Numerička realizacija spregnutih Gros-Pitaevski jednačina za niskotemperaturne čestice

Milica Cvetković
Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu

Oktobar 2015

Boze-Ajnštajnova kondenzacija

- Čestice polu-celobrojnog spina (fermioni) ne mogu da se nalaze u stanju sa svim istim kvantnim brojevima zbog principa Paulijevog iskljucenja
- čestice sa celobrojnim spinom (bozoni), na niskim temperaturama, pokušavaju da zauzmu osnovno stanje.
- Fermi-Dirak raspodela za fermione
- Boze-Ajnštajn raspodela za bozone
- U graničnom slučaju niske temperature dolazi do pojave zauzetosti osnovnog stanja- svi bozoni prelaze u stanje minimalne energije sa istim kvantnim brojevima, ova faza se označava se kao Boze-Ajnštajn kondenzat (BAK).

Teorija srednjeg polja

- Interakcija među atomima u BAK određena je strukturom elektronskog omotača atoma.
- U eksperimentima je atomski gas razređen, pa se efektivna interakcija može aproksimirati kontaktnom interakcijom među atomima.
- Hamiltonijan se moze razviti u red u zavisnosti od veličine fluktuacija oko srednjeg polja
- Teorija srednjeg polja se moze posmatrati kao nulti red ekspanzije hamiltonijana po fluktuacijama
- Sistemi nemaju fluktuacija što se poklapa sa idejom da jedna interakcija zamenjuje sve ostale u srednjem polju

Teorija srednjeg polja (2)

- Na nultoj temperaturi nema termalnih eksitacija, tako da je dinamika sistema opisana Gros-Pitaevski jednačinom

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta+V(\vec{r},t)+gN\,|\psi(\vec{r},t)|^2\right]\psi(\vec{r},t)$$

- Potencijal zamke $V(\vec{r})=\frac{1}{2}M(\omega_\rho^2\rho^2+\omega_z^2 z)$
- Dvokomponentni sistem

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1(\vec{r},t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2M_1}\Delta+V(\vec{r},t)+g_{11}N_1\,|\psi_1(\vec{r},t)|^2+g_{12}N_2\,|\psi_2(\vec{r},t)|^2\right]\psi_1(\vec{r},t)$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_2(\vec{r},t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2M_2}\Delta+V(\vec{r},t)+g_{21}N_1\,|\psi_1(\vec{r},t)|^2+g_{22}N_2\,|\psi_2(\vec{r},t)|^2\right]\psi_2(\vec{r},t)$$

Stacionarna stanja

- Koeficijenti sprege: $g_{11} = \dfrac{4\pi \mathrm{h}^2 a_1}{M_1}, g_{22} = \dfrac{4\pi \mathrm{h}^2 a_2}{M_2}, g_{12} = g_{21} = \dfrac{2\pi \mathrm{h}^2 a_{\mathrm{int}}}{M_{eff}}$
- *a* - dužina rasejanja, dok je $M_{eff} = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$
- Stacionarna stanja GP jednačine odgovaraju svojstvenim stanjima Šredingerove jednačine i odlikuje ih samo promena faze tokom vremenske evolucije $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}) \exp\left(-\dfrac{i}{\hbar} \mu t\right)$

Varijacioni pristup

- Za analitički opis ponašanja ovakvih sistema koristimo varijacioni pristup- jedan od načina da se aproksimativno utvrdi najniža energija osnovnog stanja i niskoležeći kolektivni modovi.
- Izaberemo probnu talasnu funkciju koja zavisi od jednog ili više varijacionih parametara.
- Energija sistema se izrazi u funkciji parametara sistema
- Izracuna se za koju vrednost tih parametara je očekivana vrednost energije najmanja.
- Talasna funkcija, dobijena fiksiranjem parametara na vrednosti za koje je energija najmanja, je aproksimacija osnovnog stanja talasne funkcije.
- Očekivana vrednost energije je gornja granica za energiju osnovnog stanja.
- Razmatramo jednokomponentni scenario u kojem stanje tretiramo kao deo efektivnog potencijala u kome se nalazi ψ_1

Varijacioni pristup (2)

- Varijacione jednačine dobijamo počevsi od lagranžijana gustine za dvokomponentni kondenzat

$$L_j(\rho,z,t)=\sum_{j=1,2}\left[\frac{i}{2}\left(\psi_j\frac{\partial\psi_j^*}{\partial t}-\psi_j^*\frac{\partial\psi_j}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\left|\nabla\psi_j\right|^2+V(\rho,z,t)\left|\psi_j\right|^2+\frac{gN_j}{2}\left|\psi_j\right|^4\right]N_j$$
$$+gN_1N_2\left|\psi_1\right|^2\left|\psi_2\right|^2.$$

- Talasne funkcije imaju oblik gausijana i za aksijalno simetričnu zamku su:

$$\psi_j(\rho,z,t)=N_j\exp\left(-\frac{\rho^2}{2w_\rho^2(t)}-\frac{z^2}{2w_z^2}+i\rho^2\alpha^2(t)\right)\times\left\{1+[u(t)+iv(t)]\cos kz\right\}\theta\left((-1)^j z\right),$$

