Primjena Fouireorovog reda na talasne jednačine

Pripremili:

1. Prof.dr. Sead Rešić, pmf Tuzla
2. Aljić Adis, prof fizike Nikola Tesla Šamac
3. Bajrić Damir, Evropski univerzitet Kallos Tuzla
4. Čajić Elvir prof. Matematike i fizike,USRC“ Mostar“

I deo

Prof.Adis Aljić, Nikola Tesla Šamac

UVOD

U ovom radu fokusirat ćemo se na primjenu Fourierovog reda za rješavanje talasnih jednačina. Još od početka razvoja Fourierovog reda postalo je jasno da se može primjeniti u različitim granama nauka. Najveća pažnja ovog rada jeste fokus na probleme matematičke fizike Laplasova transformacija i Fourierov red. Naime Fourierov red je našao veoma široku primjenu u rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Osim toga Fourierov red se koristi u telekomunikacijama za ispitivanje signala, analitičkoj hemiji, kompresiji slike i slično. Sam Fourierov red predstavlja zbir sinusnih i kosinusnih periodičnih funkcija. Iz elementarne matematike nam je poznato da su osnovne funkcije sinus i kosinus periodične funkcije sa osnovnim periodom 2 pi radijana. Takve funkcije se veoma lahko aproksimiraju. Težište ovog rada je naslonjeno na primjenu u fizici. Dakle ovim radom se pokušava pokazati kako se jedan matematički alat može primjeniti na fiziku, to jest granu fizike zvanu talasi.

Talsane jednačine su pretežno predstavljene preko sinusnih i kosninusnih zakona. Recimo jednačina harmonijskog talasa predstavljena je kao y= A sin $(\omega t + \varphi_0)$. Gdje je y elongacija, A-amplituda talasa, ω-kružna frekvencija i φ_0 $-$početna faza oscilovanja. Sa ovim pojmovima smo se susretali još u srednjoj školi. Dakle harmonijski talas se može predstaviti sinusoidalnim i kosinusiodalnim funkcijama. A rješavanjem Fourierovog reda dobijaju se koefcijenti koji se nazivaju harmonci.

Postavlja se pitanje „Da li postoji neka veza između ova dva pojma ?“. Odatle i polazi ideja za ovu temu. Dakle rad se sastoji iz četiri dijela i to: sadržaj ili metodološki okvir istraživanja, teorijski okvir istraživanja, , praktični dio istraživanja i literature i izvora koji su korišteni. Veoma je važno naglasiti da navedena tema traži veliko predznanje iz raznih grana nauka u ovom slučaju matematike, fizike i informatike. Temu je moguće i produžiti međutim mi ćemo težište teme staviti na naš praktični prikaz primjene Fourierovog reda za rješavanje talasnih jednačina. Dakle Fourierovi redovi se mogu koristiti i za rješavanje toplotnih difuznih jednačina, ali i drugih problema u fizici koja kroz diskusiju i komentare možemo ponuditi za dalja istraživanja.

Problem i predmet istraživanja

Problem istraživanja ovog rada jeste na koji način se mogu rješavati parcijalne diferencijalne jednačine. Zbog obimnosti pojma parcijalne diferencijalne jednačine mi ćemo se ovdje konkretno bazirati na parcijalne diferencijalne jednačine koje su našle primjenu u fizci konkretno u predstavljanju talasa. Dakle predmet istraživanja ovog rada su parcijalne diferencijalne jednačine koje se mogu rješavati pomoću Fourierovog reda a svoju primjenu su našle u talasnim jednačinama i mogu se predstaviti pomoću talasa. Također ćemo se izučavati jednačine matematičke fizike. Pomoću jednačina, LaPlace-a, Dirhlea ispitivat ćemo i konkretnost za rješavanje nekih fizičkih problema.

Dakle postoji nekoliko metoda za rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina to su numerička metoda, metoda runge kuta, metoda najmanjih kvadarata. Sve te metode daju sa aspekta matematičke dokazivosti određena rješenja međutim metode rješavanja pomoću Fourierovog reda daje najjasniju definisanost za rješavanje parcijalnih jednačina sljedećih problema:

Jednodimenzionalna talasna jednačina: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ....(1.6)

Dvodimenzionalna Laplaceova jednačina : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.....................(1.7)

Jednodimenzionalna toplotna jednačina:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1.8)$$

Dvodimenzionalna Poisonova jednačina :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \qquad (1.9)$$

Trodimenzionalna Laplaceova jednačina:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (1.10)$$

Generalna hipoteza

- Fourierovi redovi se mogu koristiti za izračunavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog i drugog reda koje služe za rješavanje talasnih jednačina, a samim tim i za talase koji se rješavanjem ovih parcijalnih jednačina bolje mogu opisivati.

Posebna hipoteza

- Fourierovi redovi se mogu primjeniti i na rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina žice koj treperi.

- Fourierovi redovi se mogu primjeniti na talasne jednačine koje su opisane jednačinama oscilacija membrane.

- Fourierov metod razdvajanja promljenjivih je najčešći metod za rješavanje diferencijalnih jednačina koje opisuje neke konkretne fizičke probleme.

- Fourierovi redovi mogu praktično da nam pomognu da prikažemo kontinualno diskretni talasni paket pomoću softvera Matlab.

3.3. Indikatori: Redovi, diferencijalne jednačine, jednodimenizonalne i dvodimenzionalne

1. Diferencijalne jednačine

„**Definicija:** Diferencijalnom jednačinom nazivamo jednačinu koja izražava neku vezu između nezavisno promjenjive, nepoznate funkcije i njenih izvoda:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.)$$

Najviši red izvoda u toj jednačini nazivamo ***redom*** te diferencijalne jednačine.

Ako se može riješiti po izvodu najvišeg reda, diferencijalna jednačina n-tog reda ima oblik

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.2.)$$

Definicija: Rješenje diferencijalne jednačine je svaka funkcija koja identično zadovoljava tu jednačinu.

O diferencijalnoj jednačini prvog reda

Definicija: Jednoparametarsku porodicu funkcija

$$y=\varphi\left(x,C\right), \text{ ....(3.3.)}$$

Odnosno

$$\phi\left(x,y,C\right)=0, \text{..(3.4.)}$$

koja identično zadovoljava diferencijalnu jednačinu prvog reda $y'=f\left(x,y\right)$, odnosno $F\left(x,y,y'\right)=0$, nazivamo ***opštim rješenjem*** (opštim integralom) te jednačine.

Definicija: ***Opšte rješenje*** (opšti integral) diferencijalne jednačine n-tog reda je skup funkcija

$$y=\varphi\left(x,C_1,C_2,\ldots,C_n\right), \text{ ....(3.5.)}$$

odnosno

$$\phi\left(x,y,C_1,C_2,\ldots,C_n\right)=0, \text{.....................(3.6.)}$$

koji zavisi od n parametara $C_1,C_2,\ldots,C_n$ i koji identično zadovoljava tu diferencijalnu jednačinu.

