7 Matematički simpozijum Beograd-Matematika i primene-05.11.2016

Tema :Primena Banachovog teorema o foksnoj tački u kompresiji slike

Sead Rešić,van.prof.Pmf Tuzla

Jusuf Memić,mr.matematike i infromatike

Elvir Čajić,prof matematike,fizike i infromatike

Sažetak

Istraživanje sprovedeno u ovom radu treba da ukaže na mogućnosti i načine primene Banachovog stava o nepokretnoj tački u različitim matematičkim disciplinama a posebno u kompresiji slike.S toga su predmet istraživanja asptraktni matematički pojmovi,njihove osobine i međusobni odnosi,Cilj rada je da se utvrdi,analizira i interpretira primena Banachovog stava o nepokrentoj tački na izradu kompresije slike.Također bit će pomenuto na koji način se slike kompresiju bez gubitka svojih osobina.U ovom radu korištene su metode dedukcije,dokazivanja i matematička metoda.rad se sastoji iz teorijskog dela,analize i zaključnog razmatranja.

Ključne reči su:Banachov teorem ,fiksna(nepokretna) tačka ,slika,kompresija slike,Sierpinski trougao,Sierpinski trougao u kolo

1.UVOD

U matematici nepokretna tačka (fiksna tačka) funkcije je tačka koju funkcija preslikava u samu sebe.Jednostavno rečeno x je nepokretna ili fiksna tačka funkcije f ako i samo ako je f(x)=x.

Nemaju sve tačke nepokretne tačke,npr ako je funkcija f definisana na skupu realnih brojeva kao f(x)=x+1,onda ona nema nepokretnih tačaka jer x nikad nije jednako x+1 za bilo koji realan broj.

Geometrijski posmatrani tačka (x,f(x)) je nepokretna tačka ako se nalazi na pravoj y=x,ili drugim rečima nepokretne tačke su tačke preseka grafika funkcije f i prave y=x.Teorija nepokretne tačke je danas samostalna matematička oblast čije su metode prifaćene u mnogim drugim oblastima matematike.Ovde je reč o primeni nepokretne tačke pri kompresiji slike.

Banachov teorem o fiksnoj tački.Neka je A preslikavanje koje preslikava metrički prostor X u samog sebe.Tačke x iz X za koje vredi A(x)=x su nepokretne (fiksne tačke) preslikavanja A.Postavlja se pitanje egizstencije nepokretnih tačaka te ako one postoje koliko ih je.Nama je zanimljivo pitanje njihove egizstencije te jedinstvenost.U ovom radu bit će prezentovan Banchov stav ali sa gubitkom osobina prilikom kompresije slike. U današnje vreme sve su veći zahtevi za prenosom što veće količine podataka. To se pokušava realizovati hardware-skim rešenjima, koja ipak pomalo počinju dosezati svoje realne granice (ograničenja koja nameću same tehnološke mogućnosti), pa se pribjegava software-skim rješenjima, koja nastoje sliku sažeti na što manju veličinu, da bi se moglo preneti više slika u jedinici vremena, preko istog ograničenog prenosnog sistema.

Kompresijom podataka (slika) mogu se postići izvrsni rezultati, npr. slika dimenzija 1024 pixela x 1024 pixela x 24 bita, bez kompresije zauzima oko 3 MB memorijskog prostora i potrebno je oko 7 minuta za njen prenos koristeći brzu 64 Kbit/s ISDN liniju, dok je za sliku kompresovanu u odnosu 10:1 potrebno 300 KB memorijskog prostora, a za njen prenos je potrebno oko 30 sekundi. Prenos velikih slikovnih fajlova predstavlja usko grlo distribuiranih sistema.

Kod kompresije važni su prenosivost i performance. Današnja rješenja za kompresiju su relativno prenosiva (između različitih platformi) budući da uveliko zadovoljavaju međunarodne standarde.

