Realizacija Mupad procedure za određivanje Moore–Penrose-ovog inverza matrice

Ko? Ivana Jovović

Odakle? Elektrotehnički fakultet
Univerzitet u Beogradu
Bulevar kralja Aleksandra 73
Beograd, Srbija

Kada? 04.11.2016.

Sadržaj

Elementarne matrice

Elementarna matrica I tipa je kvadratna matrica oblika:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & u & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Inverzna matrica elementarne matrice I tipa je takođe elementarna matrica I tipa. Množenje sleva matrice A matricom E kao rezultat daje matricu A kod koje je i-ta vrsta pomnožena elementom u. Množenje zdesna matrice A matricom E kao rezultat daje matricu A kod koje je i-ta kolona pomnožena elementom u.

Elementarne matrice

Elementarna matrica II tipa je kvadratne matrica oblika:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica E je regularna i njen inverz je ona sama.
Množenje sleva matrice A matricom E kao rezultat daje matricu A kod koje su i-ta i j-ta vrsta zamenile mesta.
Množenje zdesna matrice A matricom E kao rezultat daje matricu A kod koje su i-ta i j-ta kolona zamenile mesta.

Elementarne matrice

Elementarna matrica III tipa je kvadratna matrica oblika:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Inverzna matrica elementarne matrice III tipa je takođe elementarna matrica III tipa. Množenje sleva matrice A matricom E kao rezultat daje matricu A kod koje je i-ta vrsta zamenjena zbirom i-te vrste i j-te vrste pomnožene sa a. Množenje zdesna matrice A matricom E kao rezultat daje matricu A kod koje je j-ta kolona zamenjena zbirom j-te kolone i i-te kolone pomnožene sa a.

Normalna forma

Matrice A i B su ekvivalentne ako postoje elementarne matrice $P_1, P_2, \ldots, P_r$ i $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ takve da važi $A_2 = P_r \ldots P_2 P_1 A_1 Q_1 Q_2 \ldots Q_s$.

Neka je $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ proizvoljna matrica tipa $m \times n$ nad poljem $\mathbb{R}$. Normalna forma matrice A je matrica

$$E_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] = P \cdot A \cdot Q.$$

Matrice P i Q su proizvodi elementarnih matrica reda m, odnosno n, koje uspostavljaju ekvivalenciju između matrica A i E_r, gde je I_r jedinična matrica i r rang matirce A.

$\{1\}$-inverz ili uopšteni inverz

Opšti $\{1\}$-inverz ili uopšteni inverz matrice A je bilo koja matrica X koja zadovoljava jednačinu $A \cdot X \cdot A = A$.

Svaka matrica oblika

$$X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot P,$$

gde je I_r jedinična matrica reda r, a X_1, X_2 i X_3 proizvoljne matrice redom tipa $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$ i $(n-r) \times (m-r)$, jeste $\{1\}$-inverz matrice A.

U opštem $\{1\}$-inverzu matrice A broj slobodnih parametara je $N_1 = n \cdot m - r^2$. Za konkretno izabrane matrice X_1, X_2 i X_3 matricu $X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$ nazivamo partikularnim $\{1\}$-inverzom matrice A.

Partikularni $\{1\}$-inverzi

- Neka je $P \cdot A = \left[\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]$. Tada je jedan $\{1\}$-inverz matrice A dat sa $X = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] \cdot P$.
- Neka je $A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ blok matrica za koju važi $rang(A) = rang(A_0) = r$, gde je $A_0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$. Tada je jedan parcijalni $\{1\}$-inverz matrice A dat sa $X = \begin{bmatrix} A_0^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}$.

Partikularni $\{1\}$-inverzi

- Neka je $P \cdot A = \left[\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]$. Tada je jedan $\{1\}$-inverz matrice A dat sa $X = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] \cdot P$.
- Neka je $A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ blok matrica za koju važi $rang(A) = rang(A_0) = r$, gde je $A_0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$. Tada je jedan parcijalni $\{1\}$-inverz matrice A dat sa $X = \begin{bmatrix} A_0^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}$.
- Dva parcijalna $\{1\}$-inverza matrice A dat su sa $Y = \left(A^T \cdot A\right)^{(1)} \cdot A^T$ i $Z = A^T \cdot \left(A \cdot A^T\right)^{(1)}$, gde su $\left(A^T \cdot A\right)^{(1)}$ i $\left(A \cdot A^T\right)^{(1)}$ proizvoljni $\{1\}$-inverzi matrica $A^T \cdot A$ i $A \cdot A^T$.

