Prsteni trigonometrijskih polinoma

Milica Savatović

Elektrotehnički fakultet
Univerzitet u Beogradu

milica.makragic@etf.bg.ac.rs

18.11.2017.

Pregled

1. Pojam trigonometrijskog polinoma
2. Prsten $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$
3. Prsten $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$
    - Faktorizacija
    - Nerastavljivi elementi
4. Algoritmi kod trigonometrijskih polinoma

Pojam trigonometrijskog polinoma

Trigonometrijski polinomi su u velikoj meri zastupljeni u različitim oblastima matematike i njenim primenama, kao na primer u:

- interpolaciji periodičnih funkcija,
- teoriji aproksimacija,
- realnoj i kompleksnoj analizi,
- numeričkoj analizi,
- diskretnoj Furijeovoj transformaciji,
- obradi signala,
- mašinstvu itd.

Pojam trigonometrijskog polinoma

U matematičkoj i numeričkoj analizi pod trigonometrijskim polinomom podrazumevamo konačnu linearnu kombinaciju funkcija $\sin nx$ i $\cos nx$, za prirodan broj n. Označimo redom sa

$$T = \left\{ \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \mid n \in \mathbb{N},\ a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\} \tag{1}$$

i

$$T^c = \left\{ \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \mid n \in \mathbb{N},\ a_k, b_k \in \mathbb{C} \right\} \tag{2}$$

skupove trigonometrijskih polinoma sa realnim i kompleksnim koeficijentima.
Stepen nenultog trigonometrijskog polinoma, definiše se kao najveća vrednost n za koju a_n i b_n nisu istovremeno jednaki nuli.

Pojam trigonometrijskog polinoma

Realni trigonometrijski polinomi formiraju prsten. Stepeni realnih trigonometrijskih polinoma imaju osobine kao i stepeni običnih polinoma.

Lema

Proizvod dva realna trigonometrijska polinoma, stepena m i n, je realan trigonometrijski polinom stepena $m + n$.

Napomena

Proizvod dva kompleksna trigonometrijska polinoma je kompleksan trigonometrijski polinom. Ono što se razlikuje kod kompleksnih, u odnosu na realne trigonometrijske polinome, su osobine njihovih stepena. Naime, stepen proizvoda dva kompleksna trigonometrijska polinoma, redom stepena m i n, ne mora uvek biti $m + n$. Postoje uslovi pod kojima je stepen ovog proizvoda manji od $m + n$.

Zaključak: Skup svih (realnih i kompleksnih) trigonometrijskih polinoma obrazuje prsten, štaviše obrazuje domen.

Pojam trigonometrijskog polinoma

Prema osnovnim trigonometrijskim identitetima, očigledno je da za svako $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, funkcija $\cos nx$ predstavlja polinom po $\cos x$ stepena n, dok funkcija $\sin nx$ predstavlja proizvod funkcije $\sin x$ i polinoma po $\cos x$ stepena $n-1$. Ovo ilustrujemo sledećim primerom:

Primer

1) Za funkciju $\cos nx$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ važi:

$\cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1;$

$\cos 3x = 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x;$

$\cos 4x = 8 \cdot \cos^4 x - 8 \cdot \cos^2 x + 1;$

$\cos 5x = 16 \cdot \cos^5 x - 20 \cdot \cos^3 x + 5 \cdot \cos x;$

$\vdots$

$\cos 10x = 512 \cdot \cos^{10} x - 1280 \cdot \cos^8 x + 1120 \cdot \cos^6 x - 400 \cdot \cos^4 x + 50 \cdot \cos^2 x - 1;$

$\vdots$

Pojam trigonometrijskog polinoma

2) Za funkciju $\sin nx$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ važi:
$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$;
$\sin 3x = \sin x \cdot (3 - 4\sin^2 x)$;
$\sin 4x = \sin x \cdot (4 \cdot \cos x - 8 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x)$;
$\sin 5x = \sin x \cdot (5 - 20 \cdot \sin^2 x + 16 \cdot \sin^4 x)$;
$\vdots$

$$\sin 10x = \sin x \cdot (10 \cdot \cos x - 160 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x + 672 \cdot \sin^4 x \cdot \cos x \\ -1024 \cdot \sin^6 x \cdot \cos x + 512 \cdot \sin^8 x \cdot \cos x);$$