Parcijalne diferencijalne jednačine

Neelementarne funkcije pod nazivom „specijalne“, nastale su kao rezultat rješavanja različitih matematičkih modela u fizici i tehničkim naukama, i to najčešće kao rješenja diferencijalnih jednačina. Njihove vrijednosti se ne mogu dobiti analitički (pomoću elementarnih funkcija), nego odgovarajućim numeričkim postupcima. Po formi mogu se podijeliti u dvije klase:

- Funkcije u formi određenih integrala,
- Funkcije u formi beskonačnih konvergentnih redova

Vrijednosti specijalnih funkcija su tabelirane u matematičkim priručnicima, a u softverskim proizvodima namijenjenim za matematičke proračune (Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab itd.) postoje odgovarajuće funkcije.

Parcijalna diferencijalna jednačina (PDE) je diferencijalna jednačina koja sadrži nepoznate multivarijabilne funkcije i njihove parcijalne izvode (To je u kontrastu sa običnim diferencijalnim jednačinama, koje obuhvataju funkcije jedne promjenjive i njihove derivate).

Parcijalne diferencijalne jednačine se mogu koristiti za opisivanje širokog opsega različitih fenomena kao što su zvuk, toplota, elektrostatika, elektrodinamika, protok fluida, elastičnost ili kvantna mehanika. Ove naizgled različite fizičke pojave se mogu slično formulisati u smislu parcijalnih diferencijalnih jednačina. Kao što obične diferencijalne jednačine najčešće opisuju jednodimenzionalne dinamičke sisteme, parcijalne diferencijalne jednačine se obično odnose na multidimenzionalne sisteme. Stohastičke parcijalne diferencijalne jednačine su generalizacija parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Fourierov red

Fourierov red predstavlja matematički alat koji se najčešće koristi za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina. Pomoću Fouroerovog reda pravljeni su mnogi matematički modeli za različite potrebe. Pa tako se Fourierova transformacija koristila za analizu signala, u hemijskom inženjerstvu, ekonomiji, fizici, elektrotehnici ali i u kompresiji podataka. Fourierov red predstavlja linearnu kombinaciju sinusnih i kosinusnih funkcija te se kao takav i predstavlja kao superpozicija za rješavanje toplotnih jednačina. Naime veoma je važno poznavati koje funkcije se mogu razviti u Fourierov red koji su potrebni i dovoljni uslovi za to i koji je interval ispitivanja.

Pri razvoju funkcije u Fourierov red, uslov je da je funkcija periodična. Prvo pitanje koje se postavlja - možemo li to napraviti i za neperiodične funkcije na nekom intervalu? Odgovor je: „da, ako ih učinimo periodičnima!“ Tada taj interval postaje period te funkcije i ponavlja se beskonačno mnogo puta. Iako sva razmatranja koja ćemo ovdje iznijeti vrijede za periodične funkcije nekog općenitog perioda $[-L/2, L/2]$, u ostatku teksta ćemo zbog jednostavnosti pretpostaviti da je posmatrana funkcija periodična na nekom intervalu $[-\pi,\pi]$. Dakle, za zadanu funkciju (ili signal, ako je funkcija zavisna od vremena) $f: R\to R$, periodičnu na $[-\pi,\pi]$, želimo pronaći brojeve $a_0, a_k, \phi k \in R$, za $k=1,\ldots,n$ tako da vrijedi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n\, sin\frac{2n\pi}{T}x\right),\ n\geq 0.$$

U ovom izrazu *ak* ima ulogu amplitude, a *ϕk* ulogu faze za sinus funkciju frekvencije *k*. Član $a_0/2$ je poseban i on služi za translaciju funkcije duž *y*-ose (često se naziva „DC komponenta”).

Ako u gornjem izrazu primijenimo adicijsku formulu za sinus funkciju,

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, vidimo da možemo zapisati Fourierov red i drugačije:

$$f(x)=a+\sum k=1n(a_k\sin(kx)\cos\phi k+a_k\cos(kx)\sin\phi k)....................(3.13.1.)$$

Primijetimo da u ovoj formuli $\sin\phi k$ i $\cos\phi k$ ne zavise ni o varijabli x ni o k - to su brojevi koji su dio koeficijenata uz $\sin(kx)$ i uz $\cos(kx)$. Stoga, možemo definisati nove koeficijente $ak,bk\in$R u kojima će implicitno biti uključeni i ϕk. Tako da nova formula izgleda ovako:

$$f(x)=a+\sum k=1n(a_k\sin(kx)+ b_k\cos(kx)),n\geq0..................................(3.14.)$$

Talasne jednačine

Dakle prije nastanka Fourierovog reda nije bilo rješenja toplotne jednačine. Toplotna jednačina nije ništa drugo nego parcijalna diferencijalna jednačina a samim tim i talasna jednačina. Fourierov red je opis oscilirajućih harmonijskih talasa predstavio pomoću dvije osnovne trigonometrijske funkcije sinus i kosinus.

Talasna jednačina je važna linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda koja opisuje prostiranje većine talasa, kao što su zvučni talasi, svjetlosni talasi i vodeni talasi. Koristi se u oblastima kao što su akustika, elektromagnetizam i dinamika fluida. Historijski problem vibrirajuće žice, kao što je ona na muzičkim instrumentima, proučavali su: Jean le Rond d'Alembert, Leonhard Euler, Daniel Bernoulli i Joseph Louis Lagrange.

Trigonometrijski Fourierovi redovi

Posebno mjesto među Fourierovim redovima zauzimaju tzv. Trigonometrijski Fourierovi redovi. U mnogim problemima fizike, hemije, matematike nameće se pitanje da se periodična funkcija f : R→ R osnovnog perioda 2π prikaže u obliku trigonometrijskog polinoma ili, opštije trigonometrijskog reda.

Neka funkcija f periodična sa osnovnim periodom T. Svakoj djelimičnoj neprekidnoj funkciji f na posmtaranom razmaku odgovara Fourierov red:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n\, sin\frac{2n\pi}{T}x\right),$$

koji se često naziva trigonometrijski Fourierov red. Brojevi a_n i b_n se zovi Fourierovi koeficijenti i određuju se pomoću slijedećih formula:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^b f(x) cos\,\frac{2n\pi}{T}x\mathrm{dx},\ \ (\mathrm{n}=1, 2, ...);\quad a_0 = \frac{2}{T}\int_a^b f(x)dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^b f(x) sin\,\frac{2n\pi}{T}x\mathrm{dx},\ \ (\mathrm{n}=1, 2, ...).$$

Ako je segment [a,b] simetričan oko ishodišta, odnosno ako je [a,b] $=[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$, onda se u slijedeća dva slučaja Fourierovih koeficijenata može znatno pojednostaviti:

1. ako je funkcija f(x) parna funkcija, tj. Ako je f(-x)=f(x), onda je

$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx = 2\int_{0}^{T/2} f(x)dx$, pa Fourierove koeficjente možemo

računati na slijedeći način:

$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)cos\,\frac{2n\pi}{T}x$dx, (n= 0, 1, 2, ... i b_n=0 za n = 1, 2, ...

1. ako je f(x) neparna funkcija, tj. Ako je f(-x) = -f(x), onda vrijedi da

je $\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx = 0$, pa Fourierove koeficijente možemo računati

na slijedeći način:

$a_n = 0$ za n=0,1,2,... i $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)sin\,\frac{2n\pi}{T}x$dx za n= 1,2,...

Slično kao i kod Taylorovog reda ovdje se postavljaju dva pitanja:

1. Da li Fourierov red funkcije $f(x)$ konvergira ?
2. Ako Fourierov red konvergira u tački $x \in R$ ka broju $S(x)$, da li je onda $S(x)= f(x)$, tj. Da li kovergentan red predstavlja funkciju f ?