Partikularni $\{1\}$-inverzi

- Neka je $P \cdot A = \left[\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]$. Tada je jedan $\{1\}$-inverz matrice A dat sa $X = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] \cdot P$.

- Neka je $A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ blok matrica za koju važi $rang(A) = rang(A_0) = r$, gde je $A_0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$. Tada je jedan parcijalni $\{1\}$-inverz matrice A dat sa $X = \begin{bmatrix} A_0^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}$.

- Dva parcijalna $\{1\}$-inverza matrice A dat su sa $Y = \left(A^T \cdot A\right)^{(1)} \cdot A^T$ i $Z = A^T \cdot \left(A \cdot A^T\right)^{(1)}$, gde su $\left(A^T \cdot A\right)^{(1)}$ i $\left(A \cdot A^T\right)^{(1)}$ proizvoljni $\{1\}$-inverzi matrica $A^T \cdot A$ i $A \cdot A^T$.

- Za matricu A postoje matrice $B = [b_{ij}]_{m \times r} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ i $C = [c_{ij}]_{r \times n} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ranga r takve da važi da je $A = B \cdot C$. Jedan parcijalni $\{1\}$-inverz matrice A je dat sa $X = C^T \cdot \left(C \cdot C^T\right)^{-1} \cdot \left(B^T \cdot B\right)^{-1} \cdot B^T$.

Partikularni $\{1\}$-inverzi

- Neka je $P \cdot A = \left[\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]$. Tada je jedan $\{1\}$-inverz matrice A dat sa $X = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] \cdot P$.

- Neka je $A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ blok matrica za koju važi $rang(A) = rang(A_0) = r$, gde je $A_0 \in \mathbb{R}^{r\times r}$. Tada je jedan parcijalni $\{1\}$-inverz matrice A dat sa $X = \begin{bmatrix} A_0^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}$.

- Dva parcijalna $\{1\}$-inverza matrice A dat su sa $Y = \left(A^T \cdot A\right)^{(1)} \cdot A^T$ i $Z = A^T \cdot \left(A \cdot A^T\right)^{(1)}$, gde su $\left(A^T \cdot A\right)^{(1)}$ i $\left(A \cdot A^T\right)^{(1)}$ proizvoljni $\{1\}$-inverzi matrica $A^T \cdot A$ i $A \cdot A^T$.

- Za matricu A postoje matrice $B = [b_{ij}]_{m\times r} \in \mathbb{R}^{m\times r}$ i $C = [c_{ij}]_{r\times n} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ ranga r takve da važi da je $A = B \cdot C$. Jedan parcijalni $\{1\}$-inverz matrice A je dat sa $X = C^T \cdot \left(C \cdot C^T\right)^{-1} \cdot \left(B^T \cdot B\right)^{-1} \cdot B^T$.

Partikularni $\{1\}$-inverzi

1. Neka je $P \cdot A = \left[\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]$. Tada je jedan $\{1\}$-inverz matrice A dat sa $X = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right] \cdot P$.

2. Neka je $A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ blok matrica za koju važi $rang(A) = rang(A_0) = r$, gde je $A_0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$. Tada je jedan parcijalni $\{1\}$-inverz matrice A dat sa $X = \begin{bmatrix} A_0^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}$.

3. Za matricu A postoje matrice $B = [b_{ij}]_{m \times r} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ i $C = [c_{ij}]_{r \times n} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ranga r takve da važi da je $A = B \cdot C$. Jedan parcijalni $\{1\}$-inverz matrice A je dat sa $X = C^{(1)} \cdot B^{(1)}$, gde su $B^{(1)}$ i $C^{(1)}$ proizvoljni $\{1\}$-inverzi matrica B i C.

4. Dva parcijalna $\{1\}$-inverza matrice A dat su sa $Y = \left(A^T \cdot A\right)^{(1)} \cdot A^T$ i $Z = A^T \cdot \left(A \cdot A^T\right)^{(1)}$, gde su $\left(A^T \cdot A\right)^{(1)}$ i $\left(A \cdot A^T\right)^{(1)}$ proizvoljni $\{1\}$-inverzi matrica $A^T \cdot A$ i $A \cdot A^T$.

$\{2\}$-inverz

Opšti $\{2\}$-inverz matrice A je bilo koja matrica X koja zadovoljava jednačinu $X \cdot A \cdot X = X$.

