

The year 2016 is displayed in a stylized, light blue font. The '0' is a 3D cube, and the '1' is a tall, thin rectangle. The background features a grid of squares in various shades of blue and purple, with some squares being solid and others semi-transparent.

Nives Baranović

nives@ffst.hr

Odsjek za učiteljski studij

Filozofski fakultet u Splitu

Razvoj geometrijskog mišljenja kroz tangram aktivnosti

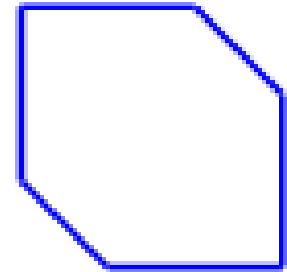
Radionica za učitelje i nastavnike matematike

VII. simpozijum „Matematika i primene“

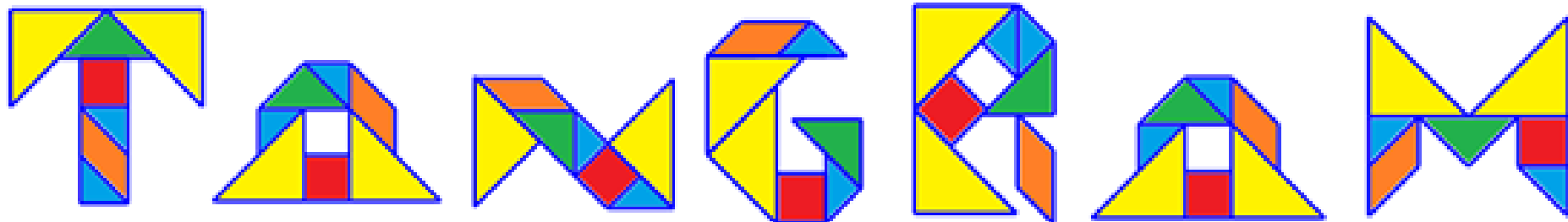
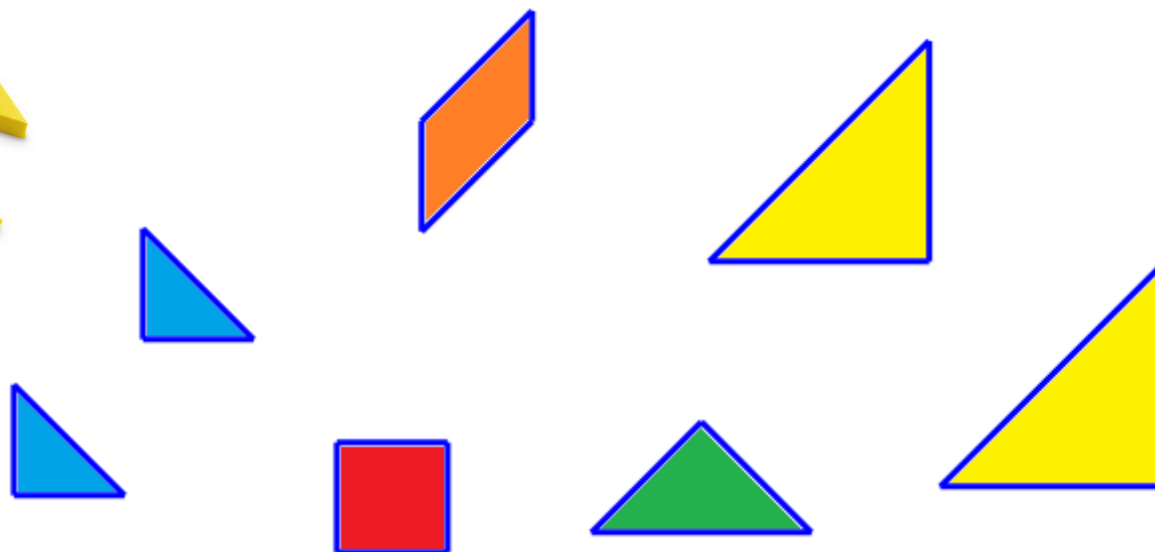
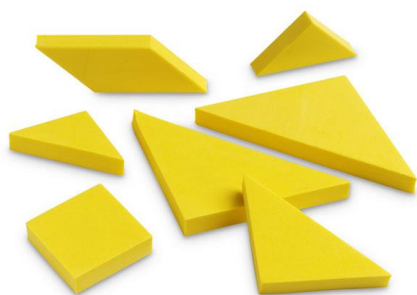
Beograd, 5. 11. 2016.

Svaki član radionice treba imati:

- ❑ konturu jednog konveksnog lika;
- ❑ jednu točkastu kvadratnu mrežu;
- ❑ jedan dvolist papira (A4) za samostalan rad;
- ❑ jednu grafitnu olovku;
- ❑ dvije olovke u različite boje.