2.METODOLOŠKI OKVIR ISTRAŽIVANJA

2.1.Problem rada

Mnogi problemi u inženjerstvu i drugim naukama često zahtevaju pronalaženje rešenja korenu neke linearne ili nelinearne jednačine(bilo da je u pitanju algebarska ,transcedentna ,rešenje neke diferencijalne jednačine ili bilo koja nelinearna relacija između ulazne veličine x i izlazne veličine y).

Ovo je jedan od najstarijih problema u matematici.Problem se svodi na sledeće:Za datu neprekidnu nelinearnu funkciju $f(x)$,treba naći vrednost $x=\xi$,takvu da je $f(\xi)=0$.

Lokalizacija nula predstavlja grubo približno pronalaženje rešenja koje može poslužiti kao početna aproksimacija u nekoj sistematskoj proceduri pronalaženja,koja poboljšava rešenje do određene tačnosti.Ako je to moguće,najbolje je naći granice intervala u kojima se nalazi koren i u kojima funkcija ima različiti znak.

U doba savremenih informacionih tehnologija i gotovih aplikacija za crtanje grafika željene funkcije ovaj problem lokalitacije korena je znatno olakšan.No ,često nas zanima da li rešenje postoji i ako posotji da li je jedinstveno.S toga,problem nalaženja korena funkcije y=f(x) ,možemo posmatrati kao zajedničko rešenje jednačina x i y=g(x),pri čemu je f(x)=x-g(x)=0.Odnosno ,traženje nepokretne tačke datog preslikavanja.Dovoljne uslove za egzistenciju nepokretne tačke daje nam Banachov stav.Koliko je široka njegova primena, da li se zaista može promeniti u kompresiji slike i u kojim uslovima bit će problem ovog rada.S toga ,problem možemo iskazati kao pitanje:

„Da li Banachov stav o nepokretnoj tački ima primenu u kompresiji slike i pod kojim uslovima?

2.2.Predmet rada

Istraživanje provedeno u ovom radu treba da ukaže na mogućnosti i načine primene Banachovog stava o nepokretnoj tački u kompresiji slike.Stoga su predmet istraživanja apstraktni matematički pojmovi,njihove osobine i međusobni odnosi.

2.3.Cilj rada

Istraživanje provedeno sa osnovnim ciljem da se utvrdi ,analizira i interpretira primena Banachovog stava o nepokretnoj tački u kompresiji slike i u računarskoj grafici.U smislu ostvarivanja postavljenog cilja nameće se sledeći zadatak:

-Ispitati,analizirati i utvrditi primenu Banachovog stava na kompresiju slike.

2.4.Hipoteza

Iz nužnosti proširenja spoznaje o mogućnostima primene banachovog stava o nepokretnoj tački u raznim matematičkim problemima kao i primeni u računarskoj grafici postavlja se sledeća hipoteza:H:Banachovo stav o nepokretnoj tački ima primenu u kompresiji slike.

3.METODE ISTRAŽIVANJA

U ovom radu je primenena metoda dedukcije,dokazivanja i matematička metoda.

Deduktivna metoda –je sistemska primena deduktivnog načina zaključivanja u kome se iz opštih sudova (premisa) izvode posebni i pojedničani zaključci .Dedukcija uvek predstvalja poznavanje nekih opštih znanja na osnovu kojih se saznaje ono posebno ili pojedinačno.Najvažniji elementi deduktivne metode su postupci metoda analize ,sinteze apstrakcije,generalizacije i socijalizacije.Deduktivna metoda u nauci služi za :objašnajavanje činjenica i zakona,za predviđanja budućih događaja ,za otkrivanje novih činjenica i zakona ,za dokazivanje postavljenih teza ,za provjeravanje hipoteza i za naučno izlaganje.

Dokazivanje-je jedna od najvažnijih naučnih metoda u koju su inkorporirane skoro sve metode i svi posebni metodički postupci,analiza i sinteza,generalizacija i specijalizacija ,indukcija i dedukcija ,apstrakcija i konkretizacija.Svrha metode je utvrditi tačnost neke spoznaje .