Svaka matrica oblika

$$X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_2 \cdot X_1 \end{array}\right] \cdot P,$$

gde su X_0, X_1 i X_2 matrice redom tipa $r \times r$, $r \times (m - r)$ i $(n - r) \times r$, za koje važi:

- $X_0^2 = X_0$ (matrica X_0 je idempotentna),
- $X_0 \cdot X_1 = X_1$,
- $X_2 \cdot X_0 = X_2$,

jeste $\{2\}$-inverz matrice A.

U opštem $\{2\}$-inverzu matrice A broj slobodnih parametara je $N_2 = n \cdot m - (n - r) \cdot (m - r)$. Za konkretno izabrane matrice X_0, X_1 i X_2 matricu $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_2 \cdot X_1 \end{array}\right] \cdot P$ nazivamo partikularnim $\{2\}$-inverzom matrice A.

$\{1,2\}$-inverz

$\{1,2\}$-inverz ili refleksivni uopšteni inverz matrice A je bilo koja matrica X koja zadovoljava jednačine:

- $A \cdot X \cdot A = A$,
- $X \cdot A \cdot X = X$.

Svaka matrica oblika

$$X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_2 \cdot X_1 \end{array}\right] \cdot P,$$

gde su X_1 i X_2 proizvoljne matrice redom tipa $r \times (m-r)$ i $(n-r) \times r$, jeste $\{1,2\}$-inverz matrice A.

U opštem $\{1,2\}$-inverzu matrice A broj slobodnih parametara je
$N_{1,2} = n \cdot m - r^2 - (n-r) \cdot (m-r) = r(n+m-2r)$.
Za konkretno izabrane matrice X_1 i X_2 matricu
$Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_2 \cdot X_1 \end{array}\right] \cdot P$ nazivamo partikularnim $\{1,2\}$-inverzom matrice A.

$\{1\}$-inverz i $\{2\}$-inverz

Matrica X je $\{1\}$-inverz matrice A ako i samo ako je A $\{2\}$-inverz matrice X.

Bilo koja dva od sledeća tri uslova impliciraju treći:

- $X \in A\{1\}$
- $X \in A\{2\}$
- $rang(A) = rang(X)$.

Dva $\{1,2\}$-inverza matrice A dat su sa $Y = \left(A^T \cdot A\right)^{(1)} \cdot A^T$ i $Z = A^T \cdot \left(A \cdot A^T\right)^{(1)}$, gde su $\left(A^T \cdot A\right)^{(1)}$ i $\left(A \cdot A^T\right)^{(1)}$ proizvoljni $\{1\}$-inverzi matrica $A^T \cdot A$ i $A \cdot A^T$.

Neka su Y, Z proizvoljni $\{1\}$-inverzi matrice A, tada je matrica $X = Y \cdot A \cdot Z$ jedan $\{1,2\}$-inverz matrice A.

Matrica S

Neka je S matrica

$$S = P \cdot P^T = \left[\begin{array}{c|c} S_1 & S_2 \\ \hline S_3 & S_4 \end{array}\right],$$

gde su S_1, S_2, S_3 i S_4 matrice tipa $r \times r$, $r \times (m - r)$, $(m - r) \times r$ i $(m - r) \times (m - r)$.

- Matrice S je simetrična.

Matrica S

Neka je S matrica

$$S = P \cdot P^T = \left[\begin{array}{c|c} S_1 & S_2 \\ \hline S_3 & S_4 \end{array}\right],$$

gde su S_1, S_2, S_3 i S_4 matrice tipa $r \times r$, $r \times (m-r)$, $(m-r) \times r$ i $(m-r) \times (m-r)$.

- Matrice S je simetrična.
- Prema tome, važi i $S_1^T = S_1$, $S_2^T = S_3$ i $S_4^T = S_4$.

Matrica S

Neka je S matrica

$$S = P \cdot P^T = \left[\begin{array}{c|c} S_1 & S_2 \\ \hline S_3 & S_4 \end{array}\right],$$

gde su S_1, S_2, S_3 i S_4 matrice tipa $r \times r$, $r \times (m-r)$, $(m-r) \times r$ i $(m-r) \times (m-r)$.

- Matrice S je simetrična.
- Prema tome, važi i $S_1^T = S_1$, $S_2^T = S_3$ i $S_4^T = S_4$.
- Matrica S je pozitivno definitna, tj. za svaku nenula matricu $x \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ važi da je $x^T \cdot S \cdot x > 0$.

Matrica S

Neka je S matrica

$$S = P \cdot P^T = \left[\begin{array}{c|c} S_1 & S_2 \\ \hline S_3 & S_4 \end{array}\right],$$

gde su S_1, S_2, S_3 i S_4 matrice tipa $r \times r$, $r \times (m-r)$, $(m-r) \times r$ i $(m-r) \times (m-r)$.

