter Liljedahl у својој књизи "Building Thinking Classrooms in Mathematics" сугерише да је ученичку мотивацију за време часа могуће подстаћи кроз решавање проблемских задатака у оквиру групног рада на таблама. У излагању ће бити представљени резултати имплементирања оваквог облика рада у школској 2022/23. години у Основној школи "Јован Поповић" у Новом Саду. Групе од по три ученика се формирају насумично, а избор група се врши на почетку сваког часа. Уместо седећи за столом или клупом, свака група свој рад реализује пред по једном белом таблом. Ученици решавају задатке који се користе у редовној настави математике, али им наставник пре израде не објашњава начин на који да то учине, него они самостално долазе до открића.

Осим што развијају позитивне ставове према математици, кроз овакав приступ реализацији наставе сви ученици добијају једнаку прилику да учествују у раду, комуницирају математичким језиком и писмом, дубље размишљају о математичким концептима и формирају стабилан основ за даљи развој математичких појмова.

Кључне речи: Мотивација ученика; Групни рад; Проблемска настава.

Библиографија

- [1] P. Liljedahl. Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K-12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning, Corwin, 2020.

Metaheuristički pristup za rešavanje problema p-next centra

Jelena Tasić

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu
e-mail: jelena_tasic@matf.bg.ac.rs*

Zorica Dražić

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu
e-mail: zdrazic@matf.bg.ac.rs*

Zorica Stanimirović

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu
e-mail: zoricast@matf.bg.ac.rs*

Apstrakt. Problem p-next centra predstavlja proširenje klasičnog lokacijskog problema p-centra gde se uzima u obzir da neki od uspostavljenih uslužnih centara mogu postati neupotrebljivi. Ovo se može dogoditi usled tehničkih problema, prirodnih katastrofa, nedostatka radnika itd. Ukoliko dođe do iznenadnog zatvaranja uspostavljenog uslužnog centra, svi korisnici koji su bili pridruženi tom centru se preusmeravaju na rezervni centar, a to je centar najbliži zatvorenom centru. Kako je razmatrani problem NP-težak, korišćen je metaheuristički pristup za njegovo rešavanje zasnovan na metodi promenljivih okolina. Testiranje je vršeno na skupu pmed instanci iz literature, a dobijeni rezultati su upoređeni sa rezultatima egzaktnog rešavača CPLEX i postojećim metaheuristikama iz literature. Na osnovu analize dobijenih rezultata u pogledu kvaliteta rešenja i vremena izvršavanja, može se zaključiti da je predložena metoda pogodna i pouzdana za rešavanje ovog problema.

Ključne reči: p-centar, p-next centar, metoda promenljivih okolina, kombinatorna optimizacija

Bibliografija

- [1] **M. Albareda-Sambola, Y. Hinojosa, Yolanda, A. Marín, J. Puerto.** When centers can fail: a close second opportunity. *Computers & Operations Research* , 2015
- [2] **A. D. Lopez-Sanchez, J. Sanchez-Oro, A. G. Hernandez-Dóaz.** GRASP and VNS for solving the p-next center problem. *Computers & Operations Research* , 2018
- [3] **D. Ristić, N. Mladenović, R. Todosijević, D. Urosević.** Filtered Variable Neighborhood Search method for the p-next center problem. *International Journal for Traffic and Transport Engineering*, 2021
- [4] **N. Mladenović, M. Labbe, P. Hansen.** Solving the p-Center Problem with Tabu Search and Variable Neighborhood Search. *Networks An International Journal*, 2003.

Ауто-дуалне триангулације многострукости

Маринко Тимотијевић

ПМФ Крагујевац
e-mail: marinko.timotijevic@pmf.kg.ac.rs

Апстракт. Александеров дуал симплицијалног комплекса $K \subseteq 2^{[n]}$ је симплицијални комплекс $\widehat{K}^{[n]} = \{[n] \setminus F \mid F \notin K\}$. Комплекс K је ауто-дуалан ако је $K = \widehat{K}^{[n]}$ а под-дуалан ако је $K \subseteq \widehat{K}^{[n]}$. Ауто-дуални симплицијални комплекси са n темена представљају канонске примере симплицијалних комплекса који немају геометријску реализацију у просотру \mathbb{R}^{n-3} , јављају се као минималне триангулације тополошких простора и врло су значајни у теорији комбинаторне оптимизације. Brehm и Kühnel су 1987. у раду [1] доказали да ако d -димензионална многострукост која није сфера има триангулацију са n темена тада је:

$$n \geq 3\lceil d/2 \rceil + 3$$

а једнакост важи само у случајевима $d = 2, 4, 8, 16$ када многострукост има хомолошки тип реалне, комплексне, кватернионске и октанионске пројективне равни. Одговарајуће триангулације су откривене, последња 2022. године у раду [2] и све представљају ауто-дуалне симплицијалне комплексе.

Предавање је базирано на раду [3] у којем се истражује комбинаторна структура симплицијалних комплекса. Доказује се да за сваки симплицијални комплекс $K \subseteq 2^{[n]}$ и свако теме $\{v\} \in [n]$ важи

$$K = \widehat{\text{Lk}(\{v\})}^{[n] \setminus \{v\}} \cup C(\text{Lk}(\{v\}))$$

где је $\text{Lk}(\{v\}) \subseteq 2^{[n] \setminus \{v\}}$ под-дуалан симплицијални комплекс што имплицира да је ауто-дуалан комплекс потпуно одређен линком свог произвољног темена. Доказује се да важи обрнуто тј. ако је $K \subseteq 2^{[n]}$ под-дуалан симплицијални комплекс, тада је $\widehat{K}^{[n]} \cup CK$ (где је $CK = K * \{\emptyset, \{n+1\}\}$) ауто-дуалан симплицијални комплекс у амбијенту $[n+1]$. Отуда, комбинаторна и тополошка својства ауто-дуалних комплекса су употпуности одређена комбинаторним својствима линка произвољног темена а све ауто-дуалне комплексе можемо да добијемо својеврсном надоградњом под-дуалних комплекса.

