Matematika i primene

Beograd, 16 - 17. Oktobar 2015.

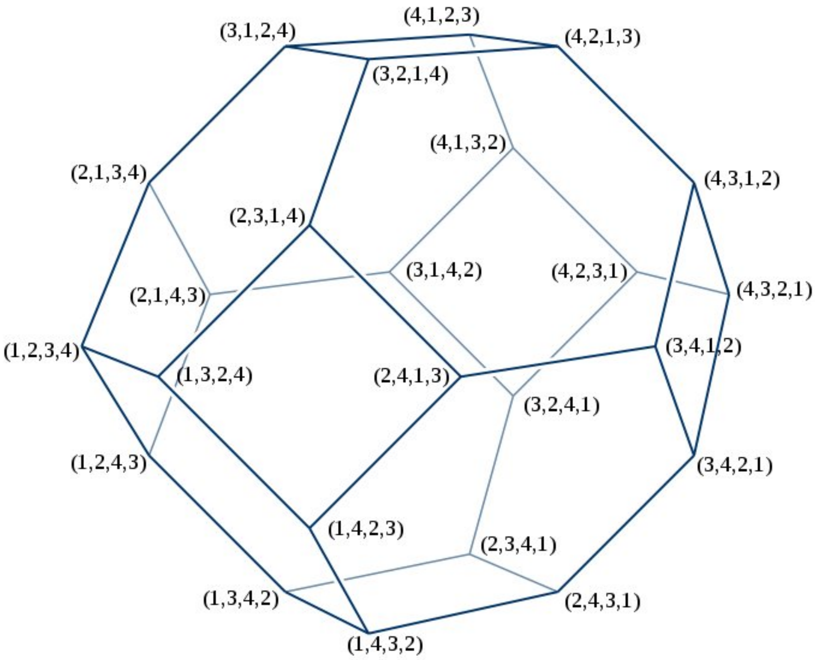
Vladimir Grujić

Matematički fakultet

Kvazisimetrične funkcije uopštenih permutoedara

$$Pe^{n-1} = \mathrm{Conv}\{x_\pi \mid \pi \in S_n\}$$

$$(Pe^{n-1})^* = \Delta[n]^{(1)}$$



Q konveksan politop, $\Sigma_Q = \{\sigma_v \mid v \in P\}$ normalna lepeza

Normalna lepeza $\Sigma_{Pe^{n-1}}$ je (redukovani) aranžman pletenica

$$\mathcal{A}_{n-1} = \{x_i = x_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}.$$

Normalan konus u temenu je Vajlova komora

$$\sigma_{x_\pi} = C_\pi : x_{\pi(1)} \leq \cdots \leq x_{\pi(n)}$$

A. Postnikov (2009):
Q je uopšteni permutoedar

$$\Sigma_Q \subset \Sigma_{Pe^{n-1}} = \mathcal{A}_{n-1}$$

1. Grafički zonotopi

$$Z_\Gamma = \sum_{i<j\in\Gamma} [e_i, e_j]$$

2. Matroidalni politopi

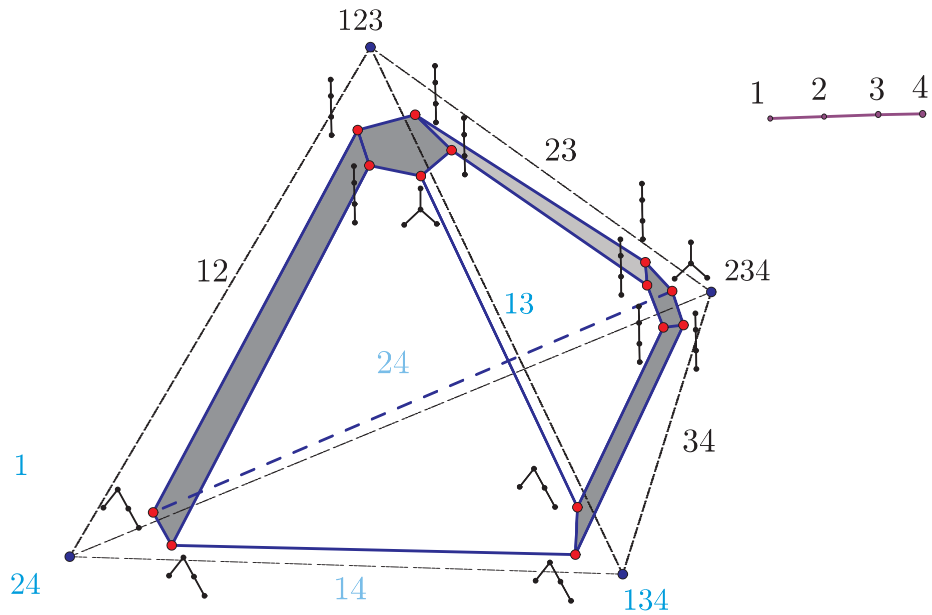
$$P_M = \mathbf{Conv}\{e_B \mid \sum_{i\in B} e_i, B \in \mathcal{B}(M)\}$$