- Matrice S je simetrična.
- Prema tome, važi i $S_1^T = S_1$, $S_2^T = S_3$ i $S_4^T = S_4$.
- Matrica S je pozitivno definitna, tj. za svaku nenula matricu $x \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ važi da je $x^T \cdot S \cdot x > 0$.
- Matrica S je regularna i važi da je

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \left(S_1 - S_2 \cdot S_4^{-1} \cdot S_3\right)^{-1} & -S_1^{-1} \cdot S_2 \cdot \left(S_4 - S_3 \cdot S_1^{-1} \cdot S_2\right)^{-1} \\ -S_4^{-1} \cdot S_3 \cdot \left(S_1 - S_2 \cdot S_4^{-1} \cdot S_3\right)^{-1} & \left(S_4 - S_3 \cdot S_1^{-1} \cdot S_2\right)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Matrica S

Neka je S matrica

$$S = P \cdot P^T = \left[\begin{array}{c|c} S_1 & S_2 \\ \hline S_3 & S_4 \end{array}\right],$$

gde su S_1, S_2, S_3 i S_4 matrice tipa $r \times r$, $r \times (m-r)$, $(m-r) \times r$ i $(m-r) \times (m-r)$.

- Matrice S je simetrična.
- Prema tome, važi i $S_1^T = S_1$, $S_2^T = S_3$ i $S_4^T = S_4$.
- Matrica S je pozitivno definitna, tj. za svaku nenula matricu $x \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ važi da je $x^T \cdot S \cdot x > 0$.
- Matrica S je regularna i važi da je

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \left(S_1 - S_2 \cdot S_4^{-1} \cdot S_3\right)^{-1} & -S_1^{-1} \cdot S_2 \cdot \left(S_4 - S_3 \cdot S_1^{-1} \cdot S_2\right)^{-1} \\ -S_4^{-1} \cdot S_3 \cdot \left(S_1 - S_2 \cdot S_4^{-1} \cdot S_3\right)^{-1} & \left(S_4 - S_3 \cdot S_1^{-1} \cdot S_2\right)^{-1} \end{bmatrix}.$$

$\{3\}$-inverz

Opšti $\{3\}$-inverz matrice A je bilo koja matrica X koja zadovoljava jednačinu $(A \cdot X)^T = A \cdot X$.

Svaka matrica oblika

$$X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & -X_0 \cdot S_2 \cdot S_4^{-1} \\ \hline X_2 & X_3 \end{array} \right] \cdot P,$$

gde su X_0, X_2 i X_3 proizvoljne matrice redom tipa $r \times r$, $(n-r) \times r$ i $(n-r) \times (m-r)$, i za koju važi

$$\left(S_1 - S_2 \cdot S_4^{-1} \cdot S_3\right) \cdot X_0^T = X_0 \cdot \left(S_1 - S_2 \cdot S_4^{-1} \cdot S_3\right),$$

jeste $\{3\}$-inverz matrice A.

U opštem $\{3\}$-inverzu matrice A broj slobodnih parametara je $N_3 = n \cdot m - r \cdot (m-r)$. Za konkretno izabrane matrice X_0, X_2 i X_3 matricu $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & -X_0 \cdot S_2 \cdot S_4^{-1} \\ \hline X_2 & X_3 \end{array} \right] \cdot P$ nazivamo partikularnim $\{3\}$-inverzom matrice A.

$\{1,3\}$-inverz

Opšti $\{1,3\}$-inverz matrice A je bilo koja matrica X koja zadovoljava jednačine:

- $A \cdot X \cdot A = A$,
- $(A \cdot X)^T = A \cdot X$.

Svaka matrica oblika $X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2 \cdot S_4^{-1} \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$,

gde su X_2 i X_3 proizvoljne matrice redom tipa $(n-r) \times r$ i $(n-r) \times (m-r)$, jeste $\{1,3\}$-inverz matrice A.

U opštem $\{1,3\}$-inverzu matrice A broj slobodnih parametara je $N_{1,3} = (n-r)m$. Za konkretno izabrane matrice X_2 i X_3 matricu $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2 \cdot S_4^{-1} \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$ nazivamo partikularnim $\{1,3\}$-inverzom matrice A.

Jedan $\{1,3\}$-inverz matrice A dat je sa $Y = \left(A^T \cdot A\right)^{(1)} \cdot A^T$, gde je $\left(A^T \cdot A\right)^{(1)}$ proizvoljni $\{1\}$-inverz matrice $A^T \cdot A$.