У докторској дисертацији [4] се анализирају ауто-дуалне триангулације многострукости. Доказује се да ауто-дуална комбинаторна многострукост $K \subseteq 2^{[n]}$ димензије d се добија надоградњом под-дуалне комбинаторне сфере $S^{d-1} \in 2^{[n-1]}$ која је $n-d-2$ -повезана тј. $\binom{[n-1]}{n-d-2} \subseteq S^{d-1}$. Користећи комбинаторну Александерову дуалност, доказује се да ауто-дуална комбинаторна многострукост $M \subseteq 2^n$ димензије d не може да буде сфера и да је $n = 3\lceil d/2 \rceil + 3$ што имплицира да ауто-дуална комбинаторна многострукост има хомолошки тип реалне, комплексне, кватернионске и октанионске пројективне равни и да друге ауто-дуалне комбинаторне многострукости не постоје.

Кључне речи: Симплицијални комплекс; Александерова дуалност; комбинаторна многострукост.

Библиографија

- [1] U. Brehm, W. Kühnel. Combinatorial manifolds with few vertices. *Topology* **26**, 1987. 465 - 473.
- [2] Alexander Gaifullin 634 vertex-transitive and more than 10^{103} non-vertex-transitive 27-vertex triangulations of manifolds like the octonionic projective plane. *arXiv:2207.08507*, 2022.
- [3] M. Timotijević. Note on combinatorial structure of self-dual simplicial complexes. *Mat. Vesnik* **71**, 2019. 104–122.
- [4] M. Timotijević. Auto-dualni simplicijalni kompleksi, njihova generalizacija i primene u kombinatorici i geometriji. <https://nardus.mpn.gov.rs/bitstream/handle/123456789/12259/Disertacija.pdf> 2019.

Primena dve numeričke metode za određivanje nula polinoma

Željana Torlak

*Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: tz225003p@student.etf.bg.ac.rs*

Miloš Mićović

*Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: mm215020p@student.etf.bg.ac.rs*

Nataša Ćirović

*Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: natasa@etf.bg.ac.rs*

Ivana Jovović

*Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: ivana@etf.bg.ac.rs*

Apstrakt. U ovom radu biće date dve Jupyter sveske sa kratkim opisom metode polovljenja intervala i Njutnove metode. Ove dve metode biće primenjene na određivanje nula realnih polinoma i ilustrovane na većem broju različitih primera. Implementirane su četiri funkcije, po dve za svaku od metoda - jedna koja nalazi nulu polinoma na zadanom intervalu, a druga koja nalazi sve realne nule. Korisnik može u svim implementiranim funkcijama da zada broj iteracija ili željenu tačnost. Kao izlaz ovih funkcija korisniku će se prikazati vrednosti svih iteracija, kao i grafik funkcije.

Ključne reči: Njutnova metoda; metoda polovljenja intervala; Jupyter sveske; nule polinoma.

Contact non-squeezing via selective symplectic homology

Igor Uljarević

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics,
Studentski trg 16, 11158 Belgrade
e-mail: igoru@matf.bg.ac.rs*

Abstract. I will introduce a new version of symplectic homology that resembles the relative symplectic homology and that is related to the symplectic homology of a Liouville sector. This version, called selective symplectic homology, is associated with a Liouville domain and an open subset of its boundary. The selective symplectic homology is obtained as the direct limit of the Floer homology groups for Hamiltonians whose slopes tend to infinity on the open subset but remain close to 0 and positive on the rest of the boundary. As an application, I will prove a contact non-squeezing phenomenon on homotopy spheres that are fillable by Liouville domains with infinite dimensional symplectic homology: there exists a smoothly embedded closed ball in such a sphere that cannot be made arbitrarily small by a contact isotopy. These homotopy spheres include examples that are diffeomorphic to standard spheres and whose contact structures are homotopic to standard contact structures.

Keywords: Contact non-squeezing; symplectic homology; exotic contact structures.

Неки резултати из теорије непокретне тачке на метричким просторима

Јасмина Фијуљанин

*Универзитет одбране, Војна академија, Генерала Павла Јуришића Штурма 33, Београд
e-mail: jasmina.fijuljanin@va.mod.gov.rs*

Милица Саватовић

*Универзитет у Београду, Електротехнички факултет, Булевар краља Александра 73, Београд
e-mail: milica.makragic@etf.rs*

Јуриј Архимед Курепа

*Универзитет одбране, Војна академија, Генерала Павла Јуришића Штурма 33, Београд
e-mail: jurijkurepa@gmail.com*

Апстракт. Теорија непокретне тачке је интердисциплинарна тема и њен развој је инициран и касније разгранат широком лезом примена у разним гранама математике. 1922. године је пољски математичар Стефан Банах доказао теорему да контрактивно пресликавање у комплетном метричком простору има јединствену непокретну тачку. Његова теорема се сматра једним од фундаменталних принципа функционалне анализе. Српски математичар проф. др Љубомир Тирић (1935-2016) је 1974. године дао један значајан резултат у вези са генерализацијом Банаховог контрактивног принципа који се у теорији назива квази-контракција. У свом плодотворном раду проф. Љубомир Тирић је написао преко 140 научних радова који су објављени у најпрестижнијим светским научним часописима. О значају резултата проф. Тирића говори чињеница да се у индексним базама његови радови цитирају неколико хиљада пута. У овом раду ћемо представити неке резултате проф. Тирића из теорије фиксне тачке на метричким просторима.