Odgovori na ova pitanja su jako opširni tako da se slobodno može reći, može napraviti nova master teza na temu konvergencija Fourierovog reda. Međutim mi ćemo ovdje odgovore na ova pitanja pokušati predstaviti pomoću Dirichletove teoreme. Nakon toga ćemo pokazati koji su to uslovi koji Fourierov red mora zadovoljiti da bi konvergirao.

Teorema : Pretpostavke za funkciju f:[- π, π] $\rightarrow$ R su (tzv. Dirichletovi uslovi):

(a)postoji konačan skup A$\sqsubset$[-π, π] tako da je f neprekidna funkcija u svakoj tački skupa [-π, π] \ A. Ukoliko je A$\neq$ 0 onda svakoj tački skupa A funkcija f ima skok prve vrste;

(b)postoji podjela (subdivizija)

$$-\pi = x_0 < \cdots x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = \pi$$

segmenta [-π, π] na konačno mnogo dijelova takva da je funkcija f monotona na svakom segemntu [x_{i-1}, x_i] (i=1, ..., n).

Zaključak:

a) Fourierov red funkcije f konvergira za svaki relan broj x. Neka je S: R→ R funkcija koju taj red definiše.

b) Ako je f neprekidna u tački $x \in [-\pi, \pi]$ onda je f(x) = S(x).

c) Ako funkcija f ima prekid u $x \in [-\pi, \pi]$ onda je :

$$S(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

a) Na krajevima intervala je:

$$S(-\pi)= S(\pi)=\frac{f(-\pi_+)+f(\pi_-)}{2}$$

Ako funkcija nije periodična onda se njena restrikcija ili sama ta funkcija može periodički produžiti do funkcije f" definisane na skupu realnih brojeva. Neka je f periodična funkcija f sa osnovnim periodom od 2π te neka su ta funkcija i njen izvod djelimično neprekidni na [-π, π] tada važi:

Teorema Ako su periodična funkcija f sa osnovnim periodom 2π i njen izvod djelimično neprekidni , onda za $\forall\ x \epsilon R\ važi$:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n\ sin\frac{2n\pi}{T}x)\ ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x) cos\ \mathrm{nxdx},\ \ (\mathrm{n}= 0, 1, 2, ...);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x) sin\ nx\mathrm{dx},\ \ (\mathrm{n}=1, 2, ...).$$

Teorema 9 daje dovoljne uslove za razvoj funkcije u Fourierov red. Ako je uz navedene uslove f još i neprekidna funkcija u R onda vrijedi:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = f(x), \forall\ x \epsilon R.$$

Dakle pozivajući se na teorem 9 u prakitčnom dijelu ovog magistarskog rada mi ćemo predstaviti stepanastu, trouglastu i pravouganu funkciju f koja se može razviti u Fourierov red.

Fourierova transformacija

Fourierova transformacija se može shvatiti kao neprekinuti oblik Fourierovog reda. Fourierov red razlaže signal definisan na intervalu od [-π, π], na komponente koje osciliraju sa cjelobrojnim frekvencijama. Fourierova transformacija razlaže signal, definisan na beskonačnom vremenskom intervalu, na komponente s frekvencijama λ , gdje λ može biti bilo koji realan ili kompleksan broj. U ovom dijelu rada biti će predstavljena analogija između Fourierovog reda i transformacije.

Fourierova integralna formula

Kako bismo dobili Fouriierovu transformaciju, posmatrajamo Fourierov red funkcije definisane na intervalu -$l \leq x \leq l$, te ćemo pustiti da broj l teži u beskonačnosti. Funkciju definisanu na intervalu -$l \leq x \leq l$, možemo prikazati u obliku:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\pi x/l},$$

gdje je:

$$a_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t) e^{-in\pi t/l} dt.$$

Ukoliko je funkcija f definisana na čitavom skupu R, tada ćemo pustiti da parametar *l*, leži u beskonačnosti te pogledati šta se u tom slučaju događa sa navedenim formulama. Preciznije uvrstimo li izraz a_n u prethodnu sumu , dobijamo da je:

$$\text{f(x)}= \lim_{l\to\infty}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{\frac{-in\pi t}{l}}dt)e^{\frac{in\pi x}{l}}]$$

$$=\lim_{l\to\infty}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{\frac{-in\pi(x-t)}{l}}dt].$$

Sada ćemo na desnoj strani prethodne jednakosti prepoznati integralnu sumu odgovarajućeg integrala, što će nas dovesti do Fourierove integralne formule. U tu svrhu označimo $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$ i $\Delta\lambda=\lambda_{n+1}-\lambda_n=\frac{\pi}{l}$. Tada je :

$$f(x)=\lim_{l\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(t)e^{\lambda_n i(x-t)}dt]\Delta\lambda \qquad (1)$$

Neka je sada data funkcija :

$$F_l(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} f(t) e^{\lambda_n i(x-t)} dt \,.$$

Tada suma 1 postaje:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_l\,(\lambda_n)\Delta\lambda \,.$$

Uočimo kako prethodna relacija predstavlja integralnu sumu za integral $\int_{-\infty}^{\infty} F_l(\lambda)d\lambda$. Naime kada l teži u beskonačnost, veličina $\Delta\lambda$ konvergira ka nuli, pa $\Delta\lambda$ postaje $d\lambda$ u integralu $\int_{-\infty}^{\infty} F_l(\lambda)d\lambda$. Prema tome, relacija (1) sada ima oblik:

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_l(\lambda)d\lambda \,.$$

Dalje , ako $l \to \infty, F_l(\lambda)$ formalno postaje integral $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\lambda(x-t)}dt$. Zbog toga je:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\lambda(x-t)}dt\mathrm{d}\,\lambda\ ,$$

odnosno

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt)e^{i\lambda x}\ d\lambda \qquad (2)$$

Označimo sada sa $\hat{f}(\lambda)$ izraz unutar zagrada u prethodnoj formuli, odnosno:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt\,.$$

Funkcija $\hat{f}(\lambda)$ naziva se Fourierova transformacija funkcije f u kompleksnom obliku. S toga, relacija (2) sada ima oblik:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{-i\lambda x}d\,\lambda \qquad (3)$$

Relaciju 3 nazivamo Fourieorovom integralnom formulom ili inverznom Fourierovom transformacijom zato jer ona prikazuje funkciju f(x) u integralnom obliku koji uključuje Fourierovu transformaciju od f.

Prethodna razmatranja sada ćemo da opišemo u slijedećoj teoremi.

Teorema *Ako je f neprekidno diferencijabilna funkcija takva da je* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty, onda\ je$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\,\lambda \qquad (4)$$

pri čemu je $\hat{f}(\lambda)$ *Fourierova transformacija od f dana formulom:*

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt\,.$$

Razmatranja koja smo proveli na početku ove tačke nisu sasvim precizna, zato jer nismo obrazložili nekoliko koraka, među njima i konvergenciju nepravog integrala $\int_{-\infty}^{\infty} F_l(\lambda)d\lambda$. Dalje kod Fourierovih redova smo, uz određene uslove, imali i konvergenciju u tačkama prekida aritmetička sredina limesa slijeva i zdesna funkcije u tački prekida. Može se pokazati da osobine vrijede i kod Fourierove integralne formule, ali ovdje se nećemo baviti time.