Matrica T

Neka je T matrice

$$T = Q^T \cdot Q = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array} \right],$$

gde su T_1, T_2, T_3 i T_4 matrice tipa $r \times r$, $r \times (n-r)$, $(n-r) \times r$ i $(n-r) \times (n-r)$.

- Matrice T je simetrična.

Matrica T

Neka je T matrice

$$T = Q^T \cdot Q = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array}\right],$$

gde su T_1, T_2, T_3 i T_4 matrice tipa $r \times r$, $r \times (n-r)$, $(n-r) \times r$ i $(n-r) \times (n-r)$.

- Matrice T je simetrična.
- prema tome, važi i $T_1^T = T_1$, $T_2^T = T_3$ i $T_4^T = T_4$.

Matrica T

Neka je T matrice

$$T = Q^T \cdot Q = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array} \right],$$

gde su T_1, T_2, T_3 i T_4 matrice tipa $r \times r$, $r \times (n-r)$, $(n-r) \times r$ i $(n-r) \times (n-r)$.

- Matrice T je simetrična.
- prema tome, važi i $T_1^T = T_1$, $T_2^T = T_3$ i $T_4^T = T_4$.
- Matrica T je pozitivno definitna, tj. za svaku nenula matricu $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ važi da je $x^T \cdot T \cdot x > 0$.

Matrica T

Neka je T matrice

$$T = Q^T \cdot Q = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array}\right],$$

gde su T_1, T_2, T_3 i T_4 matrice tipa $r \times r$, $r \times (n-r)$, $(n-r) \times r$ i $(n-r) \times (n-r)$.

- Matrice T je simetrična.
- prema tome, važi i $T_1^T = T_1$, $T_2^T = T_3$ i $T_4^T = T_4$.
- Matrica T je pozitivno definitna, tj. za svaku nenula matricu $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ važi da je $x^T \cdot T \cdot x > 0$.
- Matrica T je regularna i važi da je

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \left(T_1 - T_2 \cdot T_4^{-1} \cdot T_3\right)^{-1} & -T_1^{-1} \cdot T_2 \cdot \left(T_4 - T_3 \cdot T_1^{-1} \cdot T_2\right)^{-1} \\ -T_4^{-1} \cdot T_3 \cdot \left(T_1 - T_2 \cdot T_4^{-1} \cdot T_3\right)^{-1} & \left(T_4 - T_3 \cdot T_1^{-1} \cdot T_2\right)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Matrica T

Neka je T matrice

$$T = Q^T \cdot Q = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array}\right],$$

gde su T_1, T_2, T_3 i T_4 matrice tipa $r \times r$, $r \times (n-r)$, $(n-r) \times r$ i $(n-r) \times (n-r)$.

- Matrice T je simetrična.
- prema tome, važi i $T_1^T = T_1$, $T_2^T = T_3$ i $T_4^T = T_4$.
- Matrica T je pozitivno definitna, tj. za svaku nenula matricu $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ važi da je $x^T \cdot T \cdot x > 0$.
- Matrica T je regularna i važi da je

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \left(T_1 - T_2 \cdot T_4^{-1} \cdot T_3\right)^{-1} & -T_1^{-1} \cdot T_2 \cdot \left(T_4 - T_3 \cdot T_1^{-1} \cdot T_2\right)^{-1} \\ -T_4^{-1} \cdot T_3 \cdot \left(T_1 - T_2 \cdot T_4^{-1} \cdot T_3\right)^{-1} & \left(T_4 - T_3 \cdot T_1^{-1} \cdot T_2\right)^{-1} \end{bmatrix}.$$

$\{4\}$-inverz

Opšti $\{4\}$-inverz matrice A je bilo koja matrica X koja zadovoljava jednačinu $(X \cdot A)^T = X \cdot A$.

Svaka matrica oblika

$$X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline -T_4^{-1} \cdot T_3 \cdot X_0 & X_3 \end{array} \right] \cdot P,$$

gde su X_0, X_1 i X_3 matrice redom tipa $r \times r$, $r \times (m-r)$ i $(n-r) \times (m-r)$, i za koju važi

$$X_0^T \cdot \left(T_1 - T_2 \cdot T_4^{-1} \cdot T_3 \right) = \left(T_1 - T_2 \cdot T_4^{-1} \cdot T_3 \right) \cdot X_0,$$

jeste $\{4\}$-inverz matrice A.