Кључне речи: непокретна тачка; функционална анализа; метрички простори.

Фракциона и тополошка уопштења једначине телеграфичара као модели електричног вода

Стеван Цветићанин

Универзитет у Новом Саду, Факултет техничких наука
Департман за енергетику, електронику и телекомуникације
Трг Доситеја Обрадовића 6, 21102 Нови Сад
e-mail: stevan.cveticanin@uns.ac.rs

Душан Зорица

Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет
Департман за физику
Трг Доситеја Обрадовића 3, 21102 Нови Сад
e-mail: dusan.zorica@df.uns.ac.rs

Апстракт. Анализирана су својства класичне једначине телеграфичара, као и утицај фракционих уопштења конститутивних релација електричних елемената на нивоу елементарног кола, чиме су у обзир узети меморијски ефекти, односно историја процеса поларизације и магнетизације. Тополошким уопштавањем елементарног кола вода, додавањем кондензатора у редну/проводну грану, уважени су ефекти нагомилавања слободног наелектрисања и утицаја везаног наелектрисања у редној/проводној грани. За сваку модификацију елементарног кола изведен је одговарајући математички модел у виду уопштене фракционе једначине телеграфичара и извршена је њихова класификација. Дате су функције преноса вода за сваку топологију, а за једну од њих одређен је и нумерички потврђен израз за сопствени одзив, те је урађена фреквенцијска и асимптотска анализа изабране функције преноса.

Кључне речи: меморијски ефекти, једначине телеграфичара; фракциона и тополошка уопштења; функције преноса; сопствени одзив.

Библиографија

- [1] **S. Cvetićanin, D. Zorica, M. Rapačić** Generalized time-fractional telegrapher's equation in transmission line modeling. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 88, 1453 - 1472.
- [2] **S. Cvetićanin, M. Rapačić, D. Zorica.** Tabu search. *Frequency analysis of generalized time-fractional telegrapher's equation, 23. European Conference on Circuit Theory and Design, ECCTD, Catania, 4-6 Septembar, 2017.*
- [3] **S. M. Cvetićanin.** Frakciono i topološko uopštenje jednačine telegrafičara kao model električnog voda. *Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, 2017.*
- [4] **S. Cvetićanin, D. Zorica, M. Rapačić** Frequency Characteristics of Two Topologies Representing Fractional Order Transmission Line Model. *Circuits Systems and Signal Processing*, 2020, 39, 1 - 18.
- [5] **S. Cvetićanin, D. Zorica, M. Rapačić** Non-local telegrapher's equation as a transmission line model. *Applied Mathematics and Computation*, 2021, 390, 125602 - 1 - 18.

Тестови независности за случајно цензурисане податке

Марија Цупарић

*Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, Београд
e-mail: marijar@matf.bg.ac.rs*

Бојана Милошевић

*Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, Београд
e-mail: bojana@matf.bg.ac.rs*

Апстракт. На предавању ће бити размотрени тестови независности две случајне величине када су подаци случајно цензурисани. Заправо, разматрају се три различите шеме цензурисања: само једна променљива је цензурисана, обе променљиве су цензурисане са различитим цензорима и обе променљиве су цензурисане са истим цензором. У сва три случаја биће размотрене су како већ постојеће тако и неке нове адаптације тестова формираних за случај потпуног узорка. Додатно, биће приказани гранични резултати, процедуре за реузорковање које се могу користити у случају малог узорка и узорка умерене величине, као и резултати емпиријских проучавања.

Кључне речи: Кендалов коефицијент; метод скалирања инверзом вероватноће цензурисања; бутстреп

Primena softverskih alata u nastavnom procesu sa specifičnim osvrtom na nastavu matematike i informatike