$\vdots$

Obrnuto, svaki proizvod $\cos^n x \cdot \sin^m x$ se može zapisati kao $\sum_{k=0}^{q}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $q \in \mathbb{N}$, $a_k,\ b_k \in \mathbb{Q}$, što se dokazuje sledećom teoremom:

Teorema

Za $n, m \in \mathbb{N}$ razlikujemo sledeće slučajeve:

(i) ako su n i m neparni brojevi

$$\cos^n x \cdot \sin^m x = \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n+m}{2}-1} (-1)^{\frac{m-1}{2}+k} \left(\sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{m}{k-r} \sin\left((n+m-2k)x\right) \right)$$

(ii) ako je n paran i m neparan broj

$$\cos^n x \cdot \sin^m x = \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n+m-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}+k} \left(\sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{m}{k-r} \sin\left((n+m-2k)x\right) \right)$$

(iii) ako je n neparan i m paran broj

$$\cos^n x \cdot \sin^m x = \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n+m-1}{2}} (-1)^{\frac{m}{2}+k} \left(\sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{m}{k-r} \cos\left((n+m-2k)x\right) \right)$$

Pojam trigonometrijskog polinoma

(iv) ako su n i m parni brojevi

$$\cos^n x\cdot\sin^m x=\frac{1}{2^{n+m-1}}\left(\sum_{k=0}^{\frac{n+m}{2}-1}(-1)^{\frac{m}{2}+k}\left(\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}\cos\left((n+m-2k)x\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(-1)^{\frac{2m+n}{2}}\sum_{r=0}^{\frac{n+m}{2}}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{m}{\frac{n+m}{2}-r}\right).$$

Zaključak: Iz prethodnog razmatranja može se zaključiti da je $\mathbf{T}=\mathbf{R}[\cos x,\sin x]$ i $\mathbf{T}^c=\mathbf{C}[\cos x,\sin x]$, tj. T i $\mathbf{T}^c$ su prsteni trigonometrijskih polinoma redom nad poljima R i C.

Prsten $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$

$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ i $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \Longrightarrow$ element $z \in T^c = \mathbb{C}[\cos x, \sin x]$ može se napisati u obliku:

$$z = e^{-inx} P(e^{ix}), \ n \in \mathbb{N}, \ P(X) \in \mathbb{C}[X], \ \deg(P) = 2n.$$

Obrnuto, $e^{ix} = \cos x + i \sin x \Longrightarrow e^{-inx} P(e^{ix}) \in T^c$, za $n \in \mathbb{N}$ i $P(X) \in \mathbb{C}[X]$. Dakle, postoji izomorfizam $f : \mathbb{C}[X]_S \longrightarrow T^c$, uz uvodjenje homomorfizma $X \longrightarrow e^{ix}$ kao smene.

Zaključak: Prsten trigonometrijskih polinoma sa kompleksnim koeficijentima, $\mathbf{T^c}$, izomorfan je lokalizaciji prstena $\mathbf{C}[X]$ u odnosu na multiplikativan skup $S = \{1, X, X^2, \ldots\}$, u oznaci $\mathbf{C}[X]_S$.

Svaki element z iz $\mathbb{C}[X]_S$ je oblika $X^k P(X)$, za $k \in \mathbb{Z}$, $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ i $P(0) \neq 0$.

Prsten $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$

- $\mathbb{C}[X]$ je Euklidov domen $\Longrightarrow$ njegova lokalizacija u odnosu na multiplikativan skup S, tj. $\mathbb{C}[X]_S$, je Euklidov domen.
- funkcija φ, poznata kao Euklidov algoritam, koja definiše Euklidov domen $\mathbb{C}[X]_S$, data je sa $\varphi(z) = \deg(P)$.
- invertibilni elementi domena T^c su: elementi skupa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, stepeni elemenata z i z^{-1} i proizvodi nenultih kompleksnih konstanti i stepena elemenata z i z^{-1}, za $z = \cos x + i \sin x$ i $z^{-1} = \cos x - i \sin x$.

Kao posledica prethodnih zapažanja važi sledeća teorema:

Teorema

$T^c = \mathbb{C}[\cos x, \sin x]$ je Euklidov domen sa količničkim poljem $K^c = \mathbb{C}(\cos x)[\sin x]$. Nerastavljivi elementi u T^c su, do na invertibilne elemente, trigonometrijski polinomi oblika $\cos x + i \sin x - a$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Prsten $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$

Važi implikacija: A je Euklidov domen $\Longrightarrow$ A je domen sa jednoznačnom faktorizacijom. Dakle, važi sledeća teorema:

Teorema

$\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$ je domen sa jednoznačnom faktorizacijom.