Pretpostavka $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt < \infty$, u teoremi 10 je potrebna da bismo osigurali konvergenciju nepravog integrala kojim je definisana Fourierova transformacija $\hat{f}(\lambda)$.

Naime, tada je: $\left|\hat{f}(\lambda)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)e^{-i\lambda t}\right|dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt < \infty$,

pri čemu smo iskoristili činjenicu da je $\left|e^{-i\lambda t}\right| = 1$.

Analogija Fourierove transformacije i Fourierovog reda

Uočimo analogiju između Fourieorove transformacije funkcije f i odgovarajuće integralne formule te kompleksnog oblika Fourierovog reda od f na intervalu $-l \leq x \leq l$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f_n}\, e^{in\pi x/l} \tag{5}$$

gdje je

$$\widehat{f_n} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, e^{in\pi t/l} d$$

Varijabla λ u Fourierovoj integralnoj formuli (4) igra ulogu veličine $\frac{n\pi}{l}$ u relaciji (5). Beskonačna suma u relaciji (5) zamjenjena je nepravim integralom po varijabli λ u relaciji (4). Uočimo dalje, sličnost između formula $\widehat{f_n}$ i $\hat{f}(\lambda)$. Integral na intervalu [-*l*,*l*] u formuli za $\widehat{f_n}$ odgovara integralu na (-∞, ∞) u formuli $\hat{f}(\lambda)$. U slučaju Fourierovih redova $\widehat{f_n}$ predstavlja amplitudu harmonika od f koji ima frekvenciju n. Slično, $\hat{f}(\lambda)$ mjeri amplitudu komponente od f s frekvencijom λ. Ako je funkcija f definisana na konačnom intervalu onda znamo da se njezin Fourierov red sastoji od prebrojivo mnogo harmonika s cjelobrojnim frekvencijama. S druge strane, za funkciju na beskonačnom intervalu postoji kontinuirano, tj neprebrojivo mnogo frekvencijskih komponenti. Drugim riječima, transformacija $\hat{f}(\lambda)$ je definisana za $\lambda \in R$. Ova razmatranja ćemo ilustrirati praktično u programskom paketu matlab nešto kasnije.

Fourierov metod razdvajanja promjenljivih

Jedan od najkorisnijih metoda za određivanje traženih partiklularnih rješenja koje zadovoljavaju početne uslove ili konturne uslove matematičke fizike je Fourierov metod razdvajanja promjenljivih. Fourierov metod može se primjeniti na jednačine oblika:

$$a(x)\cdot r+c(y)\cdot t+d(x)\cdot p+e(y)\cdot q+(f_1(x)+f_2(y))\cdot u=0 \qquad (8)$$

s početnim uslovima

$$u(x,0)=g_1(x),\, u_y(x,0)=g_2(x), \qquad (9)$$

i konturnim uslovima:

$$A_1\cdot u(0,y)+A_2\cdot, u_x(0,y)=0,\, B_1\cdot u(l,y)+B_2\cdot u_x(l,y)=0, \qquad (10).$$

gdje su g_1, g_2 date funkcije i A_1, A_2, B_1, B_2 , l su date konstante.

Pretpostavimo da je reješenje problema (8)-(9)-(10) dato sa :

$$u(x,y)=X(x)\cdot Y(y) \qquad (11).$$

Ako postoji rješenje oblika (11) tada je neophodno da bude:

$$a(x)\cdot X''Y + c(y)\cdot XY'' + d(x)\cdot X'Y + e(y)\cdot XY' + (f_1(x) + f_2(y))\ \cdot XY = 0,$$

tj.,

$$a(x)\frac{X''(x)}{X(x)} + d(x)\frac{X'(x)}{X(x)} + f_1(x)$$

$$= -c(y)\frac{Y''(y)}{Y(y)} - e(y)\frac{Y'(y)}{Y(y)} - f_2(y) \qquad (12)$$

Pošto lijeva strana zavisi samo od x, desna samo od y, i kako su x i y nezavisni, i obje strane moraju biti jednake istoj konstanti, tj. imamo:

$$a(x)\frac{X''(x)}{X(x)} + d(x)\frac{X'(x)}{X(x)} + f_1(x) = -c(y)\frac{Y''(y)}{Y(y)} - e(y)\frac{Y'(y)}{Y(y)} - f_2(y) = -\lambda,$$

gdje je λ konstanta. Tako dobijamo dvije obične diferencijalne jednačine:

$$a(x)X'' + d(x)X' + f_1(x)X + \lambda X = 0, \tag{13}$$

$$c(y)Y'' + e(y)Y' + f_2(y)Y - \lambda Y = 0\ . \tag{14}$$

Da bi rješenje zadovoljilo uslove (10), mora biti

$$A_1X(0) + A_2X'(0) = 0,\ B_1X(l) + B_2X'(l) = 0 \tag{15}$$

Na problem (13)-15 možemo primjeniti Šturm-Liuvilovu teoriju, na osnovu koje zaključujemo da postoji beskonačno mnogo sopstvenih vrijednosti λ_1,$\lambda_2, ...$, za koje postoje netrivijalna rješenja tog problema. Neka su X_n, n=1,2,... označene odgovarajuće sopstvene funkcije. Označimo opšte rješenje jednačine (14) koje odgovara vrijednosti $\lambda = \lambda_n$ sa Y_n. To rješenje oblika :

$$Y_n(y) = R_n {Y_n}^{(1)}(y) + S_n {Y_n}^{(2)},$$

gdje su R_n, S_n, n=1,2,..., proizvoljne konstante, a ${Y_n}^{(1)}, {Y_n}^{(2)}$ linearno nezavisna partikularna rješenja jednačine (14) za $\lambda = \lambda_n$, n=1,2,....

Odredimo funkcije ${Y_n}^{(1)}, {Y_n}^{(2)}$ tako da su ispunjeni slijedeći uslovi:

$$Y_n{}^{(1)}(0) = 1, Y_n{}^{(1)}(0) = 0, Y_n{}^{(2)}(0) = 0, Y_n{}^{(2)} = 1. \quad (16)$$

Na osnovu principa linearne superpozicije, dobijama slijedeća rješenja jednačine (8) koje zadovoljavaju uslove (10):

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)(R_n\, Y_n{}^{(1)}(y) + S_n Y_n{}^{(2)}(y). \qquad (17)$$

Da bi (17) zadovoljilo početne uslove (9) na osnovu (16) zaključujemo da je neophodno da bude:

$$g_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n X_n(x) \text{ i } g_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n X_n(x),$$

Čime je problem sveden na razvijanje funkcija g_1 i g_2 u red po sopstvenim funkcijama X_n. Čime smo pokazali Fourieorv metod razdvajanja promjenljivih.

Dakle naša posebna hipoteza koja je glasila:« „*Fourierov metod razdvajanja promljenjivih je najčešći metod za rješavanje diferencijalnih jednačina koje opisuje neke konkretne fizičke probleme*“ je konkretno pokazana na datom problemu. U nastavku ćemo jos neke od fizičkih problema rješavati ovom metodom čime ćemo potvrditi istinitost naše postavljene hipoteze.