Elvir Čajić

*Osnovna škola Prokosovići Lukavac
e-mail: ecajic86@gmail.com*

Damir Bajrić

*Gimnazija Meša Selimović Tuzla
e-mail: bajric.damir@gmail.com*

Irma Ibrišimović

*PMF Tuzla-Prirodno matematički fakultet
e-mail: irma.zenunovic@gmail.com*

Melika Kovačević-Vujanović

*Osnovna škola Prokosovići/Osnovna škola Lukavac grad
e-mail: sokrat4@yahoo.com*

Apstrakt. Razvojem i implementacijom softverskih platformi, ostalih savremenih informacijisko- komunikacijskih tehnologija, kao i globalnih računarskih mreža imamo situaciju da čovjek niti jedan ozbiljan posao ne može raditi ako nije informatički pismen i sposoban da obavlja posao odnosno da živi sa računarom. Često pri popunjavanju novih radnih mjesta poslodavci uslovljavaju poznavanjem savremenih tehnologija, a radnici koji već rade dobivaju određeni vremenski rok da se adaptiraju i uključe u savremene tokove života koristeći savremenu tehnologiju ukoliko žele zadržati posao. Svakako da ovu situaciju možemo gledati sa pozitivnog i negativnog aspekta, međutim nepobitna je činjenica da su informatika i informatičke tehnologije zahuktala mašinerija koja se ne zaustavlja, te što se prije uključimo i prihvatimo istu, sve su veće šanse za napredovanje i uklapanje u savremene tokove života, odnosno mogućnost opstanka. U početku obično to biva velika obaveza, nerijetko i problem popraćen raznim negodovanjima, i nijekanjima dok kasnije se čovjek sve više i više oslanja na nju. Istraživanje će biti sistematsko i eksperimentalno koje ima deskriptivno-analitički karakter, a sprovođenje će se sa ciljem utvrđivanja zastupljenosti i rezultata primjene softverskih obrazovnih platformi u savremenom odgojno-obrazovnom procesu. U toku istraživanja koristit ćemo osnovne metode logičkog i naučnog saznanja; analizu, apstrakciju, specijalizaciju, dedukciju, sintezu, konkretizaciju, generalizaciju i indukciju. U ovom radu prikazati ćemo nekoliko rešenja za matematiku i informatiku .

Ključne reči: softwer, matematički softwer, nastavni proces, alat kao pomoćno sredstvo, programiranje.

Bibliografija

- [1] **D.Branković, D.Mandić, M.Ristić.** Metodika informatičkog obrazovanja sa osnovima informatike. *Operation Research*, Mediagraf, Beograd, 2003,17-29.
- [2] **D. Radosav.** Tabu search. *Obrazovni računarski softver i autorski sistemi Zrenjanin: Tehnički fakultet Mihajlo Pupin*, 2005.
- [3] **Ž. Papić, V. Aleksić.** Metodika nastave tehničkog i informatičkog obrazovanja. Univerzitet u Kragujevcu, *Tehnički fakultet, Čačak, 2012*, 2012.

O jednoj verziji zbira i proizvoda

Elvir Čajić

FET Tuzla/ Osnovna škola Prokosovići
e-mail: ecajic86@gmail.com

Valentina Banović-Klisara

Osnovna škola Vuk Stefanović Karadžić Novi grad-RS
e-mail: banovicvalentina@yahoo.com

Apstrakt. Zbir i proizvod za laike i nemaju baš previše dodirnih tačaka. Istina je posve drugačija. Osim što je množenje skraćeno sabiranje, postoji, za praktično djelovanje, važna osobina koja determiniše vezu između maksimalanog proizvoda i minimalnog zbira. Ovo i slična razmatranja nisu predmet interesa samo Teorije brojeva (stara Aritmetika), već zadiru i u druge matematičke discipline. Ovde će, na jednom mjestu u radu, biti pokazano kako jednu vezu zbira i proizvoda ispitujemo, analiziramo i donosimo zaključke, koristeći osobine i grafike linearne, odnosno kvadratne funkcije. Prezentirana veza između zbira i proizvoda pokazuje da često između, na prvi pogled, nespojivih pojmova postoje skrivene veze. Te veze otkrivamo misaonim procesima, čija je osnova duboko u suštini Logike i Matematike. Te dvije nauke se toliko isprepliću da je još uvijek prisutna dilema: "Da li Matematika logička ili je Logika matematička disciplina" ? Pitanje korespondira sa onim: "Šta je starije, kokoš ili jaje" ? Ne umanjujući značaj Logike, autor redova pred Vama, je bliži odgovoru da je "Logika matematička disciplina". I oni koji se sa tim odgovorom ne slažu, složiti će se da je otkrivanje spomenutih veza jedno neiscrpno polje, koje rađa rješenja, kojim olakšavamo mnoge probleme svakodnevnne ljudske prakse i djelovanja.

Ključne reči: brojne sredine, AG (GA) nejednakost, maksimalni proizvod, minimalni zbir..

Bibliografija

- [1] **M. Marjanović.** Metodika matematike, prvi deo, Učiteljski fakultet, Beograd, 1996. *Naučna knjiga*, 1996, 1, 72 - 93.
- [2] **S. Prvanović.** Tabu search. *Metodika savremenog matematičkog obrazovanja, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva Srbije, Beograd, 1970,1970*, pp. 51–86.
- [3] **Stevan Klačnja.** Elementarna matematika I (interna skripta), Prirodno matematički fakultet Sarajevo, 1971. *PMF Sarajevo*, 1971.

Finite-area holomorphic quadratic differentials on infinite surfaces

Dragomir Šarić

The Graduate Center and Queens College, The City University of New York (CUNY), USA
e-mail: Dragomir.Saric@qc.cuny.edu

Abstract. We study the space of finite-area holomorphic quadratic differentials on Riemann surfaces with infinitely generated fundamental groups. Our main result shows that the Brownian motion on a Riemann surface X is recurrent

if and only if a.e. horizontal trajectory of each finite-area holomorphic quadratic differential is recurrent. Then we establish the density of the Jenkins-Strebel differentials in the space of all integrable quadratic differentials when the Brownian motion on X is recurrent and extend Kerckhoff's formula for the Teichmüller metric in this case. Our methods depend on extending to infinite surfaces the Hubbard-Masur theorem describing which measured foliations can be realized by horizontal trajectories of finite-area holomorphic quadratic differentials.

Beyond Markovianity of heavy-tailed Pearson diffusions – fractional case

Nenad Šuvak

Department of Mathematics, J.J. Strossmayer University of Osijek, Croatia
e-mail: nsuvak@mathos.hr

Joint results with F. Avram (University of Pau, France), N.N. Leonenko (Cardiff University, UK),
I. Papić (University of Osijek, Croatia) and A. Sikorskii (Michigan State University, USA)

Abstract. Recent development in research of diffusions and anomalous diffusions is motivated by applications that require modeling of various phenomena by fractional PDEs.