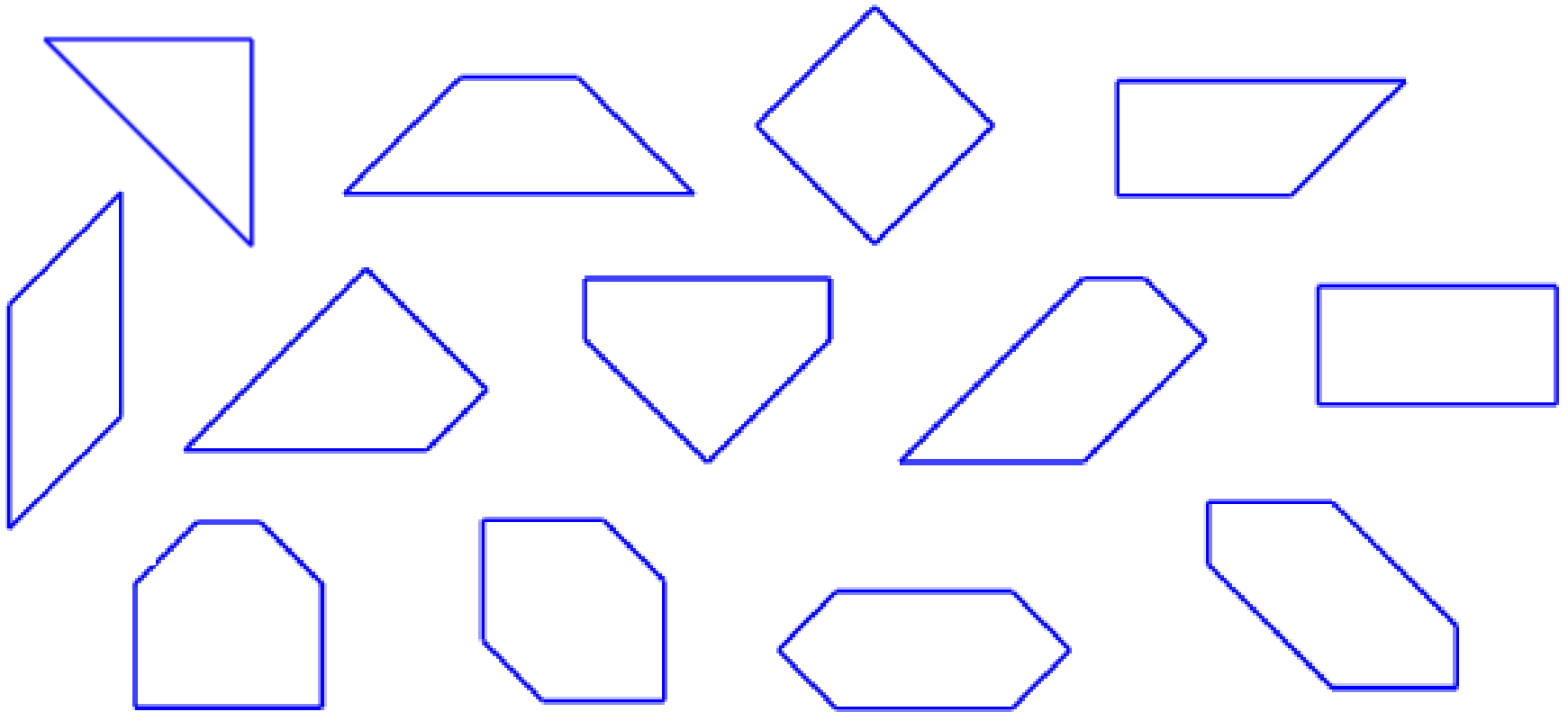


❑ **1 TANGRAM** paket – skup od 7 geometrijskih likova



Pomoću tangrama se može oblikovati točno 13 konveksnih likova.

Fu Traing Wang, Chuan-Chih Hsiung. (1942.) [A theorem of the tangram](#). *The American Mathematical Monthly*, 49, 596–599.



Radionica:

Proučavanjem odgovarajućih svojstva saznati:
Zašto je samo 13 konveksnih tangram likova?.

1. zadatak

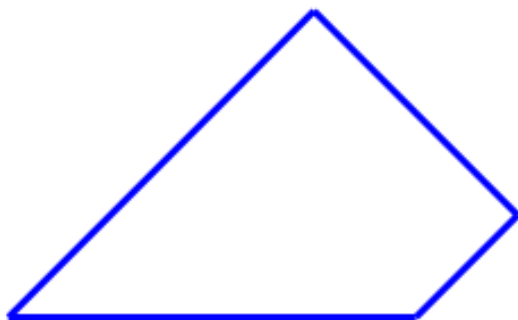
- ❑ Samostalno sastavite zadani lik koristeći sve dijelove tangrama.

Napomena: površinu omeđenu konturom treba cijelu prekriti tangram dijelovima. Bez preklapanja.

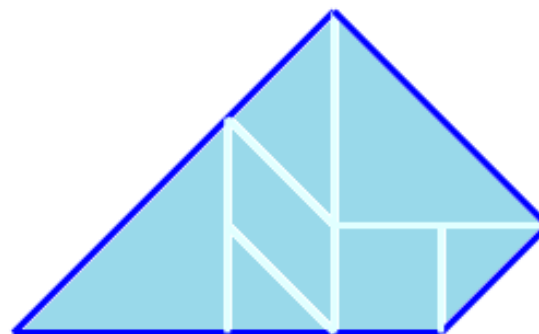
- ❑ Skicirajte svoje rješenje u točkastoj kvadratnoj mreži. (grafitnom olovkom).

Napomena: Dimenzije tangram likova, pri skiciranju, potrebno je proporcionalno umanjiti, a vrhove likova smjestiti u točke mreže.

