EFIKASNO MODELIRANJE REALNIH OPTIMIZACIONIH PROBLEMA

Tatjana Davidović

Matematički institut SANU
http://www.mi.sanu.ac.rs/~tanjad
(tanjad@mi.sanu.ac.rs)

VII Simpozijum ,,Matematika i primene”
4. novembar 2016.

Sadržaj

1. Problemi i metode optimizacije
2. Problem dodele vezova brodovima u luci
3. Problem rutiranja rečnih kontejnerskih brodova
4. Nesimetrični problem rutiranja dostavnih drumskih vozila

Optimizacioni problemi svuda oko nas

- Određivanje najkraćeg puta (vremena putovanja);
- Nalaženje najjeftinijih proizvoda (minimizacija troškova);
- Smanjivanje dužine obrade proizvoda;
- Maksimizacija zarade preduzeća;
- Raspoređivanje radnika na poslove;
- Pravljenje rasporeda časova;
- Klasterovanje (formiranje timova, grupisanje podataka), itd.

Modeliranje optimizacionih problema

- Matematički modeli koriste se za precizno opisivanje problema.
- Mogu biti kombinatorne prirode (algoritamski) ili koristiti metode matematičkog programiranja.
- Od strukture modela zavisi efikasnost metoda za rešavanje odgovarajućih problema.

- Dobri modeli imaju mali broj bromenljivih.
- Ponekad, veliki broj ograničenja smanjuje dopustivi prostor za pretragu.

Metode optimizacije

- Tačne (egzaktne);
- Heurističke;
- Aproksimativne;
- Metaheurističke;
- Hibridne.

Efikasno modeliranje i rešavanje

Bilateralni projekat ,,The Development of Hybrid Heuristics for Combinatorial Optimization Problems" iz programa Pavle Savić između ESSEC Business School of Paris i MI SANU za 2016-2017. godinu ima zadatke:

- razvoj novih, jednostavnijih modela i
- razvoj efikasnih hibridnih metoda

za optimizacione probleme u transportu.

Static Minimum Cost Berth Allocation Problem (MCHBAP)

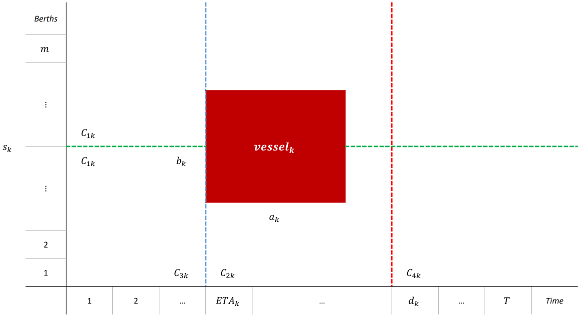
Cilj je minimizovati ukupnu cenu vezivanja broda koja se sastoji od:

- cene pozicioniranja brodova;
- cene ubrzavanja ili usporavanja brodova;
- cene kašenjanja obrade u odnosu na zadato maksimalno vreme.

Osnovna pretpostavka je da na svakom vezu postoji kran tako da se problem raspoređivanja kranova može izbeći.

Opis problema

Ulazni parametri problema prikazani su na slici



Opis problema (nast.)

Funkcija cilja:

$$\sum_{k=1}^{l}(c_{1k}z_k + c_{2k}(ETA_k - At_k)^+ + c_{3k}(At_k - ETA_k)^+$$

$$+c_{4k}(Dt_k - d_k)^+),$$

Opis problema (nast.)

Funkcija cilja:

$$\sum_{k=1}^{l}(c_{1k}z_k + c_{2k}(ETA_k - At_k)^+ + c_{3k}(At_k - ETA_k)^+$$

$$+c_{4k}(Dt_k - d_k)^+),$$

gde je

$$z_k = \sum_{j=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}\{|i - s_k| : \text{brod } k \text{ zauzima poziciju } (j,i)\},$$

a

$$(a-b)^+ = \begin{cases} a-b, & \text{ako je } a > b, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Opis problema (nast.)