In this talk we focus on Pearson diffusions and their fractional counterparts. Pearson diffusions are a class of diffusions governed by the Kolmogorov backward equation (KBE) with varying polynomial coefficients: the drift coefficient is polynomial of the first degree and the diffusion coefficient is polynomial of at most second degree. Pearson diffusions can be defined by specifying their Markovian nature: their transition density via the corresponding KBE and the distribution of the initial value. Fractional diffusions, due to their non-Markovian nature, generally cannot be defined by the governing equations and the initial distribution alone, and therefore for their definition alternative approaches are required.

In this talk we focus on one specific heavy-tailed Pearson diffusion, Fisher-Snedecor diffusion (FSD) and its fractional version (fFSD) obtained by time-change of the corresponding non-fractional diffusion by the inverse of the stable subordinator. We obtain the spectral representations for its transition density and describe some fFSD probabilistic properties. Finally, using properties of the spectrum of its generator, we provide explicit strong solutions to the KBE for fFSD.

Keywords: Pearson diffusion; Fractional diffusion; Stable subordinator; Transition density; Spectral representation.

References

- [1] N.N. Leonenko, I. Papić, A. Sikorskii, N. Šuvak. Correlated continuous time random walks and fractional Pearson diffusions. *Bernoulli*, 2018, 24/4B, 3603 - 3627.
- [2] N.N. Leonenko, I. Papić, A. Sikorskii, N. Šuvak. Heavy-tailed fractional Pearson diffusions. *Stochastic Processes and their Applications*, 2017, 127/11, 3512 - 3535.
- [3] N.N. Leonenko, M. Meerschaert, A. Sikorskii. Fractional Pearson diffusions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2013, 403/2, 532 - 546.
- [4] F. Avram, N.N. Leonenko, N. Šuvak. Spectral representation of transition density of Fisher-Snedecor diffusion. *Stochastics - An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 2013, 85/2, 346 - 369
- [5] F. Avram, N.N. Leonenko, N. Šuvak. On spectral analysis of heavy-tailed Kolmogorov-Pearson diffusions. *Markov Processes and Related Fields*, 2013, 19/2, 249 - 298.



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ДВАНАЕСТИ СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”
НАЦИОНАЛНИ СКУП СА МЕЂУНАРОДНИМ УЧЕШЋЕМ

Програм првог дана Симпозијума одржава се у свечаној Професорској сали Економског факултета Универзитета у Београду,
Каменичка 6

Програм другог дана Симпозијума одржава се у просторијама
Математичког факултета,
Студентски трг 16

ПРОГРАМ

1. ДАН, ПЕТАК 2. ДЕЦЕМБАР 2022.

10:00 – 11:50, Професорска сала Економског факултета

10:00 – 10:20
Отварање скупа: Зоран Ракић, декан Математичког факултета Универзитета у Београду Бранислав Боричић, проректор Универзитета у Београду Миодраг Матељевић, председник програмског одбора, академик САНУ
10:20 – 10:55
Gradimir Milovanović, Serbian Academy of Sciences and Arts <u>“Orthogonality on the unit semicircle in the complex plane”</u>
10:55 – 11:30
Miodrag Mateljević, Serbian Academy of Sciences and Arts / University of Belgrade, Faculty of Mathematics <u>“Boundary behaviour of partial derivatives for solutions to certain Laplacian-gradient inequalities and spatial QC maps”</u>
11:30 – 12:05
Dragomir Šarić, The Graduate Center and Queens College, The City University of New York (CUNY), USA <u>“Finite-area holomorphic quadratic differentials on infinite surfaces”</u>

Пауза за кафу и освежење 12:05 – 12:30

12:30 – 14:00, Професорска сала Економског факултета

Председавајући: Милош Арсеновић

12:30 – 13:00
Vladimir Dragović, University of Texas at Dallas, USA / MI SANU, Serbia (online) <u>“Bridging Statistics with Geometry and Mechanics”</u>
13:00 – 13:30
Luigi D’Onofrio, University of Napoli “Parthenope”, Italia <u>“Atomic decompositions, two stars theorems, and distances for the Bourgain–Brezis–Mironescu space”</u>

13:30 – 14:00

Andrea Seppi , Université Grenoble Alpes, Institut Fourier, France (online)
--

<u>“CMC foliations of quasi-Fuchsian manifolds”</u>

Пауза за кафу и освежење 14:00 – 14:15

14:15 – 15:45, Професорска сала Економског факултета

Председавајући: Марко Радовановић

14:15 – 14:45

Dragan Vukotić , Universidad Autónoma de Madrid, Spain

<u>“On some coefficient problems in geometric function theory”</u>
--

14:45 – 15:15

David Kalaj , Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Montenegro
--

Petar Melentijević , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
--

<u>“Gaussian curvature conjecture for minimal graphs”</u>

15:15 – 15:45

Goran Đanković , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
--

<u>“On special values of zeta functions associated to orders in quadratic number fields”</u>
--

Пауза за кафу и освежење 15:45 – 16:00

16:00 – 17:00, Професорска сала Економског факултета

Председавајући: Миљан Кнежевић

16:00 – 16:30

Fedor Mesinger , Serbian Academy of Sciences and Arts
--

<u>“The “dynamical core“ and skill of the Eta model for weather and climate”</u>
--

16:30 – 17:00

Vladimir Dragović , University of Texas at Dallas, USA / MI SANU, Serbia

Borislav Gajić , Mathematical Institute SANU

Božidar Jovanović , Mathematical Institute SANU
--

<u>“Gyroscopic Chaplygin Systems”</u>

17:00 Коктел

2. ДАН, СУБОТА 3. ДЕЦЕМБАР 2022.