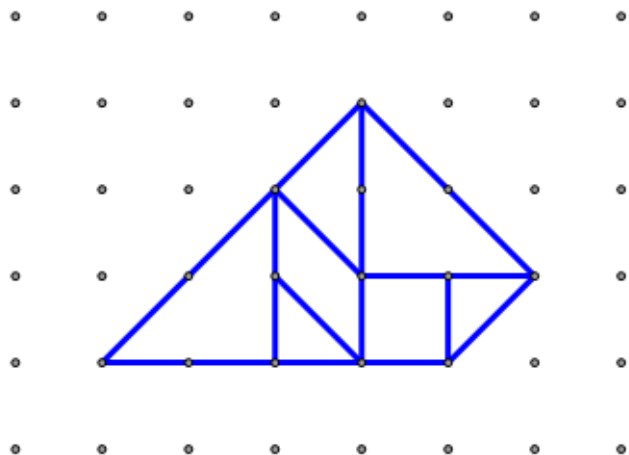
Primjer: Kontura lika



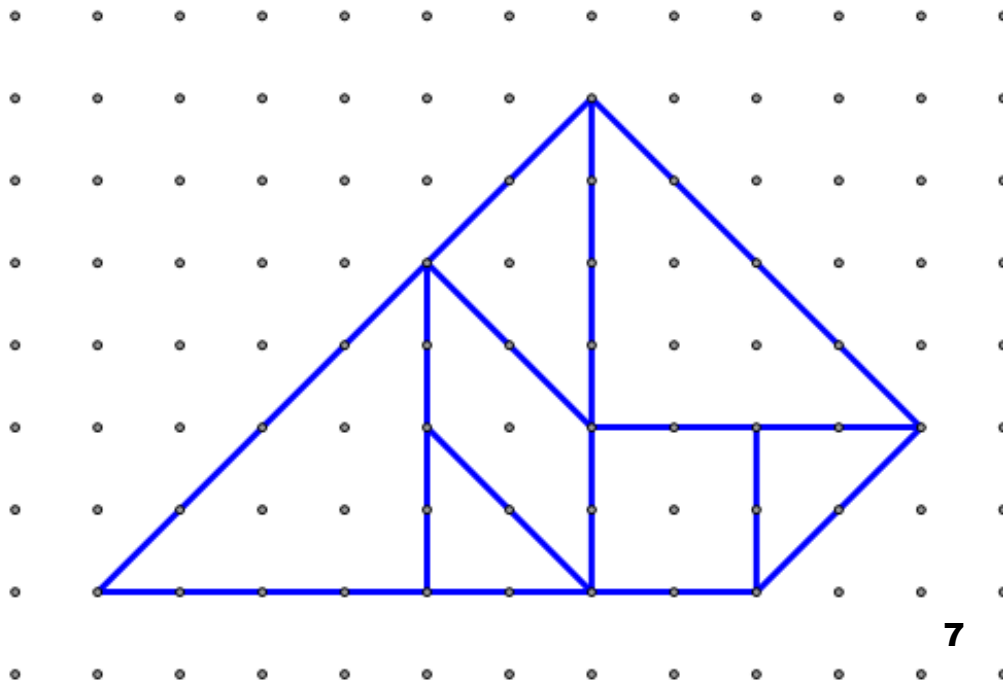
Pravokutni tangram trapez



Tangram trapez preslikan u kvadratnu točkastu mrežu



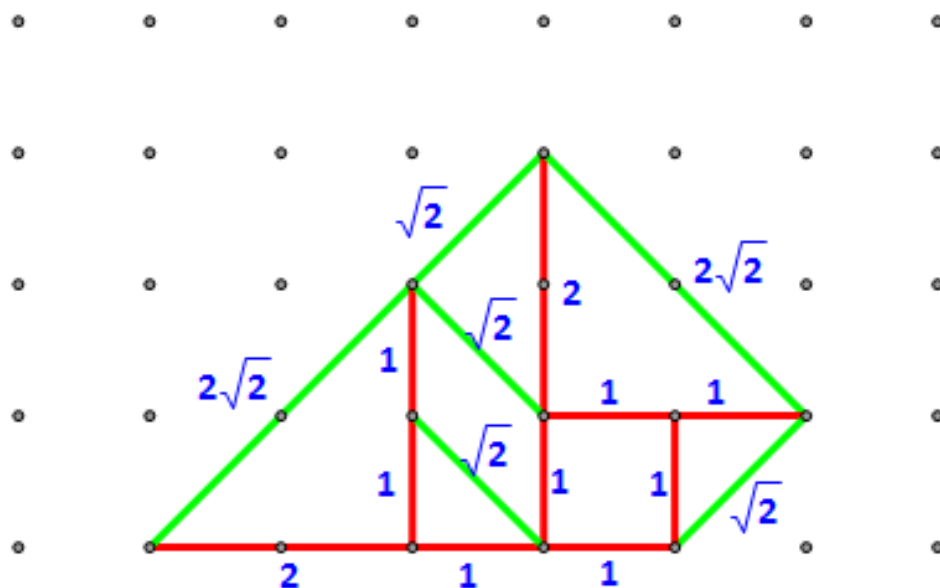
ili



2. zadatak

- ❑ Pod pretpostavkom da je kvadrat tangrama **jedinični kvadrat**, odredite **duljine stranica** vašeg tangram lika i duljine stranica sastavnih likova.
- ❑ Jednom bojom istaknite sve **racionalne stranice** (stranice čije su duljine racionalni brojevi), a drugom sve **iracionalne stranice** (stranice čije su duljine iracionalni brojevi).
- ❑ Kakve su stranice tangram lika: racionalne / iracionalne?
- ❑ Proučite i opišite **veze među stranicama** ovisno o bojama (vrstama stranica).

Primjer:



Zaključci:

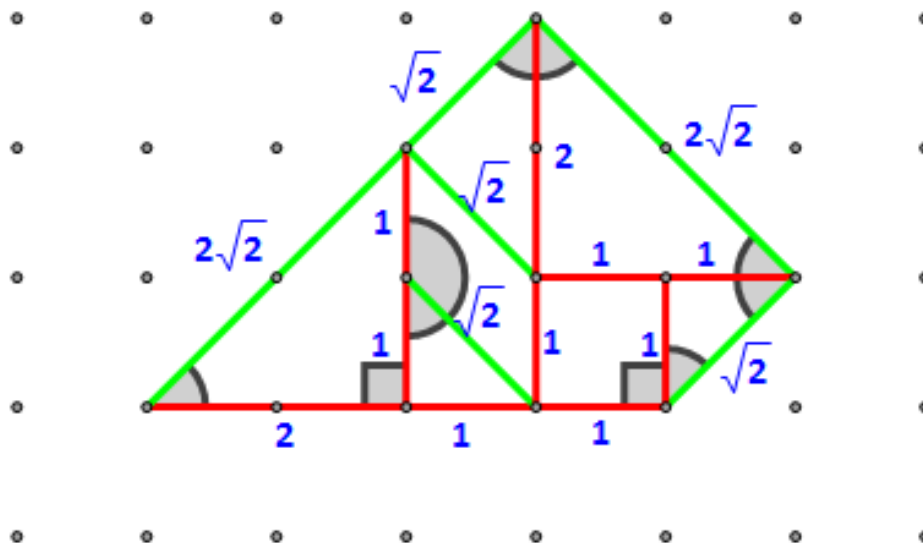
- Stranice promatranog lika su ili racionalne (crvena boja) ili iracionalne (zelena boja);
- Racionalne stranice konveksnog lika sastavljene su od racionalnih stranica dijelova tangrama, a iracionalne od iracionalnih.
- Stranice iste vrste su međusobno paralelne ili međusobno okomite.

2. zadatak (nastavak)

- ❑ Odredite **mjere unutarnjih kutova** konveksnog lika (i mjere unutarnjih kutova sastavnih likova). Istaknite ih.
- ❑ Proučite i opišite **veze među stranicama i kutovima** ovisno o bojama (vrstama stranica).

Napomena: Usporedite izvedene zaključke za sve tangram likove u grupi.

Primjer:



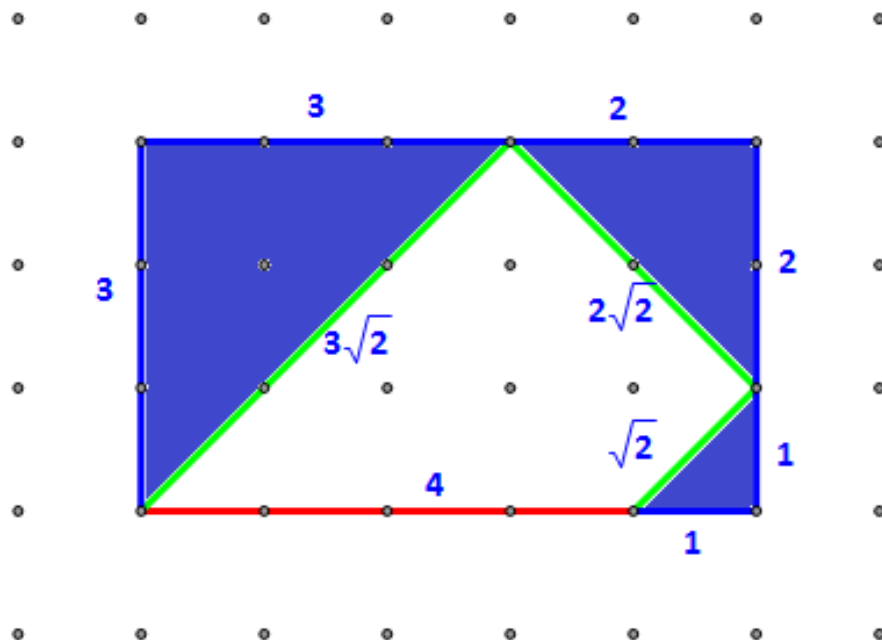
Zaključci:

- (a) Mjere unutarnjih kutova su: 45° , 90° ili 135° ;
- (b) Stranice različite vrste zatvaraju kut od 45° ili kut od 135° , a stranice iste vrste su pod pravim kutom.