Matematička metoda **-**je naučni sistemski posptupak koji se sastoji u primeni matematičke logike,matematičkih relacija,matematičkih simbola i matematičkih operacija u naučno istraživačkom radu.Matematička metoda se može primeniti u svim naučnim područjima i naučnim disciplinama.Uz pomoć matematičke metode na egzaktan način prikazuju se i objašnjavaju ,zakonitosti pojava,pod uslovom da je odabran pouzdan i adekvatan matenmatički model predmetnog istraživanja,Najčešće matematičke metode su matematički modeli i metode simulacije. Metode simulacije omogućavaju uz upotrebu računara teorijsko simuliranje stvarnih pojava i procesa.

4.TEORIJSKO RAZMATRANJE PROBLEMA

Rješavanje jednačine oblika y=f(x)

Neka je y=f(x) definisana na (a,b). Postavlja se pitanje da li postoji neko $x_0 \in (a,b)$ tako da je $f(x_0)=x_0$ i očito se radi o pitanju postojanja fiksne tačke datog preslikavanja. Prvi uslov je da zahtjevamo da $f:[a,b]\rightarrow[a,b]$. Ostaje još pitane konkretnosti. Dobijemo ga na više načina a neki od njih su:

-f Lipschizova na [a,b] tj

$$|f(x)-f(y)|\leq L|x-y| \; ; \; x,y \in [a,b] \text{ i } 0\leq L<1$$

Pa imamo ispunjene sve uslove Banachovog stava pa možemo potvrditi postojanje date tačke.

- Na osnovu Lagrange-ove teoreme

Ukoliko je $|f'(x)|\leq K<1$. Na osnovu Lagrange-ove teoreme imamo:

$|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)||x-y|, \; \xi\in[x,y]$.

4.1 Banachov teorem o fiksnoj tački i kompresiji slike

Sa razvojom digitalne fotografije javila se mogućnost pohranjivanje digitalne fotografije na više načina. Da bi smo pohranili slike u računar, sa velikom formatima potrebno je slike kompresovati odnosno smanjiti fajl.

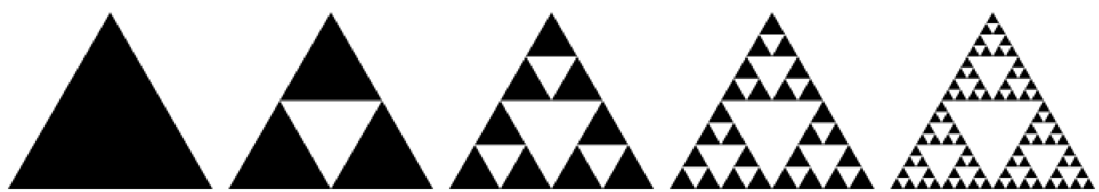
Najbolji način da pohranite svoje slike jeste u obliku piksela, pri čemu se pamti boja za svaki pojedinačni piksel. Međutim javljaju se dva problema u vezi sa ovom metodom:

- Zauzimaju puno memorije

Ako pokušate uvećati sliku, ona postaje „zrnasta“,odnosno svaki piksel jedan uvećan kvadrat pri čemu se gube podaci šta se nalazi u međuprostoru između kvadrata

Šta je ustvari kompresija slike? Kompresija je proces sažimanja podataka odnosno pretvaranje podataka u oblik koji zauzima manje memorije, pri čemu je kopija najvjernija orginalu. Internet je povećao potrebu za dobrom kompresijom slike, zapravo slike znatno usporavaju „surfanje“ na internetu. Kada pogledate sliku na zaslonu računara ne vidi se da je pogrešna. Ali , ako pokušate da ga uvećate ili koristite za desktop, onda se odma vidi da je kvaliteta loša. Postoji nekoliko formata sažimanja slike, a jedna od najvažnijih je JPEG, koji je postao standard za digitalne fotografije. Kodiranje slike u JPEG formatu je matematički algoritam.