Pomoćne promenljive (računaju se u predprocesiranju)

- $H_k = \lceil a_k / b_k \rceil$;
- $E1_{kj} = \begin{cases} c_{2k} * (ETA_k - j), & \text{ako je } ETA_k > j, \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$
- $D1_{kj} = \begin{cases} c_{4k} * (j + H_k - d_k), & \text{ako je } j + H_k > d_k, \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$
- $Zb_{ki} = \sum_{i_1=i}^{i+b_k-1} B_{ki_1}$

  gde je

  $B_{ki_1} = \begin{cases} H_k * c_{1k} * (i_1 - s_k), & \text{ako je } i_1 \geq s_k, \\ H_k * c_{1k} * (s_k - i_1), & \text{inače;} \end{cases}$

Formulacija preko mešovitog celobrojnog programiranja – I način

Promenljive modela:

- binarne:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ako je vez } i \text{ u trenutku } j \text{ dodeljen brodu } k, \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$$

$$z_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } (j,i) \text{ referentna tačka broda } k, \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$$

$$v_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{ako se brod } k \text{ obrađuje u trenutku } j, \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$$

Formulacija preko mešovitog celobrojnog programiranja – I način

Promenljive modela:

- binarne:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ako je vez } i \text{ u trenutku } j \text{ dodeljen brodu } k, \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$$

$$z_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } (j, i) \text{ referentna tačka broda } k, \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$$

$$v_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{ako se brod } k \text{ obrađuje u trenutku } j, \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$$

- celobrojne $At_k, Dt_k \in \{1, 2, \ldots, T\}$:
  At_k - početak obrade broda k;
  Dt_k - kraj obrade broda k.

MIP formulacija – I način (nast.)

$$\min \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{T} z_{ijk} \left(Zb_{ki} + E1_{kj} + E2_{kj} + D1_{kj} \right) \tag{1}$$

MIP formulacija – I način (nast.)

$$\min \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{T} z_{ijk} \left(Zb_{ki} + E1_{kj} + E2_{kj} + D1_{kj}\right) \tag{1}$$

$$\text{t.d.} \quad \sum_{k=1}^{l} x_{ijk} \leqslant 1, \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, T \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{T} z_{ijk} = 1, \; k = 1, 2, \ldots, l \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} j * z_{ijk} = At_k, \; k = 1, 2, \ldots, l \tag{4}$$

MIP formulacija – I način (nast. 1)

$$\sum_{j=1}^{T}\sum_{i=1}^{m} j * z_{ijk} + H_k = Dt_k,\ \ k = 1, 2, \ldots, l \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} \leqslant m,\ j = 1, 2, \ldots, T \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{T}\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} \geqslant a_k,\ \ k = 1, 2, \ldots, l \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} \leqslant M * v_{jk},\ j{=}1, \ldots, T;\ \ k = 1, 2, \ldots, l \tag{8}$$

MIP formulacija – I način (nast. 2)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} \geqslant v_{jk},\ j=1,\dots,T;\ k=1,2,\dots,l \tag{9}$$

$$(j+1) * v_{jk} \leqslant Dt_k,\ j=1,\dots,T;\ k=1,2,\dots,l \tag{10}$$

$$\begin{aligned}(j_2 - j_1 + 1) \leqslant \sum_{j=j_1}^{j_2} v_{jk} + M * (2 - v_{j_1 k} - v_{j_2 k}),\\ j_1=1,\dots,T-1;\ j_2=2,\dots,T\ (j_1 < j_2);\\ k=1,2,\dots,l\end{aligned} \tag{11}$$

$$v_{jk} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j_1=1}^{j} z_{ij_1 k},\ j=1,\dots,T;\ k=1,2,\dots,l \tag{12}$$

MIP formulacija – I način (nast. 3)

$$\sum_{i=1}^{i_1-1}\sum_{j=1}^{T} x_{ijk} + \sum_{i=i_1+b_k}^{m}\sum_{j=1}^{T} x_{ijk} \leqslant M\left(1-\sum_{j=1}^{T} z_{i_1jk}\right),$$
$$i_1 = 2,\ldots,m-b_k;\;\; k=1,2,\ldots,l \tag{13}$$

$$\sum_{i=1+b_k}^{m}\sum_{j=1}^{T} x_{ijk} \leqslant M\left(1-\sum_{j=1}^{T} z_{1jk}\right),$$
$$k=1,2,\ldots,l \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{m-b_k}\sum_{j=1}^{T} x_{ijk} \leqslant M\left(1-\sum_{j=1}^{T} z_{(m-b_k+1)jk}\right),$$
$$k=1,2,\ldots,l \tag{15}$$

MIP formulacija – I način (nast. 4)

$$b_k - \sum_{i=1}^{m} x_{ijk} \leqslant M\,(1 - v_{jk})\,,$$

$$j = 1, \ldots, T;\ \ k = 1, 2, \ldots, l \tag{16}$$

$$x_{ijk}, z_{ijk}, v_{jk} \in \{0, 1\} \tag{17}$$

gde je M dovoljno velika konstanta.

MIP formulacija – II način

Problem se razmatra kao specijalni slučaj 2–D Bin Packing Problem (BPP).

MIP formulacija – II način

Problem se razmatra kao specijalni slučaj 2–D Bin Packing Problem (BPP).