Posledica

Neka je $z = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, tako da je $(a_n, b_n) \neq (0, 0)$. Neka je d zajednički delitelj celih brojeva k takvih da je $(a_k, b_k) \neq (0, 0)$. Tada z ima jednoznačnu faktorizaciju:

$$z = \lambda(\cos nx - i \sin nx) \prod_{j=1}^{\frac{2n}{d}} (\cos dx + i \sin dx - \alpha_j), \text{ gde } \lambda, \alpha_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Prsten $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ – faktorizacija

Prsten realnih trigonometrijskih polinoma T ima zanimljive karakteristike. Identitet

$$\sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x),$$

je primer nejednoznačne faktorizacije u domenu T.

Napomena

Ova jednakost nije primer nejednoznačne faktorizacije u domenu kompleksnih trigonometrijskih polinoma T^c, s obzirom na oblik nerastavljivih elemenata u T^c.

Faktori $\sin x$, $1 - \cos x$ i $1 + \cos x$ nisu nerastavljivi u T^c.

Prsten $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ – faktorizacija

Važi:

$$\sin x = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^{-1}(z-1)(z+1)}{2i},$$

$$1 - \cos x = \frac{-z + 2 - z^{-1}}{2} = \frac{-z^{-1}(z-1)^2}{2},$$

$$1 + \cos x = \frac{z^{-1}(z+1)^2}{2},$$

tako da obe strane jednakosti $\sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$ postaju

$$\frac{-z^{-2}(z-1)^2(z+1)^2}{4},$$

kada ih izrazimo kao proizvod nerastavljivih faktora u T^c.

Prsten $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ – faktorizacija

Tvrdjenje

Prsten $T = \mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ je izomorfan sa $\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$.

Teorema

$T = \mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ nije domen sa jednoznačnom faktorizacijom.

Teorema

$\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ je Dedekindov polu-faktorijalan domen.

Prsten $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ – nerastavljivi elementi

Definicija

Neka je $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k x + \left(\sum_{j=0}^{p} b_j \cos^j x\right) \sin x$, $a_k, b_j \in \mathbb{R}$. Stepen trigonometrijskog polinoma P definiše se kao

$$\delta(P) = \begin{cases} \sup\{k, j+1 \mid a_k, b_j \neq 0\}, & \text{za } P \neq 0 \\ -\infty, & \text{za } P = 0. \end{cases}$$

Odavde sledi formula $\delta(PQ) = \delta(P) + \delta(Q)$ za svako $P, Q \in T$.

- trigonometrijski polinomi stepena jedan su nerastavljivi elementi u T.
- invertibilni elementi u T su elementi skupa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Teorema

Nerastavljivi elementi u $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ su oblika

$$a \cos x + b \sin x + c, \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \ (a, b) \neq (0, 0).$$

Prsten $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ – nerastavljivi elementi

Posledica

Neka je $z = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, gde je $(a_n, b_n) \neq (0,0)$. Neka je d zajednički delitelj celih brojeva k takvih da je $(a_k, b_k) \neq (0,0)$. Tada je z proizvod n/d elemenata oblika $a \cos dx + b \sin dx + c$ za $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b) \neq (0,0)$.

Posledica

Za bilo koji nenulti i neinvertibilan element $z \in \mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ postoji jednoznačna faktorizacija, do na redosled atoma u faktorizaciji i do na množenje invertibilnim elementima, oblika $z^2 = uz_1 \cdot \ldots \cdot z_n$, gde $u \in \mathbb{R}_+$, z_j su nerastavljivi elementi oblika

$$a_j \cos x + b_j \sin x + 1 + \frac{1}{4}(a_j^2 + b_j^2), \ (a_j, b_j) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

i $n = 2\delta(z)$.

Prsten $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ – nerastavljivi elementi

Zaključak: Jednakost

$$\sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x),$$

gde su $\sin x$, $1 - \cos x$ i $1 + \cos x$ nerastavljivi elementi u T, je primer nejednoznačne faktorizacije u T.