U opštem $\{4\}$-inverzu matrice A broj slobodnih parametara je $N_3 = n \cdot m - (n-r) \cdot r$. Za konkretno izabrane matrice X_0, X_1 i X_3 matricu $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline -T_4^{-1} \cdot T_3 \cdot X_0 & X_3 \end{array} \right] \cdot P$ nazivamo partikularnim $\{4\}$-inverzom matrice A.

$\{1,4\}$-inverz

Opšti $\{1,4\}$-inverz matrice A je bilo koja matrica X koja zadovoljava jednačine:

- $A \cdot X \cdot A = A$,
- $(X \cdot A)^T = X \cdot A$.

Svaka matrica oblika $X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline -T_4^{-1} \cdot T_3 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$, gde su X_1 i X_3 proizvoljne matrice redom tipa $(n-r) \times r$ i $(n-r) \times (m-r)$, jeste $\{1,4\}$-inverz matrice A.

U opštem $\{1,4\}$-inverzu matrice A broj slobodnih parametara je $N_{1,4} = n(m-r)$. Za konkretno izabrane matrice X_1 i X_3 matricu $Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline -T_4^{-1} \cdot T_3 & X_3 \end{array}\right] \cdot P$ nazivamo partikularnim $\{1,4\}$-inverzom matrice A.

Jedan $\{1,4\}$-inverz matrice A dat je sa $Z = A^T \cdot \left(A \cdot A^T\right)^{(1)}$, gde je $\left(A \cdot A^T\right)^{(1)}$ proizvoljni $\{1\}$-inverz matrice $A \cdot A^T$.

Moore–Penrose-ov inverz

Neka je $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ realna matrica tipa $m \times n$. Realna matrica $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tipa $n \times m$ koja je rešenje sistema Penrose-ovih jednačina:

1. $A \cdot X \cdot A = A$
2. $X \cdot A \cdot X = X$
3. $(A \cdot X)^T = A \cdot X$
4. $(X \cdot A)^T = X \cdot A$

naziva se Moor-Penrose-ov inverz. Takva matrica X uvek postoji i jedinstvena je. Primetimo da je Moor-Penrose-ov inverz regularne matrice A njena inverzna matrica.

Rhode

Moor-Penrose-ov inverz matrice A je matrica

$$X = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2 \cdot S_4^{-1} \\ \hline -T_4^{-1} \cdot T_3 & T_4^{-1} \cdot T_3 \cdot S_2 \cdot S_4^{-1} \end{array} \right] \cdot P.$$

Moore–Penrose-ov inverz

$\{1,3\}$-inverz Matrica $Y = \left(A^T \cdot A\right)^{(1)} \cdot A^T$ je $\{1,3\}$-inverz matrice A.

$\{1,4\}$-inverz Matrica $Z = A^T \cdot \left(A \cdot A^T\right)^{(1)}$ je $\{1,4\}$-inverz matrice A.

$\{1,2\}$-inverz Neka su Y i Z proizvoljni $\{1\}$-inverzi matrice A, tada je matrica $X = Z \cdot A \cdot Y$ jedan $\{1,2\}$-inverz matrice A.

Moore–Penrose-ov inverz Neka su Y i Z proizvoljni $\{1,3\}$-inverz i $\{1,4\}$-inverz matrice A, tada je matrica $X = Z \cdot A \cdot Y$ Moore–Penrose-ov inverz matrice A.

Urquhar Matrica $X = A^T \cdot \left(A \cdot A^T\right)^{(1)} \cdot A \cdot \left(A^T \cdot A\right)^{(1)} \cdot A^T$ je Moore–Penrose-ov inverz matrice A.

MacDuffee Za matricu A postoje matrice $B = [b_{ij}]_{m\times r} \in \mathbb{R}^{m\times r}$ i $C = [c_{ij}]_{r\times n} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ ranga r takve da važi da je $A = B \cdot C$. Moore–Penrose-ov inverz matrice A je dat sa $X = C^T \cdot \left(C \cdot C^T\right)^{-1} \cdot \left(B^T \cdot B\right)^{-1} \cdot B^T$.