Varijacioni pristup (3)

- Ako je vremenski zavisna normalizacija $N(t) = \pi^{-\frac{3}{4}} u_{\rho}(t)^{-1} u_z(t)^{-\frac{1}{2}}$
- Kompleksna amplituda $u(t) + iv(t)$, dok je faza α(t)
- Radijalna i aksijalna širina kondenzata su $w_{\rho}(t)\ i\ w_z(t)$
- Probne talasne funkcije se sastoje od dva sučeljena polugausijana jednakih širina i amplituda, centrirana u sredini zamke.
- Za talase male amplitude Ojler-Lagranžove se mogu napisati kao:

$$w_{\rho}(t) = 2w_{\rho}(t)\alpha(t),$$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{2w_{\rho}^{4}(t)} - \frac{\Omega_{\rho}^{2}(t)}{2} - 2\alpha^{2} + \frac{g}{\sqrt{8}\pi^{3/2} N w_{\rho}^{4} w_{z}},$$

$$\dot{u} = \frac{k^{2} v(t)}{2},$$

$$\dot{v} = -\frac{k^{2} u}{2} - \frac{g u(t)}{\sqrt{8}\pi^{3/2} N w_{\rho}^{2}(t) w_{z}}$$

Varijacioni pristup (4)

- Dalje se može preoblikovati u oblik Matjeove jednačine:

$$\ddot{u}(\tau)+u(\tau)\left[a(k,\omega)+eb(k,\omega)\sin 2\tau\right]=0$$

- Gde je vreme τ uvedeno kao wt = 2τ

$$a(k,\omega)=\frac{k^4}{\omega^2}+\frac{k^2}{\omega^2}\Lambda_{seg}$$

$$b(k,\omega)=\frac{k^2}{\omega^2}\Lambda_{seg}$$

$$\Lambda_{seg}=\frac{4g\Omega_{\rho 0}}{\sqrt{\sqrt{2}\pi^{3/2}N\omega_z g+2\pi^3N^2\omega_z^2}}$$

- Najnesabilnija rešenja dobijaju se za a(k,w)=1

$$k_{F,seg}=\sqrt{-\frac{\Lambda_{seg}}{2}+\sqrt{\frac{\Lambda_{seg}^2}{4}+\omega^2}}$$

- Period Faradejevih Talasa je dat kao $2\pi/k_{F,seg}$

Numeričko rešenje

- Polazimo od sledećeg sistema spregnutih jednačina

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1(\vec{r},t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta+v_1(\vec{r},t)+G_{11}|\psi_1(\vec{r},t)|^2+G_{12}|\psi_2(\vec{r},t)|^2\right]\psi_1(\vec{r},t)$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_2(\vec{r},t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta+v_2(\vec{r},t)+G_{21}|\psi_1(\vec{r},t)|^2+G_{22}|\psi_2(\vec{r},t)|^2\right]\psi_2(\vec{r},t)$$

- Sprege su date $G_{11}=\frac{4\pi\hbar^2 a_1}{m_1}$, $G_{22}=\frac{4\pi\hbar^2 a_2}{m_2}$, $G_{12}=G_{21}=\frac{2\pi\hbar^2 a_{\text{int}}}{m_{eff}}$

a_1 i a_2 su s-talasne dužine rasejanja za komponente (unutarkomponentne interakcije) dok je a_{int} za međukomponentnu interakciju

$m_{eff}=m_1m_2/(m_1+m_2)$ je redukovana masa sistema

- Talasna funkcija je normalizovana na brojeve atoma komponenti sistema

$$\int d\vec{r}\,|\psi_1(\vec{r},t)|^2=N_1,\qquad \int d\vec{r}\,|\psi_2(\vec{r},t)|^2=N_2$$

- Dobijaju se reskalirane funkcije $\psi_1(\vec{r},t)=\sqrt{N_1}\psi_1^R(\vec{r},t)$, $\psi_2(\vec{r},t)=\sqrt{N_2}\psi_2^R(\vec{r},t)$

Numeričko rešenje (2)

- Reskalirane funkcije ubacimo u početni sistem GP jednačina

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1^R(\vec r,t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta+v_1(\vec r,t)+G_{11}^R\left|\psi_1^R(\vec r,t)\right|^2+G_{12}^R\left|\psi_2^R(\vec r,t)\right|^2\right]\psi_1^R(\vec r,t)$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_2^R(\vec r,t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta+v_2(\vec r,t)+G_{21}^R\left|\psi_1^R(\vec r,t)\right|^2+G_{22}^R\left|\psi_2^R(\vec r,t)\right|^2\right]\psi_2^R(\vec r,t)$$