Algoritmi kod trigonometrijskih polinoma

Proučavanje trigonometrijskih polinoma nad poljem $\mathbb{Q}$ svodi se na ispitivanje osobina domena $\mathbb{Q}[s, c]$ po modulu $s^2 + c^2 - 1 = 0$.

Definicija

Definišimo relaciju $\equiv$ sa $p \equiv q \iff s^2 + c^2 - 1 \mid p - q$, u domenu $\mathbb{Q}[s, c]$.

Definicija

Definišimo preslikavanje $\phi : \mathbb{Q}[s, c] \longrightarrow \mathbb{Q}[s, c]$ sa $\phi(p) = p \bmod s^2 + c^2 - 1$, pri čemu s^2 menjamo sa $1 - c^2$.

Lema

Neka je $p \in \mathbb{Q}[s, c]$. Tada je $\phi(p)$ jedinstven element u $\mathbb{Q}[s, c]$, oblika $A(c)s + B(c)$ ekvivalentan sa p.

Algoritmi kod trigonometrijskih polinoma

Definicija

Za $p \in \mathbb{Q}[s, c]/(s^2 + c^2 - 1)$ definišemo trigonometrijski stepen od p, u oznaci $TD(p)$, kao $TD(p) = \deg_{s,c}(\phi(p))$, gde je $\deg_{s,c}$ stepen polinoma $\phi(p(s, c))$.

Primer

Polinom $p = s^2 + c^2$ je stepena 2, ako ga posmatramo kao običan polinom u $\mathbb{Q}[s, c]$. Ako ga posmatramo kao trigonometrijski polinom, njegov trigonometrijski stepen je 0, s obzirom da je $\phi(p) = 1$.

Lema

Neka $p, q \in \mathbb{Q}[s, c]/(s^2 + c^2 - 1)$. Tada je $TD(pq) = TD(p) + TD(q)$.

Algoritmi kod trigonometrijskih polinoma

Jedan od načina za uprošćavanje količnika trigonometrijskih polinoma i faktorizaciju u domenu $\mathbb{Q}[s,c]/(s^2+c^2-1)$ je smena $\tan\frac{x}{2}$, koju ćemo označiti sa t. Tada važi: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ i $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Definicija

Definišimo $\psi_t : \mathbb{Q}[s,c] \longrightarrow \mathbb{Q}(t)$ sa $\psi_t(p(s,c)) = p(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})$.

Lema

Neka je $p \in \mathbb{Q}[s,c]/(s^2+c^2-1)$ tako da je $TD(p) = d$. Tada je $\psi_t(p) = \frac{a(t)}{(1+t^2)^d}$, gde $a(t) \in \mathbb{Q}[t]$, tako da je $\deg_t(a) \leq 2d$ i $1+t^2 \nmid a(t)$.

Da bismo iskoristili ovaj homomorfizam prstena, potrebno je i vratiti prethodno navedenu t-smenu, tj. izraziti t preko s i c i time pretvoriti racionalnu funkciju po t u trigonometrijski polinom. To postižemo smenom $t = \frac{1-c}{s}$.

Algoritmi kod trigonometrijskih polinoma

Teorema

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $a(t)$ polinom za koji važi $1 + t^2 \nmid a(t)$ i $\deg_t(a) \leq 2n$. Tada postoji jedinstven trigonometrijski polinom $\hat{a}$, trigonometrijskog stepena n, tako da je $\psi_t(\hat{a}) = \frac{a(t)}{(1+t^2)^n}$.

Definicija

Nenulti element $p \in \mathbb{Q}[s, c]/(s^2 + c^2 - 1)$ je nerastavljiv ako
a) p nije invertibilan element, tj. ako $p \notin \mathbb{Q}$,
b) ako je $p = ab$, sledi da je jedan od a ili b invertibilan element.

Algoritmi kod trigonometrijskih polinoma

Teorema

Neka $p \in \mathbb{Q}[s,c]/(s^2+c^2-1)$ i neka je p neinvertibilan element (tj. TD $(p) \geq 1$). Tada važi:

(a) ako je $TD(p)=1$, tada je p nerastavljiv trigonometrijski polinom,

(b) ako je $TD(p)>1$, tada je p nerastavljiv trigonometrijski polinom akko

(i) $\deg_t(NU(\psi_t(p))) \geq 2TD(p)-1$,

(ii) $NU(\psi_t(p))$ je nerastavljiv polinom u $\mathbb{Q}[t]$ ili je $NU(\psi_t(p))$ proizvod dva nerastavljiva polinoma u $\mathbb{Q}[t]$, pri čemu su oba neparnog stepena.