3. zadatak

- ❑ Tangram **upište u pravokutnik** tako da racionalne stranice *pripadaju* stranicama pravokutnika.
- ❑ Opišite nastale dijelove pravokutnika.
- ❑ Odredite **veličinu površine** konveksnog tangram lika, uz pretpostavku da je kvadrat tangrama jedinični kvadrat.

Primjer:



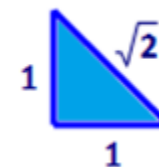
Zaključci:

- (a) Svi istaknuti dijelovi, koji tangram lik nadopunjuju do pravokutnika, su jednakokračni pravokutni trokuti.
- (b) **Hipotenuze su iracionalne stranice**. Ako je hipotenuza duljine $a\sqrt{2}$, onda su katete duljine a .
- (c) Veličina površine konveksnog tangram lika je: $P_{p_trapez} = 8$

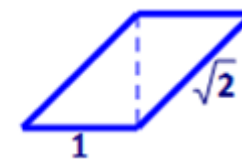
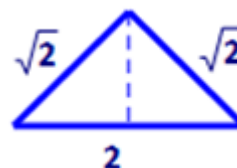


Uočimo još neke pravilnosti...

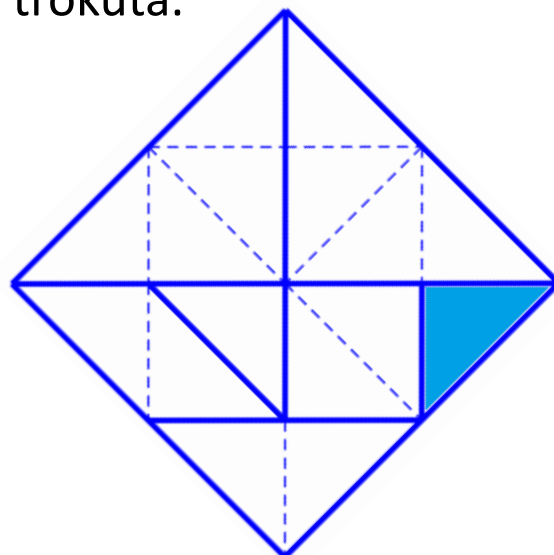
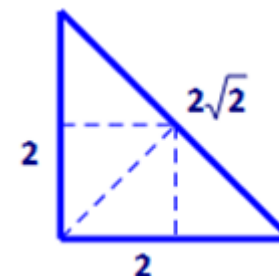
- Ako najmanji trokut tangrama uzmemo kao **mjernu jedinicu površine**, onda se svi ostali dijelovi tangrama mogu mjeriti tim trokutom:



Srednji trokut, kvadrat i pravokutnik se mogu prekriti sa 2 mala trokuta;



Najveći trokuti se mogu prekriti sa 4 mala trokuta.



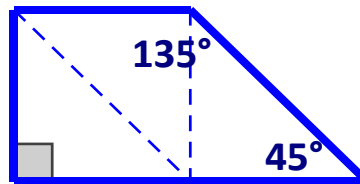
Cijeli tangram lik se može prekriti sa **16 malih trokuta**.

Površine svih tangram likova su jednake veličine.



U daljnjem istraživanju koristimo najmanje (osnovne) trokute.

- Unutarnji kutovi konveksnog lika oblikovanog od **malih jednakokračnih pravokutnih trokuta** mogu biti 45° , 90° i 135° .



- Zbroj svih unutarnjih kutova nekog konveksnog n -terokuta iznosi $(n-2) \cdot 180^\circ$, a kako je najveći kut konveksnog lika koji se može oblikovati pomoću malih trokuta 135° , zbroj svih unutarnjih kutova ne može premašiti $n \cdot 135^\circ$. Vrijedi:

$$(n-2) \cdot 180^\circ \leq n \cdot 135^\circ$$

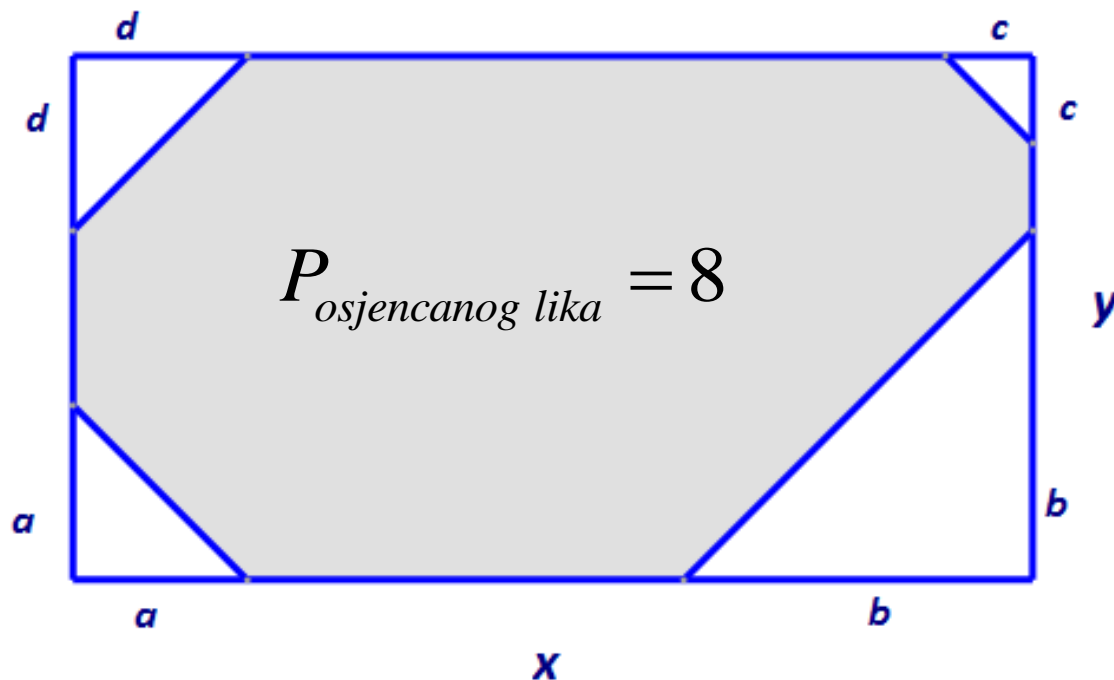
$$(n-2) \cdot 4 \leq n \cdot 3$$

$$4n - 3n \leq 8$$

$$n \leq 8$$

Zaključak: od osnovnih jednakokračnih pravokutnih trokuta može se oblikovati najviše konveksni **osmerokut**.

Upišimo taj **osmerokut** u pravokutnik na prethodno opisani način te uvedimo oznake kao na slici.



$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2xy - 16.$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$$

$$x, y \in \mathbb{N}$$

$$a + b \leq x, \quad c + d \leq x$$

$$a + d \leq y, \quad b + c \leq y$$

Kako odrediti sve konveksne tangrame?