- Reskalirane sprege $G_{11}^R=N_1G_{11}=\frac{4\pi\hbar^2a_1N_1}{m_1},\quad G_{12}^R=N_2G_{12}=\frac{2\pi\hbar^2a_{\text{int}}N_2}{m_{eff}}$

$$G_{21}^R=N_1G_{21}=\frac{2\pi\hbar^2a_{\text{int}}N_1}{m_{eff}},\quad G_{22}^R=N_2G_{22}=\frac{4\pi\hbar^2a_2N_2}{m_2}$$

- Sprege sada zadovoljavaju relaciju $G_{12}^R/G_{21}^R=N_2/N_1$
- Pošto ovakva GP jednačina ima bezdimenzioni oblik, biramo skalu dužine $l=\sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}}$ učestanosti Ω i mase M
- Uzećemo vrednost l za reskaliranje svih koordinata kao $\vec r\to l\vec r$ dok je vreme t reskalirano kao $t\to\Omega t$ što dovodi do talasnih funkcija

$$\Psi_i^R\to l^{-3/2}\psi_i,\qquad (i=1,2)$$

Numeričko rešenje (3)

- Podelimo jendačine sa $\hbar\Omega l^{-3/2}$ i dobijamo

$$i\frac{\partial\psi_1(\vec r,t)}{\partial t}=\left[-\frac{1}{2\xi_1}\Delta+\frac{1}{\hbar\Omega}v_1(l\vec r,t/\Omega)+g_{11}\left|\psi_1(\vec r,t)\right|^2+g_{12}\left|\psi_2(\vec r,t)\right|^2\right]\psi_1(\vec r,t)$$
$$i\frac{\partial\psi_2(\vec r,t)}{\partial t}=\left[-\frac{1}{2\xi_2}\Delta+\frac{1}{\hbar\Omega}v_2(l\vec r,t/\Omega)+g_{21}\left|\psi_1(\vec r,t)\right|^2+g_{22}\left|\psi_2(\vec r,t)\right|^2\right]\psi_2(\vec r,t)$$

gde je $\xi_i = m_i/N$ i $\xi_{eff} = m_{eff}/N$, dok su bezdimenzione sprege

$$g_{11}=\frac{G_{11}^R}{\hbar\Omega l^3}=\frac{4\pi a_1 N_1}{\xi_1 l},\qquad g_{12}=\frac{G_{12}^R}{\hbar\Omega l^3}=\frac{4\pi a_{\text{int}} N_2}{\xi_{eff} l}$$
$$g_{21}=\frac{G_{21}^R}{\hbar\Omega l^3}=\frac{4\pi a_{\text{int}} N_1}{\xi_{eff} l},\qquad g_{22}=\frac{G_{22}^R}{\hbar\Omega l^3}=\frac{4\pi a_2 N_2}{\xi_2 l}$$

- Ako za potencijal zamke uzmemo harmonijski oblik

$$v_i(\vec r,t)=\frac{1}{2}m_i\omega_{ix}^2(t)x^2+\frac{1}{2}m_i\omega_{iy}^2(t)y^2+\frac{1}{2}m_i\omega_{iz}^2(t)z^2$$

- I reskalirane uslove ubacimo u jednačinu potencijala

$$\frac{1}{\hbar\Omega}v_i(l\vec r,t/\Omega)\equiv\frac{1}{2}V_i(\vec r,t)=\frac{1}{2}\lambda_{ix}^2(t)x^2+\frac{1}{2}\lambda_{iy}^2(t)y^2+\frac{1}{2}\lambda_{iz}^2(t)z^2$$

Numeričko rešenje (4)

- Bezdimenzione frekvencije su date

$$\lambda_{ij}(t) = \frac{\omega_{ij}\left(t/\Omega\right)}{\Omega}\sqrt{\xi_i} \qquad , \qquad \left(i = 1,2; \qquad j = x,y,z\right)$$

- Konačni oblik GP jednačina je:

$$i\frac{\partial\psi_1\left(\vec{r},t\right)}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2\xi_1}\Delta + V_1\left(\vec{r},t\right) + g_{11}\left|\psi_1\left(\vec{r},t\right)\right|^2 + g_{12}\left|\psi_2\left(\vec{r},t\right)\right|^2\right]\psi_1\left(\vec{r},t\right)$$

$$i\frac{\partial\psi_2\left(\vec{r},t\right)}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2\xi_2}\Delta + V_2\left(\vec{r},t\right) + g_{21}\left|\psi_1\left(\vec{r},t\right)\right|^2 + g_{22}\left|\psi_2\left(\vec{r},t\right)\right|^2\right]\psi_2\left(\vec{r},t\right)$$

Zaključak

- Inherentna nelinearnost Boze-Ajnštajn-kondenzovanih sistema dovodi do niza efekata, kao što su različite vrste kolektivnih modova oscilacija, solitoni (nedisipativni talasi) i Faradejevi talasi gustine.
- Opisan je numerički pristup za rešavanje Gros-Pitaevski jednačine, koja daje osnovno stanje i dinamiku Boze-Ajnštajnovog kondenzata na nivou teorije srednjeg polja.
- Analitički opis ponašanja ovakvih sistema zasnovan je na varijacionoj teoriji koja je opisana u radu.

Hvala na pažnji.