Objasnićemo proces kompresije sistemom iteriranih funkcija na primjeru tepiha, tjtrougla Sierpinskog. Trougao Sierpinskog je fraktal kojeg je opisao poljski matematičar Waclaw Franciszek Sierpinski 1915.godine. Jedan je od najjednostavnijih fraktala, fraktalna mu je dimenzija $\log 3 \approx 1{,}585$.



Na prvi pogled, izgleda da se radi o veoma komplikovanom procesu. Kao da pohranimo sliku na ekonomičan način, u memoriju računara? Najbolji bi način bio da pohranimo i program koji će ga konstruirati kada to bude potrebno. Da bi smo napravili ovaj program moramo znati koje su karakteristike ovog geometrijskog tijela.

Druga slika koju smo napravili je identična našoj prvobitnoj, što znači da je Sierpinski tepih fiksirana tačka sa koje počinje ovaj proces.

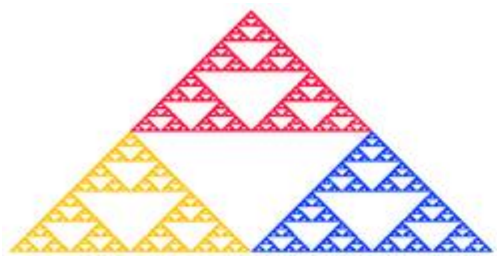
Objasnimo ovaj proces matematičkim jezikom. Dužina osnovice Sierpinski tepiha tako da osnovica i visina imaju dužinu 1. Uzmimo slijedeće afine transformacije definisane na R^2:

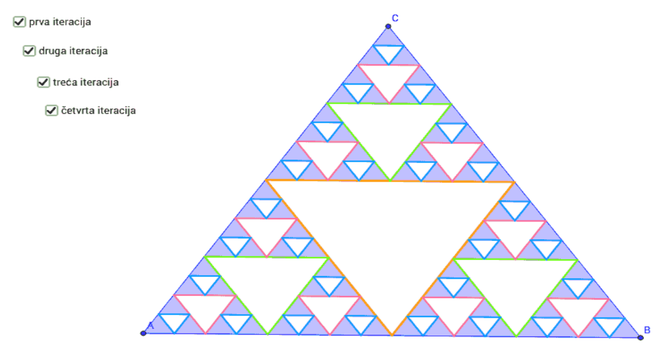
Ako S predstavlja Sierpinski tepih, onda imamo: $S=T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S)$.

Da li postoje drugi podskupovi B ravni koji imaju osobinu: $B=T_1(B) \cup T_2(B) \cup T_3(B)$.

Ukoliko bismo vršili provjeru, došli bismo do zaključka da takvi podskupovi ne postoje! Što znači da je naš Sierpinski tepih sa datom osobinom. Mi smo definisali nuku funkciju koja skupu S pridružuje T_1 (S) U T_2 (S) U T_3 (S). Nazovimo datu funkciju sa W. Imamo: S→ W(S)=T_1 (S) U T_2 (S) U T_3 (S).

Vidjeli smo da je S _W(S) tj. S je fiksna tačka date funkcije.





Ranije smo rekli da ćemo ispitati da li je Sierpinski tepih jedina fiksna tačka funkcije W. Pokušajmo to sa kvadratom C_0 na slici 7. Njegova slika je C_1. Isti princip primjenjujemo na C_1, i dobijemo C_2, C_3-C_5. Iz toga dobijemo tri stvari:

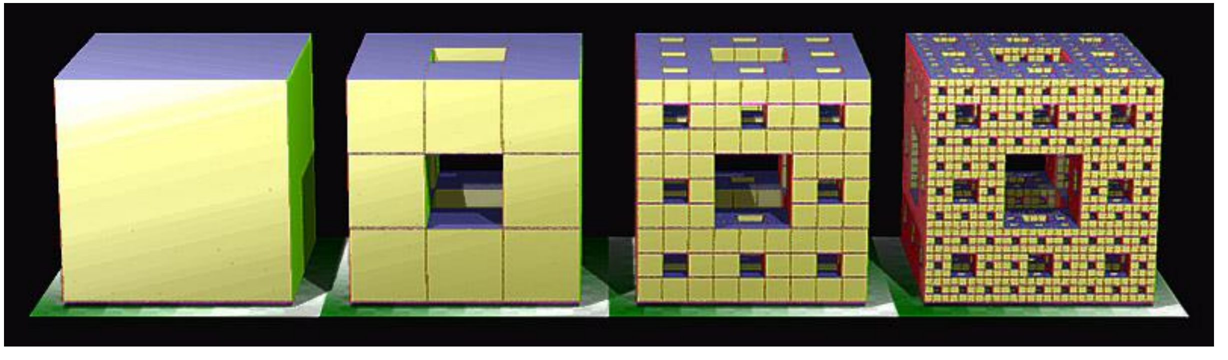
i) Nijedna od C_0-C_5 nije fiksna tačka od W

ii) Ovaj proces bismo mogli nastaviti, te bismo dobili beskonačan niz(C_n), gdje je C_{n+1}=W (C_n).

iii) Niz (C_n) samo providno konvegira Sierpinski tepih. Naše oko zapravo ne može da razlikuje $C1_0$ od S. Umjesto S na našoj slici, program koji vrši rekonstrukciju, može nam samo pokazati C_{10}. U slučaju da nam je potrebna bolja rezolucija, tada bismo koristili isti program i tražili da stane na C_{20} ili C_{30}. Što znači da nam isti program rekonstruisati S sa bilo kojom preciznošću.

Mengerova spužva je fraktal kojeg je opisao austrijski matematičar Karl Menger 1926. godine. To je trodimenzionalni analogon tepihu Sierpinskog. Često se naziva Sierpinski-Mengerovom spužvom ili, netačno, samo spužvom Sierpinskog. Svaka strana Mengerove spužve je tepih Sierpińskog, a svaka dijagonala Cantorov skup. Fraktalna joj je dimenzija $\frac{\log 20}{log 3} \approx 2.7268$ .Konstrukcija počinje s kockom (nulta iteracija) koja se podijeli na 27 jednakih kocaka (dužine stranice 1/3 početne).