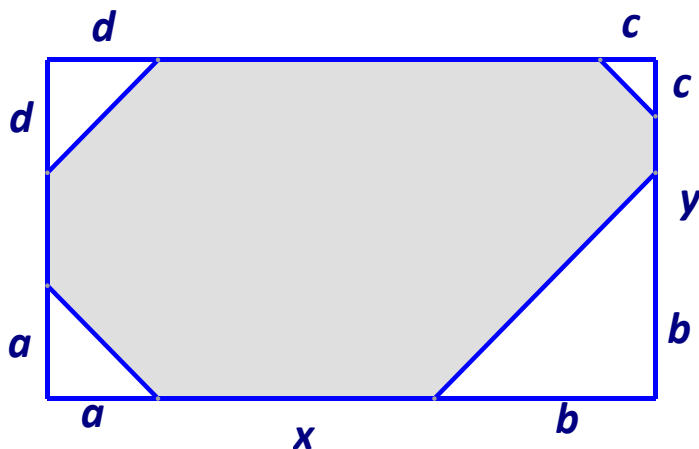
- **Analitički**: riješimo postavljenu diofantsku jednadžbu uz dane uvjete.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2xy - 16.$$

$$a + b \leq x, \quad c + d \leq x$$

$$a + d \leq y, \quad b + c \leq y$$

- **Vizualno-analitički**: od pravokutnika površine $x \cdot y$ odrežemo njegove vrhove u obliku jednakokračnih pravokutnih trokuta duljina kateta a, b, c i d redom, tako da preostala površina pravokutnika bude 8.



Rješenja zapisujemo u obliku **uređenih šestorki**:

$$(x, y, a, b, c, d)$$

Primjer 1.

$$x = 6, y = 2$$

$$P_{\text{pravokutnika}} = 12$$

$$P_{\text{koveksnog lika}} = 8$$

Potrebno je odrezati
površinu veličine:

$$12 - 8 = 4$$

Moguća rješenja:

1. (6, 2, 2, 2, 0, 0)

2. (6, 2, 2, 0, 2, 0)

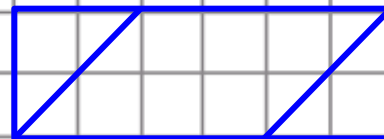
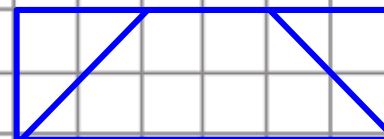
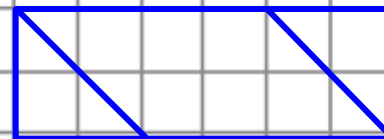
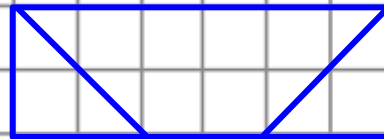
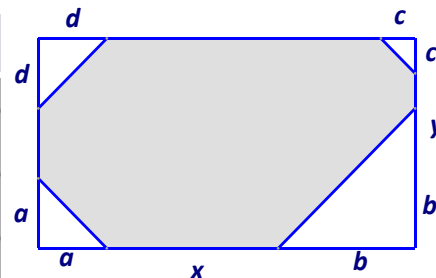
3. (6, 2, 0, 0, 2, 2)

4. (6, 2, 0, 2, 0, 2)

Jednakokračni
trapez

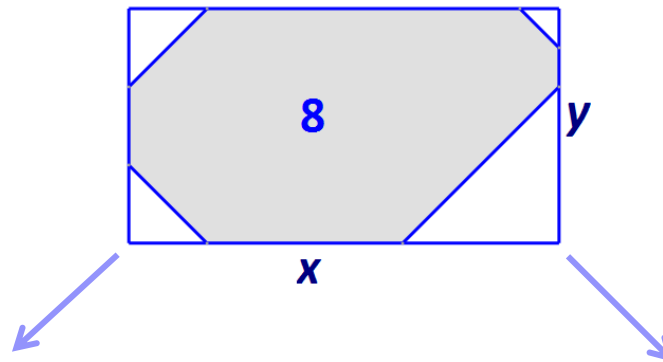
Paralelogram

Odaberemo jedan konveksan lik među
sukladnim likovima.



4. zadatak

- Crtanjem pravokutnika i *rezanjem* jednakokračnih pravokutnih trokuta, odredite **sve različite konveksne likove, površine veličine 8**.
- Radi efikasnosti istraživanje podijelite na dva slučaja:



dio članova grupe rješava slučaj:

$$x = y; 3 \leq x \leq 5.$$

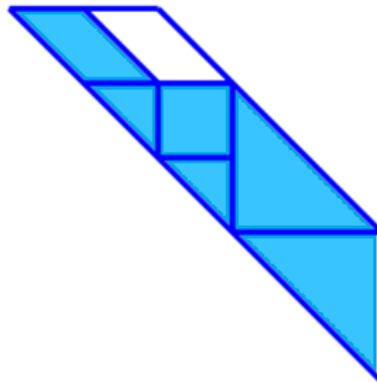
preostali članovi grupe rješavaju slučaj:

$$x > y; 9 \geq x > y \geq 1.$$

4. zadatak (nastavak)