I СЕКЦИЈА: МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ ДАНАС
10:00 – 17:20 САТИ, САЛА 718/IV

Први део: 10:00 – 12:10

Председавајући: Горан Банковић

10:00 – 10:20
Danko R. Jocić , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <u>“Noncommutative Schwarz lemma and Pick-Julia theorems in Schatten-von Neumann ideals”</u>
10:30 – 10:50
Oleg Ivrii , Tel Aviv University, Israel Mariusz Urbański , University of North Texas, Denton, USA <u>“Orbit counting for inner functions”</u>
10:50 – 11:10
Marijan Marković , Faculty of Sciences and Mathematics, University of Montenegro <u>“On Harmonic Functions on Convex Polyhedron Domains”</u>
11:10 – 11:30
Miloš Arsenović , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <u>“Unrestricted non-tangential limits for separately (α, β)-harmonic functions”</u>
11:30 – 11:50
Adel Khalfallah , Department of Mathematics and Statistics, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Saudi Arabia (online) <u>“A Khavinson Type Conjecture for Hyperbolic Harmonic Functions on the Unit Ball”</u>
11:50 – 12:10
David Kalaj , Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Montenegro Petar Melentijević , University of Belgrade, Faculty of Mathematics Jian-Feng Zhu , Huaqiao University, Quanzhou 362021, People’s Republic of China (online) <u>“L^p-theory for the Cauchy-transform on the unit disk”</u>

Пауза за кафу и освежење 12:10 – 12:30

Други део: 12:30 – 14:30

Председавајући: Небојша Икодиновић

12:30 – 12:50
Đorđije Vujadinović , Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Montenegro <u>“Carleson embedding theorem for the harmonic Fock spaces”</u>
12:50 – 13:10
Igor Uljarević , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <u>“Contact non-squeezing via selective symplectic homology”</u>
13:10 – 13:30
Aleksandra Marinković , University of Belgrade, Faculty of Mathematics Klaus Niederkrüger , Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1, France <u>“Symplectic circle actions on manifolds with a contact type boundary”</u>
13:30 – 13:50
Margaret Bayer, Mark Denker : University of Kansas, Lawrence, Kansas, USA Marija Jelić Milutinović , University of Belgrade, Faculty of Mathematics

Rowan Rowlands , University of Washington, Seattle, Washington, USA Sheila Sundaram , Pierrepont School, Westport, Connecticut, USA Lei Xue , University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, USA
<u>“Cut Complexes of Graphs”</u>
13:50 – 14:10
Danko R. Jocić , University of Belgrade, Faculty of Mathematics Stefan U. Milošević , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“Inequalities for generalized derivations of operator monotone functions in norm ideals of compact operators”</u>
14:10 – 14:30
Evgeny Sevost'yanov , Zhytomyr Ivan Franko State University, Ukraine (online)
<u>“Mappings with the inverse Poletsky inequality are discrete on the boundary”</u>

Пауза за кафу и освежење 14:30 – 15:00

Трећи део: 15:00 – 17:20

Председавајући: Маријан Марковић

15:00 – 15:20
Nevena Mijajlović , University of Montenegro, Podgorica, Montenegro Milojica Jaćimović , Montenegrin Academy of Sciences and Arts, Podgorica, Montenegro
<u>“Methods for solving quasivariational inequality”</u>
15:20 – 15:40
Радош Бакић , Универзитет у Београду, Факултет за образовање учитеља и васпитача
<u>„Геометрија полинома и теорема Грејса”</u>
15:40 – 16:00
Miloš Đorić , University of Belgrade, Faculty of Mathematics Mirjana Đorić , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“Yamabe solitons on hypersurfaces of nearly Kahler manifolds”</u>
16:00 – 16:20
Zoran Pucanović , University of Belgrade, Faculty of Civil Engineering Marko Pešović , University of Belgrade, Faculty of Civil Engineering
<u>“A note on some Chebyshev related integer sequences”</u>
16:20 – 16:40
Маринко Тимотијевић , Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет
<u>„Ауто-дуалне триангулације многострукости”</u>
16:40 – 17:00
Милош З. Петровић , Универзитет у Нишу, Пољопривредни факултет у Крушевцу
<u>„Уопштени Риманови простори у Ајзенхартовом смислу, димензије $n \in \{2, 3\}$ и одговарајући варијациони проблеми”</u>
17:00 – 17:20
Енес Качапор , Департман за природно-математичке науке, Државни универзитет у Новом Пазару
<u>„О бифуркацији оптимално обликованог итана са смицањем”</u>

I СЕКЦИЈА: МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ ДАНАС
15:00 – 17:40 САТИ, САЛА 704/IV