Promenljive modela:

- binarne:

$$z_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } (j,i) \text{ referentna tačka broda } k, \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$$

$$l1_{k1k2} = \begin{cases} 1, & \text{ako je brod } k1 \text{ levo od broda } k2 \text{ duž vremenske ose,} \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$$

$$u_{k1k2} = \begin{cases} 1, & \text{ako je brod } k1 \text{ ispod broda } k2 \text{ duž ose po vezovima,} \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$$

MIP formulacija – II način

Problem se razmatra kao specijalni slučaj 2–D Bin Packing Problem (BPP).

Promenljive modela:

- binarne:

$$z_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } (j,i) \text{ referentna tačka broda } k, \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$$

$$l1_{k1k2} = \begin{cases} 1, & \text{ako je brod } k1 \text{ levo od broda } k2 \text{ duž vremenske ose,} \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$$

$$u_{k1k2} = \begin{cases} 1, & \text{ako je brod } k1 \text{ ispod broda } k2 \text{ duž ose po vezovima,} \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$$

- celobrojne $At_k, Dt_k \in \{1, 2, \ldots, T\}$ (kao ranije)
  $P_k \in \{1, \ldots, m\}$ - najmanji indeks veza dodeljen brodu k.

MIP formulacija – II način (nast. 1)

Predprocesiranje je isto kao u modelu I, a računa se i matrica

$$F_{ijk} = E1_{kj} + E2_{kj} + D1_{kj} + Zb_{ki}.$$

Ova matrica pojednostavljuje funkciju cilja, pa novi MIP model izgleda ovako:

$$\min \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{T} z_{ijk} F_{ijk} \tag{18}$$

$$\text{t.d.} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{T} z_{ijk} = 1, \; k = 1, 2, \ldots, l \tag{19}$$

$$\sum_{j=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} j * z_{ijk} = At_k, \; k = 1, 2, \ldots, l \tag{20}$$

$$At_k + H_k = Dt_k, \; k = 1, 2, \ldots, l \tag{21}$$

MIP formulacija – II način (nast. 2)

$$\sum_{j=1}^{T}\sum_{i=1}^{m} i * z_{ijk} = P_k, \; k = 1, 2, \ldots, l \tag{22}$$

$$At_k \leq T - H_k + 1, \; k = 1, 2, \ldots, l \tag{23}$$

$$P_k \leq m - b_k + 1, \; k = 1, 2, \ldots, l \tag{24}$$

MIP formulacija – II način (nast. 3)

$$l1_{k1k2} + l1_{k2k1} + u_{k1k2} + u_{k2k1} \geq 1,$$
$$k1 = 1, 2, \ldots, l;\ k2 = 1, 2, \ldots, l\ (k1 < k2) \quad (25)$$

$$At_{k1} - At_{k2} + T * l1_{k1k2} \leq T - H_{k1},$$
$$k1 = 1, 2, \ldots, l;\ k2 = 1, 2, \ldots, l \quad (26)$$

$$P_{k1} - P_{k2} + m * u_{k1k2} \leq m - b_{k1},$$
$$k1 = 1, 2, \ldots, l;\ k2 = 1, 2, \ldots, l \quad (27)$$

Poređenje formulacija

Model	Broj promenljivih	Broj ograničenja
I	$2mTl + Tl + 2l$	$T^2l + mT + ml + 5Tl + 6l + T$
II	$mTl + Tl + ml + 3l$	$3l^2 + 6l$

II model ne koristi konstantu M.

Eksperimentalna evaluacija

Poređenje modela uz pomoć CPLEX 11.2 optimizacionog softvera.

Hardver i softver: Intel Core 2 Duo CPU E6750 na 2.66GHz sa RAM=8Gb pod Linux Slackware 12, Kernel: 2.6.21.5 operativnim sistemom.

Dva skupa test instanci:
– slučajno generisani primeri malih dimenzija;
– realni problemi većih dimenzija.

Slučajno generisani test primeri

Table: Rezultati – slučajno generisani test primeri: $m = 8$, $T = 15$

l	Opt. cena	Vreme (s) I MODEL	Vreme (s) II MODEL
6	380	0.06	0.01
7	665	20.53	0.05
8	745	18.91	0.09
9	780	20.88	0.10
10	1070	35.19	1.56
11	1325	644.98	10.51
12	1375	129.76	39.93
13	1415	379.64	82.24
14	1485	635.40	123.87
15	1570	1788.80	392.62