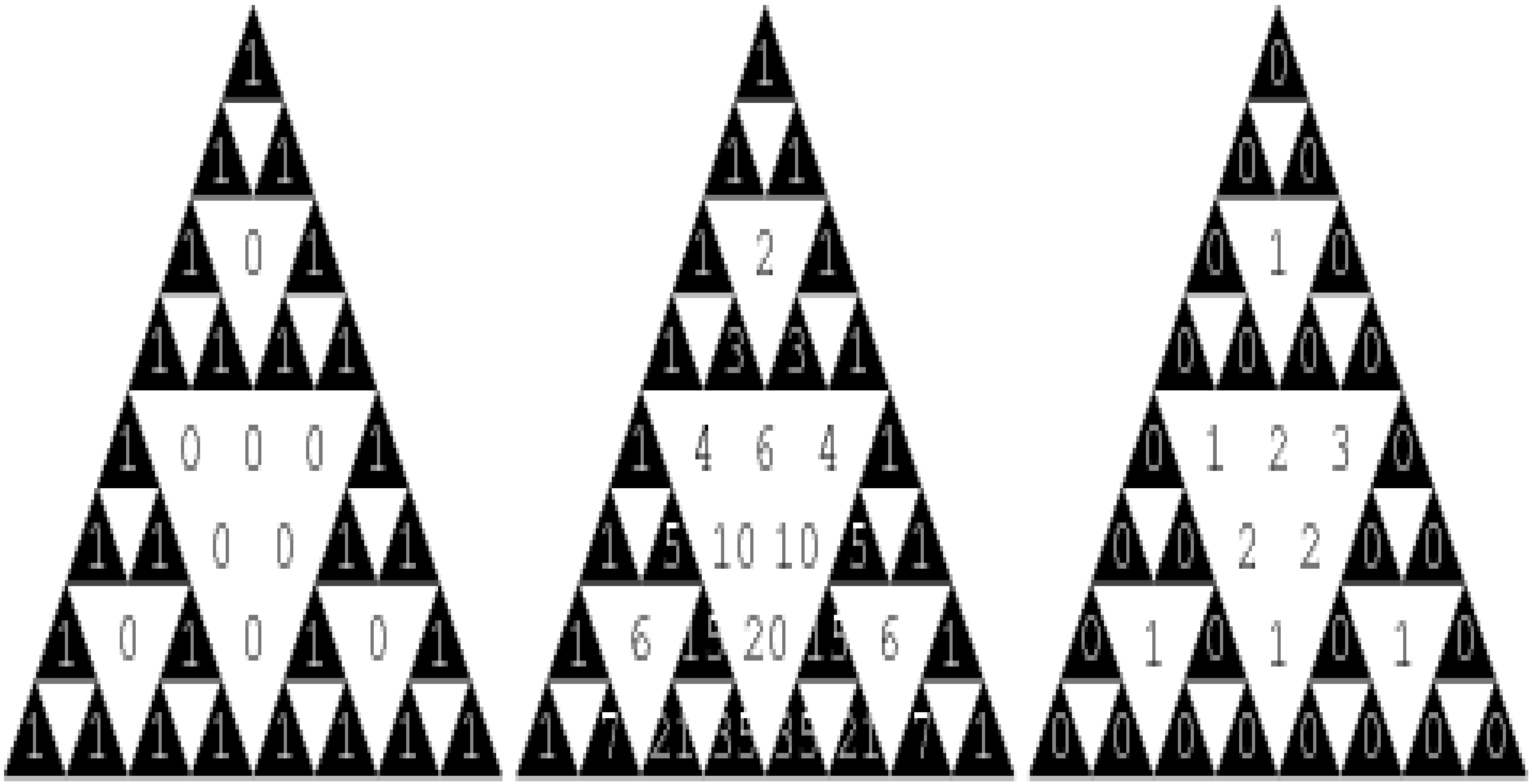
Nakon toga oduzme se 7 kocaka: središnja i 6 u središtima strana početne kocke (prva iteracija). Postupak se ponovi s preostalih 20 kocaka. Mengerova se spužva dobije kad broj iteracija teži u beskonačno. Na slici ispod su prikazane nulta i prve tri iteracije



Vidjeli smo da se Banachov stav o fiksnoj tački odnosi na kontraktivna preslikavanja na kompletnim metričkim prostorima. U našem slučaju smo definisali preslikavanje W koje preslikava kompletan metrički prostor u samog sebe, uz činjenicu da je dato preslikavanje kontraktivno (jednostavno se dokazuje korištenje Haussdorfove udaljenosti).

Ovaj proces je prilagođen za kompresiju stvarnih slika, te daje visok kvalitet slike ali samo kada slika ima fraktalni karakter. No, stepen kompresije i fleksibilnosti nije dobar kao kod JPEG formata. Također proces kodiranja je previše spor da bi imao praktičan karakter. Međutim jednostavnost ideje, zajedno sa svojom snagom ostavlja poprilično snažan utisak.

Veza Pascalovog trougla i Sierpinski trougla je vidljiva ako parne brojeve u Pascalovom trouglu označimo bijelom bojom a neparne crnom bojom



1
1 1
1 0 1
1 1 1 1
1 0 0 0 1
1 1 0 0 1 1
1 0 1 0 1 0 1
1 1 1 1 1 1 1 1
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
0
0 0
0 1 0
0 0 0 0
0 1 2 3 0
0 0 2 2 0 0
0 1 0 1 0 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0

5.ANALIZA

U odnosu na problem i cilj ovog naučno istraživačkog rada ,analizairali smo uslove pod kojima se može primjeniti Banachov teorem o fiksnoj tački na kompresiju slike.

S razvojem digitalne fotografije javila se mogućnost pohranjivanja digitalne fotografije na više različitih načina.Da bismo pohranili slike u računar,s velikim formatima,potrebno je slike kompresovati odnosno smanjiti im veličinu.