Председавајући: Ђорђе Вујадиновић

15:00 – 15:20
Miodrag Mateljević , Serbian Academy of Sciences and Arts Nikola Mutavdžić , Mathematical Institute SANU
<u><i>“On Lipschitz continuity and smoothness up to the boundary of solutions of hyperbolic Poisson’s equation”</i></u>
15:20 – 15:40
Jelena Gajić , Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Banja Luka, Republic of Srpska Miodrag Mateljević , University of Belgrade, Faculty of Mathematics Miloš Arsenović , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u><i>“Integral representation of separately (α, β)-harmonic functions”</i></u>
15:40 – 16:00
Ivana Savković , Faculty of Mechanical Engineering, University of Banja Luka, Republic of Srpska
<u><i>“Bergman projections on weighted mixed norm spaces”</i></u>
16:00 – 16:20
Anton Gjokaj , Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Montenegro
<u><i>“Lipschitz continuity of quasiconformal mappings with L^p Laplacian, $p > n$, between the unit ball B^n and a spatial domain with $C^{1,\alpha}$ boundary”</i></u>
16:20 – 16:40
Маша Ђорић , Математички институт САНУ Јелена Катић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u><i>„Полиномијална ентропија пресликавања индукованих хомеоморфизмима круга и интервала”</i></u>
16:40 – 17:00
Zora Golubović , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u><i>“On calculating sums of slowly convergent series”</i></u>
17:00 – 17:20
Данијела Бранковић , Универзитет у Београду, Електротехнички факултет
<u><i>„Аналитичко решење n-димензионалног Лотка–Волтериног динамичког система”</i></u>
17:20 – 17:40
Јасмина Фијуљанин , Универзитет одбране, Војна академија Милица Саватовић , Универзитет у Београду, Електротехнички факултет Јуриј Архимед Курепа , Универзитет одбране, Војна академија
<u><i>„Неки резултати из теорије непокретне тачке на метричким просторима”</i></u>

I СЕКЦИЈА: МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ ДАНАС
10:00 – 17:40 САТИ, САЛА ПЛАБ/IV

Први део: 10:00 – 12:10

Председавајући: Бојана Милошевић

10:00 – 10:30
Vlad Stefan Barbu , University of Rouen - Normandy, LMRS, France Thomas Gkelsinis , University of Rouen - Normandy, LMRS, France Alex Karagrigoriou , University of the Aegean, Greece
<u>“Goodness-of-fit and Homogeneity Tests Based on Weighted Divergence Measures”</u>
10:30 – 10:50
Nenad Šuvak , Department of Mathematics, J.J. Strossmayer University of Osijek, Croatia (online)
<u>“Beyond Markovianity of heavy-tailed Pearson diffusions - fractional case”</u>
10:50 – 11:10
Виктор Ејсмонт , Универзитет у Вроцлаву, одсек за телекомуникације и телеинформатику Бојана Милошевић , Универзитет у Београду, Математички факултет Марко Обрадовић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Тестови нормалности на основу нове карактеризације”</u>
11:10 – 11:30
Зоран Видовић , Универзитет у Београду, Учитељски факултет
<u>„Егзистенција и јединственост ММВ оцена параметара фамилије тропараметарских расподела на основу рекорда”</u>
11:30 – 11:50
Марија Цупарић , Универзитет у Београду, Математички факултет Бојана Милошевић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Тестови независности за случајно цензурисане податке”</u>
11:50 – 12:10
Тамара Милић , Универзитет у Београду, Математички факултет Ленка Главаш , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Динамички процес системског ризика са тренуцима обнављања”</u>

Пауза за кафу и освежење 12:10 – 12:30

Други део: 12:30 – 14:30

Председавајући: Марко Обрадовић

12:30 – 12:50
Војана Милошевић , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“On the role of empirical probability generating function in the GOF and independence testing”</u>
12:50 – 13:10
Žikica Lukić , University of Belgrade, Faculty of Mathematics Војана Милошевић , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“On equality of matrix distributions in the space of positive semi-definite random matrices”</u>
13:10 – 13:30
Dragan Stevanović , Mathematical Institute of Serbian Academy of Sciences and Arts
<u>“Enumerating lazy walks in threshold graphs”</u>
13:30 – 13:50
Иван Дрецун , Универзитет у Београду, Математички факултет Милан Банковић , Универзитет у Београду, Математички факултет Филип Марић , Универзитет у Београду, Математички факултет

<u>„Дедуктивни систем за верификацију (не)изоморфности графова”</u>
13:50 – 14:10
Никола Перић , Менаџер портфолиа пројеката, Mozart, Београд
<u>„Разматрање примене машинског учења у управљању портфолиом пројеката”</u>
14:10 – 14:30
Татјана Мирковић , Универзитет у Београду, Електротехнички факултет
Наташа Цировић , Универзитет у Београду, Електротехнички факултет
<u>„Примена Лапласове трансформације на функцију преноса на Time Scale”</u>

ПАУЗА за кафу и освежење 14:30 – 15:00

Трећи део: 15:00 – 17:40

Председавајући: Зоран Станић

15:00 – 15:20
Александар Савић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Проблем римске доминације”</u>
15:20 – 15:40
Александар Јовић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Један занимљив приступ за добијање услова екстремума у математичком програмирању уз додатне претпоставке регуларности”</u>
15:40 – 16:00
Јелена Тасић , Универзитет у Београду, Математички факултет
Зорица Дражић , Универзитет у Београду, Математички факултет
Зорица Станимировић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Метахеуристички приступ за решавање проблема p-next центра”</u>
16:00 – 16:20
Ђорђе Стакић , Универзитет у Београду, Економски факултет
<u>„Решавање векторског проблема паковања применом метахеуристичких метода”</u>
16:20 – 16:40
Зорица Миловановић Јекнић , Факултет за градитељски менаџмент, Универзитет Унион-Никола Тесла, Београд
Александра Делић , Универзитет у Београду, Математички факултет
Сандра Живановић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Апроксимација неких елиптичких трансмисионих проблема”</u>
16:40 – 17:00
Стеван М. Цветићанин , Универзитет у Новом Саду, Факултет техничких наука
Душан Зорица , Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет
<u>„Фракциона и тополошка уопштења једначине телеграфичара као модели електричног вода”</u>
17:00 – 17:20
Dušan Marčeta , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“A method for generating synthetic orbits of interstellar objects in the Solar system”</u>
17:20 – 17:40
Владимир Ђошовић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Примена нумеричких интегратора у астрономији”</u>