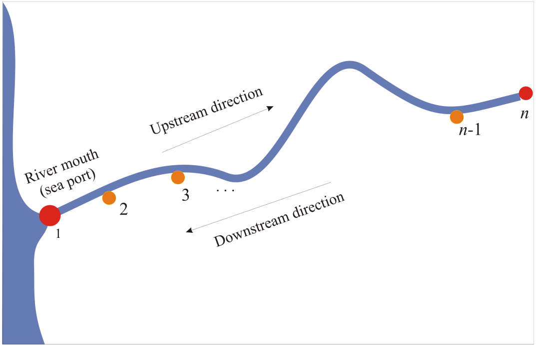
Realni problemi

Table: Rezultati – Realni primeri: $m = 12$, $T = 54$

l	I MODEL			II MODEL	
	Cena	Vreme	Limit	Opt. cena	Vreme
21	24562	3698.41	3600	4779	1.31
22	16334	7434.44	7200	4983	2.02
23	96549	7404.73	7200	5193	3.59
24	6594	7429.48	7200	5643	3.14
25	13262	18709.60	18500	5953	5.47
26	26614	18716.10	18500	6298	12.97
27	26679	18638.50	21600	6478	15.22
28	8418	44530.70	43200	6980	91.21

Rutiranje rečnih kontejnerskih brodova

Opis problema



Rezultati

Table: Poređenje modela

	MLDM		Model α		Model β	
Primeri	prom.	ogr.	prom.	ogr.	prom.	ogr.
Port10	358	398	219	246	167	286
Port15	758	818	479	521	327	581
Port20	1308	1388	839	896	537	976
Port25	2008	2108	1299	1371	797	1471

Rezultati (nast.)

Za primere sa 10 i 15 luka svi modeli su našli optimalna rešenja.

Prosečno vreme:

MLDM	152.514 s
Model α	0.086 s
Model β	0.081 s

Rezultati (nast.)

Za primere sa 10 i 15 luka svi modeli su našli optimalna rešenja.

Prosečno vreme:

MLDM	152.514 s
Model α	0.086 s
Model β	0.081 s

Za SVE primere sa 20 i 25 luka prvi model nije našao optimalna rešenja u vremenu od 2h. Prosečan gap je bio 27.439%.

Drugi i treći model su dobili optimalna rešenja u prosečnom vremenu 1.767 s, odnosno 1.499 s.

AVRP - opis problema

- Hipermarket ima K dostavnih vozila kojima opslužuje korisnike;
- Porudžbine se primaju u toku jednog dana, a roba isporučuje sledećeg dana;
- Zadati su kapaciteti vozila, njihova prosečna brzina i vremenski interval u kome mora da se završi dostava;
- Količina robe koja treba da se isporuči svakom od korisnika saznaje se njihovom prijavom;
- (ASIMETRIČNA) rastojanja između korisnika računaju se nakon prijave svih korisnika;
- Cilj je minimizirati ukupan put koji treba da pređu sva vozila.

Modeliranje AVRP

Osnovni problem je modelirati eliminaciju pod-tura, dakle dobiti rešenje koje ima tačno K tura (za svako dostavno vozilo po jednu), a koje posećuju sve korisnike.

Modeliranje AVRP

Osnovni problem je modelirati eliminaciju pod-tura, dakle dobiti rešenje koje ima tačno K tura (za svako dostavno vozilo po jednu), a koje posećuju sve korisnike.

Klasično, za to se koristi eksponencijalni broj ograničenja koja prebrajaju se moguće podskupove skupa korisnika.

Modeliranje AVRP

Osnovni problem je modelirati eliminaciju pod-tura, dakle dobiti rešenje koje ima tačno K tura (za svako dostavno vozilo po jednu), a koje posećuju sve korisnike.

Klasično, za to se koristi eksponencijalni broj ograničenja koja prebrajaju se moguće podskupove skupa korisnika.

Mi smo koristili dva druga pristupa: praćenje redosleda korisnika i praćenje količine robe u svakom od vozila.

Poređenje modela

Model	Broj promenljivih	Broj ograničenja
I	$2Kn^2$	$3Kn^2 + 6Kn + K$
II	$2Kn^2$	$2Kn^2 + (3K + 2)n + 2K$

Eksperimentalna evaluacija

Table: Rezultati na slučajno generisanim test primerima, $K = 3$

n	I MODEL		II MODEL	
	Dužina	Vreme (s)	Dužina	Vreme (s)
47	S 74.96	10 dana	S 73.99	24h
28	S 50.69	15h	O 44.04	409.854 s

Projektni timovi

MI SANU	ESSEC
Jelena Jovanović Vladislav Maraš Vladimir Ilin T. D.	Ivana Ljubić Laurent Alfandari Fabio Furini Sébastien Martin
Tatjana Jakšić Krüger Zorica Stanimirović Stefan Mišković	

Hvala na pažnji!

Pitanja?

Tatjana Davidović
tanjad@mi.sanu.ac.rs