II-DEO

Bajrić, Damir,Evropski Univerzitet Kallos Tuzla

Talasna jednačina i rješavanje pomoću Fourierovog reda

Talasna jednačina je važna parcijalna diferencijalna jednačina kojom se opisuje prostiranje talasa. Talasi mogu biti: zvučni, elektromagnetni, vodeni ,itd., ali se svi prostiru na istom principu sažetom u talasnu jednačinu. Talasna jednačina se javlja i koristi u akustici, elektromagnetizmu, optici, dinamici fluida, elektrotehnici. Najzanačajniji doprinos rješenju problema opisivnaja oscilacija i prostiranja talasa dali su Žan D Almbert, Leonard Ojler, danijel Bernuli i Žoze –Luj Langrange. Talasna jednačina je tipičan primjer hiperboličke parcijalne diferencijalne jednačine. U najjednostavnijem obliku, talasna jednačina se odnosi na skalarnu veličinu u koja zadovoljava

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{t}^2} = \boldsymbol{c}^2 \Delta \boldsymbol{u},$$

gdje je c konstantna brzina talasa a $\Delta = \boldsymbol{\nabla}^2$ **je Laplasijan.** Za zvučne talase u vazduhu na 20°C brzina c iznosi oko 343 m/s. Za oscilirajuću žicu brzina može da se mijenja u velikom opsegu jer zavisi od linearne gustine žice i njene zategnutosti. Mnogo realističniji model jednačine talasa uzima u obzir disperziju, tj. zavisnost brzine talasa od njegove frekvencije. Tada se brzina c zamjenjuje faznom brzinom $v_p = \frac{\omega}{k}$.

U nastavku ćemo talasnu jednačinu razmatrati sa više aspekata i rješavati niz problema koji iz nje izviru.

Oscilacije membrane

Sada ćemo rješavati talasnu jednačinu kao jednačinu poprečnih oscilacija membrane (tanke opne) koja se rasteže, ali ne savija, tj. kreće se paralelno sa Oz osom pod ravnomjernim djelovanjem sile rastezanja f_0 i koja kad se nalazi u stanju ravnoteže, leži u xOy ravni. U tom slučaju je položaj u, tačke membrane , funkcija od x, y i t koja zadovoljava jednačinu analognu jednačini strune

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t) \qquad (1)$$

u kojoj je $c^2 = \frac{f_0}{\rho}$, ρ površinska gustina a f vanjska sila. Tražićemo ono rješenje jednačine (1) koje zadovoljava takozvani rubni uslov:

u=0 na (C), (2)

tj posmatrati slučaj kada je kraj membrane učvrščen. Osim toga potrebno je dati i početnne uslove kojim su određeni kretanje i brzina svih tačaka membrane u početnom momentu:

$$\boldsymbol{u/_{t=0} = \phi_1(x,y)}, \qquad \boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0} = \phi_2(x,y)}$$

(3)

Oscilacije membrane koje nastaju bez uticaja vanjskih sila, tj. f=0, poznate su pkao slobodne oscilacije membrane. Prema tome , slobodne oscilacije membrane se mogu predstaviti talasnom jednačinom :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad (4)$$

koja, u polarnim koordinatama glasi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}) \qquad (5)$$

Rješenje ove jednačine dobijamo pomoću Fourierove metode razdvajanja promjenljivih tj. u obliku:

$$u(r,\theta, t) = R(r)\odot(\theta)T(t).$$

Jednačina 5 se tada raspada na tri obične diferencijalne jednačine:

1. $T''(t) + \lambda^2 c^2 T(t) = 0$ jednačina harmonijskih oscilacija
2. $\odot''(\theta) + n^2 \odot(\theta) = 0$ jednačina harmonisjkih oscilacija
3. $r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda^2 r^2 - n^2) R(r) = 0$ Besselova jednačina

Svi proizvodi $R(r)\odot(\theta)T(t)$ rješenja ove tri obične diferencijalne jednačine opisuju osnovne oscilacije membrane, dok funkcije $R(r)\odot(\theta)$ opisuju oblik te membrane. Da bismo odredili oscilacije date membrane pod određenim početnim uslovima biramo kombinaciju fundamentalnih rješenja tako da budu zadovoljeni početni uslovi. Slučaj kružne membrane je ujedno i primjer razlaganje date funkcije po Besselovim funkcijama koji je značajan i zbog toga što se takva razlaganja veoma često koriste u rješavanju drugih važnih problema matematičke fizike. Ovim smo dokazali našu posebnu hipotezu koja je glasila." *Fourierovi redovi se mogu primjeniti na talasne jednačine koje su opisane jednačinama oscilacija membrane*".

Dakle uvidjeli smo da se talasna jednačina može predstaviti pomoću jednačine za oscilaciju membrane. Jednačinu smo predstavili u opštem obliku i pomoću Fourierove metode razdvajanja promljenjivih smo dobili poznate difrencijalne jednačine. Dakle ovdje smo parcijalnu diferencijalnu jednačinu pomoću Fourierove metode razdavajanja promljenjivih sveli na obične diferencijalne jednačine i to dvije jednačine harmonijskih oscilacija i jednu jednačinu po Besselovim funkcijama čime smo i dokazali našu posebnu hipotezu.

Slobodne oscilacije pravougaone membrane

Posmatrat ćemo slobodne oscilacije membrane tj. slučaj oscilacija koje nastaju bez uticaja vansje sile f=0 za koje je kontura pravougaonik koji leži u X-Y ravni sa stranama paralelnim y, odnosno x osi, određen sa:

(A): x=0, x=a; y=0, y=b,

Znači tražićemo ono rješenje jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

koje zadovoljava uslove

u=0 na (A) i (2)

$$u/_{t=0} = \phi_1(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0} = \phi_2(x,y) \qquad (3)$$

Pošto je riječ o ispitivanju slobodnih oscilacija pravougaone membrane u x-y koordinatnom sistemu problem koji ova membrana definiše predstavlja problem dvodimenzionalne talasne jednačine. Što je takođe jedan od problema ovog magistarskog rada koji ćemo riješiti Fourierovom metodom.

Primjenjujući Fourierorov metod, potražimo partikularno rješenje jednačine (1) u obliku:

$$u(x,y,t)=(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\, v(x,y), \tag{4}$$

Zamjenom ćemo dobiti jednačinu:

$$-\omega^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t)v(x,y) =$$

$$c^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)(A\cos\omega t + B\sin\omega T),$$

koja se ako uvedemo smjenu:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{5}$$

svodi na jednačinu po v:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 v = 0.$$

Potražimo sada njeno rješenje u obliku proizvoda

$$v(x,y) = X(x)Y(y) \tag{6}$$

Dobićemo jednačinu:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + k^2 X(x)Y(y) = 0$$

koja se može napisati u obliku

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y'' + k^2 Y}{Y} = -\lambda^2$$

gdje je λ zasad neodređena konstanta.