II СЕКЦИЈА: МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА У ОБРАЗОВАЊУ

10:00 – 17:20 САТИ, САЛА 706/IV

Први део: 10:00 – 12:00

Председавајући: Мирослав Марић

10:00 – 10:45
Миодраг Матељевић , Универзитет у Београду, Математички факултет / Српска академија наука и уметности Марек Светлик , Универзитет у Београду, Математички факултет <u>„Површина и запремина - неки интересантни феномени”</u>
10:45 – 11:30
Десанка Радуновић , Универзитет у Београду, Математички факултет Божидар Радуновић , Principal Researcher, Microsoft Research Cambridge <u>„Софтвер отвореног кода за вежбање математике у основним школама”</u>
11:30 – 12:00
Nives Baranović , Filozofski fakultet u Splitu, Hrvatska <u>„Otkrivanje matematičke poruke prikazane geometrijskom figurom”</u>

Пауза за кафу и освежење 12:00 – 12:30

Други део: 12:30 – 14:30

Председавајући: Нивес Барановић

12:30 – 13:00
Владимир Балгић , Математичка гимназија, ВИШЕР <u>„Проблеми екстремних вредности у основној и средњој школи”</u>
13:00 – 13:30
Милена Марић , Девета гимназија "Михаило Петровић Алас", Нови Београд Мирослав Марић , Универзитет у Београду, Математички факултет <u>„Финансијска писменост у настави математике”</u>
13:30 – 14:00
Manuela Muzika Dizdarević , Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu Almasa Odžak , Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu Aleksandar Lipkovski , Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet <u>„Kako učenici razumiju osnovne algebarske pojmove po završetku srednje škole?”</u>
14:00 – 14:30
Радослав Божић , Учитељски факултет, Универзитет Едуконс, Сремска Каменица / Гимназија „Светозар Марковић”, Нови Сад <u>„Образовни софтвер Геогедра и провера остварености исхода учења”</u>

Пауза за кафу и освежење 14:30 – 15:00

Трећи део: 15:00 – 17:20

Председавајући: Радослав Божић

15:00 – 15:20
Војислав Симоновић , Универзитет у Београду, Машински факултет Татјана Станковић , Београдска академија пословних и уметничких струковних студија
<u>„Занимљиви примери примене математике у машинству”</u>
15:20 – 15:40
Бојана Матић , Математичка гимназија, Београд
<u>„Хелијева теорема у додатној настави средње школе”</u>
15:40 – 16:00
Дејан Вурдеља , ЕТШ „Никола Тесла“, Земун
<u>„Математичке загонетке”</u>
16:00 – 16:20
Elvir Čajić , Osnovna škola Prokosovići Lukavac Damir Bajrić , Gimnazija Meša Selimović Tuzla Iрма Ibrišimović , PMF Tuzla-Prirodno matematički fakultet Melika Kovačević-Vujanović , Osnovna škola Prokosovići / Osnovna škola Lukavac grad
<u>„Primena softverskih alata u nastavnom procesu sa specifičnim osvrtom na nastavu matematike i informatike”</u>
16:20 – 16:40
Elvir Čajić , FET Tuzla / Osnovna škola Prokosovići Valentina Banović Klisara , Osnovna škola Vuk Stefanović Karadžić Novi grad-RS
<u>„O jednoj vezi zbira i proizvoda”</u>
16:40 – 17:00
Милош Мићовић , Жељана Торлак, Ивана Јововић, Наташа Ћировић: Универзитет у Београду, Електротехнички факултет
<u>„Алгоритми за дељење полинома и њихове примене”</u>
17:00 – 17:20
Јованка Свркота , Основна школа „Јован Поповић“, Нови Сад
<u>„Како заинтересовати ученике за наставу математике”</u>

III СЕКЦИЈА: НАУЧНОИСТРАЖИВАЧКИ И СТРУЧНИ РАД СТУДЕНАТА

Председавајући: **Кристина Костић**, асистент Математичког факултета Универзитета у Београду

12:30 – 12:50
Нина Коњикушић , Универзитет у Београду, Електротехнички факултет Ивана Јововић , Универзитет у Београду, Електротехнички факултет
<u>„Увод у ВСИ/ВСК-алгебре са примерима”</u>
12:50 – 13:10
Дино Спасовски , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Демпстер-Шаферове функције веровања на примерима политичких истраживања јавног мњења”</u>
13:10 – 13:30
Жељана Торлак , Милош Мићовић , Наташа Ћировић , Ивана Јововић : Универзитет у Београду, Електротехнички факултет
<u>„Примена две нумеричке методе за одређивање нула полинома”</u>
13:30 – 13:50
Лазар Васовић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Ублажавање пристрасности неуронских мрежа обртањем градијента”</u>
13:50 – 14:10
Вилдана Бакаревић , Data Scientist, Propeler Centar
<u>„Аутоматизована метода селекције параметара ТоМАТо алгоритма”</u>
14:10 – 14:30
Ognjen Petrov , University of Belgrade, Faculty of Mathematics Uroš Colović , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>„Computing bigraded Betti numbers as a method of distinguishing neighbourly polytopes”</u>

Пауза за кафу и освежење 14:30 – 15:00