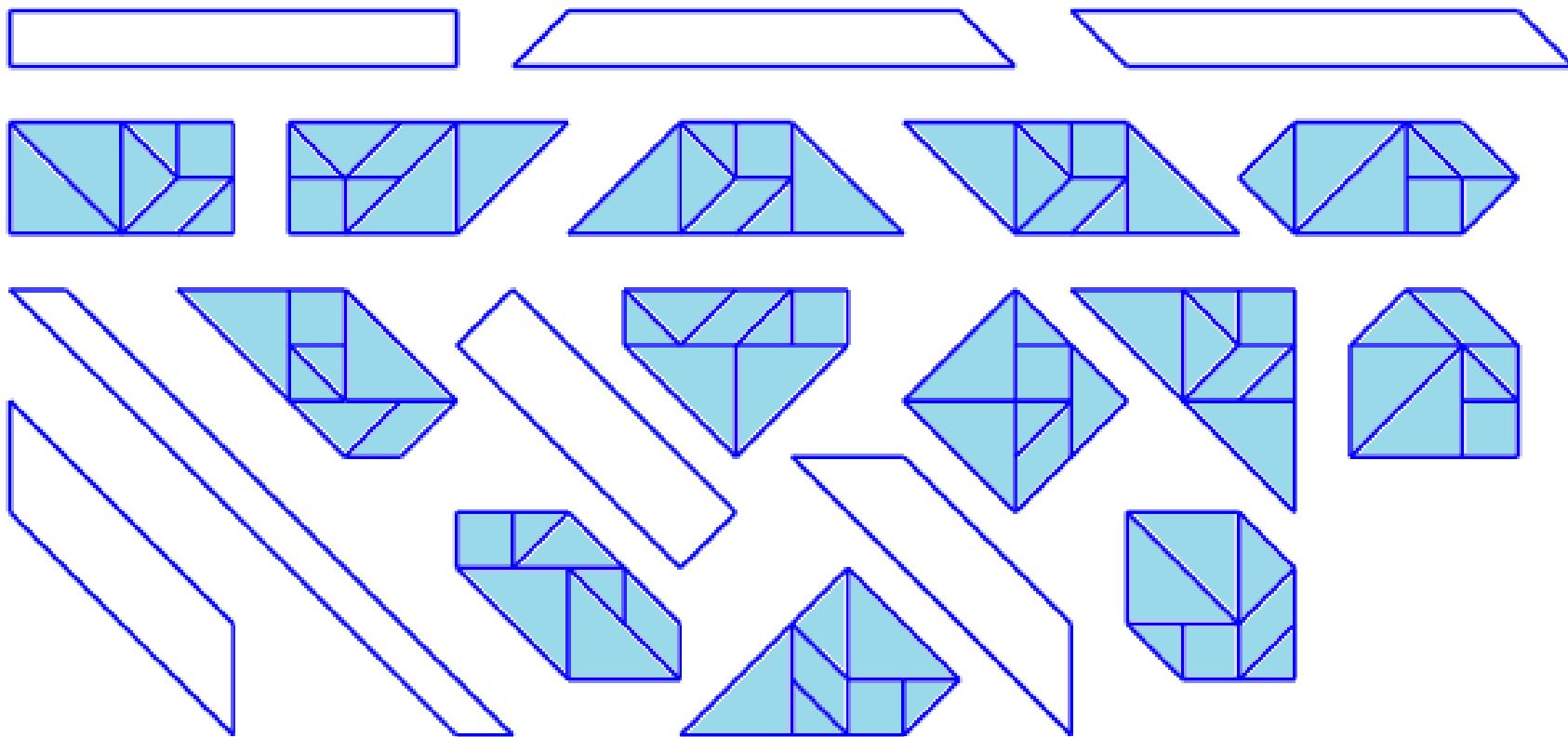
- Diofantska jednađba ima **48 različitih rješenja** ($x \geq y$), koja određuju **20 različitih konveksnih likova**.
- Među njima, 7 likova se ne može oblikovati tangramom.

Na primjer:



- Preostalih **13** likova su **konveksni tangrami**.

RJEŠENJE: 20 različitih konveksnih likova i 13 konveksnih tangrama.

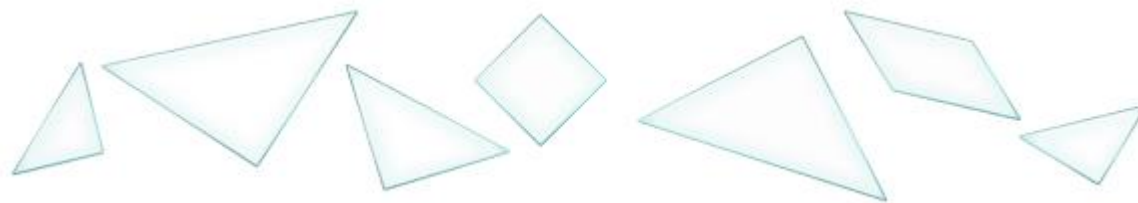




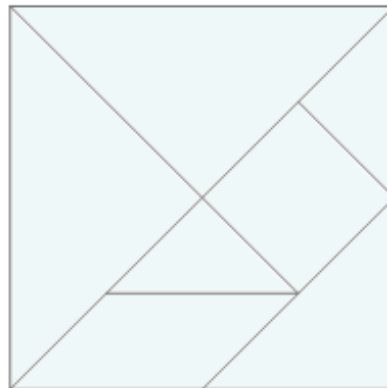
Umjesto zaključka....

- ❑ U cilju ostvarivanja postavljenih **ishoda učenja**, nastava matematike bi trebala biti:
 - ❑ Kvalitetna
 - ❑ Efikasna
 - ❑ Produktivna
 - ❑ Itd.

- ❑ Da bi to postigli, **nastavna sredstva i pomagala**, metode i oblike rada trebalo bi koristiti tako da:
 - ❑ motiviramo učenike,
 - ❑ povećavamo njihovu pozornost i aktivnost,
 - ❑ doprinosimo boljem razumijevanju sadržaja,
 - ❑ potičemo učenike na samostalno otkrivanje i izvođenje zaključaka...,
 - ❑ ...



Drevna kineska slagalica – **TANGRAM** –
može poslužiti kao efikasno **nastavno sredstvo** u nastavi
matematike za ostvarivanje ishoda učenja, posebno u geometriji.




Znanstvena istraživanja potvrđuju da učenje s tangramom kod učenika potiče:

- ❑ **aktivno** sudjelovanje u radu
- ❑ **motivaciju** i **interes** prema učenju matematike
- ❑ **pozitivan stav** prema matematici, a posebno geometriji
- ❑ **kreativnost, maštovitost**
- ❑ **strategiju rješavanja** problema
- ❑ **(argumentiranu) raspravu** bez straha
- ❑ razvoj **vizualno-prostornih vještina** i sposobnosti
- ❑ razvoj (geometrijskog) **mišljenja** i **rasuđivanja**

Učenici

- ❑ s većim **razumijevanjem** uče matematičke pojmove
- ❑ razvijaju matematički jezik – matematičku **komunikaciju**
- ❑ samostalno **istražuju**, uočavaju pravilnosti, postavljaju tvrdnje, izvode zaključke - uvode matematičke koncepte
- ❑ stvaraju **RAVNOTEŽU** između **znanja o pojmovima** i **vještina** računanja
- ❑ izgrađuju cjelovita i trajnija (matematička) znanja.

Posebno, učenici smanjuju strah od matematike i jačaju samopouzdanje u vlastite sposobnosti.