Odavde se dobijaju dvije obične diferencijalne jednačine

$$X^{''} + \lambda^2 X = 0 \qquad i \qquad Y^{''} + \mu^2 Y = 0,$$

(7)

gdje je

$$\mu^2 = k^2 - \lambda^2, \quad tj.\, \lambda^2 + \mu^2 = k^2 \,.$$

(8)

Opšta rješenja jednačine (7) su redom :

X(x)=$C_1 sin\lambda x + C_2 cos\lambda x$

Y(y)=$D_1 sin\mu y + D_2 cos\mu y$

(9)

Na osnovu u= 0, na konturi (A), dolazimo do zaključka

$$v(x,y)=0 \text{ na } (A),$$

iz kojeg , s obzirom na (6) i (9) dobijamo po dva uslova za funkcije X(x) i Y(y) i to:

$$X(0)=0 \quad , \quad X(a)=0$$

$$Y(0)=0 \quad , \quad Y(b)=0,$$

što ima za posljedicu $C_2 = D_2 = 0$. Ako za preostale konstante, u (9) uzmemo $C_1 = D_1 = 1$, (9) će se svesti na

$$X(x)=\sin \lambda x \, , \qquad Y(y) = \sin \mu y \, , \qquad (10)$$

Uz uslov da je

$$\sin \lambda a = 0, \qquad \sin \mu y = 0. \qquad (11)$$

Iz jednačine (11) dobijamo beskonačno mnogo vrijednosti:

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots, \qquad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}$$

$$\mu = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots, \qquad \mu_m = \frac{n\pi}{b} \qquad (12)$$

Izaberemo li po jednu vrijednost λ i μ iz nizova (12), odgovarajuća vrijednost konstante k^2 će prema (8) biti jednaka:

$$k_m{}^2 = \lambda_m{}^2 + \mu_m{}^2 = \pi^2 (\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})$$

dok će njima prema (5) odgovarati frekvencije:

$$\omega_{mn}{}^2 = c^2 k_{mn}{}^2 = c^2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right) \ . \tag{13}$$

Ako sada zamjenimo, u izrazu (4) $\lambda\ sa\ \lambda_m$, odnosno $\mu\ sa\ \mu_m$ i označimo sa A_{mn} i B_{mn} odgovarajuće vrijednosti konstanti A i b, redom , dobićemo beskonačno mnogo rješenja problema (1) + (2) oblika:

$$(A_{mn} cos\ \omega_{mn}\mathrm{t}+B_{mn}\sin\omega_{mn}\mathrm{t}) sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b} \tag{14}$$

Tj beskonačno mnogo svojsvetnih slobodnih harmonijskih oscilacija membrane, koje inače ulaze u sastav oscilirajuće žice.

Odredimo konstante A i B, pomoću početnih uslova, uvrštavanjem t= 0, u rješenje u= u(x,y,t) , dobijeno linearnom superpozicijom rješenja (14), i u njegov izvod tj, u formule:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{mn}cos\,\omega_{mn}t + B_{mn}\,sin\,\omega_{mn}t)sin\frac{m\pi x}{a}sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{mn}(B_{mn}cos\,\omega_{mn}t - A_{mn}sin\,\omega_{mn}t)sin\frac{m\pi x}{a}sin\frac{n\pi y}{b}\,.$$

Uz saglasnost (3), dobićemo :

$$u/_{t=0} = \phi_1(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}sin\frac{m\pi x}{a}sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big/_{t=0} = \phi_2(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\omega_{mn}\,sin\frac{m\pi x}{a}sin\frac{n\pi y}{b}$$

Pošto ove formule predstavljaju razvoj funkcija $\phi_1 \; i \; \phi_2$ u dvostruki Fourierov red, lahko se zaključuje da se koefcijenti A i B mogu odrediti pomoću formula:

$$\omega_{mn}A_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a \int_0^b \phi_1(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a} sin\frac{n\pi\eta}{b} d\xi d\eta$$

$$\omega_{mn}B_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a \int_0^b \phi_2(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a} sin\frac{n\pi\eta}{b} d\xi d\eta \qquad (15)$$

čime je rješen postavljeni problem.

Do sada smo se bazirali na rješavanje fizikalnih problema matematičkim jednačinama koje su bile jednačine hiperboličkog tipa i uvidjeli smo da uz odgovarajuće početne i rubne uslove Fourierov red nalazi primjenu.

Slučaj trodimenzionalne sredine

Postavimo sada slijedeći problem: Odrediti ono rješenje parcijalne jednačine:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) \qquad (x,y,z \in R, t > 0), \qquad (1)$$

koje zadovoljava početni uslov

$$U(x,y,z,0)=f(x,y,z) \ (x,y,z \in R) \qquad (2)$$

gdje je f data funkcija.

Rješenje jednačine (1) potražimo sada u obliku:

$$U = e^{-rt}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\cos c(z-\gamma). \qquad (3)$$

Iz (3) dobijamo:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -rU,\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -a^2 U, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -b^2 U, \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -c^2 U,$$

(4)

i zamjenjujući vrijednosti (4) u (1) nalazimo da je:

$$-r = -k^2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Dakle, rješenje jednačine (1) oblika (3) je:

$U =$

$e^{-k^2(a^2+b^2+c^2)t} \cos a(x-\alpha) \cos b(y-\beta) \cos c(z-\gamma,)$ pa

je na osnovu principa linearne superpozicije,

$$U = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty F(a,b,c,\alpha,\beta,\gamma)\, e^{-k^2(a^2+b^2+c^2)t}$$
$$\times \cos a(x - \alpha) \cos b(y - \beta) \cos c(z - \gamma) da db dc d\alpha d\beta d\gamma$$

takođe rješenje jednačine (1), gdje je F proizvolna funkcija sa 6 promjenljivih.

Pretpostavimo sada da je F$(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ = G(α, β, γ).

Kako je:

$$\int_0^\infty e^{-k^2a^2t}\cos a\,(x-\alpha)d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{k\sqrt{t}}\exp(-\frac{(x-\alpha)^2}{4k^2t}),$$

$$\int_0^\infty e^{-k^2a^2t}\cos a\,(y-\beta)d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{k\sqrt{t}}\exp(-\frac{(y-\beta)^2}{4k^2t}),$$

$$\int_0^\infty e^{-k^2a^2t}\cos a\,(z-\gamma)d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{k\sqrt{t}}\exp(-\frac{(z-\gamma)^2}{4k^2t}),$$

imamo

$$U = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty G(\alpha,\beta,\gamma)\, e^{-k^2(a^2+b^2+c^2)t} \times \cos a(x-\alpha) \cos b(y-\beta) \cos c(z-\gamma) da db dc d\alpha d\beta d\gamma$$

$$=$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty G(\alpha,\beta,\gamma) d\alpha d\beta d\gamma \times \int_0^\infty e^{-k^2a^2t} \cos a(x-\alpha) d\alpha \times \int_0^\infty e^{-k^2b^2t} \cos b(y-\beta) db \times \int_0^\infty e^{-k^2c^2t} \cos c\,(z-\gamma) dc$$

$$= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{k^3 t^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty G(\alpha,\beta,\gamma) \exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}{4k^2t^2}\right) d\alpha d\beta d\gamma.$$

Uvedimo smjene $\frac{\alpha-x}{2k\sqrt{t}}=\xi$, $\frac{\beta-y}{2k\sqrt{t}}=\eta, \frac{\gamma-z}{2k\sqrt{t}}=\varsigma$. Tada imamo da je $d\alpha d\beta d\gamma=8k^{3}t^{\frac{3}{2}}d\xi d\eta d\varsigma$ te poslednji integral postaje:

$$\frac{8}{\pi^{\frac{3}{2}}}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}G\left(x+2k\xi\sqrt{t},y+2k\eta\sqrt{t},z+2k\varsigma\sqrt{t}\right)e^{-\left(\xi^{2}+\eta^{2}+\varsigma^{2}\right)}d\xi d\eta d\varsigma \quad (5)$$