Normalna forma

```
NormalnaForma:=proc(A)
 begin
   print(NoNL, "Matrice A jednaka je"), print(A);
   print(Unquoted, "Broj vrsta matrice A jednak je ".linalg::matdim(A)[1].".");
   print(Unquoted, "Broj kolona matrice A jednak je ".linalg::matdim(A)[2].".");
   r(A):=linalg::rank(A):
   print (Unquoted, "Rang matrice A jednak je ".r(A).".");
   h(A):=linalg::hermiteForm(A,All)[1]:
   P:=linalg::hermiteForm(A,All)[2]:
   n(A):=linalg::transpose(linalg::hermiteForm(linalg::transpose(h(A)),All)[1]):
   Q:=linalg::transpose(linalg::hermiteForm(linalg::transpose(h(A)),All)[2]):
   for i from 1 to r(A) do
       if n(A)[i,i]=0 then
        nr:=linalg::row(n(A), i):
        n(A):=linalg::delRow(n(A), i):
        n(A):=linalg::stackMatrix(n(A),nr):
        pi:=linalg::row(P, i):
        P:=linalg::delRow(P, i):
        P:=linalg::stackMatrix(P,pi):
        nc:=linalg::col(n(A), i):
        n(A):=linalg::delCol(n(A), i):
        n(A):=linalg::concatMatrix(n(A),nc):
        qi:=linalg::col(Q, i):
        Q:=linalg::delCol(Q,i):
        Q:=linalg::concatMatrix(Q,qi):
   end_if:
   end_for:
   for i from 1 to r(A) do
       Q:=linalg::multCol(Q, i, 1/n(A)[i,i]):
       n(A):=linalg::multCol(n(A), i, 1/n(A)[i,i]):
   end_for:
   print(NoNL, "Normalna forma matrice A je matrica"),print(n(A));
   print(NoNL, "Matrica elementarnih transformacija vrsta u postupku
određivanja normalne forme matrice A je matrica P ="), print(P);
   print(NoNL, "Matrica elementarnih transformacija kolona u postupku
određivanja normalne forme matrice A je matrica Q ="), print(Q);
 end_proc:
```

{1}-inverz i {1,2}-inverz

{1}-inverz matrice A

```
Inverz1:=proc(A)
 begin
   NormalnaForma(A):
   i(A):=linalg::submatrix(n(A), 1..r(A), 1..r(A)):
   e(A):=matrix(linalg::matdim(A)[2],linalg::matdim(A)[1],x):
   e(A):=linalg::substitute(e(A), i(A), 1, 1):
   X:=Q*e(A)*P:
   print(Unquoted, "Opšti {1}-inverz matrice A je matrica"), print(X);
   print(NoNL, "koja se dobija kao proizvod matrica Q, E i P, gde je E = "),print(e(A));
end_proc:
```

{1,2}-inverz matrice A

```
Inverz2:=proc(A)
 begin
  Inverz1(A):
  if (linalg::matdim(A)[1]=r(A) or linalg::matdim(A)[2]=r(A))
  then
   print(Unquoted, "Opšti {1,2}-inverz matrice A jednak je opštem {1}-inverzu matrice A.")
  else
   X1:=linalg::submatrix(e(A), r(A)+1..linalg::matdim(A)[2], 1..r(A)):
   X2:=linalg::submatrix(e(A), 1..r(A), r(A)+1..linalg::matdim(A)[1]):
   X1*X2:
   f(A):=linalg::substitute(e(A), X1*X2, r(A)+1, r(A)+1):
   Y:=Q*f(A)*P:
   print(Unquoted, "Opšti {1,2}-inverz matrice A je matrica"), print(Y);
   print(NoNL, "koja se dobija kao proizvod matrica Q, E i P, gde je E = "),print(f(A));
 end_if:
 end_proc:
```

{1,3}-inverz i {1,4}-inverz

{1,3}-inverz matrice A

```
Inverz3:=proc(A)
 begin
 Inverz1(A);
 if linalg::matdim(A)[1]=r(A)
 then
   print(Unquoted, "Opšti {1,3}-inverz matrice A jednak je opštem {1}-inverzu matrice A.")
 else
   Smatrica(A):
   -S2*S4^(-1):
   g(A):=linalg::substitute(e(A), -S2*S4^(-1), 1, r(A)+1):
   Z:=Q*g(A)*P:
   print(Unquoted, "Opšti {1,3}-inverz matrice A je matrica"), print(Z);
   print(NoNL, "koja se dobija kao proizvod matrica Q, E i P, gde je E = "),print(g(A));
 end_if:
 end_proc:
```

{1,4}-inverz matrice A

```
Inverz4:=proc(A)
 begin
 Inverz1(A):
 if linalg::matdim(A)[2]=r(A)
 then
   print(Unquoted, "Opšti {1,4}-inverz matrice A jednak je opštem {1}-inverzu matrice A.")
 else
   Tmatrica(A):
  -T4^(-1)*T3:
   h(A):=linalg::substitute(e(A), -T4^(-1)*T3, r(A)+1, 1):
   W:=Q*h(A)*P:
   print(Unquoted, "Opšti {1,4}-inverz matrice A je matrica"), print(W);
   print(NoNL, "koja se dobija kao proizvod matrica Q, E i P, gde je E = "),print(h(A));
 end_if:
 end_proc:
```