Primer

Neka je $p = sc$. Najpre tražimo sliku trigonometrijskog polinoma p pri preslikavanju $\psi_t(p)$:

$$\psi_t(p) = \psi_t(sc) = \frac{2t(1+t)(1-t)}{(1+t^2)^2}.$$

Svaki faktor slike trigonometrijskog polinoma p pri preslikavanju ψ_t mora imati imenilac $1 + t^2$ na neki stepen. Stoga, trigonometrijski polinom p može imati najviše dva faktora, s obzirom da je stepen polinoma $1 + t^2$ u imeniocu racionalne funkcije $\psi_t(p)$ jednak 2. Primenjujući prethodnu teoremu, vidimo da su moguće faktorizacije od $\psi_t(p)$:

$$2 \cdot \frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{(1+t)(1-t)}{1+t^2}, \quad 2 \cdot \frac{1+t}{1+t^2} \cdot \frac{t(1-t)}{1+t^2} \quad i \quad 2 \cdot \frac{1-t}{1+t^2} \cdot \frac{t(1+t)}{1+t^2}.$$

Algoritmi kod trigonometrijskih polinoma

Ove faktorizacije odgovaraju trima različitim faktorizacijama trigonometrijskog polinoma p, redom:

$$2(1/2s) \cdot c = sc,$$

$$2(1/2(c+s+1)) \cdot (1/2(c+s-1)) = 1/2(c+s+1)(c+s-1)$$

i

$$2(1/2(c-s+1)) \cdot (1/2(-c+s+1)) = 1/2(c-s+1)(s-c+1).$$

Algoritmi kod trigonometrijskih polinoma

Definicija (Alternativna definicija trig NZD-a)

Neka je A domen i neka $a, b \in A$. Element $g \in A$ je najveći zajednički delitelj elemenata a i b ako:
(1) $g \mid a$ i $g \mid b$, i
(2) ako $p \mid (a/g)$ i $p \mid (b/g)$, tada je p invertibilan element.

Primer

Neka je $a = s(1+c)$ i $b = -c^2 + cs + s + 1$. Kao u prethodna dva primera, faktorišemo trigonometrijske polinome a i b: $a = s(c+1)$ i $b = (c+s+1)s = (-c+s+1)(1+c)$. Dakle, s i $1+c$ dele i a i b, pa bi, prema klasičnoj definiciji NZD-a, imali da je NZD trigonometrijskih polinoma a i b, ako postoji, deljiv i sa s i sa $1+c$. Dakle, s i $1+c$ dele NZD i NZD deli $a = s(1+c)$, pa je NZD $= s(1+c)$. Medjutim, NZD $= s(1+c)$ ne deli b, pa dobijamo kontradikciju. Stoga, može se zaključiti da su i s i $1+c$ najveći zajednički delitelji trigonometrijskih polinoma a i b.

Algoritmi kod trigonometrijskih polinoma

Primer

Neka je $a = -5c^3 + 5sc^2 - 5c^2 + 2cs + c + 9s + 9$ i
$b = -c^5 + 17c^4 - 7sc^4 + 6c^3 - 16sc^3 + 2c^2 - 14sc^2 - 21c - 24cs - 3 - 3s$.
Kao u prethodnim primerima, dobijamo:

$$\psi_t(a) = 8\frac{t(t+1)(t^3+2)(t+2)}{(1+t^2)^3},$$

$$\psi_t(b) = 32\frac{t(t+1)(t^3+2)(t^5-2)}{(1+t^2)^5}.$$

$t(t+1)(t^3+2)$ nije slika NZD-a trigonometrijskih polinoma a i b pri preslikavanju ψ_t, jer ne možemo rasporediti tri faktora $(1+t^2)$, u imeniocu racionalne funkcije $\psi_t(a)$, izmedju $t(t+1)(t^3+2)$ i $(t+2)$, tako da oba ova faktora budu slike trigonometrijskih polinoma. Ono što možemo je da slike trigonometrijskih polinoma razdvojimo na sledeći način:

Algoritmi kod trigonometrijskih polinoma

$$\psi_t(a) = 8\frac{t(t+1)}{1+t^2} \cdot \frac{(t^3+2)(t+2)}{(1+t^2)^2},$$

$$\psi_t(b) = 32\frac{t(t+1)}{1+t^2} \cdot \frac{(t^3+2)(t^5-2)}{(1+t^2)^4}.$$

Možemo ih razdvojiti i kao:

$$\psi_t(a) = 8\frac{t(t^3+2)}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{(t+1)(t+2)}{1+t^2},$$

$$\psi_t(b) = 32\frac{t(t^3+2)}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{(t+1)(t^5-2)}{(1+t^2)^3}.$$

U prvom slučaju imamo zajednički faktor $\frac{t(t+1)}{1+t^2}$, odakle vidimo da je trigonometrijski NZD polinoma a i b, zapravo $s-c+1$. U drugom slučaju imamo zajednički faktor $\frac{t(t^3+2)}{(1+t^2)^2}$, koji odgovara NZD-u $c^2+2cs-2c+2s+1$.

Algoritmi kod trigonometrijskih polinoma

Definicija

Neka a, $b \in \mathbb{Q}[s, c]/(s^2 + c^2 - 1)$. Element $g \in \mathbb{Q}[s, c]/(s^2 + c^2 - 1)$ naziva se trigonometrijski najveći zajednički delitelj (trig NZD) trigonometrijskih polinoma a i b ako
(i) $g \mid a$ i $g \mid b$, i
(ii) ako $p \mid (a/g)$ i $p \mid (b/g)$, tada je p invertibilan element i
(iii) ako h zadovoljava (i) i (ii), tada je $TD(g) \geq TD(h)$.

Primer

Neka je $a = 5c^3 + 21c^2 + 4cs + 23c + 15 + 12s$ i
$b = 7c^3 - c^2s + 31c^2 + 2cs + 37c + 15s + 21$.
t-smenom dobijamo da je

$$\psi_t(a) = 8\frac{(t^2+2)(t^3+2)(t+2)}{(1+t^2)^3},$$

$$\psi_t(b) = 8\frac{(t^2+2)(t^3+2)(t+3)}{(1+t^2)^3}.$$

Dalje, dobijamo da je

$$\frac{\psi_t(a)}{\psi_t(b)} = \frac{t+2}{t+3} = \frac{\frac{t+2}{1+t^2}}{\frac{t+3}{1+t^2}}.$$

Prevodeći brojilac i imenilac nazad u trigonometrijske polinome, dobijamo

$$\frac{a}{b} = \frac{2c + s + 2}{3c + s + 3}.$$

Dakle, $\frac{a}{b}$ se može uprostiti u količnik dva trigonometrijska polinoma stepena 1. Odavde bi mogli zaključiti da je došlo do skraćivanja trigonometrijskih polinoma a i b trigonometrijskim polinomom stepena 2. Medjutim, jedini trigonometrijski NZD od a i b je $c + 3$, koji je trigonometrijskog stepena 1 i ne postoji zajednički delitelj trigonometrijskih polinoma a i b, koji je trigonometrijskog stepena većeg od 1. Stoga sledi da $2c + s + 2$ ne deli a i $3c + s + 3$ ne deli b.

Teorema

Neka su $f, g \in \mathbb{Q}[s, c]/(s^2 + c^2 - 1)$ nenulti trigonometrijski polinomi. Neka je p/q izlazni podatak algoritma za uprošćavanje količnika trigonometrijskih polinoma. Tada ne postoje trigonometrijski polinomi a i b takvi da je $a/b = p/q$ i $TD(a) + TD(b) < TD(p) + TD(q)$.

Literatura

G. Picavet, M. Picavet-L'Hermitte (2003)
Commutative Ring Theory and Applications: Trigonometric Polynomial Rings,
Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York, 231, 419 – 433.

J. Mulholland, M. Monagan (2001)
Algorithms for Trigonometric Polynomials,
Proceedings of ISSAC 2001, ACM Press, 245 – 252.

H. F. Trotter (1988)
An Overlooked Example of Nonunique Factorization,
The American Mathematical Monthly, 95, 339 – 342.

B. Malešević, M. Makragić, (2016)
A Method for Proving Some Inequalities on Mixed Trigonometric Polynomial Functions,
Journal of Mathematical Inequalities, 10(3), 849 – 876.

Hvala na pažnji!