Stavljajući posljedni uslov (2) u (5), nalazimo:

$$8\pi^{\frac{3}{2}}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}G(x,y,z)e^{-\left(\xi^{2}+\eta^{2}+\varsigma^{2}\right)}d\xi d\eta d\varsigma=f(x,y,z),$$

odakle je:

$$G(x,y,z) = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}} f(x,y,z),$$

jer je

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\xi^2+\eta^2+\varsigma^2)} d\xi d\eta d\varsigma = \pi^{\frac{3}{2}}.$$

Prema tome rješenje problema trodimenzionalne sredine uz početne uslove dato je sa:

$$U(x,y,z,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f\left(x + 2k\xi\sqrt{t}, y + 2k\eta\sqrt{t}, z + 2k\varsigma\sqrt{t}\right) e^{-(\xi^2+\eta^2+\varsigma^2)} d\xi d\eta d\varsigma.$$

Laplaceov operator. Laplaceova jednačina.

Diferencijalni operator drugog reda

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (1)$$

Nazivamo Laplaceovim operatorom ili laplasianom i on je, najvjerovatnije , najznačajniji operator matematičke fizike. U najvažnijim koordinatnim sistemima dvodimenzionalnog i trodimenzionalnog prostora lpalasian izgleda ovako:

Dvodimenzionalni prostor:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ (u pravouglim koordinatama)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$ (u polarnim koordinatama)

Trodimenzionalni prostor:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$ (u pravouglim koordinatama)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$ (u cilindričnim koordinatama)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{ctg\,\varphi}{\partial r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(sin\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$ (u sfernim koordinatama)

Laplasian se može smatrati poopštenim izvodom, izvoda drugog reda, funkcije jedne promjenljive, na višedimenzionalni slučaj.

Jednačina $\Delta u = 0$, u kojoj je u nepoznata funkcija naziva se Laplaceovom jednačinom. Laplaceova jednačina ima beskonačno mnogo rješenja. Rješava se na isti način kao i prethodno rješavani problemi matematičke fizike, primjenom metoda razdvajanja promjenljivih ili metoda proizvoda ili kraće Fourierovom metodom., Svaka funkcija koja je neprekidna i ima neprekidne izvode prvog i drugog reda u nekoj oblasti d, pored toga, zadovoljava Laplaceovu jednačinu u toj oblasti naziva **harmonijskom funkcijom**

O harmonijskoj funkciji njenom predstavljanju i zakonima koji vladaju bit će govora malo kasnije. Pokazuje se da je funkcija

$$u(x,y,z)=\frac{1}{r}\text{, gdje je r}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

harmonijska u svakoj oblasti koja ne sadrži tačku (x_0, y_0, z_0). Funkcija u=$\frac{1}{r}$ se zove fundamentalnim rješenjem Laplaceove jednačine (1) u trodimenzionalnom prostoru. Analogno bi se došlo do zaključka da je funkcija $u(x,y)=\frac{1}{r}$, gdje je r=$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, harmonijska u svakoj oblasti, koja ne sadrži tačku (x_0, y_0). I ona se zove fundamentalnim rješenjem Laplaceove jednačine u dvodimenzionalnom prostoru. Dobro poznata veza između harmonijskih i analitičkih funkcija:

Ako je funkcija

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\ ,\ z=x+iy\ (x,y\in R)$$

analitička u nekoj oblasti, tada se nen realni dio u(x,y) i imaginarni dio v(x,y) harmonijske funkciej u toj oblasti.

Vidimo da su za Laplaceov operator jedino u parvouglom koordinatnom sistemu koeficijenti uz izvode konstantni, što ima za posljedicu da se problemi u drugim koordinatnim sistemima rješavaju teže.

Laplasian funkcije omogućava da se izvrši procjena funkcije u nekoj tački pomoću vrijednosti koje ona ima u sussjednim tačkama.

Prema tome, može se odrditi rješenje jednačine u nekoj oblasti prostora koje na graničnim dijelovima oblasti prima unaprijed zadane vrjednosti.

III deo

Elvir Čajić,prof matematike i fizike,USRC Mostar

PRAKTIČNI PRIKAZ TALASA POMOĆU FOURIERA U PROGRAMSKOM PAKETU MATLAB .

.

Programski kod br 1.

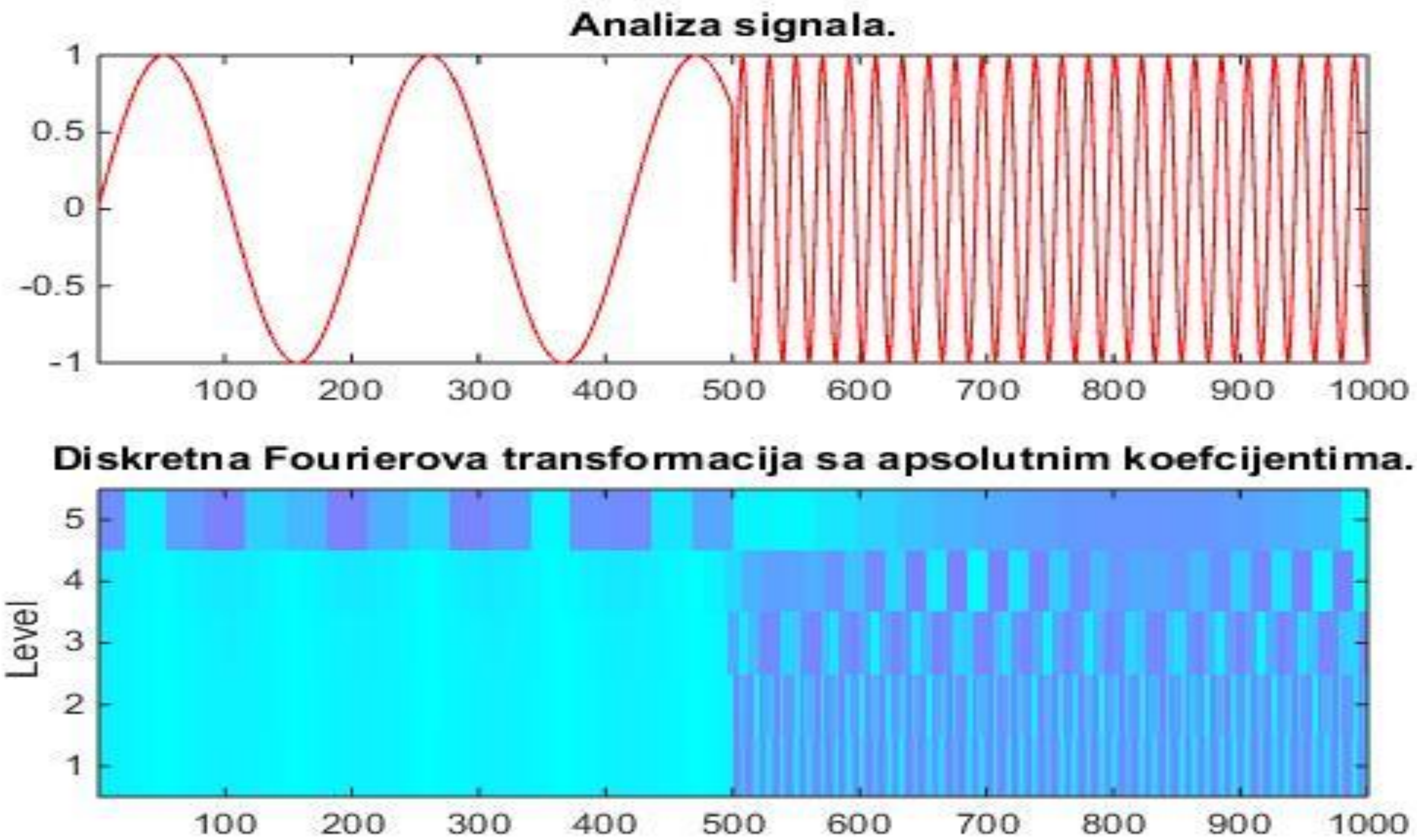
Prvo ćemo naredbom load učitati frekvencije tj., raspon u kome će biti predstavlejn signal harmonijskog oscilatora predstavljen jednačinom y= A sin ωt 0 frekventnom području [0,2π].

```
load freqbrk;

signal = freqbrk;

>> lev   = 5;

wname = 'db1';

nbcol = 64;

[c,l] = wavedec(signal,lev,wname);

>> len = length(signal);

cfd = zeros(lev,len);
```

```
for k = 1:lev
    d = detcoef(c,l,k);
    d = d(:)';
    d = d(ones(1,2^k),:);
    cfd(k,:) = wkeep1(d(:)',len);
end
cfd =  cfd(:);
I = find(abs(cfd)<sqrt(eps));
cfd(I) = zeros(size(I));
cfd    = reshape(cfd,lev,len);
cfd = wcodemat(cfd,nbcol,'row');
h211 = subplot(2,1,1);
h211.XTick = [];
plot(signal,'r');
title('Analiza signala.');
ax = gca;
ax.XLim = [1 length(signal)];
subplot(2,1,2);
colormap(cool(128));
```

```
image(cfd);

tics = 1:lev;

labs = int2str(tics');

ax = gca;

ax.YTickLabelMode = 'manual';

ax.YDir = 'normal';

ax.Box = 'On';

ax.YTick = tics;

ax.YTickLabel = labs;

title('Diskretna Fourierova transformacija sa apsolutnim koefcijentima.');

ylabel('Level');

>>
```