Moore–Penrose-ov inverz

```
MoorePenroseInverz:=proc(A)
 begin
  r(A):=linalg::rank(A):
  if (linalg::matdim(A)[1]=r(A) and linalg::matdim(A)[2]=r(A))
  then
  print(NoNL, "Matrica A je regularna i Moore_Penrose-ov inverz matrice A \n
jednak je njenom inverzu"), print(A^(-1));
  elif (linalg::matdim(A)[1]=r(A) and linalg::matdim(A)[2]<>r(A))
  then
   Inverz2(A):
   print(Unquoted, "Opšti {1,3}-inverz matrice A jednak je opštem {1,2}-inverzu matrice A.");
   Tmatrica(A):
   -T4^(-1)*T3:
   h(A):=linalg::substitute(e(A), -T4^(-1)*T3, r(A)+1, 1):
   W:=Q*h(A)*P:
   print(Unquoted, "Opšti {1,4}-inverz matrice A je matrica"), print(W);
   print(NoNL, "koja se dobija kao proizvod matrica Q, E i P, gde je E = "),print(h(A));
   print(Unquoted, "Moore--Penrose-ov inverz matrice A jednak je {1,4}-inverzu matrice A,"), print(W);
  elif (linalg::matdim(A)[1]<>r(A) and linalg::matdim(A)[2]=r(A))
  then
   Inverz2(A):
   Smatrica(A):
   -S2*S4^(-1):
   g(A):=linalg::substitute(e(A), -S2*S4^(-1), 1, r(A)+1):
   Z:=Q*g(A)*P:
   print(Unquoted, "Opšti {1,3}-inverz matrice A je matrica"), print(Z);
   print(NoNL, "koja se dobija kao proizvod matrica Q, E i P, gde je E = "),print(g(A));
   print(Unquoted, "Opšti {1,4}-inverz matrice A jednak je opštem {1,2}-inverzu matrice A.");
   print(Unquoted, "Moore--Penrose-ov inverz matrice A jednak je {1,3}-inverzu matrice A,"), print(Z);
  else
   Inverz2(A):
   Smatrica(A):
   -S2*S4^(-1):
   g(A):=linalg::substitute(e(A), -S2*S4^(-1), 1, r(A)+1):
   Z:=Q*g(A)*P:
   print(Unquoted, "Opšti {1,3}-inverz matrice A je matrica"), print(Z);
   print(NoNL, "koja se dobija kao proizvod matrica Q, E i P, gde je E = "),print(g(A));
   Tmatrica(A):
   -T4^(-1)*T3:
   h(A):=linalg::substitute(e(A), -T4^(-1)*T3, r(A)+1, 1):
   W:=Q*h(A)*P:
   print(Unquoted, "Opšti {1,4}-inverz matrice A je matrica"), print(W);
   print(NoNL, "koja se dobija kao proizvod matrica Q, E i P, gde je E = "),print(h(A));
   GH:=linalg::substitute(g(A), -T4^(-1)*T3, r(A)+1, 1):
   Pom:=linalg::substitute(GH, T4^(-1)*T3*S2*S4^(-1), r(A)+1, r(A)+1):
   MP:=Q*Pom*P:
   print(Unquoted, "Moore--Penrose-ov inverz matrice A je matrica"), print(MP);
   print(NoNL, "koja se dobija kao proizvod matrica Q, E i P, gde je E = "),print(Pom);
  end_if:
 end_proc:
```

Literatura

- Ravindra B Bapat, *Linear algebra and linear models*, Springer Science & Business Media, 2012.
- Adi Ben-Israel and Thomas NE Greville, *Generalized inverses: theory and applications*, vol. 15, Springer Science & Business Media, 2003.
- Arne Bjerhammar, *A generalized matrix algebra*, Transaction Royal Institute of Technology, Stockholm (1958), no. 124.
- Stephen L Campbell and Carl D Meyer, *Generalized inverses of linear transformations*, vol. 56, SIAM, 2009.
- Branko Malešević, *Grupna funkcionalna jednačina*, Magistarska teza (1998).
- Nalini Ravishanker and Dipak K Dey, *A first course in linear model theory*, CRC Press, 2001.
- N Scott Urquhart, *Computation of generalized inverse matrices which satisfy specified conditions*, SIAM Review **10** (1968), no. 2, 216–218.