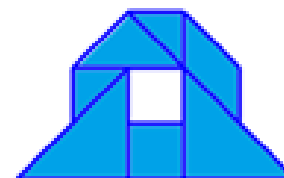
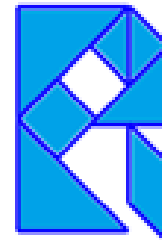
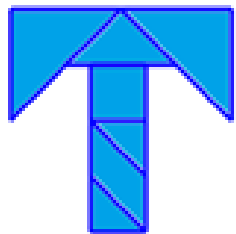
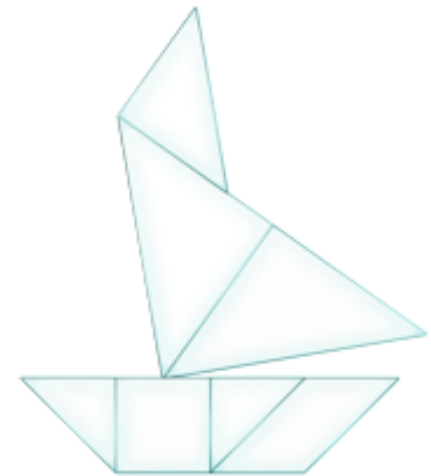
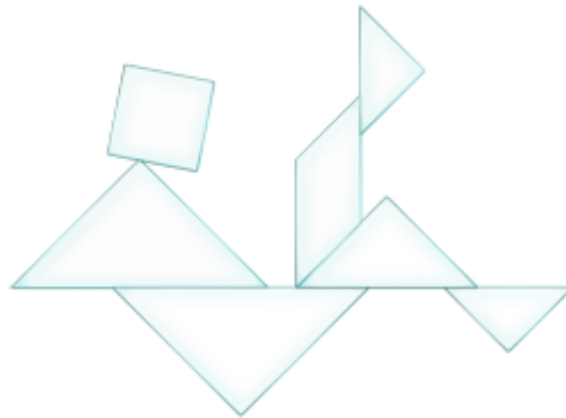
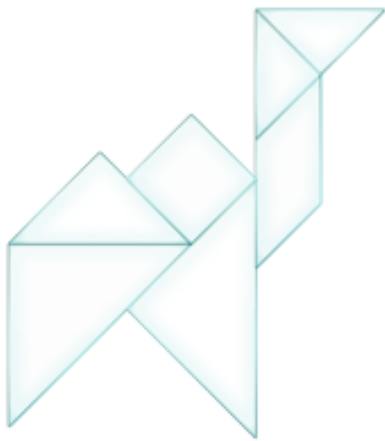


Kako koristiti tangram
da bi izazvali **učinkovite** promjene i
ostvarili planirane **ishode učenja**?

Preporuke:

Prilikom prvog susreta s tangramom, korisno je:

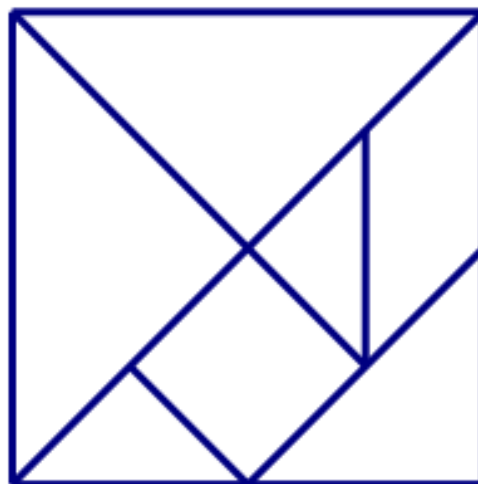
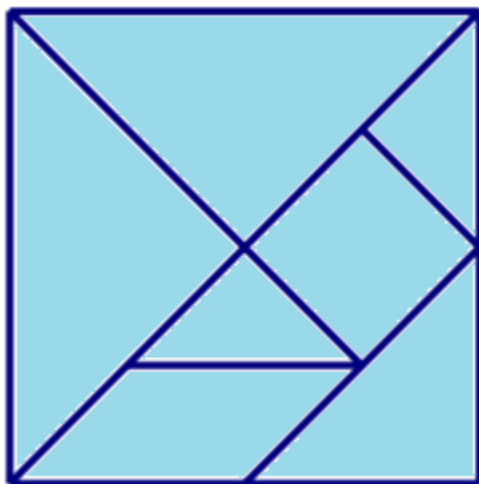
- prije bilo kakvih uputa, dopustiti **rad otvorenog tipa...**



Preporuke:

Zatim:

- ❑ Svatko treba imati/pripremiti barem 2 skupa tangrama, kako bi se mogle provoditi ciljano odabrane aktivnosti.
- ❑ Korisno je da sami dođu do odgovora: kako izrezati tangram dijelove – **tanove**, koristeći **tangram kvadrat** – kvadrat sastavljen od svih sedam dijelova. Svi dijelovi se dodiruju bez preklapanja.



Preporuke:

Među prvim aktivnostima korisno je:

- ❑ Samostalno istražiti svih sedam tanova: njihova svojstva i međusobne odnose.
- ❑ Svaki tangram skup sastoji se od:
 - ❑ 5 jednakokračnih pravokutnih trokuta, dva para sukladnih, svi međusobno slični;
 - ❑ 1 kvadrata i 1 paralelograma, površina različitih oblika ali jednakih veličina
 - ❑ itd.

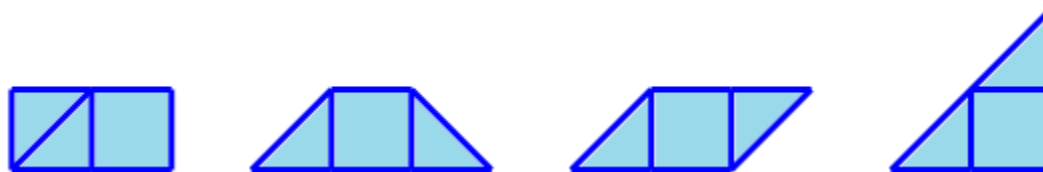


Preporuke:

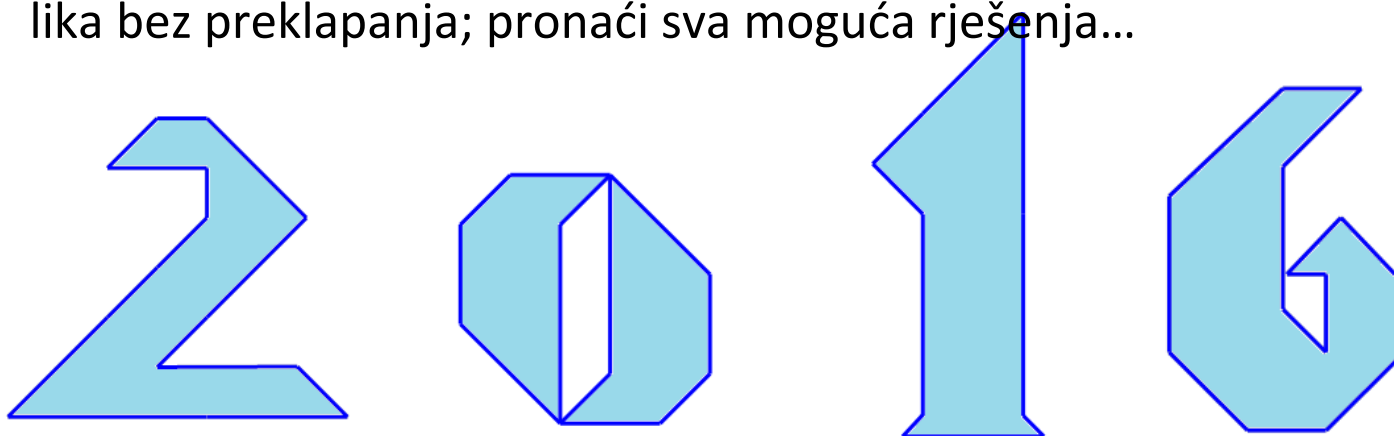
Sljedeće aktivnosti osmišljavaju se u skladu s određenim ciljevima i ishodima učenja. Npr. aktivnosti mogu biti usmjerene na:

❑ razvoj vizualno - prostornih sposobnosti

- ❑ npr. od 2 mala trokuta i 1 kvadrata oblikovati sve moguće likove, imenovati svaki lik, rješenja nacrtati ...