Najboolji način za pohranu slika je da se memoriše u obliku piskela ,pri čemu se pamti boja za svaki pojedinačni piksel.Međutim javljaju se dva problema u vezi sa ovom metodom;

- Zauzmaju puno memorije
- Ako pokušate uvećati sliku ,ona postaje zrnasta odnosno svaki piksel postaje jedan uvećan kvadrat pri čemu se gube podaci šta se nalazi u međuprostoru između kvadrata.

Objasnili smo proces kompresije sistemom iteriranih funkcija na primjeru tepihatj.trougla Sierpinskog .Trougao Sierpinskog je fraktal kojeg je opisao Poljski matematičar Waclaw Franciszek Sierpinski 1915 godine.Čime je glavna hipoteza dokazana.

Na osnovu prethodno dokazane tvrdnje možemo izvesti zaključak da je :Banachov stav o nepokrentoj tački našao primjenu i u kompresiji slike.Naravno riječ je o kompresiji sa gubicima .Međutim primjenom Fourierove transformacije i pravljenjem algoritma moguće je te gubitke nadokanaditi.

Nadamo se da će ovaj rad biti podsticaj za nova istraživanja.Naročito ako uzmemo u obzir da se razvoj informacionih tehnologija ubrzano povećava i širi,jer se susrećemo sa problemom količine informacija,njihove selekcije i pohranjivanja.

6.ZAKLJUČAK

„*Cogito ergo sum*“-*Mislim dakle postojim*-riječi su poznatog filozofa i matematičara Rene descartesa koju je objavio 1637 u delu“Rasprava o metodi“.Ova ideja nije bila njegova jer ju je prije njega objavio u svom djelu „*De cevitate Dei*“ u obliku „Si enim fallor sum“(Ako se varam,postojim).Egzistencija i jedinstvenost rešenja mučili su mnoge matematičare.Vođeni time ,u ovom radu smo istražili mogućnost doprinosa Banachovog stava o fiksnoj tački u rješavanju mnogih problema vezanih za matematiku između ostalog i primjenu matematike u računarskoj grafici i vizualizaciji.Osnovni cilj je bio utvrditi,analizirati i interpretirati primjenu banachovog stava o fiksnoj tački na kompresiju slike.Upravo nam Banachov stav daje dovoljne uslove za egisztenciju i jedinstevnost posmatranog problema.Dakle samo dovoljne ali ne i potrebne uslove.Deduktivnom metodom izvodili smo zaključak za ovaj slučaj.

Želja nam je bila da pokažemo da matematika nije puki spisak teorema,lema i definicja koje ničemu ne služe ,nego je živa nauka u kojoj svaka teorema ima svoj značaj i primenu.Svakim danom sve bogatija i inetresantnija i usmjerenija ka rešavanju problema nauka današnjice ,matematika s pravom i ponosom i dalje nosi krunu kraljice nauka.

7.LITERATURA

1.Aljančić,S.(1979),Uvod u realnu i funkcionalnu analizu.Beograd

2.Filipović,M(2004),Metodologija znanosti i znanstvenog rada,Svjetlost Sarajevo

3.Dževad,T.(2016), Problemi meta metodologije (2016);

4.Radosavljević, I., Termiz, Dž., Danilović, N., Gordić, M., Statistika u istraživanju društvenih pojava (2016).

5.Gajinov,N(2010),Banachov princip kontrakcije –primene i generalizacija,Univerzitet u Novom sadu

6.Stanković,B.(1975) Osnovi funkcionalne analize,Naučna knjiga Beograd

7.Tasković,R.Milam(1986) ,Osnove teorije fiksne tačke ,zavod za udžbenike i nastvana sredstva Beograd

8.O.Hadžić.teoreme i neprekidna zavisnost nepokretne tačke od parametara i primena diferencijalne jednačine u lokalno konevsknim prosotorima,Zbornik radova Pmf-Univerzitet u Novom Sadu,1971

Hvala na pažnji

Pitanja?