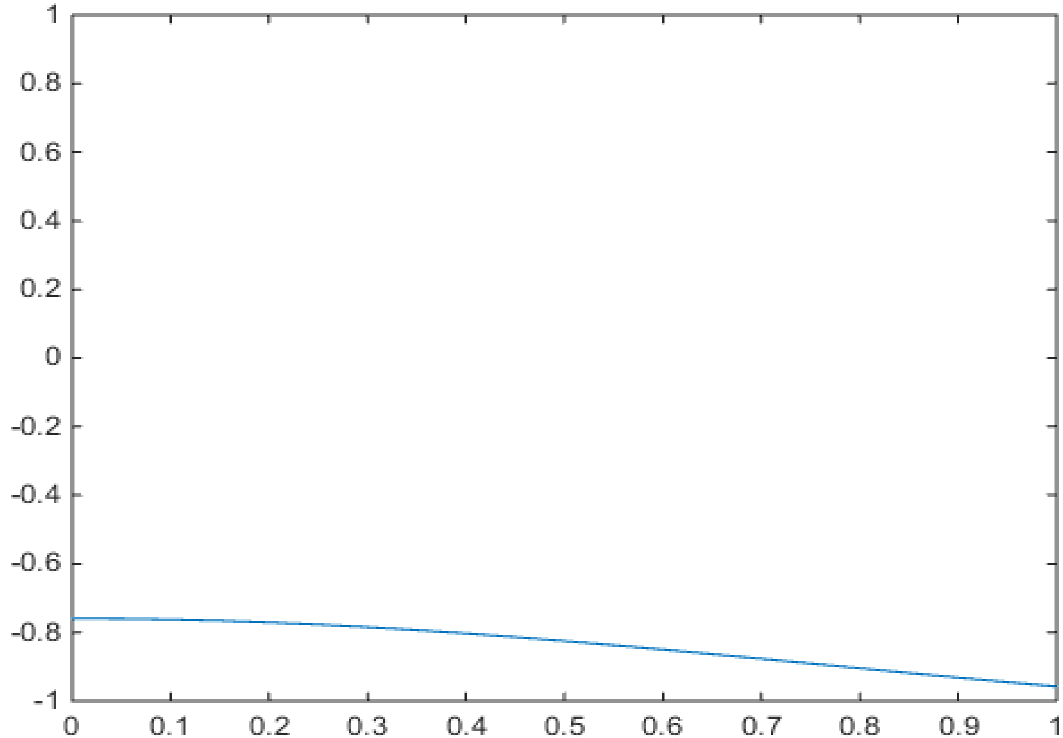
Programski kod broj 1 objašnjenje: Prvo smo u programskom paketu matlab unijeli podatke za neki signal koji može predstavljati harmonijski oscilator koji se mijenja po zakonu y=A sin($\omega t + \varphi$). Učitali smo vrijednosti amplitude elongacije, perioda oscilovanja. Nakon toga smo naredbom plot iscrtali navedeni signal u obliku prostiranja mehaničkih talasa. Cilj ove master teze jeste slikovito predstaviti na koji način se može naći veza između FDFT i talasa. U ovom primjeru smo se bazirali na koefcijente DFT i kao izlaz dobili sljedeći dijagram:


Analiza signala.
1
0.5
0
-0.5
-1
100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
Diskretna Fourierova transformacija sa apsolutnim koefcijentima.
Level
5
4
3
2
1
100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

```
a=1;b=1;c=1; %// koeficjenti parcijalne diferencijalne jednacine
dx=0.05; %// razmak prostornih mreža
x=(0:dx:1).'; %// prostorna mreža
N=length(x);
%// matrica diferencijacije, koristeæi centrirano diferenciranje u unutrašnjim tackama
M=diag(ones(1,N-1),-1)+diag(-2*ones(1,N))+diag(ones(1,N-1),1);
M(1,1:3)=[1 -2 1]; %// i diferenciranje naprijed / nazad na granicama
M(end,(N-2):N)=[1 -2 1];

%// Naš u vektor je [u1; u2], tako da derivacija mora biti [u2; M * u1-u2-u1]
%// plus korekcija graniènih uslova
dudt=@(t,u)[[-c*sin(c*t);u(N+2:end-1);-c*sin(1+c*t)];
   c^2*M*u(1:N)/(dx^2)-a*u(N+1:end)-b*u(1:N)];

options=odeset('MaxStep',dx); %// neka vrsta CFL stanja, nisam radio



[t,u]=ode45(dudt,[0 15],[cos(x);-c*sin(x)],options); %// ime-stepping koristeæi ode45
                        % // poèetni uslov je [v; dv / dt] pri t = 0
```

```
for i=1:length(t) %// Pogledajmo rezultat
    plot(x,u(i,1:N))
    axis([0 1 -1 1])
    drawnow
    pause(0.01)
end
```

TELEGRAFSKA JEDNAČINA



Kraj

Pitanja ?