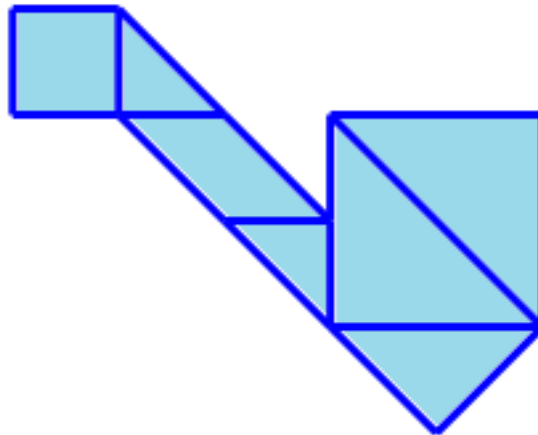
- ❑ slagati zadane likove, koristeći svih sedam tanova, popunjavanjem cijelog lika bez preklapanja; pronaći sva moguća rješenja...



Preporuke:

Aktivnosti mogu biti usmjerene na:

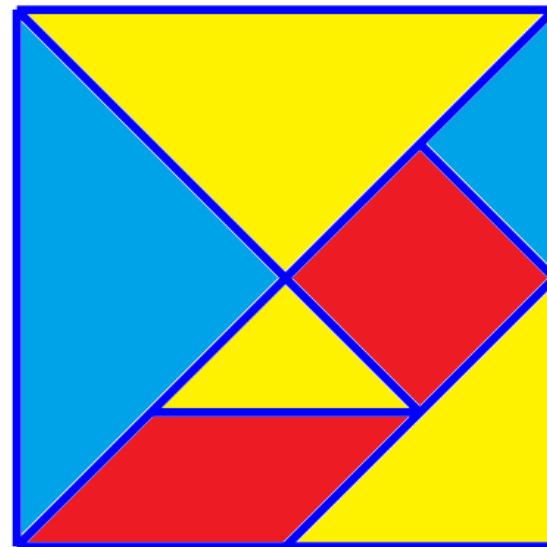
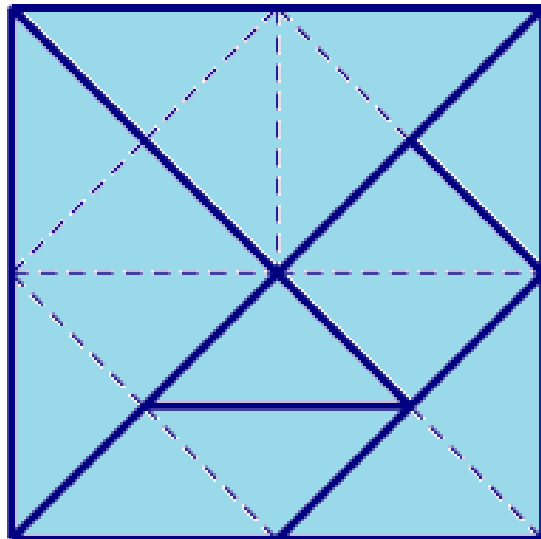
- **razvoj matematičkog jezika – matematičke komunikacije** (npr. jedan učenik sastavi neki tangram lik, a zatim drugi učenik na temelju njegovog opisa nastoji sastaviti isti takav lik);



Preporuke:

Aktivnosti mogu biti usmjerene na:

- ❑ **uvođenje matematičkih koncepata**; npr.
 - ❑ mjerna jedinica i mjerenje veličine površine
 - ❑ razlomak
 - ❑ klasična vjerojatnost pogotka
 - ❑ Itd.



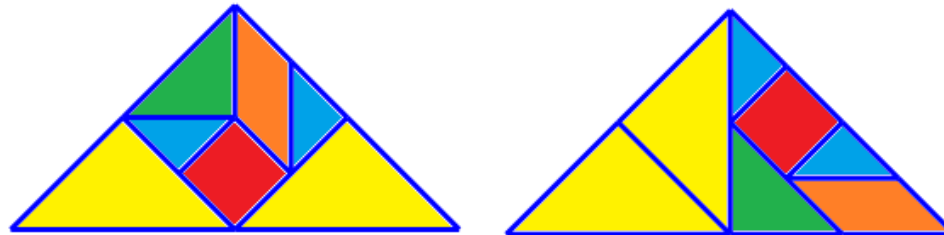
Preporuke:

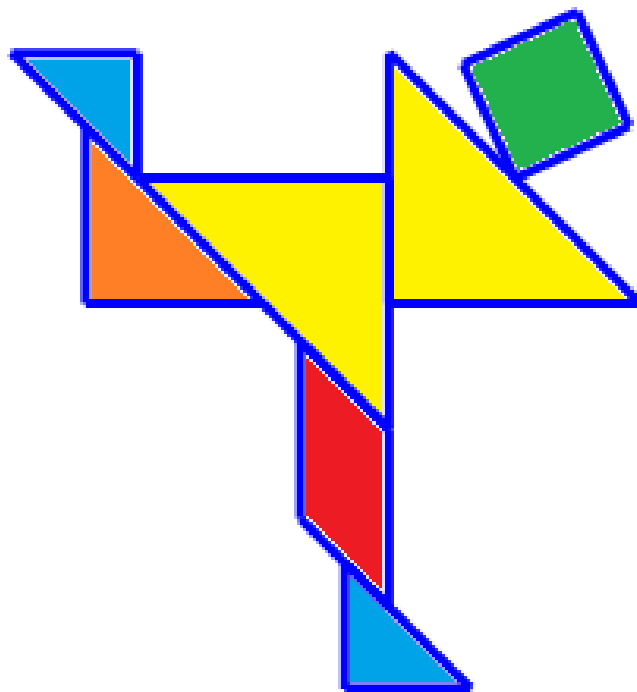
Aktivnosti mogu biti usmjerene na:

- ❑ **istraživanje, uočavanje pravilnosti, postavljanje tvrdnji ...**

Npr. proučavanje konveksnih tangrama likova:

- ❑ Zašto ih je samo 13?
- ❑ Na koliko načina se svaki od njih može oblikovati tangramom?
- ❑ Kako ih konstruirati u programu dinamičke geometrije?
- ❑ U kakvom su odnosu njihove površine i opsezi?
- ❑ Itd.





Hvala na pozornosti i aktivnom sudjelovanju...