3. Nestoedri

$$P_{\mathcal{B}} = \mathbf{Tr}_{\mathcal{B}}\Delta[n]$$

3.1. Graf-asocijedri

$$P_\Gamma = P_{\mathcal{B}(\Gamma)}$$



$$\mathcal{B}(\Gamma) = \{1, 2, 3, 4, 12, 23, 34, 123, 234, 1234\}$$

Funkcija $f : [n] \to \mathbb{N}$ je Q**-generička** ukoliko se $\langle f, x \rangle$ jedinstveno minimizuje u nekom temenu $v \in Q$.

Ekvivalentno, $f = (i_1, \dots i_n)$ je unutrašnja tačka normalnog konusa σ_v u nekom temenu $v \in Q$.

Enumerator svih Q-generičkih funkcija je kvazisimetrična funkcija

$$F(Q) = \sum_f \mathbf{x}_f$$

$$\mathbf{x}_f = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$$

Monomijalna baza

$$M_{(a_1, \dots, a_k)} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_k}^{a_k}$$

Šta su koeficijenti u razvoju $F(Q)$ u monomijalnoj bazi?

$$F(Q) = \sum_{\alpha \models n} \zeta_\alpha(Q) M_\alpha$$

1. Hromatska simetrična funkcija grafa (uopštenje hromatskog polinoma)

R. Stanley (1995):

$$\Psi(\Gamma) = \sum_f \mathbf{x}_f$$
$$\mathbf{x}_f = x_{f(1)} \cdots x_{f(n)}$$

$$F(Z_\Gamma) = \Psi(\Gamma)$$

2. Kvazisimetrična funkcija matroida

L. Billera, N. Jia, V. Reiner (2009): $F(P_M)$

Dobijene iz univerzalnog morfizma kombinatorne Hopfove algebre u kvazisimetrične funkcije

$$\Psi : \mathcal{H} \to QSym$$

1. KHA grafova

$$\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$$

$$\Delta(\Gamma) = \sum_{I \subset V} \Gamma \mid_I \Gamma \mid_{V \setminus I}$$

2. KHA matroida

$$M_1 \cdot M_2 = M_1 \oplus M_2$$

$$\Delta(M) = \sum_{I \subset V} M \mid_I \cdot M/I$$

Nova invarijanta grafa $F(\Gamma)$

1. Geometrijsko značenje:

$$F(\Gamma) = F(P_\Gamma)$$

2. Algebrasko značenje:

$$\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$$

$$\Delta(\Gamma) = \sum_{I \subset V} \Gamma \mid_I \Gamma / I$$

$$F(\Gamma) = \Psi(\Gamma)$$

3. Kombinatorno značenje:

Uredjeno pravilno bojenje $f : [n] \to \mathbb{N}$ je pravilno bojenje takvo da ako $f(u) = f(v)$ onda u i v nisu povezani putem kroz temena obojena "manjim" bojama.

$$F(\Gamma) = \sum_f \mathbf{x}_f$$

4. Rekurzivna definicija

Iz Stenlijeve teorije P-particija sledi

$$F(\Gamma) = \sum_{v \in V} (F(\Gamma \setminus v))_1$$

Uopšteni Katalanovi brojevi $C(\Gamma)$

$$C(\Gamma) = (-1)^n \mathbf{ps}(F(\Gamma))(m) \mid_{m=-1}$$

Rekurzivne serije $Pe^{n-1}, As^{n-1}, Cy^{n-1}, St^{n-1}, \ldots$

$$\begin{gathered}
C(K_n) = n! \\
C(L_n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \\
C(C_n) = \binom{2n-2}{n-1} \\
C(S_n) = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \\
\ldots
\end{gathered}$$

Pitanja:

1. Da li je $F(\Gamma)$ "bolja" od $\Psi(\Gamma)$?

2. Naći dva različita grafa takva da je $F(\Gamma_1) = F(\Gamma_2)$.

Reconstruction conjecture